

L'espace des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

THOMAS HAETTEL

The space of closed subgroups of a locally compact topological group is endowed with a natural topology, called the Chabauty topology. We completely describe the space of closed subgroups of the group $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ (and of its dual \mathbb{C}^\times), which is highly nontrivial: for example, its fundamental group contains the fundamental group of the Hawaiian earrings, hence is uncountable.

L'espace des sous-groupes fermés d'un groupe topologique localement compact est muni d'une topologie naturelle, appelée topologie de Chabauty. Nous décrivons complètement l'espace des sous-groupes fermés du groupe $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ (et de son dual \mathbb{C}^\times), lequel est hautement non trivial: par exemple, son groupe fondamental contient le groupe fondamental des anneaux Hawaïens, et est donc non dénombrable.

22B99, 22D05; 20F65, 57M07

Si G est un groupe topologique localement compact, l'espace $\mathcal{S}(G)$ des sous-groupes fermés de G est muni de la *topologie de Chabauty* [7]. Cette topologie fait de $\mathcal{S}(G)$ un espace compact (voir par exemple de la Harpe [11] pour une excellente introduction). L'objet de cet article est l'étude de cet espace pour le groupe topologique $G = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, et nous montrerons que la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ est singulièrement compliquée, et ce malgré la simplicité de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Cet espace étant canoniquement homéomorphe à l'espace des sous-groupes fermés du groupe dual \mathbb{C}^\times de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, cet article explicite aussi l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{C}^\times)$.

L'espace $\mathcal{S}(G)$ dans son ensemble est en général difficile à expliciter: le premier calcul complet non banal est dû à I Poureza et J Hubbard [14] en 1979, qui ont montré que pour le groupe topologique $G = \mathbb{R}^2$, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est homéomorphe à la sphère S^4 de dimension 4. Bien plus récemment, M R Bridson, P de la Harpe et V Kleptsyn [3] ont calculé cet espace pour le groupe de Heisenberg de dimension 3, et B Kloeckner [12] a montré que l'espace des sous-groupes fermés de \mathbb{R}^n était stratifié et simplement connexe.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ l'espace des “anneaux Hawaïens” (voir la Figure 1), réunion d'une infinité dénombrable de cercles $(A_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ se rencontrant deux à deux exactement en un point et s'accumulant sur ce point. Pour tout entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considérons une copie \overline{D}_k du disque fermé et $I = [0, 1]$. Munissons la réunion disjointe $I \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{D}_k$ de la

topologie telle que les disques \overline{D}_k s'accumulent sur le segment I le long des rayons de ces disques (voir la Figure 5).

Recollons enfin le cercle $\partial\overline{D}_k$ au bord de chacun des disques sur l'espace \mathcal{A} , de la manière suivante. Soit $(I_{\bar{q}})_{\bar{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ une famille de segments disjoints du cercle $\partial\overline{D}_k$, dont l'ordre cyclique est donné par celui de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Alors définissons $g_k: \partial\overline{D}_k \rightarrow \mathcal{A}$, qui sur chaque segment $I_{\bar{q}}$ effectue une fois le tour du cercle A_{kb} dans le sens direct à partir de 0, où $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ désigne le dénominateur de \bar{q} , et qui envoie le reste du cercle $\partial\overline{D}_k$ sur 0. Cela définit une application $g: \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \partial\overline{D}_k \rightarrow \mathcal{A}$. Prolongeons continûment l'application g à l'extrémité 0 du segment I en définissant $g(0)$ comme le point singulier des anneaux Hawaïens \mathcal{A} .

Théorème *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ est homéomorphe à la réunion des disques $(\overline{D}_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ s'accumulant sur I , recollés sur l'espace \mathcal{A} par l'application g .*

Dans la Section 1, nous rappelons des propriétés élémentaires de la topologie de Chabauty. Dans la Section 2, nous commençons par décrire les familles de sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Ensuite dans la Section 3, nous décrivons une compactification du disque ouvert par des arguments de géométrie hyperbolique. Ceci nous permet de décrire aisément le recollement de ces familles de sous-groupes fermés dans la Section 4. Enfin dans la Section 5, nous donnons une description combinatoire du groupe fondamental de l'espace des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, et montrons en particulier qu'il est non dénombrable.

Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour ses relectures attentives et ses précieux conseils, ainsi que Pierre de la Harpe pour ses nombreuses remarques ayant permis de considérablement améliorer la présentation de cet article. Je tiens également à remercier Yves de Cornulier qui m'a fait de nombreux commentaires précieux et expliqué plusieurs perspectives.

1 Préliminaires

1.1 Définitions

Soient X un espace topologique localement compact, et $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X . On munit $\mathcal{F}(X)$ de la *topologie de Chabauty* [7]: les ouverts sont les réunions quelconques d'intersections finies de parties de la forme

$$O_K = \{S \in \mathcal{S}(G) : S \cap K = \emptyset\}$$

$$O'_U = \{S \in \mathcal{S}(G) : S \cap U \neq \emptyset\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de X .

Soit G un groupe topologique localement compact. On note $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{F}(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes fermés, muni de la topologie induite. Le résultat suivant est classique, on pourra se référer à Bourbaki [1, Chapitre VIII, Section 5], Canary, Epstein et Green [5, Proposition I.3.1.2, page 59] ou Courtois, Dal'Bo et Paulin [9, Proposition 1.7, page 58] par exemple.

Proposition 1.1 *L'espace topologique $\mathcal{F}(G)$ est compact. De plus, le sous-espace $\mathcal{S}(G)$ est un fermé de $\mathcal{F}(G)$, donc est compact.* \square

Les propriétés qui suivent sont élémentaires.

Proposition 1.2 *Soit $f: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes topologiques localement compacts, qui est une application ouverte. Alors l'application $\mathcal{S}^*(f): \mathcal{S}(H) \rightarrow \mathcal{S}(G)$ définie par $S \mapsto f^{-1}(S)$ est continue.*

Démonstration Soit K un compact de G , alors $f(K)$ est un compact de H et $\mathcal{S}^*(f)^{-1}(O_K) = O_{f(K)}$ est un ouvert de $\mathcal{S}(H)$. Soit U un ouvert de G , alors par hypothèse $f(U)$ est un ouvert de H et $\mathcal{S}^*(f)^{-1}(O'_{f(U)}) = O'_{f(U)}$ est un ouvert de $\mathcal{S}(H)$. Ainsi l'application $\mathcal{S}^*(f)$ est continue. \square

Proposition 1.3 *Soit $f: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes topologiques localement compacts qui est un homéomorphisme sur son image, d'image fermée. Alors l'application $\mathcal{S}_*(f): \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(H)$ définie par $S \mapsto f(S)$ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration Soit S un sous-groupe fermé de G . Alors, puisque f est un homéomorphisme sur son image, $f(S)$ est un sous-groupe fermé de $f(G)$. Or $f(G)$ est lui-même un sous-groupe fermé de H , donc finalement $f(S)$ est un sous-groupe fermé de H : ainsi, l'application $\mathcal{S}_*(f)$ est bien définie.

Considérons l'application $g = f^{-1}|_{f(G)}: f(G) \rightarrow G$: c'est un isomorphisme de groupes topologiques localement compacts. Ainsi l'application $\mathcal{S}^*(g): \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(H)$ qui à S associe $g^{-1}(S)$ est un homéomorphisme sur son image $\mathcal{S}(f(G))$, et cette application coïncide avec l'application $\mathcal{S}_*(f)$. \square

Remarquons que l'hypothèse que f réalise un homéomorphisme sur son image est nécessaire. En effet, considérons l'identité i du groupe $G = \mathbb{R}$ muni de la topologie discrète, à valeurs dans $H = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. L'identité i est un morphisme de groupes topologiques, bijectif, dont l'image est bien un sous-groupe

fermé de \mathbb{R} , mais l'application $\mathcal{S}_*(i)$ n'est même pas définie: tout sous-groupe (même non fermé) de H est un sous-groupe fermé de G .

