

Algebra & Number Theory

Volume 3

2009

No. 2

Obstruction de descente et obstruction de
Brauer–Manin étale

Cyril Demarche

 mathematical sciences publishers

Obstruction de descente et obstruction de Brauer–Manin étale

Cyril Demarche

Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres. On considère deux obstructions au principe de Hasse sur X : l'obstruction de Brauer–Manin appliquée aux revêtements étales de X et l'obstruction de descente sur X . On démontre que la première est plus forte que la seconde. On en déduit, grâce à un exemple récent de Poonen, que l'obstruction de descente est insuffisante pour expliquer tous les contrexemples au principe de Hasse.

Let X be a smooth, projective and geometrically integral variety over a number field. We consider two obstructions to the Hasse principle on X : the Brauer–Manin obstruction applied to étale covers of X and the descent obstruction on X . We prove that the first one is at least as strong as the second. Combining this with a recent example of Poonen shows that the descent obstruction is not sufficient to explain all counterexamples to the Hasse principle.

1. Introduction

Dans tout ce texte, une variété est un schéma séparé de type fini sur un corps, et un groupe algébrique est un schéma en groupes séparé de type fini sur un corps. Si k est un corps de caractéristique 0, et \bar{k} une clôture algébrique de k , un k -groupe algébrique G est dit fini si $G(\bar{k})$ est fini (c'est-à-dire si G est fini comme k -schéma).

Soit k un corps de nombres ; si S est un ensemble fini de places de k , $\mathbb{O}_{k,S}$ désigne l'ensemble des éléments de k entiers hors de S . Pour toute k -variété Y , on notera $Y(\mathbb{A}_k)$ l'ensemble de ses points adéliques, défini de la façon suivante : si \mathcal{U} est un modèle de Y sur un ouvert $U = \text{Spec}(\mathbb{O}_{k,S})$ du spectre de l'anneau des entiers de k , $Y(\mathbb{A}_k)$ est défini comme étant le produit restreint $\prod'_v Y(k_v)$ par rapport aux sous-ensembles $\mathcal{U}(\mathbb{O}_v)$, $v \notin S$. Cet ensemble est muni de la topologie produit restreint (chaque $Y(k_v)$ étant muni de la topologie v -adique). Si Y est propre, cet ensemble coïncide avec le produit direct des $Y(k_v)$.

MSC2000: primary 11G35; secondary 14G05, 11E72.

Mots-clés: principe de Hasse, obstruction de Brauer–Manin, obstruction de descente, cohomologie galoisienne, torsors, Hasse principle, Brauer–Manin obstruction, descent obstruction, Galois cohomology, torsors.

On rappelle l’existence de l’accouplement dit de Brauer–Manin

$$\begin{aligned}
 Y(\mathbb{A}_k) \times \text{Br}(Y) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
 (P, A) &\longmapsto \langle A, P \rangle_{\text{BM}} := \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v))
 \end{aligned}$$

(voir par exemple [Skorobogatov 2001, section 5.2]), où $\text{Br}(Y) := H^2_{\text{ét}}(Y, \mathbb{G}_m)$ désigne le groupe de Brauer cohomologique de la variété Y , $j_v : \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l’invariant donné par la théorie du corps de classes local et $A(P_v) \in \text{Br}(k_v)$ est l’évaluation de $A \in \text{Br}(Y)$ en $P_v \in Y(k_v)$. On peut alors définir l’ensemble de Brauer–Manin

$$Y(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} := \{P \in Y(\mathbb{A}_k) : \langle A, P \rangle_{\text{BM}} = 0, \forall A \in \text{Br}(Y)\}$$

Grâce à la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes global, on sait que $Y(k) \subset Y(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.

Désormais, X est une k -variété projective.

Pour tout groupe algébrique G sur k , pour tout X -torseur $f : Y \xrightarrow{G} X$ sous G , et tout cocycle $\sigma \in Z^1(k, G)$, on notera

$$f^\sigma : Y^\sigma \xrightarrow{G^\sigma} X$$

le X -torseur f tordu par le cocycle σ (voir par exemple [Skorobogatov 2001, p. 20] ou la [définition 1](#)) ; on notera également $[Y]$ la classe d’un tel torseur dans l’ensemble de cohomologie étale $H^1(X, G)$, et pour tout point $P \in X(K)$, où K est un corps contenant k , on notera $[Y](P) \in H^1(K, G)$ la classe de la fibre $Y_P := f^{-1}(P) \rightarrow K$ (qui est un K -torseur sous G) dans $H^1(K, G)$. En outre, si σ est un 1-cocycle à valeurs dans G , on notera $[\sigma]$ sa classe dans $H^1(k, G)$. Soit $f : Y \xrightarrow{G} X$ un torseur sous un k -groupe G ; on considérera l’ensemble de descente de f défini par

$$X(\mathbb{A}_k)^f := \bigcup_{[\sigma] \in H^1(k, G)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)).$$

Remarque. Une définition équivalente de l’ensemble de descente $X(\mathbb{A}_k)^f$ est donnée par exemple dans [Harari et Skorobogatov 2002, définition 4.2] : $X(\mathbb{A}_k)^f$ est l’ensemble des points adéliques (P_v) de X tels que l’évaluation $([Y](P_v)) \in \prod_v H^1(k_v, G)$ provienne d’une classe globale dans $H^1(k, G)$, c’est-à-dire que $([Y](P_v)) \in \text{Im}(H^1(k, G) \rightarrow \prod_v H^1(k_v, G))$. L’équivalence de ces deux définitions est une conséquence immédiate de [Skorobogatov 2008, proposition 2.4].

On définit alors, comme dans [Poonen 2008, sections 3.2 et 3.3], les ensembles

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} := \bigcap_{\substack{f: Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ fini}}} \bigcup_{[\sigma] \in H^1(k, G)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}})$$

et

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} := \bigcap_{\substack{f: Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire}}} X(\mathbb{A}_k)^f = \bigcap_{f: Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire}} \bigcup_{[\sigma] \in H^1(k, G)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)).$$

On cherche à comparer ces deux ensembles, qui définissent tous les deux des obstructions au principe de Hasse pour la variété X , appelées respectivement obstruction de Brauer–Manin étale et obstruction de descente. En effet, on sait que pour tout X -torseur $f: Y \xrightarrow{G} X$, on a (voir par exemple [Skorobogatov 2001, p. 22]) :

$$X(k) = \bigcup_{[\sigma] \in H^1(k, G)} f^\sigma(Y^\sigma(k))$$

Cela implique bien en particulier que l'on a des inclusions $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$ et $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Cela permet de définir des obstructions au principe de Hasse, qui sont plus fines que l'obstruction de Brauer–Manin : les ensembles $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ et $X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$ sont en effet contenus dans $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ (pour le premier, c'est évident, et pour le second, c'est le lemme 2.8 de [Skorobogatov 2008], qui est une conséquence d'un résultat de Gabber, également prouvé par de Jong [2005, théorème 1.1]).

Skorobogatov [1999] a construit un contreexemple X au principe de Hasse pour lequel $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$, mais $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} = X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = \emptyset$. Plus récemment, Poonen [2008] a fabriqué des exemples de variétés X pour lesquelles l'obstruction de Brauer–Manin étale est insuffisante pour expliquer la vacuité de $X(\mathbb{A}_k)$: pour ces variétés, l'ensemble $X(k)$ est vide, mais $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ (et a fortiori $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$) ne l'est pas.

On cherche ici à répondre à une question de Poonen [2008, question 3.1], ainsi qu'à une question similaire de Stoll [2007, p. 134 en bas et 135 en haut] : a-t-on toujours une inclusion $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$?