Dans le cas où le groupe topologique localement compact G est muni d'une distance induisant sa topologie, on peut décrire la convergence des suites de sous-groupes fermés de G pour la topologie de Chabauty (voir par exemple [5, Lemma I.3.1.3, page 60] ou [9, Proposition 1.8, page 60]).

Proposition 1.4 Une suite de sous-groupes fermés $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un sous-groupe fermé S dans $\mathcal{S}(G)$ si et seulement si S est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire:

- (1) Pour tout $x \in S$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x telle que, pour tout n , nous ayons $x_n \in S_n$.
- (2) Pour toute partie infinie $P \subset \mathbb{N}$, pour toute suite $(x_n)_{n \in P}$ convergeant vers x telle que $x_n \in S_n$ pour tout $n \in P$, nous avons $x \in S$. □

Par ailleurs, on a un critère simple de métrisabilité de l'espace des sous-groupes fermés (voir par exemple [9, Proposition 1.8, page 60]).

Proposition 1.5 Si de plus la distance de G est propre (ie les boules fermées sont compactes), alors l'espace $\mathcal{S}(G)$ est métrisable, pour la distance de Hausdorff pointée (voir [2, Définition 5.43, page 76]): si S, S' sont des sous-groupes fermés de G , on définit $d_{\text{Hau}}(S, S')$ comme la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que

$$S \cap B(e, \frac{1}{\varepsilon}) \subset V_\varepsilon(S')$$

$$S' \cap B(e, \frac{1}{\varepsilon}) \subset V_\varepsilon(S),$$

où $V_\varepsilon(S')$ désigne le ε -voisinage ouvert de S' dans G . □

1.2 Exemples

Les exemples suivants de calculs d'espaces des sous-groupes fermés sont bien connus, nous les rappelons pour fixer les notations.

Notons $X_{\mathbb{Z}}$ le sous-espace topologique compact de \mathbb{R} défini par

$$X_{\mathbb{Z}} = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Proposition 1.6 L'application $\phi_{\mathbb{Z}}: X_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ définie par $1/n \mapsto n\mathbb{Z}$ et $0 \mapsto \{0\}$ est un homéomorphisme. □

Adoptons la convention suivante désormais: $(1/0)\mathbb{Z} = \{0\}$ et $(1/\infty)\mathbb{Z} = \mathbb{R}$. Cette convention est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 1.7 *L'application $\phi_{\mathbb{R}}: X_{\mathbb{R}} = [0, \infty] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par $\alpha \mapsto (1/\alpha)\mathbb{Z}$ est un homéomorphisme.* \square

1.3 Dualité

Si G est un groupe topologique localement compact abélien, notons \widehat{G} son *dual de Pontryagin*, le groupe des caractères de G , c'est-à-dire des morphismes continus de G à valeurs dans \mathbb{S}^1 . C'est un groupe topologique localement compact abélien. On a un isomorphisme canonique entre G et son bidual $\widehat{\widehat{G}}$ [13, Theorem 52, page 273].

Proposition 1.8 *L'application de $G \times \widehat{G}$ dans \mathbb{S}^1 définie par $(g, \chi) \mapsto \chi(g)$ est continue, et l'application*

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\mapsto \{\chi \mapsto \chi(g)\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes topologiques. \square

De plus, on a un homéomorphisme canonique entre l'espace des sous-groupes fermés de G et celui de \widehat{G} . On en trouvera une preuve dans un article d'Yves de Cornulier [8] en préparation.

Proposition 1.9 *L'application*

$$\begin{aligned} \phi_G: \mathcal{S}(G) &\rightarrow \mathcal{S}(\widehat{G}) \\ H &\mapsto \{\chi \in \widehat{G} : \forall h \in H, \chi(h) = 1\} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. \square

2 Les sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

Considérons le groupe topologique abélien localement compact métrisable $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Notons $i: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ le morphisme injectif $x \mapsto (x, 0)$ et $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la deuxième projection.

Nous noterons $E(x)$ la partie entière du réel x . Adoptons la convention que nous écrirons chaque rationnel $\beta = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ premiers entre eux. Si $\beta \in \mathbb{R}$, nous noterons $\bar{\beta}$ son image dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Remarquons que le dual du groupe $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{C}^\times , donc d'après la Proposition 1.9, l'espace des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ et celui de \mathbb{C}^\times sont homéomorphes.

2.1 Description des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

Nous allons maintenant décrire tous les sous-groupes fermés du groupe $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

Soit H un sous-groupe fermé de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Alors $H \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R} \times \{0\}$: soit donc α l'unique élément de $[0, \infty]$ tel que $H \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (1/\alpha)\mathbb{Z} \times \{0\}$. De plus $\pi(H)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} : soit donc n l'unique élément de \mathbb{N} tel que $\pi(H) = n\mathbb{Z}$.

Si $n = 0$, alors $H = G_\alpha^I$, où nous notons

$$G_\alpha^I = \mathbb{Z}(\frac{1}{\alpha}, 0).$$

Si $n > 0$, plusieurs cas sont à distinguer.

- Si $\alpha = 0$, alors $\pi^{-1}(n) \cap H = \{(\gamma, n)\}$, pour un unique $\gamma \in \mathbb{R}$. Alors $H = G_{\gamma,n}^{II}$, où nous notons

$$G_{\gamma,n}^{II} = \mathbb{Z}(\gamma, n).$$

- Si $0 < \alpha < \infty$, alors $\pi^{-1}(n) \cap H = \{((\beta + p)/\alpha, n), p \in \mathbb{Z}\}$, pour un unique $\bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors $H = G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III}$, où nous notons

$$G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III} = \mathbb{Z}(\frac{1}{\alpha}, 0) + \mathbb{Z}(\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, n).$$

- Si $\alpha = \infty$, alors $\pi^{-1}(n) \cap H = \mathbb{R} \times \{n\}$. Alors $H = G_n^{IV}$, où nous notons

$$G_n^{IV} = \mathbb{R} \times n\mathbb{Z}.$$

Proposition 2.1 L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ est réunion disjointe des familles

$$\begin{aligned} & \{G_\alpha^I = \mathbb{Z}(\frac{1}{\alpha}, 0) : \alpha \in [0, \infty]\} \\ & \{G_{\gamma,n}^{II} = \mathbb{Z}(\gamma, n) : \gamma \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ & \{G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III} = \mathbb{Z}(\frac{1}{\alpha}, 0) + \mathbb{Z}(\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, n) : \alpha \in]0, \infty[, \bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ & \{G_n^{IV} = \mathbb{R} \times n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

De plus, le paramétrage de chacune de ces familles est bijectif.

Démonstration Ceci découle de la définition et de l'unicité des paramètres $\alpha, n, \bar{\beta}$ (si $n > 0$ et $\alpha \in]0, \infty[$) et γ (si $n > 0$ et $\alpha = 0$), pour un sous-groupe de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ fermé H donné. □

Considérons la partition de $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ en trois sous-espaces:

- (1) Le sous-espace \mathcal{S}^I des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ dont la projection sur \mathbb{Z} est $\{0\}$, sauf $\{0\}$. Ses éléments sont les sous-groupes G_α^I , pour $\alpha \in]0, \infty[$.
- (2) Le sous-espace \mathcal{S}^{II} des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ qui sont cycliques infinis et ont une projection sur \mathbb{Z} différente de $\{0\}$, ainsi que le sous-groupe $\{0\}$. Ses éléments sont les sous-groupes $G_{\gamma,n}^{II}$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $\{0\}$.
- (3) Le sous-espace \mathcal{S}^{III} des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ isomorphes à \mathbb{Z}^2 ou à $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Ses éléments sont les sous-groupes $G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III}$, pour $\alpha \in]0, \infty[$, $\bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ainsi que les sous-groupes G_n^{IV} , pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notons \mathcal{S}_n^{III} le sous-espace correspondant à une valeur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixée, c'est-à-dire la réunion des $G_{\alpha,\bar{\beta},n}^{III}$, pour $\alpha \in]0, \infty[$ et $\bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et de G_n^{IV} .