On se propose de démontrer le résultat suivant, qui répond à cette question par l'affirmative :

Soit X une k -variété projective, lisse et géométriquement intègre. Alors

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}.$$

Cet énoncé permet de répondre à la question de Poonen, ce qui assure que l'obstruction de descente est insuffisante pour expliquer les contreexemples au principe de Hasse que sont les variétés considérées dans [Poonen 2008] (voir corollaire 2).

Remarque. Un résultat récent de Skorobogatov [2008, corollaire 1.2] assure que l'inclusion inverse $X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ est également vérifiée. Cela démontre donc que l'obstruction de descente et l'obstruction de Brauer–Manin étale sont en fait équivalentes.

2. Énoncé du résultat et structure de la preuve

2.1. Notations et rappels. Avant d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce texte, on rappelle d'abord quelques définitions et quelques notations qui seront utiles pour la suite.

Soit k un corps de caractéristique nulle. Fixons une clôture algébrique \bar{k} de k . Dans tout le texte, si Y est une k -variété, on notera \bar{Y} la \bar{k} -variété déduite de Y par extension des scalaires, c'est-à-dire $\bar{Y} := Y \times_k \bar{k}$. On notera aussi $\Gamma_k := \text{Gal}(\bar{k}|k)$ le groupe de Galois absolu de k . Les ensembles de cohomologie considérés dans ce texte sont tous des ensembles de cohomologie étale (ou galoisienne). Tous les toiseurs considérés ici seront, sauf mention explicite du contraire, des toiseurs à droite.

On rappelle d'abord la définition de la torsion d'un toiseur par un 1-cocycle (voir par exemple [Harari et Skorobogatov 2002, définitions 1.7 et 1.8]) :

Définition 1. Soit G un k -groupe algébrique, soit $\sigma \in Z^1(k, G)$ un 1-cocycle.

- Le k -groupe algébrique G^σ est la k -forme intérieure de G obtenue en quotientant \bar{G} par l'action tordue de Γ_k définie par $(\gamma, \bar{g}) \mapsto \sigma_\gamma({}^\gamma \bar{g})\sigma_\gamma^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_k$ et tout $\bar{g} \in \bar{G}$.
- Soit $f : Y \xrightarrow{G} X$ un X -toiseur (à droite) sous G . On suppose que Y est une k -variété quasi-projective. Alors la forme tordue de f par σ est la k -variété quotient Y^σ de \bar{Y} par l'action de Γ_k définie par $(\gamma, \bar{y}) \mapsto {}^\gamma \bar{y} \cdot \sigma_\gamma^{-1}$. Cette variété est munie d'un morphisme canonique $f^\sigma : Y^\sigma \rightarrow X$ qui munit Y^σ d'une structure de X -toiseur (à droite) sous G^σ .

Dans le cas où k est un corps de nombres et X est une k -variété projective, cette définition permet ensuite de définir les ensembles $X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$ et $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ comme dans l'introduction (on notera que dans la construction de ces ensembles, les hypothèses de la [définition 1](#) sont vérifiés, à savoir que les toiseurs considérés sont quasi-projectifs).

Dans la preuve du résultat principal, on va utiliser quelques notions de cohomologie non-abélienne. On rappelle ici quelques définitions sur le sujet. Pour davantage de précisions, on pourra consulter [Flicker et al. 1998, section 1] ou [Borovoi 1993].

On commence par définir un automorphisme semi-linéaire (voir [Harari et Skorobogatov 2002, définition 1.1]) : soit $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \text{Spec } \bar{k}$ une \bar{k} -variété. Soit $\varphi \in \text{Aut}(\bar{Y}/k)$. L'automorphisme φ est dit *semi-linéaire* s'il existe un élément (nécessairement unique) $\gamma \in \Gamma_k$ tel que $\bar{f} \circ \varphi = (\gamma^*)^{-1} \circ \bar{f}$, où $\gamma^* : \text{Spec } \bar{k} \rightarrow \text{Spec } \bar{k}$ est induit par l'action de γ sur \bar{k} . On notera $\text{SAut}(\bar{Y}/k)$ le groupe des automorphismes semi-linéaires de \bar{Y} . On notera aussi $q : \text{SAut}(\bar{Y}/k) \rightarrow \Gamma_k$ le morphisme défini par $q(\varphi) = \gamma$. Enfin, si \bar{Y} est un \bar{k} -groupe algébrique, on notera $\text{SAut}^{\text{ét}}(\bar{Y}/k)$ le

groupe des automorphismes semi-linéaires compatibles avec la structure de groupe de \bar{Y} , et $\text{SOut}(\bar{Y}/k)$ le quotient de $\text{SAut}^{\text{gr}}(\bar{Y}/k)$ par le sous-groupe $\text{Int}(\bar{Y})$ des automorphismes intérieurs de \bar{Y} ; de même, on note $\text{Out}(\bar{Y}/k)$ le quotient du groupe $\text{Aut}^{\text{gr}}(\bar{Y}/k)$ (formé des éléments de $\text{Aut}(\bar{Y}/k)$ respectant la structure de groupe) par les automorphismes intérieurs. Si $y \in \bar{Y}(k)$, on notera $\text{int}(y)$ l’automorphisme intérieur de \bar{Y} défini par $g \mapsto ygy^{-1}$.

Plus généralement, si X est une k -variété, \bar{Y} une \bar{k} -variété et $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un morphisme, on définit $\text{SAut}(\bar{Y}/X) := \text{Aut}(\bar{Y}/X) \cap \text{SAut}(\bar{Y}/k)$ (voir [Harari et Skorobogatov 2002, définition 1.3]). Enfin, ces groupes d’automorphismes linéaires sont munis d’une topologie faible (voir [Harari et Skorobogatov 2002, définition 1.3]), et on munit l’ensemble $\bar{Y}(\bar{k})$ de la topologie discrète.

On peut alors définir la notion de k -lien : si \bar{G} est un \bar{k} groupe algébrique, un k -lien sur \bar{G} est un morphisme de groupes $\kappa : \Gamma_k \rightarrow \text{SOut}(\bar{G}/k)$ qui scinde le morphisme $\text{SOut}(\bar{G}/k) \rightarrow \Gamma_k$ et qui se relève en une section continue du morphisme $q : \text{SAut}^{\text{gr}}(\bar{G}/k) \rightarrow \Gamma_k$. Par exemple, si \bar{G} est commutatif, la donnée d’un k -lien sur \bar{G} équivaut à la donnée d’une section de q qui soit un morphisme de groupes, ce qui équivaut à la donnée d’une k -forme de \bar{G} . À l’aide de ces notions, on peut enfin définir un H^2 non-abélien en termes de cocycles :

Définition 2. Soit $L := (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien sur un \bar{k} -groupe algébrique \bar{G} .

– Un 2-cocycle à coefficients dans L est un couple (f, g) d’applications continues

$$f : \begin{cases} \Gamma_k & \longrightarrow & \text{SAut}^{\text{gr}}(\bar{G}/k) \\ s & \longmapsto & f_s \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \Gamma_k \times \Gamma_k & \longrightarrow & \bar{G}(\bar{k}) \\ (s, t) & \longmapsto & g_{s,t} \end{cases}$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$f \bmod \text{Int}(\bar{G}) = \kappa, \quad f_s \circ f_t = \text{int}(g_{s,t}) \circ f_{st}, \quad f_s(g_{t,u})g_{s,tu} = g_{s,t}g_{st,u}.$$

On note $Z^2(k, L)$ l’ensemble des 2-cocycles à coefficients dans L .

– Deux 2-cocycles (f, g) et (f', g') sont dits équivalents s’il existe une application continue $h : \Gamma_k \rightarrow \bar{G}(\bar{k})$ telle que

$$f'_s = \text{int}(h_s) \circ f_s \quad \text{et} \quad g'_{s,t} = h_s f_s(h_t)g_{s,t}h_{st}^{-1}.$$

La classe d’équivalence d’un élément $(f, g) \in Z^2(k, L)$ est notée $[(f, g)]$. L’ensemble des classes d’équivalence est noté $H^2(k, L)$.

– Un 2-cocycle (f, g) est dit neutre si $g_{s,t} = 1$ pour tout $s, t \in \Gamma_k$. Une classe $\alpha \in H^2(k, L)$ est dite neutre si elle est représentée par un 2-cocycle neutre.

En particulier, si \bar{G} est commutatif, et si L est un k -lien sur \bar{G} , alors $H^2(k, L)$ s’identifie au groupe abélien usuel $H^2(k, G)$ où G est la k -forme de \bar{G} associée au k -lien L .

Pour finir, on rappelle la définition du type d'un torseur sous un tore (voir par exemple [Skorobogatov 2001, section 2.3]) : soit T un k -tore,

$$M := \text{Hom}_{\bar{k}\text{-groupes}}(\bar{T}, \overline{\mathbb{G}_m})$$

son module des caractères et $Y \xrightarrow{T} X$ un X -torseur sous T . On appelle *type* du torseur $Y \rightarrow X$ le morphisme $\lambda : M \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})$ défini de la façon suivante : si $\chi : \bar{T} \rightarrow \overline{\mathbb{G}_m}$ est un élément de M , $\lambda(\chi)$ est la classe dans $\text{Pic}(\bar{X})$ du \bar{X} -torseur sous $\overline{\mathbb{G}_m}$ obtenu en poussant en avant le torseur $Y \xrightarrow{T} X$ par le caractère $\chi : \bar{T} \rightarrow \overline{\mathbb{G}_m}$.

2.2. Énoncé du résultat et structure de la preuve. L'objectif de ce texte est donc de prouver le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit k un corps de nombres, soit X une k -variété projective, lisse et géométriquement intègre. Alors $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$.*

Comme mentionné dans l'introduction, ce résultat permet de répondre à la question posée dans [Poonen 2008] :

Corollaire 2. *Soit k un corps de nombres, soit X/k la variété construite dans [Poonen 2008]. Alors X est un contreexemple au principe de Hasse qui ne peut être expliqué par l'obstruction de descente, c'est-à-dire que l'on a $X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} \neq \emptyset$ alors que $X(k) = \emptyset$.*

Preuve du théorème 1. Soit $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}}$. Soit G un k groupe algébrique linéaire. On se donne un X -torseur sous G :

$$f : Y \rightarrow X$$

L'objectif est de montrer que le point (P_v) se relève en un point de $Y^\tau(\mathbb{A}_k)$, pour un certain cocycle τ à valeurs dans G . On remarque que dans le cas extrême où G est fini, ce résultat est évident puisque $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}}$; dans l'autre cas extrême où G est connexe, en utilisant l'inclusion évidente $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$, c'est un résultat de Harari que l'on rappelle ici :

Théorème 3 [Harari 2002, théorème 2(2)]. *Soit X une k -variété géométriquement intègre et G un k -groupe linéaire connexe. Si $f : Y \rightarrow X$ est un X -torseur sous G , alors on a $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^f$.*

Le principe de la preuve du théorème 1 consiste à ramener en quelque sorte le cas général au cas connexe et au théorème 3, grâce à la proposition 5 qui suit.

On commence par rappeler un résultat de Stoll :

Lemme 4 (Stoll). *Soit X une k -variété projective lisse géométriquement intègre. Soit $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét}, \text{Br}}$ et soit $g : Z \xrightarrow{F} X$ un X -torseur sous un k -groupe fini F . Alors il existe un k -groupe fini F' , un cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, un X -torseur $X' \xrightarrow{F'} X$ sous F' , un morphisme $p : F' \rightarrow F^\sigma$ et un morphisme $\psi : X' \rightarrow Z^\sigma$ faisant commuter le*

diagramme suivant (où les deux flèches verticales du carré supérieur sont données par les actions respectives de F' et F^σ sur X' et Z^σ):

$$\begin{array}{ccc}
 X' \times_k F' & \xrightarrow{\psi \times P} & Z^\sigma \times_k F^\sigma \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{\psi} & Z^\sigma \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{=} & X
 \end{array}$$

et tels que la variété X' soit géométriquement intègre et (P_v) se relève en un point $(Q'_v) \in X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.

Démonstration. On considère le \bar{X} -torseur $\bar{Z} \xrightarrow{\bar{F}} \bar{X}$. Suivant [Stoll 2007, remarque précédant le lemme 5.6 et preuve du lemme 5.7], il existe un k -groupe fini F' , un X -torseur $X' \xrightarrow{F'} X$ avec X' connexe (sur k), un morphisme de groupes $\bar{F}' \rightarrow \bar{F}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{X}' & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \bar{Z} \\
 \searrow \bar{F}' & & \swarrow \bar{F} \\
 & \bar{X} &
 \end{array}$$

de sorte que le morphisme $\bar{\psi}$ soit compatible aux actions respectives de \bar{F}' sur \bar{X}' et \bar{F} sur \bar{Z} . Quitte à tordre $X' \rightarrow X$, on peut supposer que (P_v) se relève dans $X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ (puisque $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$). Dans ce cas, par le lemme 5.5 de [Stoll 2007], la variété X' est géométriquement intègre. On applique alors le lemme 5.6 du même article : il existe un cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, un morphisme de k -groupes algébriques $F' \rightarrow F^\sigma$ et un morphisme ψ s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{\psi} & Z^\sigma \\
 \searrow F' & & \swarrow F^\sigma \\
 & X &
 \end{array}$$

et tel que ψ soit compatible aux actions de F' et F^σ , via le morphisme $F' \rightarrow F^\sigma$. Cela conclut la preuve du lemme. □

Le point principal de la preuve du [théorème 1](#) est résumé dans la proposition suivante, qui sera démontrée dans le [paragraphe 3](#) :

Proposition 5. *Soit X une k -variété projective lisse géométriquement intègre. Soit $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ et soit $f : Y \xrightarrow{G} X$ un X -torseur sous un k -groupe algébrique*

linéaire G . Soit

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$$

une suite exacte de k -groupes linéaires, avec H connexe et F fini. On note $Z \xrightarrow{F} X$ le poussé en avant de $Y \rightarrow X$ par le morphisme $G \rightarrow F$. Soit alors $\sigma \in Z^1(k, F)$ un 1-cocycle donné par le [lemme 4](#) appliqué au torseur $Z \rightarrow X$ et au point (P_v) .

Alors le cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ se relève en un cocycle $\tau \in Z^1(k, G)$.

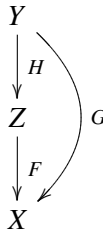
Supposons la [proposition 5](#) démontrée, et déduisons-en le [théorème 1](#), à l'aide du [lemme 4](#) et du [théorème 3](#). Soit $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Soit G un k groupe algébrique linéaire. On note $H := G^\circ$ sa composante neutre. On a une suite exacte de groupes algébriques

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1,$$

F étant un k -groupe algébrique fini, et H étant linéaire connexe. On se donne un X -torseur sous G :

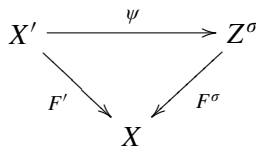
$$f : Y \rightarrow X$$

On peut décomposer ce torseur en deux torseurs, l'un sous le groupe connexe H et l'autre sous le groupe fini F : on a un dessin de la forme



L'objectif est de montrer que le point (P_v) se relève en un point de $Y^\tau(\mathbb{A}_k)$, pour un certain cocycle τ à valeurs dans G .