Nous allons décrire la topologie de chacun de ces sous-espaces \mathcal{S}^I , \mathcal{S}^{II} et \mathcal{S}^{III} . Puis nous allons décrire comment ces espaces se recollent pour former l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.

2.2 Le sous-espace \mathcal{S}^I

Proposition 2.2 *L'application $\psi^I:]0, \infty[\rightarrow \mathcal{S}^I$ définie par $\alpha \mapsto \mathbb{Z}(1/\alpha, 0)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration Remarquons que l'application ψ^I est la composée de l'homéomorphisme $\phi_{\mathbb{R}}: [0, \infty[\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et de l'application $\mathcal{S}_*(i): \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$. Or le morphisme i est un plongement d'image fermée de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, donc d'après la Proposition 1.3, l'application $\mathcal{S}_*(i)$ est un plongement, d'image \mathcal{S}^I . \square

Remarquons que l'adhérence de \mathcal{S}^I dans \mathcal{S} est égale à $\mathcal{S}^I \cup \{\{0\}\}$.

2.3 Le sous-espace \mathcal{S}^{II}

Considérons l'espace topologique des anneaux Hawaïens

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$$

où A_n désigne le cercle dans la droite complexe \mathbb{C} de centre $1/n$ et de rayon $1/n$ (voir la Figure 1). Considérons la bijection $\psi^{II}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}^{II}$ définie par

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(1 + e^{2i\theta}) \neq 0 &\mapsto G_{\tan\theta,n}^{II}, \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ 0 &\mapsto \{0\}. \end{aligned}$$

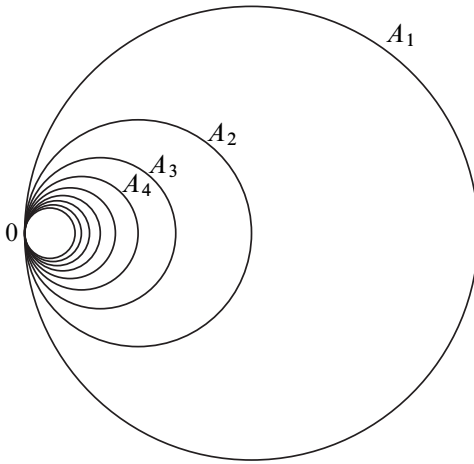


FIGURE 1: L'espace des "anneaux Hawaïens" \mathcal{A}

L'application ψ^H admet pour inverse l'application $(\psi^H)^{-1} : \mathcal{S}^H \rightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$G_{\gamma,n}^H \mapsto \frac{1}{n} (1 + e^{2i \arctan \gamma}), \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\{0\} \mapsto 0.$$

Proposition 2.3 *La bijection ψ^H est un homéomorphisme.*

Démonstration Comme l'espace de départ est compact métrisable et que l'espace d'arrivée est métrisable, il suffit de montrer que l'application ψ^H est séquentiellement continue.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, l'application ψ^H est continue en $z = (1/n)(1 + e^{2i\theta})$. Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{A} convergeant vers z . Alors, à partir d'un certain rang, le point z_k s'écrit $(1/n)(1 + e^{2i\theta_k})$, où de plus la suite $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers θ . Montrons que la suite $(\psi^H(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi^H(z)$. Le générateur $(\tan \theta, n)$ de $\psi^H(z)$ est limite de la suite $(\tan \theta_k, n)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $(\psi^H(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$. Réciproquement, supposons qu'une suite $(p_k \tan \theta_k, p_k n)_{k \in P}$ d'éléments de $(\psi^H(z_k))_{k \in P}$ converge vers (x, m) , où P désigne une partie infinie de \mathbb{N} et où $p_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in P$. Alors $p_k = p$ est constant à partir d'un certain, donc $(x, m) = p(\tan \theta, n) \in \psi^H(z)$.

Montrons que ψ^H est continue en 0. Soit $(z_k = (1/n_k)(1 + e^{2i\theta_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{A} convergeant vers 0. Si la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il est clair que la suite de sous-groupes $(\psi^H(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\{0\} = \psi^H(0)$. Sinon, quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $\pm\pi/2$, et dans ce cas il est également clair que la suite de sous-groupes $(\psi^H(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\{0\} = \psi^H(0)$. \square

Remarquons que par compacité de l'espace des anneaux Hawâiens \mathcal{A} , son image \mathcal{S}^II par ψ^II est compacte.

2.4 Les sous-espaces \mathcal{S}_n^III

Notons D l'écrasement $\{(\alpha, \bar{\beta}), \alpha \in]0, \infty], \bar{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\} / \{\{\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$, muni de la topologie quotient de la topologie usuelle sur $]0, \infty] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'espace D est homéomorphe à un disque ouvert (on notera indifféremment un point de $]0, \infty] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et son image dans D).

Proposition 2.4 Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application $\psi_n^III: D \rightarrow \mathcal{S}_n^III$ définie par

$$(\alpha, \bar{\beta}) \mapsto \begin{cases} G_{\alpha, \bar{\beta}, n}^III & \text{si } \alpha < \infty, \\ G_n^IV & \text{si } \alpha = \infty \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration L'application ψ_n^III est bijective d'après la Proposition 2.1. Les espaces D et \mathcal{S}_n^III étant localement compacts et métrisables, montrons que ψ_n^III est séquentiellement continue et séquentiellement propre. On en déduira que l'application ψ_n^III est continue, bijective et propre, donc un homéomorphisme.

Soit $c = (\alpha, \bar{\beta}) \in D$ tel que $\alpha \neq \infty$. Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de D convergeant vers d , ce qui signifie que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α et que la suite $(\bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{\beta}$. Alors les deux générateurs $(1/\alpha, 0)$ et $(\beta/\alpha, n)$ du groupe $\psi_n^III(d)$ sont les limites des suites $(1/\alpha_k, 0)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_k/\alpha_k, n)$ de $(\psi_n^III(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ respectivement. Réciproquement, soit P une partie infinie de \mathbb{N} et $((p_k + q_k \beta_k)/\alpha_k, q_k n)_{k \in P}$ une suite de $(\psi_n^III(d_k))_{k \in P}$ convergeant vers (x, m) . Alors $q_k = q$ est constant à partir d'un certain rang, et donc $p_k = p$ également. En conclusion, l'élément $(x, m) = ((p + q\beta)/\alpha, qn)$ appartient à $\psi_n^III(d)$. On a donc montré que la suite de sous-groupes $(\psi_n^III(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ convergeait vers $\psi_n^III(d)$.

Soit $d = (\infty, 0)$ le "centre" du disque D . Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de D convergeant vers d , ce qui signifie que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers ∞ . Supposons que $\alpha_k \neq \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Choisissons des représentants β_k de $\bar{\beta}_k$ bornés. Soit $(x, qn) \in \psi_n^III(d)$, où $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Alors la suite $((E(x\alpha_k) + q\beta_k)/\alpha_k, qn)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $(\psi_n^III(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers (x, qn) . Puisque $\psi_n^III(d_k) \subset \psi_n^III(c)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite de sous-groupes $(\psi_n^III(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi_n^III(d)$.

Ainsi l'application ψ_n^III est continue.

Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \overline{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite sortant de tout compact de D . Montrons par l'absurde que la suite $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ sort de tout compact de \mathcal{S}_n^{III} : supposons quitte à extraire que cette suite converge vers un sous-groupe $H \in \mathcal{S}_n^{III}$. Alors, par continuité de l'application $\phi_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathcal{S}^*(i)$, on en déduit que la suite $(\alpha_k = \phi_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathcal{S}^*(i)(\psi_n^{III}(d_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha_{\infty} = \phi_{\mathbb{R}}^{-1} \circ \mathcal{S}^*(i)(H) \in]0, \infty]$. Or le sous-espace $\{\alpha \geq \alpha_{\infty}/2\}$ du disque D est un disque fermé donc est compact. Ceci est une contradiction avec le fait que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sort de tout compact: ainsi la suite $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ sort de tout compact de \mathcal{S}_n^{III} , et l'application \mathcal{S}_n^{III} est donc propre. \square

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ les sous-espaces \mathcal{S}_n^{III} sont ouverts: en effet, ce sont les images réciproques par π_* : $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ des ouverts $\{n\mathbb{Z}\}$.

3 Une compactification du disque

Nous allons définir une compactification du disque ouvert D (défini dans la [Section 2.4](#)) en un disque fermé plus fine que la compactification usuelle: il s'agit d'éclater chaque point rationnel du bord usuel de D en le remplaçant par un petit arc de cercle. Cette méthode est inspirée des travaux de Denjoy consistant à éclater le cercle le long de l'orbite d'une rotation irrationnelle. On peut aussi y penser du point de vue des éclatements en géométrie algébrique où, informellement, on remplace chaque point rationnel du cercle par un demi-espace de demi-droites, au lieu de remplacer par une droite projective.

Proposition 3.1 *Il existe un plongement ρ du disque ouvert D dans un disque fermé \overline{D} , d'image l'intérieur de \overline{D} , et il existe une famille d'arcs de cercles deux à deux disjoints $(I_{\overline{q}})_{\overline{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ inclus dans $\partial \overline{D}$, dont l'ordre cyclique est donné par \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , et des homéomorphismes $f_{\overline{q}}: [-\infty, \infty] \rightarrow I_{\overline{q}}$, tels que pour toutes suites réelles $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant:*

- (1) *la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et converge vers 0,*
- (2) *la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\beta \in \mathbb{Q}$,*
- (3) *la suite $((\beta_n - \beta)/\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in [-\infty, \infty]$,*

alors la suite $(\rho(\alpha_n, \overline{\beta_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f_{\overline{\beta}}(x) \in I_{\overline{\beta}} \in \overline{D}$.

Démonstration Considérons le modèle du demi-plan de Poincaré pour le plan hyperbolique réel \mathbb{H}^2 : son bord $\partial \mathbb{H}^2$ est naturellement identifié à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Considérons le réseau arithmétique $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ dans le groupe des isométries préservant l'orientation $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de \mathbb{H}^2 , et appelons M la surface modulaire $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$.

Considérons un voisinage de Margulis V de la pointe de M (voir par exemple Buser et Karcher [4]). Son image réciproque par le revêtement ramifié $\mathbb{H}^2 \rightarrow M$ est une réunion invariante par Γ d'horoboules ouvertes N_q centrée en $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, pour tout rationnel $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, d'adhérences deux à deux disjointes. Notons $E = M \setminus V$, qui est un orbifold à bord. Il admet comme domaine fondamental le quadrilatère Q , qui est le domaine fondamental usuel de Γ privé de l'horoboule N_∞ (voir la Figure 2). Appelons a, b, c et d les quatre côtés de Q : a est un arc de la géodésique joignant -1 et 1 , b (resp. d) est un arc de géodésique joignant $-1/2$ (resp. $1/2$) à ∞ et c est un arc d'horocycle centré en ∞ .

Soient T et S les isométries du plan hyperbolique $T: z \mapsto z + 1$ et $S: z \mapsto -1/z$: il est bien connu (voir par exemple Serre [15]) que le réseau $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ est engendré par S et T .

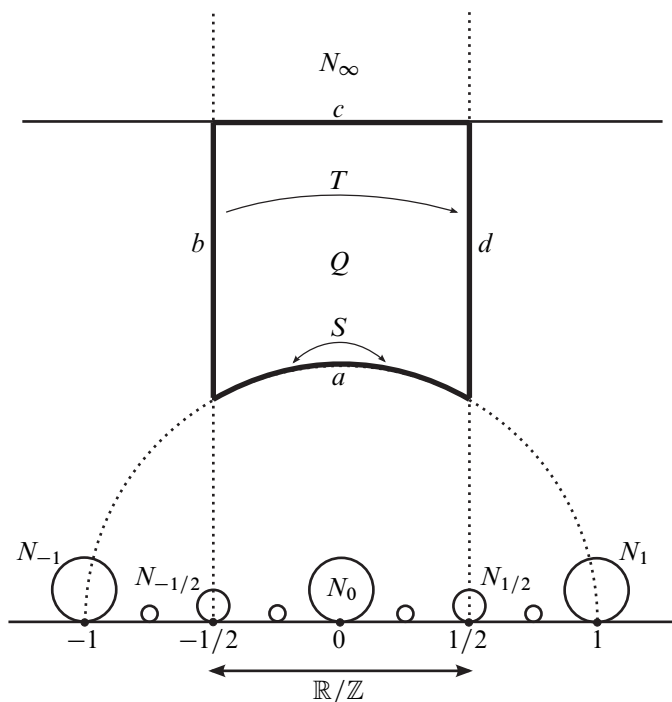


FIGURE 2: Le domaine fondamental Q de l'orbifold E

Considérons un quadrilatère hyperbolique convexe compact Q' , dont les côtés a', b', c' et d' sont géodésiques, tel que les angles entre a' et b' et entre d' et a' valent $\pi/3$, et tel que les angles entre b' et c' et entre c' et d' valent $\pi/2$: voir la Figure 3. Soit T' la translation hyperbolique d'axe la géodésique portant c' qui envoie la géodésique portée par le côté b' sur la géodésique portée par le côté d' , et soit S' la rotation d'angle π

autour du milieu du segment a' . Soit $\Gamma' \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ le sous-groupe engendré par S' et T' .

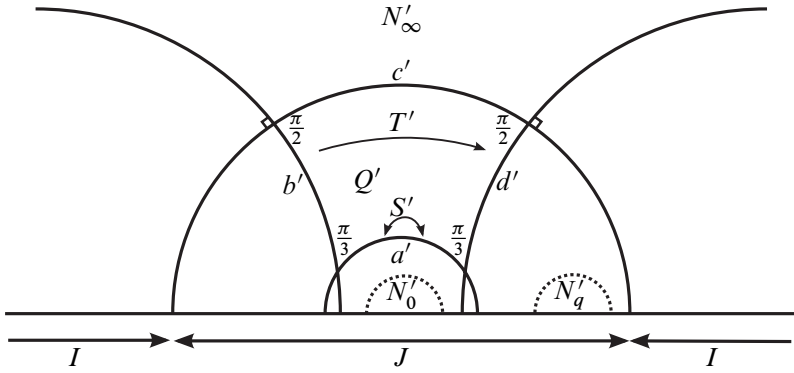


FIGURE 3: Le domaine fondamental Q' de l'orbifold E'

Considérons l'orbifold hyperbolique à bord E' , obtenu comme quotient de la surface hyperbolique à bord $\Gamma' \cdot Q'$ par le groupe Γ' . Il est clair qu'il existe un homéomorphisme du quadrilatère Q sur le quadrilatère Q' , qui envoie respectivement les côtés a, b, c et d sur les côtés a', b', c' et d' . Cet homéomorphisme passe au quotient en un isomorphisme entre les orbifolds topologiques à bord E et E' , qui définit donc un isomorphisme des groupes fondamentaux orbifolds $\theta: \Gamma \simeq \Gamma'$. Par construction de l'homéomorphisme entre E et E' , l'isomorphisme θ envoie T sur T' et S sur S' . Il existe ainsi un homéomorphisme η entre les revêtements orbifolds universels \widehat{E} et \widehat{E}' de E et E' respectivement, qui est de plus θ -équivariant.