On applique d'abord la [proposition 5](#) au torseur $f : Y \xrightarrow{G} X$, au point (P_v) et à la suite exacte $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$. On obtient alors un cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ et un diagramme



satisfaisant les propriétés du [lemme 4](#), et par la [proposition 5](#), on sait que le cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ ainsi défini se relève en un cocycle $\tau \in Z^1(k, G)$. On considère alors le X -torseur tordu $Y^\tau \xrightarrow{G^\tau} X$. Ce torseur est naturellement muni d'une structure de

Z^σ -torseur sous H^τ , c'est-à-dire que l'on a un dessin de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 R & \longrightarrow & Y^\tau \\
 \downarrow H^\tau & & \downarrow H^\tau \\
 X' & \xrightarrow{\psi} & Z^\sigma \\
 \downarrow F' & & \downarrow F^\sigma \\
 X & \xrightarrow{=} & X
 \end{array}
 \quad G^\tau$$

où R est défini comme le produit fibré de X' et Y^τ au-dessus de Z^σ .

Le groupe H^τ étant une k -forme de H , il est linéaire connexe. On peut donc lui appliquer le [théorème 3](#) (on rappelle que X' est géométriquement intègre) : l'ensemble $X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ est contenu dans l'ensemble de descente du toseur $R \xrightarrow{H^\tau} X'$, donc en particulier le point $(Q'_v) \in X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ fourni par le [lemme 4](#) et relevant (P_v) est l'image d'un point $(R'_v) \in R^\mu(\mathbb{A}_k)$ pour un certain $\mu \in Z^1(k, H^\tau)$. Poussons alors le point (R'_v) dans $(Y^\tau)^\mu$. On obtient ainsi un point $(R_v) \in (Y^\tau)^\mu(\mathbb{A}_k)$ au-dessus de $(Q_v) := (\psi(Q'_v)) \in Z^\sigma(\mathbb{A}_k)$ et de $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)$. Notons $\nu \in Z^1(k, G^\tau)$ l'image de $\mu \in Z^1(k, H^\tau)$; alors $(Y^\tau)^\mu = (Y^\tau)^\nu$. Considérons alors la bijection de torsion par $\tau, t_\tau : Z^1(k, G^\tau) \rightarrow Z^1(k, G)$ (voir par exemple [[Serre 1973](#), section I.5.3, proposition 35 bis]) et posons $\rho := t_\tau(\nu) \in Z^1(k, G)$. Alors un calcul simple assure que $(Y^\tau)^\nu = Y^\rho$, et donc $(Y^\tau)^\mu = Y^\rho$. Par conséquent, on a montré que (R_v) était dans $Y^\rho(\mathbb{A}_k)$, et par construction on a $f^\rho((R_v)) = (P_v)$. Donc $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^f$, ce qui conclut la preuve du [théorème 1](#), en admettant la [proposition 5](#). \square

Remarque. Avec les notations de la preuve, l'approche naïve pour montrer «directement» le [théorème 1](#) sans le [lemme 4](#) et la [proposition 5](#) consisterait à appliquer le [théorème 3](#) à un certain toseur $Y^\tau \rightarrow Z^\sigma$ sous une k -forme du groupe connexe H , où $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$, et se relève dans $Z^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ et $\tau \in Z^1(k, G)$ relève σ . Cependant, cette approche se heurte à deux problèmes majeurs : d'abord on ne sait pas a priori si σ se relève ou non dans $Z^1(k, G)$, et ensuite il se peut que Z^σ ne soit pas géométriquement intègre (ce dont on a besoin pour appliquer le [théorème 3](#)). L'approche naïve ne suffit donc pas : on a besoin du [lemme 4](#) pour remplacer Z^σ par une variété géométriquement intègre, ainsi que de la [proposition 5](#) pour relever σ dans $Z^1(k, G)$.

3. Preuve de la proposition 5

On se place sous les hypothèses de la [proposition 5](#), avec les mêmes notations. Pour tout k -groupe algébrique linéaire connexe H , on notera H^{red} le quotient de H par son radical unipotent $R_u(H)$, H^{ss} le sous-groupe dérivé de H^{red} , et H^{tor} le quotient de H^{red} par H^{ss} . Ainsi, H^{red} est un groupe réductif (connexe), H^{ss} est un groupe semi-simple et H^{tor} est un k -tore.

Considérons pour commencer la suite exacte de la [proposition 5](#) :

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$$

En quotientant H et G par le radical unipotent de H , puis en quotientant à nouveau par le sous-groupe dérivé H^{ss} ($R_u(G)$ et H^{ss} sont des sous-groupes caractéristiques de H et H^{red} respectivement), on obtient le diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & H^{\text{tor}} & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & F \longrightarrow 1 \end{array}$$

Dans toute la suite, on notera $T := H^{\text{tor}}$ le quotient torique de H .

Le groupe T étant abélien, la suite exacte ainsi obtenue induit une action par conjugaison de F sur T . On peut donc faire agir Γ_k sur $T(\bar{k})$ via le cocycle σ , et on obtient ainsi l'action tordue suivante : $\gamma.h := \tilde{\sigma}_\gamma . {}^\gamma h . \tilde{\sigma}_\gamma^{-1}$ pour $\gamma \in \Gamma_k$ et $h \in T(\bar{k})$, $\tilde{\sigma}_\gamma$ désignant un relevé quelconque de σ_γ dans G' . On notera alors T^σ le k -tore ainsi obtenu, en tordant T par cette action de σ .

Voyons désormais le cocycle σ (défini dans l'énoncé de la [proposition 5](#), à partir du [lemme 4](#)) comme un espace principal homogène (à droite) de F sur k , que l'on notera $U \xrightarrow{F} \text{Spec } k$. La k -variété U est définie de la façon suivante : $U(\bar{k}) := F(\bar{k})$ et l'action de Γ_k sur $U(\bar{k})$ est donnée par $(\gamma, f) \mapsto \sigma_\gamma . ({}^\gamma f)$ pour $\gamma \in \Gamma_k$ et $f \in U(\bar{k}) = F(\bar{k})$, le produit désignant le produit dans le groupe $F(\bar{k})$. La variété U est ainsi un k -torseur (à droite) sous F , dont la classe dans $H^1(k, F)$ est exactement $[\sigma]$. Le morphisme quotient $G \rightarrow F$ munit U d'une structure d'espace homogène de G sur k , à stabilisateur géométrique connexe \bar{H} .