Or $\widehat{E} = \mathbb{H}^2 \setminus \cup_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} N_q$ et $\widehat{E}' = \Gamma' \cdot Q = \mathbb{H}^2 \setminus \cup_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} N'_q$, où N'_q est un demi-espace ouvert de \mathbb{H}^2 pour tout $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (voir la Figure 3). Quitte à réindexer les demi-espaces $(N'_q)_{q \in \mathbb{Q} \cup \infty}$, on peut supposer que l'homéomorphisme η envoie pour tout $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ l'horocycle ∂N_q sur la géodésique $\partial N'_q$.

Nous allons prolonger l'homéomorphisme η en un homéomorphisme de \mathbb{H}^2 sur \mathbb{H}^2 . Fixons $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. L'application η est déjà définie sur l'horocercle ∂N_q , prolongeons-la de N_q sur N'_q : soit $z \in N_q$, et soit z' le point de la géodésique ∂N_q situé sur la droite euclidienne passant par q et z (lorsque $q = \infty$, on considère la droite "verticale" passant par f): voir la Figure 4. Ainsi $\eta(z')$ est un point de l'horocercle $\partial N'_q$: considérons le rayon géodésique γ issu de $\eta(z')$, orthogonal à $\partial N'_q$ et inclus dans N'_q . Définissons $\eta(z)$ comme le point de γ à distance $d_{\mathbb{H}^2}(z, z')$ de $\eta(z')$.

Nous avons donc défini un homéomorphisme η de \mathbb{H}^2 sur \mathbb{H}^2 qui, par construction, est de plus (T, T') -équivariant: en effet T préserve la distance hyperbolique et les droites euclidiennes, et T' préserve la distance hyperbolique et les géodésiques.

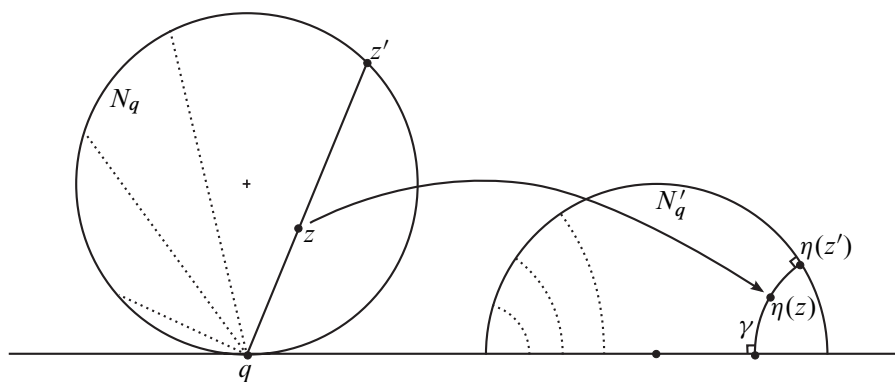


FIGURE 4: Le prolongement de l'homéomorphisme η de N_q sur N'_q

Le quotient de \mathbb{H}^2 par le sous-groupe $\langle T \rangle$ engendré par l'isométrie parabolique T s'identifie au disque épointé $D \setminus \{\infty\}$, par l'application $z \mapsto (\text{Im}(z), \text{Re}(z))$. Les deux composantes connexes du bord à l'infini de la surface $\langle T \rangle \setminus \mathbb{H}^2$ s'identifient naturellement à $\{\infty\}$ et \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Le disque D est alors naturellement homéomorphe à $\langle T \rangle \setminus (\mathbb{H}^2 \cup \{\infty\})$: nous identifierons ces deux espaces.

De même, le quotient de \mathbb{H}^2 par le sous-groupe $\langle T' \rangle$ engendré par la translation hyperbolique T' est homéomorphe à un anneau ouvert. Un domaine fondamental dans \mathbb{H}^2 pour l'action de T' est donné par le domaine compris entre les deux géodésiques portant les côtés b' et d' . Notons $I'_q = \overline{N'_q} \cap \partial\mathbb{H}^2$ le bord du demi-espace N'_q : c'est un arc du cercle $\partial\mathbb{H}^2$. Les deux composantes connexes du bord à l'infini de la surface $\langle T' \rangle \setminus \mathbb{H}^2$ s'identifient alors à deux cercles, qui sont les quotients de deux arcs de cercle ouverts I et J de $\partial\mathbb{H}^2$ par l'action de T' : ce sont les deux arcs de cercle délimités par les extrémités de l'axe de translation de T' . L'arc I est l'intérieur de l'arc fermé I'_∞ , et l'arc J contient tous les I'_q , pour $q \in \mathbb{Q}$ (voir la Figure 3).

Appelons \bar{D} l'écrasement de l'image de I dans l'anneau fermé $\langle T' \rangle \setminus (\mathbb{H}^2 \cup I \cup J)$: l'espace \bar{D} est homéomorphe à un disque fermé, dont l'intérieur s'identifie à l'image de $\langle T' \rangle \setminus (\mathbb{H}^2 \cup I)$. L'homéomorphisme (T, T') -équivariant $\eta: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ passe au quotient en un homéomorphisme $\rho: \langle T \rangle \setminus \mathbb{H}^2 \rightarrow \langle T' \rangle \setminus \mathbb{H}^2$. Cet homéomorphisme se prolonge naturellement à D en définissant $\rho(\{\infty\})$ comme l'image de I dans l'écrasement \bar{D} . On obtient ainsi un plongement $\rho: D \rightarrow \bar{D}$, d'image l'intérieur de \bar{D} . Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, notons I_q l'arc de cercle image homéomorphe de I'_q dans \bar{D} .

Il reste à vérifier que le plongement ρ vérifie la propriété souhaitée: soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les trois conditions de l'énoncé de la proposition. Alors le point $z_n = \beta_n + i\alpha_n \in \mathbb{H}^2$ converge vers le point à l'infini $\beta \in \mathbb{Q}$, donc appartient à partir d'un certain rang à l'horoboule N_β .

Soit z'_n le point de la géodésique ∂N_β situé sur la droite euclidienne δ_n passant par β et z_n . Ainsi $\eta(z'_n)$ est un point de l'horocycle $\partial N'_\beta$: considérons le rayon géodésique γ_n issu de $\eta(z'_n)$, orthogonal à $\partial N'_\beta$ et inclus dans N'_β . Par définition, $\eta(z_n)$ est le point de γ_n à distance $d_{\mathbb{H}^2}(z_n, z'_n)$ de $\eta(z'_n)$.

Par la troisième hypothèse, la droite euclidienne δ_n converge vers la droite δ_∞ passant par β , qui fait un angle orienté $\cotan x$ avec l'axe réel: soit z'_∞ la limite de la suite $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est l'intersection de la droite δ_∞ avec l'horocycle $\partial N'_\beta$. Alors le rayon géodésique γ_n converge vers le rayon géodésique γ_∞ passant par $\eta(z'_\infty)$, orthogonal à la géodésique $\partial N'_\beta$ et inclus dans N'_β .

Par ailleurs, la distance $d_{\mathbb{H}^2}(z_n, z'_n)$ tend vers $+\infty$ par l'hypothèse sur la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc la suite $(\eta(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'extrémité à l'infini du rayon géodésique γ_∞ : notons-la $f_\beta(x) \in I_\beta$, où I_β désigne le bord à l'infini de N'_β .

Cette construction fournit un homéomorphisme $f_\beta: [-\infty, \infty] \rightarrow I_\beta$, et ce pour tout rationnel $\beta \in \mathbb{Q}$. La construction étant (T, T') -équivariante, on obtient au quotient des homéomorphismes $f_{\bar{q}}: [-\infty, \infty] \rightarrow I_{\bar{q}}$, pour tout $q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Alors la suite $(\rho(\langle T \rangle \cdot z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\langle T' \rangle \cdot f_{\bar{q}}(x) = f_{\bar{q}}(x)$.

Enfin, l'homéomorphisme $\eta^{-1}: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ induit au bord une surjection continue s de \mathbb{H}^2 sur \mathbb{H}^2 , qui envoie chaque arc de cercle I'_q sur le point $q \in \partial \mathbb{H}^2$. Lorsque l'on écrase chaque arc de cercle I'_q en un point on obtient un cercle, et l'application s induit un homéomorphisme de ce cercle sur le cercle $\partial \mathbb{H}^2$: par conséquent l'ordre cyclique est préservé, donc les arcs de cercle $(I'_q)_{q \in \mathbb{Q} \cup \infty}$ sont dans l'ordre cyclique donné par $\mathbb{Q} \cup \infty$. Puisque l'application T' préserve encore cet ordre cyclique et stabilise I'_∞ , donc les arcs de cercle $(I_{\bar{q}})_{\bar{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ sont dans l'ordre cyclique donné par \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . \square

4 Le recollement des sous-espaces de sous-groupes fermés

4.1 L'adhérence des disques S_n^{III} dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, définissons le lacet

$$g_n: \partial \bar{D} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{nb} (1 + e^{2i \arctan(bf_{\bar{q}}^{-1}(z))}) & \text{si } z \in I_{\bar{q}} \text{ (où } q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.1 *L'homéomorphisme $\psi_n^{III}: D \rightarrow S_n^{III}$, prolongé à \bar{D} par l'application $\psi^{II} \circ g_n$, est une surjection continue de \bar{D} sur l'adhérence $\overline{S_n^{III}}$ de S_n^{III} dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.*

Démonstration Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de D convergeant dans \bar{D} vers $f_{\bar{q}}(x) \in I_{\bar{q}}$, où $q = a/b \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrons que la suite de sous-groupes fermés $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi^II \circ g_n(f_{\bar{q}}(x))$.

On vérifie que $\psi^II \circ g_n(f_{\bar{q}}(x)) = \psi^II((1/(nb))(1 + e^{2i \arctan(bx)})) = \mathbb{Z} \cdot (bx, bn)$. De plus, la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et il existe des relevés $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers q et tels que la suite $((\beta_k - q)/\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Alors la suite $((b\beta_k - a)/\alpha_k, bn)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $(\psi_n^{III}(d_k) = S_{\alpha_k, \bar{\beta}_k, n}^{III})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le générateur (bx, bn) du groupe $\psi^II \circ g_n(f_{\bar{q}}(x))$. Par ailleurs, soient P une partie infinie de \mathbb{N} et des entiers $s_k, t_k \in \mathbb{Z}$ tels que la suite $((s_k + t_k \beta_k)/\alpha_k, t_k n)_{k \in P}$ d'éléments de $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in P}$ converge vers $(y, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Alors la suite t_k est constante égale à $t \in \mathbb{Z}$ à partir d'un certain rang, et la suite $(s_k + t\beta_k)_{k \in P}$ converge vers 0. Puisque la suite $(\beta_k)_{k \in P}$ converge vers q , la suite $(s_k)_{k \in P}$ doit être constante à partir d'un certain rang, égale à $s \in \mathbb{Z}$ tel que $q = -s/t$. Ainsi il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $t = \ell b$ et $-s = \ell a$. Ainsi, on en conclut que $(y, m) = \ell(bx, bn) \in \psi^II \circ g_n(f_{\bar{q}}(x))$.

Ainsi, la suite de sous-groupes fermés $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi^II \circ g_n(f_{\bar{q}}(x))$.

Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de D convergeant dans \bar{D} vers un point $z \in \partial \bar{D}$ n'appartenant à aucun des intérieurs des $I_{\bar{q}}$, pour $\bar{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Montrons que la suite de sous-groupes fermés $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi^II \circ g_n(z) = \{0\}$.

On sait que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(\bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune valeur d'adhérence dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe des relevés $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soient P une partie infinie de \mathbb{N} et des entiers $s_k, t_k \in \mathbb{Z}$ tels que la suite $((s_k + t_k \beta_k)/\alpha_k, t_k n)_{k \in P}$ d'éléments de $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in P}$ converge vers $(y, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Alors la suite t_k est constante égale à $t \in \mathbb{Z}$ à partir d'un certain rang, et la suite $(s_k + t\beta_k)_{k \in P}$ converge vers 0. Puisque la suite $(\beta_k)_{k \in P}$ converge vers $\beta \neq 0$, la suite $(s_k)_{k \in P}$ doit être constante à partir d'un certain rang. Puisque β est irrationnel, la seule possibilité est $t = s_k = 0$. Ainsi, la suite de sous-groupes fermés $(\psi_n^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi^II \circ g_n(z) = \{0\}$. □

Remarquons que la définition de $g_n(z)$ ne fait intervenir que le dénominateur b du rationnel q tel que $z \in I_{\bar{q}}$. Ainsi le lacet g_n effectue le tour du cercle A_m exactement 0 fois si n ne divise pas m , et $\varphi(m/n)$ si n divise m , où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Par ailleurs, ces cercles sont parcourus dans l'ordre de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

4.2 L'accumulation des disques S_n^{III} sur S^I

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit \bar{D}_n une copie du disque fermé \bar{D} , et notons $D_n \subset \bar{D}_n$ le disque ouvert. Soit \bar{X} la réunion des disques disjoints $(\bar{D}_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ s'accumulant sur

leur rayon $[0, \infty]$: formellement, munissons $\bar{X} = [0, \infty] \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bar{D}_n$ de la topologie la moins fine induisant sur $[0, \infty]$ la topologie usuelle, induisant sur $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bar{D}_n$ la topologie réunion disjointe, et telle que les deux projections

$$\begin{aligned} p_1: \bar{X} &\rightarrow \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\} \right\} & \text{et} & & p_2: \bar{X} &\rightarrow [0, \infty] \\ d \in \bar{D}_n &\mapsto \frac{1}{n} & & & d \in \bar{D}_n &\mapsto \alpha_n(d) \\ d \in [0, \infty] &\mapsto 0 & & & d \in [0, \infty] &\mapsto d \end{aligned}$$

soient continues, où α_n désigne l'application

$$\begin{aligned} \alpha_n: \bar{D}_n &\rightarrow [0, \infty] \\ d = (\alpha, \bar{\beta}) \in D_n &\mapsto \alpha \\ d \in \partial \bar{D}_n &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Une base de voisinages d'un point $\alpha \in [0, +\infty]$ dans \bar{X} est donnée par les voisinages $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$, où U est un voisinage de α dans $[0, +\infty]$ et V est un voisinage de 0 dans $\{1/n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}\}$, c'est-à-dire que ce sont des réunions d'anneaux qui s'accroissent sur un intervalle.

De manière plus visuelle, l'espace \bar{X} est naturellement homéomorphe au sous-espace de \mathbb{R}^3 , réunion pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$ des cônes de sommet $(1/n, 0, 1)$ sur les cercles (réduit à un point si $n = +\infty$) dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de centre $(1/n, 0, 0)$ et de rayon $1/(n+1)^2$ (voir la [Figure 5](#)).

L'espace \bar{X} est alors compact. Soit X l'ouvert $]0, \infty[\cup \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} D_n$ de \bar{X} .

Définissons l'application

$$\begin{aligned} \psi_X: X &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \\ \alpha \in]0, \infty[&\mapsto \psi^I(\alpha) \\ d \in D_n &\mapsto \psi_n^{III}(d). \end{aligned}$$

Proposition 4.2 *L'application ψ_X est un plongement ouvert de X dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.*

Démonstration L'application ψ_X est injective. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application ψ_n^{III} est un plongement, donc l'application ψ_X est un homéomorphisme de l'ouvert D_n sur $\psi_X(D_n)$. De plus, l'application ψ_X est un homéomorphisme de $]0, \infty[$ sur $\psi_X(]0, \infty[)$.