Dans une telle situation, Springer a construit un k -lien κ_σ sur \bar{H} et une classe $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ associés à l'espace homogène U . On rappelle brièvement cette construction (voir par exemple [[Flicker et al. 1998](#), (5.1)] ou [[Borovoi 1993](#), 7.7]) : on fixe un point $u_0 \in U(\bar{k})$ (dans toute la suite, on choisira pour u_0 le point de $U(\bar{k})$ correspondant au neutre $1 \in F(k)$), son stabilisateur dans \bar{G} est le sous-groupe \bar{H} . Il existe alors une application localement constante

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k & \longrightarrow & \bar{G}(\bar{k}) \\ \gamma & \longmapsto & g_\gamma \end{array}$$

telle que pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, on ait ${}^\gamma u_0 = u_0 . g_\gamma$. On vérifie alors que pour $\gamma \in \Gamma_k$, l'application $\text{int}(g_\gamma) \circ \gamma^*$ est un automorphisme semi-linéaire de \bar{G} qui laisse \bar{H} invariant. On note $f_\gamma \in \text{SAut}^{\text{gr}}(\bar{H}/k)$ sa restriction à \bar{H} . Alors l'application $\kappa_\sigma : \gamma \mapsto f_\gamma \text{ mod Int}(\bar{H})$ définit un k -lien sur \bar{H} , et si $g_{\gamma,\tau} := g_\gamma ({}^\gamma g_\tau) g_{\gamma\tau}^{-1}$, la classe de Springer η_σ est par définition la classe du 2-cocycle (f, g) dans $H^2(k, \kappa_\sigma)$. La principale propriété de la classe η_σ est la suivante [[Flicker et al. 1998](#), (5.1)] : η_σ est neutre dans $H^2(k, \kappa_\sigma)$ si et seulement si l'espace homogène U de G est dominé

par un espace principal homogène de G , c'est-à-dire si et seulement si il existe un espace principal homogène V de G et un morphisme $V \rightarrow U$ qui est G -équivariant. En particulier, η_σ est neutre si et seulement si $[\sigma] \in H^1(k, F)$ se relève dans $H^1(k, G)$. Enfin, on remarque que puisque le morphisme de groupes algébriques $G \rightarrow F$ est surjectif, le fait que $[\sigma]$ se relève dans $H^1(k, G)$ est équivalent au fait que le cocycle σ se relève dans $Z^1(k, G)$. Par conséquent il suffit, pour montrer la [proposition 5](#), de montrer que la classe η_σ est neutre dans $H^2(k, \kappa_\sigma)$.

Suivant [[Borovoi 1993](#), 6.1.2], on dispose alors des morphismes d'abélianisation suivants :

$$H^2(k, \kappa_\sigma) \xrightarrow{\text{ab}^2} H_{\text{ab}}^2(k, \kappa_\sigma) \xrightarrow{t_{\text{ab}}} H^2(k, S^\sigma)$$

où S^σ est la k -forme de \bar{T} canoniquement associée au k -lien sur \bar{T} induit par le lien κ_σ . On notera $\eta'_\sigma \in H^2(k, S^\sigma)$ l'image de η_σ par la composée de ces morphismes. On dispose alors du lemme suivant :

Lemme 6. *Sous les hypothèses de la [proposition 5](#), et avec les notations précédentes :*

- (1) *La classe de Springer $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ associée au cocycle σ est une classe localement neutre en toute place v de k .*
- (2) *Les k -tores S^σ et T^σ sont isomorphes.*

Preuve du lemme 6. (1) Pour toute place v de k , le fait que Z^σ admette un k_v -point Q_v assure que $[\sigma_v] \in H^1(k_v, F)$ coïncide avec la classe de $[Z](P_v)$. Or cette dernière est l'image de $[Y](P_v) \in H^1(k_v, G)$, donc $[\sigma_v]$ se relève dans $H^1(k_v, G)$, donc $(\eta_\sigma)_v \in H^2(k_v, \kappa_\sigma)$ est une classe neutre.

(2) Revenons à la construction de S^σ : on fixe $u_0 \in U(\bar{k})$, correspondant à l'élément neutre $1 \in F(\bar{k}) = U(\bar{k})$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, un élément $g_\gamma \in \bar{G}$ tel que ${}^\gamma u_0 = u_0 \cdot g_\gamma$ dans \bar{U} , de sorte que l'application $\gamma \mapsto g_\gamma$ soit localement constante. Le lien κ_σ induit, via la surjection $H \rightarrow T$, un k -lien κ'_σ sur \bar{T} , défini par

$$\begin{aligned} \Gamma_k &\longrightarrow \text{SAut}^{\text{gr}}(\bar{T}/k) \\ \gamma &\longmapsto (\bar{h} \mapsto \overline{g_\gamma \cdot ({}^\gamma h) \cdot g_\gamma^{-1}}) \end{aligned}$$

où \bar{h} désigne l'image de l'élément $h \in H$ dans T . Ce morphisme définit la k -forme S^σ , alors que T^σ est quant à lui défini par le morphisme

$$\begin{aligned} \Gamma_k &\longrightarrow \text{SAut}^{\text{gr}}(\bar{T}/k) \\ \gamma &\longmapsto (\bar{h} \mapsto \overline{\tilde{\sigma}_\gamma \cdot ({}^\gamma h) \cdot \tilde{\sigma}_\gamma^{-1}}) \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, $g_\gamma \in \bar{G}$ s'envoie sur $\sigma_\gamma \in \bar{F}$ par le morphisme quotient $G \xrightarrow{\pi} F$. Or ceci est clair par la formule qui définit les g_γ : on a ${}^\gamma u_0 = \sigma_\gamma \cdot 1 = \sigma_\gamma$ dans $F(\bar{k})$ (c'est la définition de l'action de Γ_k sur \bar{U} , sachant

que $1 \in F(k)$), et par ailleurs ${}^v u_0 = u_0 \cdot g_\gamma = 1 \cdot \pi(g_\gamma) = \pi(g_\gamma)$ dans $F(\bar{k})$ (le premier produit est l'action de G sur U et le second est le produit dans $F(\bar{k})$). Cette formule assure que $\pi(g_\gamma) = \sigma_\gamma$, ce qui prouve le k -isomorphisme $S^\sigma \cong T^\sigma$. \square

En résumé, on a donc montré que la classe de Springer $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ s'envoyait par la flèche d'abélianisation sur $\eta'_\sigma \in \text{III}^2(k, T^\sigma)$, où

$$\text{III}^2(k, T^\sigma) := \{ \alpha \in H^2(k, T^\sigma) : \alpha_v = 0 \in H^2(k_v, T^\sigma) \text{ pour toute place } v \text{ de } k \}.$$

On cherche désormais à identifier cette classe η'_σ . Pour cela, on remarque que le torseur $Y \xrightarrow{H} Z$ fournit un torseur intermédiaire $\varpi : W \xrightarrow{T} Z$ après quotient par le radical unipotent $R_u(H)$ de H , puis par le sous-groupe dérivé H^{ss} de $H/R_u(H)$. On note $\lambda : M \rightarrow \text{Pic}(\bar{Z})$ le type de ce torseur, où M désigne le module des caractères du tore $T = H^{\text{tor}}$ (voir [paragraphe 2.1](#), ou [[Skorobogatov 2001](#), paragraphe 2.3], pour la définition du type d'un torseur sous un tore). L'application λ est un morphisme de Γ_k -modules. Notons M^σ le module des caractères du tore T^σ . Alors M et M^σ sont canoniquement isomorphes comme groupes abéliens, et il en est de même pour $\text{Pic}(\bar{Z})$ et $\text{Pic}(\bar{Z}^\sigma)$. Donc λ induit un morphisme de groupes abéliens $\lambda^\sigma : M^\sigma \rightarrow \text{Pic}(\bar{Z}^\sigma)$.