Montrons que l'application ψ_X est continue sur $]0, \infty[$: soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_k, \bar{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bar{D}_n$ convergeant vers $\alpha \in]0, \infty[$. Alors $d_k \in \bar{D}_{n_k}$, où la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α . Il est alors clair que la

suite de sous-groupes fermés $(\psi_{n_k}^{III}(d_k))_{k \in \mathbb{N}} = (\mathbb{Z} \cdot (1/\alpha_k, 0) + \mathbb{Z} \cdot (\beta_k/\alpha_k, n_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le sous-groupe fermé $\mathbb{Z} \cdot (1/\alpha, 0) = \psi^I(\alpha)$.

Montrons que l'application ψ_X^{-1} est continue sur $\psi_X([0, \infty])$: soit $(H_k = \psi_X(d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\psi_X(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bar{D}_n)$ convergeant vers $\psi_X(\alpha) = (1/\alpha) \mathbb{Z} \in \psi_X([0, \infty])$. Alors $d_k \in \bar{D}_{n_k}$, où $n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La projection $\pi(H_k) = n_k \mathbb{Z}$ du sous-groupe fermé $\psi_X(d_k)$ sur \mathbb{Z} converge vers $\{0\}$, donc la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs, par continuité de l'application $i^*: \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (voir la Proposition 1.2), l'intersection $(1/\alpha_k) \mathbb{Z} = H_k \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = i^*(H_k)$ converge vers $(1/\alpha) \mathbb{Z}$, donc la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α . La suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $\alpha \in]0, \infty[$ dans X .

On a donc montré que l'application ψ_X réalisait un homéomorphisme sur son image $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \setminus \mathcal{S}^H$. Puisque le sous-espace \mathcal{S}^H est fermé, l'image de ψ_X est ouverte. \square

4.3 Le recollement final

La frontière de X dans \bar{X} est $\partial X = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \partial \bar{D}_n$, qui est une suite de cercles disjoints s'accumulant sur un point. Considérons la surjection continue

$$\begin{aligned} g: \partial X &\rightarrow \mathcal{A} \\ 0 &\mapsto 0 \\ d \in \partial \bar{D}_n &\mapsto g_n(d). \end{aligned}$$

Ceci permet de définir le recollement $\bar{X} \cup_g \mathcal{A}$, ainsi que l'application $\psi: \bar{X} \cup_g \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ par $\psi|_X = \psi_X$ et $\psi|_{\mathcal{A}} = \psi^H$: voir la Figure 5.

Théorème 4.3 *L'application ψ est un homéomorphisme du recollement $\bar{X} \cup_g \mathcal{A}$ sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.*

Démonstration D'après les Propositions 4.2 et 2.3, l'application ψ est une bijection, continue sur l'ouvert X et en restriction à \mathcal{A} .

Si $z \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, alors il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $z \in g_n(\partial \bar{D})$, donc l'application ψ est continue en z . Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X convergeant vers 0 dans $\bar{X} \cup_g \mathcal{A}$, alors la projection de $\psi(x_k)$ sur $\{0\} \times \mathbb{Z}$ converge vers $\{0\}$, et le générateur $1/\alpha_k$ de $\psi(x_k) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ tend vers l'infini, donc la suite de sous-groupes fermés $(\psi(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\{0\} = \psi(0)$.

Ainsi la bijection ψ est continue de l'espace $\bar{X} \cup_g \mathcal{A}$ sur l'espace séparé $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$. Or les espaces \bar{X} et \mathcal{A} sont compacts donc normaux, donc d'après la proposition [10, Proposition 3.4, page 145] le recollement $\bar{X} \cup_g \mathcal{A}$ est normal, donc en particulier séparé. De plus cet espace est image continue du compact $\bar{X} \cup \mathcal{A}$, donc est compact. En conclusion, l'application ψ est un homéomorphisme. \square

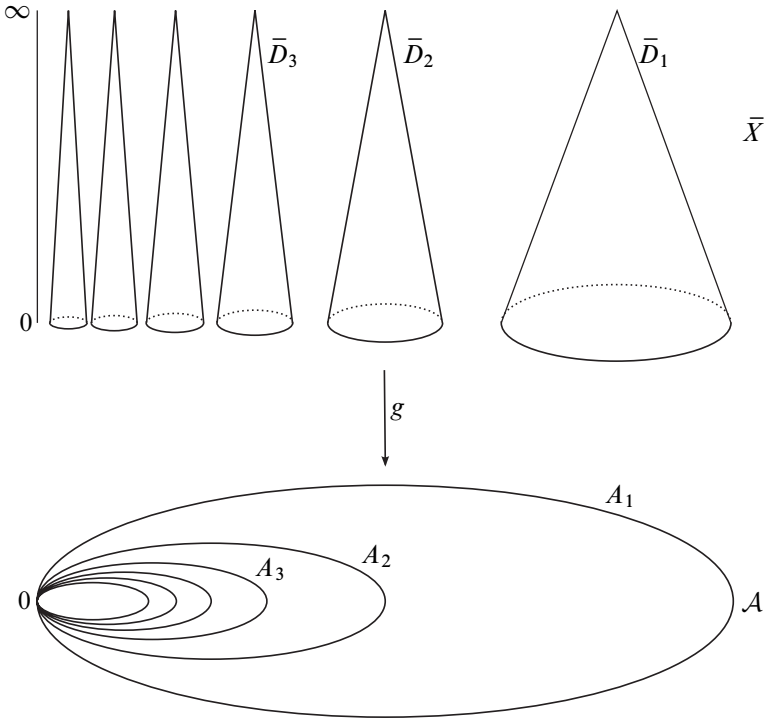


FIGURE 5: Le recollement $\bar{X} \cup_g \mathcal{A}$, homéomorphe à l'espace des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

5 Le groupe fondamental de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$

Pour la description du groupe fondamental des anneaux Hawaïens, on se réfèrera à Cannon et Conner [6] et de Smit [16]. Je tiens à remercier Yves de Cornulier pour m'avoir indiqué ces articles et expliqué comment on pouvait décrire le groupe fondamental de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.

Choisissons $0 \in \mathcal{A}$ pour point base du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{A})$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons $a_n \in \pi_1(\mathcal{A})$ la classe du lacet qui effectue une fois le tour du cercle A_n dans le sens direct. Nous allons décrire les éléments de $\pi_1(\mathcal{A})$ par des mots infinis sur l'alphabet $\{a_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit F_n le groupe libre sur l'alphabet fini $\{a_1, \dots, a_n\}$. Considérons, pour tous $1 \leq n \leq m$, le morphisme $p_{n,m}: F_m \rightarrow F_n$ trivial sur a_{n+1}, \dots, a_m et valant l'identité sur F_n : ceci forme un système projectif. Soit Γ le sous-groupe de $\varprojlim F_n$ constitué des mots infinis sur l'alphabet $\{a_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, tels que chaque lettre apparaît un nombre fini de fois.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $\mathcal{A}_n = \bigcup_{m=1}^n A_m$ le bouquet des n premiers cercles de \mathcal{A} . La rétraction $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_n$ qui envoie tous les cercles A_m sur $\{0\}$, pour $m > n$, définit un morphisme de $\pi_1(\mathcal{A})$ sur F_n . Ceci permet de définir un morphisme $\eta: \pi_1(\mathcal{A}) \rightarrow \varprojlim F_n$, qui est un isomorphisme de $\pi_1(\mathcal{A})$ sur Γ (voir par exemple de Smit [16]).