Lemme 7. *Sous les hypothèses de la [proposition 5](#), et avec les mêmes notations, l'application $\lambda^\sigma : M^\sigma \rightarrow \text{Pic}(\bar{Z}^\sigma)$ est un morphisme de Γ_k -modules.*

Preuve du lemme 7. Le groupe \bar{F} agit sur \bar{T} , sur M , sur \bar{Z} et sur $\text{Pic}(\bar{Z})$ de la façon suivante :

- F agit à gauche sur T par conjugaison : $(f, t) \mapsto gtg^{-1}$.
- F agit à gauche sur M via $(f, \chi) \mapsto (f \cdot \chi : t \mapsto \chi(g^{-1}tg))$.
- F agit à droite sur Z via la structure de X -torseur sous F dont est muni Z .
- F agit à gauche sur $\text{Pic}(\bar{Z})$ via l'action précédente : si $f : \bar{Z} \rightarrow \bar{Z}$ désigne l'action de $f \in F$ sur \bar{Z} , et si $L \in \text{Pic}(\bar{Z})$, alors $f \cdot L := f^*L$.

Montrons alors que pour ces actions naturelles, le morphisme $\lambda : M \rightarrow \text{Pic}(\bar{Z})$ est \bar{F} -équivariant.

Soit $f \in \bar{F}$, et $g \in \bar{G}'$ relevant f . On a alors un diagramme commutatif de morphismes de \bar{k} -variétés :

$$\begin{array}{ccc} \bar{W} & \xrightarrow{g} & \bar{W} \\ \downarrow \varpi & & \downarrow \varpi \\ \bar{Z} & \xrightarrow{f} & \bar{Z} \end{array}$$

les morphismes horizontaux étant les actions naturelles de \bar{G}' sur \bar{W} et de \bar{F} sur \bar{Z} . Ce diagramme induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m} & \xrightarrow{g} & \overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{W} & \xrightarrow{g} & \overline{W} \\
 \downarrow \varpi & & \downarrow \varpi \\
 \overline{Z} & \xrightarrow{f} & \overline{Z}
 \end{array}$$

le morphisme $\overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{g} \overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m}$ étant induit par l’action de g sur \overline{W} et l’identité sur $\overline{\mathbb{G}_m}$, et les morphismes verticaux $\overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m} \rightarrow \overline{W}$ étant donnés par la première projection.

Soit alors $\chi \in M$ un caractère de \overline{T} . On dispose de deux actions à gauche de \overline{T} sur la variété $\overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m}$: la première est l’action classique, à savoir $t.\chi(w, \mu) := (w.t^{-1}, \chi(t)\mu)$, la seconde est l’action «tordue» par f , à savoir l’action associée au caractère $f.\chi : t.f.\chi(w, \mu) := (w.t^{-1}, (f.\chi)(t).\mu)$, où l’action de F sur M est celle définie plus haut : $(f.\chi)(t) := \chi(g^{-1}.t.g)$. Si l’on quotiente $\overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m}$ par la première action de \overline{T} , on obtient un torseur à droite

$$\overline{W}_\chi \xrightarrow{\mathbb{G}_m} \overline{Z}$$

dont la classe $[\overline{W}_\chi]$ dans $\text{Pic}(\overline{Z})$ est par définition le type du torseur $\overline{W} \xrightarrow{\overline{T}} \overline{Z}$ évalué en χ , i.e. $\lambda(\chi)$ (voir la définition du type d’un torseur à la page 242 ; voir également [Skorobogatov 2001, lemme 2.3.1(i)]). De même, quand on quotiente $\overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m}$ par la seconde action de \overline{T} (tordue par f), on obtient un torseur $\overline{W}_{f.\chi} \xrightarrow{\mathbb{G}_m} \overline{Z}$, dont la classe est exactement $\lambda(f.\chi)$.

Considérons alors le morphisme $\phi = g : \overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m} \rightarrow \overline{W} \times_{\overline{k}} \overline{\mathbb{G}_m}$ introduit précédemment. On vérifie aisément que

$$\phi(t.f.\chi(w, \mu)) = (g^{-1}.t.g).\chi\phi(w, \mu) = (f^{-1}.t).\chi\phi(w, \mu),$$

où les actions de \overline{T} dans les deux membres de l’égalité sont les deux actions définies plus haut. Cette formule assure que le morphisme ϕ passe au quotient par les actions respectives de \overline{T} au départ et à l’arrivée. Donc ϕ induit un morphisme

$$\tilde{\phi} : \overline{W}_{f.\chi} \rightarrow \overline{W}_\chi$$

et on vérifie que ce morphisme s’inscrit dans le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{W}_{f.\chi} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \overline{W}_\chi \\
 \downarrow \mathbb{G}_m & & \downarrow \mathbb{G}_m \\
 \overline{Z} & \xrightarrow{f} & \overline{Z}
 \end{array}$$

qui assure que la classe $[\overline{W}_{f,\chi}]$ du torseur $\overline{W}_{f,\chi} \xrightarrow{\mathbb{G}_m} \overline{Z}$ dans le groupe de Picard de \overline{Z} s'obtient en faisant agir f sur la classe $[\overline{W}_\chi]$ du torseur $\overline{W}_\chi \xrightarrow{\mathbb{G}_m} \overline{Z}$, c'est-à-dire que l'on a bien la relation $[\overline{W}_{f,\chi}] = f^*[\overline{W}_\chi]$, ce qui se réécrit

$$\lambda(f.\chi) = f.\lambda(\chi).$$

Donc λ est \overline{F} -équivariant.

On conclut la preuve du [lemme 7](#) de la façon suivante : pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, on note ${}^{\gamma}m$ l'action de γ sur M^σ et $\text{Pic}(\overline{Z}^\sigma)$, et ${}^{\gamma}m$ l'action de γ sur M et $\text{Pic}(\overline{Z})$. On a alors $\lambda({}^{\gamma}\chi) = \lambda(({}^{\gamma}\chi) \circ \text{int}(\sigma_\gamma^{-1})) = \lambda(\sigma_\gamma.({}^{\gamma}\chi))$ par définition (où $\text{int}(a) : t \mapsto ata^{-1}$). Or par la \overline{F} -équivariance de λ , on a la relation $\lambda(\sigma_\gamma.({}^{\gamma}\chi)) = \sigma_\gamma.\lambda({}^{\gamma}\chi)$, et enfin λ est Galois-équivariant pour l'action non-tordue, c'est-à-dire $\lambda({}^{\gamma}\chi) = {}^{\gamma}\lambda(\chi)$, d'où $\sigma_\gamma.\lambda({}^{\gamma}\chi) = \sigma_\gamma.{}^{\gamma}\lambda(\chi) = {}^{\gamma}\lambda(\chi)$. En conclusion, on a bien montré que

$$\lambda({}^{\gamma}\chi) = {}^{\gamma}\lambda(\chi),$$

ce qui prouve le [lemme 7](#). □

Remarque. Ce lemme est à rapprocher de la preuve de [[Harari et Skorobogatov 2005](#), proposition 2.5].

On déduit de ce Γ_k -morphisme λ^σ un nouveau morphisme de Γ_k -modules, noté $\lambda' : M^\sigma \rightarrow \text{Pic}(\overline{X}')$, obtenu en composant λ^σ avec le morphisme naturel $\text{Pic}(\overline{Z}^\sigma) \rightarrow \text{Pic}(\overline{X}')$. Puisque $\bar{k}[X']^* = \bar{k}^*$ (en effet, X' est géométriquement intègre par construction, et X est propre, $X' \rightarrow X$ est fini, donc X' est propre), ce morphisme définit un élément $\partial(\lambda') \in H^2(k, T^\sigma)$ via la suite exacte de la théorie de la descente abélienne (voir par exemple [[Colliot-Thélène et Sansuc 1987](#), théorème 1.5.1] ou [[Skorobogatov 2001](#), corollaire 2.3.9]) :

$$0 \rightarrow H^1(k, T^\sigma) \rightarrow H^1(X', T^\sigma) \xrightarrow{\text{type}} \text{Hom}_k(M^\sigma, \text{Pic}(\overline{X}')) \xrightarrow{\partial} H^2(k, T^\sigma) \quad (1)$$

On va alors identifier cet élément $\partial(\lambda')$ avec l'élément η'_σ dans $H^2(k, T^\sigma)$. Remarquons également que la suite exacte

$$0 \rightarrow T \rightarrow G' \rightarrow F \rightarrow 1$$

et l'élément $[\sigma] \in H^1(k, F)$ définissent un élément $\Delta(\sigma) \in H^2(k, T^\sigma)$ qui est l'obstruction à relever $[\sigma]$ en un élément de $H^1(k, G')$ [[Serre 1973](#), I.5.6].

Lemme 8. *Sous les hypothèses de la [proposition 5](#), les trois classes $\partial(\lambda')$, $\Delta(\sigma)$ et η'_σ coïncident (au signe près) dans $H^2(k, T^\sigma)$.*

Admettant ce lemme, on conclut la preuve de la [proposition 5](#) de la façon suivante : par le corollaire 6.1.3(1) de [[Skorobogatov 2001](#)], les faits que $X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ soit non-vidé et que $\bar{k}[X']^* = \bar{k}^*$ assurent l'existence d'un X' -torseur sous T^σ de type λ' (il suffisait pour cela d'avoir $X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}\lambda'} \neq \emptyset$: voir [[Skorobogatov 2001](#), p. 113])

pour la définition de $\text{Br}_{\lambda'}$, ce qui assure que $\partial(\lambda') = 0$ par la théorie de la descente (voir la suite exacte (1), page 250), et donc que $\eta'_\sigma = 0$ dans $H^2(k, T^\sigma)$ par le lemme 8. Pour finir, on utilise la proposition 6.5 de [Borovoi 1993] qui assure que la nullité de η'_σ implique que la classe $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ est neutre (puisque η_σ est neutre localement partout par le lemme 6). Cela termine la preuve de la proposition 5 (en admettant le lemme 8), puisqu'alors U est dominé par un espace principal homogène de G , dont la classe $[\tau] \in H^1(k, G)$ s'envoie sur $[\sigma] \in H^1(k, F)$. \square

Preuve du lemme 8. Avant tout, fixons pour tout $\gamma \in \Gamma_k$ un élément $a_\gamma \in \bar{G}'$ relevant $\sigma_\gamma \in \bar{F}$, de sorte que l'application $\gamma \mapsto a_\gamma$ soit localement constante.

Identifions d'abord les classes η'_σ et $\Delta(\sigma)$ dans $H^2(k, T^\sigma)$: η_σ est représenté par un 2-cocycle non-abélien (f, g) , avec $f : \Gamma_k \rightarrow \text{SAut}(\bar{H})$ et $g : \Gamma_k \times \Gamma_k \rightarrow \bar{H}$. On sait alors qu'un cocycle représentant η'_σ est donné par $z' : \Gamma_k \times \Gamma_k \rightarrow \bar{T}^\sigma$ tel que $z'_{s,t} = r(g_{s,t})$, où $r : H \rightarrow T$ est le morphisme quotient naturel. D'après l'appendice de [Borovoi 1993], $g_{s,t} = b_s \cdot ({}^s b_t) \cdot b_{st}^{-1}$, où $b : \Gamma_k \rightarrow G(\bar{k})$ est une application continue telle que ${}^s u_0 = u_0 \cdot b_s$ pour tout $s \in \Gamma_k$, $u_0 \in \bar{U}$ étant par exemple le point de U correspondant au neutre de F . Or on a vérifié dans la preuve du second point du lemme 6 qu'alors b_s s'envoie sur σ_s dans \bar{F} , ce qui assure que l'image de b_s dans \bar{G}' est un relevé de σ_s , que l'on peut donc supposer égal à a_s . Cela montre que le cocycle $z'_{s,t}$ est cohomologue au cocycle $s, t \mapsto a_s \cdot ({}^s a_t) \cdot a_{st}^{-1}$, qui est un représentant de $\Delta(\sigma)$ [Serre 1973, I.5.6], ce qui permet bien d'identifier $\Delta(\sigma)$ et η'_σ dans $H^2(k, T^\sigma)$ (au signe près).

Construisons désormais une nouvelle classe $\text{Cl}(E) \in H^2(k, T^\sigma)$ coïncidant (au signe près) avec $\partial(\lambda')$. On considère pour cela le diagramme suivant, où $\phi : \bar{Z}^\sigma \rightarrow \bar{Z}$ est l'isomorphisme canonique de schémas :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{V}' & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \bar{V} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \bar{W} \\
 \downarrow \bar{T}^\sigma & & \downarrow \bar{T}^\sigma & & \downarrow \bar{T} \\
 \bar{X}' & \xrightarrow{\psi} & \bar{Z}^\sigma & \xrightarrow{\phi} & \bar{Z} \\
 \downarrow \bar{F}' & & \downarrow \bar{F}^\sigma & & \downarrow \bar{F} \\
 \bar{X} & \xrightarrow{=} & \bar{X} & \xrightarrow{=} & \bar{X}
 \end{array} \quad \bar{G}' \tag{2}$$

les deux carrés du haut étant cartésiens (c'est-à-dire \bar{V} est défini comme le produit fibré de \bar{W} et \bar{Z}^σ au-dessus de \bar{Z} , et \bar{V}' comme le produit fibré de \bar{W} et \bar{X}' au-dessus de \bar{Z}). Alors $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme de \bar{Z} -torseurs, et les trois tosseurs $\bar{W} \rightarrow \bar{Z}$, $\bar{V} \rightarrow \bar{Z}^\sigma$ et $\bar{V}' \rightarrow \bar{X}'$ ont pour types respectifs les morphismes de Γ_k -modules $\lambda : M \rightarrow \text{Pic}(\bar{Z})$, $\lambda^\sigma : M^\sigma \rightarrow \text{Pic}(\bar{Z}^\sigma)$ et $\lambda' : M^\sigma \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}')$. Ces morphismes étant Γ_k -équivariants (grâce au lemme 7), on peut définir suivant [Harari et Skorobogatov 2002, définition 3.6] le sous-groupe $E := \text{SAut}_{T^\sigma}(\bar{V}'/X')$ de $\text{SAut}(\bar{V}'/X')$ formé

des automorphismes semi-linéaires φ tels que $\varphi(\bar{v}' \cdot \bar{t}) = \varphi(\bar{v}') \cdot ({}^q(\varphi)\bar{t})$ pour tout $\bar{v}' \in \bar{V}'$ et $\bar{t} \in \bar{T}$, où q est le morphisme $\text{SAut}(\bar{V}'/X') \rightarrow \Gamma_k$ introduit à la page 240 et l'action de $q(\varphi)$ sur \bar{t} est donnée par la k -forme T^σ de \bar{T} . Ce groupe E s'intègre alors dans la suite exacte suivante (où q' désigne la restriction de q à E) :

$$1 \rightarrow T^\sigma(\bar{k}) \rightarrow E \xrightarrow{q'} \Gamma_k \rightarrow 1$$

et cela permet de définir une classe $\text{Cl}(E) \in H^2(k, T^\sigma)$ qui est l'obstruction à descendre le torseur $\bar{V}' \rightarrow \bar{X}'$ en un X' -torseur de type λ' (voir [Harari et Skorobogatov 2002, section 3.3]).

Alors les deux classes $\partial(\lambda')$ et $\text{Cl}(E)$ coïncident au signe près dans $H^2(k, T^\sigma)$: c'est exactement la proposition 3.7(3) de [Harari et Skorobogatov 2002].