On peut ainsi montrer de nombreuses propriétés sur le groupe des anneaux Hawaïens: il est non dénombrable, tout sous-groupe de type fini est libre, mais il n'est pas libre (voir par exemple [6, Theorem 2.5, page 234]).

Notons pour simplifier $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$. Le plongement $\psi^H: \mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ nous permet d'identifier \mathcal{A} à son image dans \mathcal{S} . Pour tout entier $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'image par l'application η de la classe d'homotopie du lacet g_m est le mot infini $\eta([g_m]) = b_m = (b_{m,n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \in \Gamma$, où l'on a noté

$$b_{m,n} = \prod_{i=1}^n a_{mn/\text{pgcd}(n,i)},$$

où le produit est effectué dans l'ordre de $i = 1$ à n .

Théorème 5.1 *Le morphisme naturel $\xi: \pi_1(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S})$ est surjectif et a pour noyau le sous-groupe distingué N engendré par les $([g_m])_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$.*

Démonstration La surjectivité du morphisme ξ est une conséquence immédiate du fait que tout lacet dans \mathcal{S} est homotope à un lacet dans \mathcal{A} .

De plus, chaque lacet g_n est homotope au lacet trivial dans \mathcal{S} , donc le sous-groupe N est inclus dans le noyau du morphisme ξ .

Considérons un lacet $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{A}$ basé en 0 , homotope au lacet trivial dans \mathcal{S} . Montrons que la classe $[f]$ de f dans $\pi_1(\mathcal{A})$ appartient à N . Puisque \bar{f} est homotope au lacet trivial, on peut prolonger f en une application continue $F: \bar{D} \rightarrow \mathcal{S}$, où \bar{D} désigne le disque fermé de rayon 1.

Notons $C = \{c_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ l'ensemble des centres des disques D_n . À homotopie près, on peut supposer que les points de $F^{-1}(C)$ sont isolés dans \bar{D} . Par compacité de \bar{D} , on sait alors que $F^{-1}(C)$ est fini. Quitte à multiplier $[f]$ à droite par un nombre fini de conjugués de g_m , on peut supposer que $F^{-1}(C) = \emptyset$. Or $\mathcal{S} \setminus C$ se rétracte par déformation sur \mathcal{A} , donc le lacet f est homotope au lacet trivial dans \mathcal{A} .

On a donc montré que le noyau du morphisme ξ est exactement N . □

On a obtenu une description combinatoire du groupe fondamental de l'espace des sous-groupes fermés de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$: il est isomorphe au quotient du groupe Γ par le sous-groupe distingué M engendré par les $(b_m)_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$.

Théorème 5.2 *Le groupe $\pi_1(S)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\pi_1(A)$. En particulier, le groupe $\pi_1(S)$ n'est pas dénombrable et n'est pas libre.*

Démonstration Cela revient à montrer que le quotient Γ/M contient un sous-groupe isomorphe à Γ . Considérons le morphisme $\zeta: \Gamma \rightarrow \Gamma$ défini par $a_n \mapsto a_{p_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où p_n désigne le $n^{\text{ème}}$ nombre premier impair.

Le morphisme ζ est injectif, montrons de plus que $\zeta(\Gamma) \cap M = \{e\}$: soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \in \zeta(\Gamma) \cap M$. Fixons un nombre premier impair p .

Le mot x appartient à M , donc pour tout entier $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on peut considérer $y_m \in \mathbb{Z}$ le nombre de conjugués des éléments $b_m^{\pm 1}$ qui apparaissent dans l'écriture de x (en comptant -1 si c'est b_m^{-1} qui apparaît). Pour tout entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considérons le nombre d'occurrences de la lettre $a_{2^k p}$. Puisque $2^k p$ n'est pas premier, ce nombre doit être égal à 0. Par ailleurs pour tout $k' \in [[0, k]]$, dans chaque mot $b_{2^{k'} p}$, la lettre $a_{2^k p}$ apparaît avec multiplicité $\varphi(2^{k-k'})$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. On en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'équation

$$\sum_{k'=0}^k y_{2^{k'} p} \varphi(2^{k-k'}) = 0.$$

Ce qui donne l'équation (E_k) :

$$\sum_{k'=0}^{k-1} y_{2^{k'} p} 2^{k-k'-1} + y_{2^k p} = 0.$$

On sait qu'il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$ nous avons $y_{2^k p} = 0$. Cela se ramène donc à un système de k_0 équations linéaires $(E_k)_{1 \leq k \leq k_0}$ en les k_0 inconnues $(y_{2^k p})_{0 \leq k \leq k_0-1}$, inversible car triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Ainsi on en déduit que $y_p = 0$, ce qui implique que la lettre a_p apparaît avec multiplicité 0 dans l'écriture de x .

Ceci est vrai pour tout nombre premier impair n , or $x \in \zeta(\Gamma)$ donc le mot x ne s'écrit qu'avec des lettres a_n telles que n soit un nombre premier impair. On en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous avons $x_n = e$. Ainsi $x = e$.

Le morphisme injectif ζ vérifie $\zeta(\Gamma) \cap M = \{e\}$, donc il passe au quotient en un morphisme injectif de Γ dans Γ/M . □

Références

- [1] **N Bourbaki**, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitre 10. Profondeur, régularité, dualité*, Masson, Paris (1998) [MR2272929](#)

- [2] **MR Bridson, A Haefliger**, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 319, Springer, Berlin (1999) [MR1744486](#)
- [3] **MR Bridson, P de la Harpe, V Kleptsyn**, *The Chabauty space of closed subgroups of the three-dimensional Heisenberg group*, Pacific J. Math. 240 (2009) 1–48 [MR2485473](#)
- [4] **P Buser, H Karcher**, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque 81, Société Mathématique de France, Paris (1981) [MR619537](#)
- [5] **R D Canary, D B A Epstein, P Green**, *Notes on notes of Thurston*, from: “Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)”, (D B A Epstein, editor), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 111, Cambridge Univ. Press (1987) 3–92 [MR903850](#)
- [6] **J W Cannon, G R Conner**, *The combinatorial structure of the Hawaiian earring group*, Topology Appl. 106 (2000) 225–271 [MR1775709](#)
- [7] **C Chabauty**, *Limite d'ensembles et géométrie des nombres*, Bull. Soc. Math. France 78 (1950) 143–151 [MR0038983](#)
- [8] **Y de Cornulier**, *Pontryagin duality and the Chabauty space of locally compact abelian groups*, Article en préparation
- [9] **G Courtois, F Dal'Bo, F Paulin**, *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2007) [MR2400665](#) Papers from the Mathematical Days X-UPS held at the École Polytechnique, Palaiseau, May 9–10, 2007
- [10] **J Dugundji**, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston (1966) [MR0193606](#)
- [11] **P de la Harpe**, *Spaces of closed subgroups of locally compact groups* [arXiv:0807.2030v2](#)
- [12] **B Kloeckner**, *The space of closed subgroups of \mathbb{R}^n is stratified and simply connected*, J. Topol. 2 (2009) 570–588 [MR2546586](#)
- [13] **LS Pontryagin**, *Topological groups*, Gordon and Breach Science Publ., New York (1966) [MR0201557](#) Translated from the second Russian edition by A Brown
- [14] **I Poureza, J Hubbard**, *The space of closed subgroups of \mathbb{R}^2* , Topology 18 (1979) 143–146 [MR544155](#)
- [15] **J-P Serre**, *Cours d'arithmétique*, second edition, Presses Universitaires de France, Paris (1977) [MR0498338](#)
- [16] **B de Smit**, *The fundamental group of the Hawaiian earring is not free*, Internat. J. Algebra Comput. 2 (1992) 33–37 [MR1167526](#)

École Normale Supérieure, DMA UMR 8553 CNRS

45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France

thomas.haettel@normalesup.org

Received: 19 December 2008 Revised: 20 May 2009