Pour finir la preuve du lemme 8, on va identifier (au signe près) $\text{Cl}(E)$ et $\Delta(\sigma)$. Pour cela, on a besoin du résultat suivant (pour traiter le cas où Z n'est pas géométriquement intègre) :

Lemme 9. *Sous les hypothèses de la proposition 5, on a un diagramme commutatif exact de la forme*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) & \longrightarrow & \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) & \xrightarrow{q} & \Gamma_k \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \psi^* & & \downarrow \psi^* & & \downarrow = \\ 1 & \longrightarrow & \overline{T^\sigma}(\overline{X}') = \overline{T^\sigma}(\bar{k}) & \longrightarrow & E = \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}'/X') & \xrightarrow{q'} & \Gamma_k \longrightarrow 1 \end{array} \quad (3)$$

Avant de prouver ce résultat, on le suppose connu afin d'achever la démonstration du lemme 8. On définit une section $\gamma \mapsto \varphi_\gamma$ de $q : \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \rightarrow \Gamma_k$ de la façon suivante : pour $\gamma \in \Gamma_k$, on construit grâce au diagramme (2) un morphisme φ_γ défini par :

$$\begin{aligned} \overline{V} &\longrightarrow \overline{V} \\ v &\longmapsto \varphi_\gamma(v) := \tilde{\phi}^{-1}({}^\gamma \tilde{\phi}(v) \cdot a_\gamma^{-1}) \end{aligned}$$

où $a_\gamma \in \overline{G}'(\bar{k})$ agit sur \overline{W} grâce à la structure de \overline{X} -torseur sous \overline{G}' de \overline{W} . On vérifie facilement que $\gamma \mapsto \varphi_\gamma$ définit bien une section (ensembliste) de q . Avec le diagramme commutatif (3), on en déduit une section $\varphi' := \psi^* \circ \varphi$ de $q' : E \rightarrow \Gamma_k$.

On calcule alors $\varphi_s \cdot \varphi_t \cdot \varphi_{st}^{-1} \in \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma})$. On trouve facilement (en utilisant que $\tilde{\phi}$ est $\overline{T^\sigma}$ -équivariant) que $\varphi_s \cdot \varphi_t \cdot \varphi_{st}^{-1} = a_{st} \cdot ({}^s a_t)^{-1} \cdot a_s^{-1}$ dans $\overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma})$ (où on envoie $\overline{T^\sigma}(\bar{k})$ dans $\overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma})$ via le morphisme structural $\overline{Z^\sigma} \rightarrow \text{Spec } \bar{k}$). Appliquons maintenant $\psi^* : \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) \rightarrow \overline{T^\sigma}(\bar{k})$: on obtient alors, par commutativité du diagramme (3) et par construction de φ' à partir de φ , l'égalité $\varphi'_s \cdot \varphi'_t \cdot \varphi'_{st}{}^{-1} = a_{st} \cdot ({}^s a_t)^{-1} \cdot a_s^{-1}$ dans $\overline{T^\sigma}(\bar{k})$.

Or par définition de $\text{Cl}(E)$, le 2-cocycle $s, t \mapsto \varphi'_s \cdot \varphi'_t \cdot \varphi'_{st}{}^{-1}$ est un représentant de $\text{Cl}(E) \in H^2(k, T^\sigma)$, et le 2-cocycle $s, t \mapsto a_s \cdot ({}^s a_t) \cdot a_{st}^{-1}$ est un représentant de la classe $\Delta(\sigma)$, donc les classes $\Delta(\sigma)$ et $\text{Cl}(E)$ coïncident au signe près dans

$H^2(k, T^\sigma)$. On a donc montré que $\Delta(\sigma) = \text{Cl}(E)$ au signe près dans $H^2(k, T^\sigma)$, d'où le **lemme 8**. \square

Preuve du lemme 9. Suivant [Harari et Skorobogatov 2002, proposition 3.7(1)], l'exactitude de la seconde ligne est assurée par le fait que le morphisme λ' correspondant est Γ_k -équivariant. L'exactitude de la première ligne est due à l'existence d'une section ensembliste φ de q (voir paragraphe précédent).

La flèche $\psi^* : \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) \rightarrow \overline{T^\sigma}(\overline{X'})$ du **lemme 9** est la flèche naturelle induite par $\psi : X' \rightarrow Z^\sigma$.

Définissons désormais la flèche $\psi^* : \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \rightarrow \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}'/X')$. Soit $\gamma \in \Gamma_k$, et prenons $\varphi \in \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma)$ tel que $q(\varphi) = \gamma$. On considère le diagramme suivant de morphismes de schémas, les flèches $\text{pr}_1, \tilde{\psi}, \psi$ et can étant celles qui apparaissent dans le diagramme (2), et γ^* désignant l'action de Galois de γ sur \overline{X}' :

$$\begin{array}{ccc} \overline{V}' & \xrightarrow{\varphi \circ \tilde{\psi}} & \overline{V} \\ \gamma^{*-1} \circ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{can} \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\psi} & \overline{Z^\sigma} \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif, puisque si $v' \in \overline{V}'$, l'image de $\varphi(\tilde{\psi}(v'))$ dans $\overline{Z^\sigma}$ coïncide avec $\gamma^{*-1}(z)$, où z est l'image de $\tilde{\psi}(v')$ dans $\overline{Z^\sigma}$. Or le morphisme $\psi : \overline{X}' \rightarrow \overline{Z^\sigma}$ est Γ_k -équivariant, donc cela assure que le carré précédent commute. Par conséquent, par propriété universelle du produit fibré, cela définit un unique morphisme $\beta : \overline{V}' \rightarrow \overline{V}'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{V}' & \xrightarrow{\varphi \circ \tilde{\psi}} & \overline{V} \\ \beta \searrow & & \downarrow \text{can} \\ \overline{V}' & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \overline{V} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{can} \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\psi} & \overline{Z^\sigma} \end{array} \quad (4)$$

$(\gamma^*)^{-1} \circ \text{pr}_1$

Ce diagramme assure que β est un élément de $\text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}'/X')$, tel que $q(\beta) = \gamma$.

On a donc construit une application $\psi^* : \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \rightarrow \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}'/X')$ définie par $\psi^*(\varphi) := \beta$. C'est un morphisme de groupes par unicité du morphisme β dans le diagramme (4), et ce morphisme est bien compatible avec q et q' . Pour finir, on vérifie que l'on a bien un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) & \longrightarrow & \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) & \xrightarrow{q} & \Gamma_k \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \psi^* & & \downarrow \psi^* & & \downarrow = \\ 1 & \longrightarrow & \overline{T^\sigma}(\overline{X}') = \overline{T^\sigma}(\overline{k}) & \longrightarrow & E = \text{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}'/X') & \xrightarrow{q'} & \Gamma_k \longrightarrow 1 \end{array}$$

en utilisant le fait que $\tilde{\psi} : \bar{V}' \rightarrow \bar{V}$ est T^σ -équivariant. □

Remerciements

Je remercie chaleureusement D. Harari pour son soutien et ses nombreux commentaires sur ce texte. Je remercie également J. L. Colliot-Thélène, B. Poonen et A. Skorobogatov pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses nombreuses suggestions pertinentes.

References

- [Borovoi 1993] M. V. Borovoi, “Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology”, *Duke Math. J.* **72**:1 (1993), 217–239. [MR 94j:11042](#) [Zbl 0849.12011](#)
- [Colliot-Thélène et Sansuc 1987] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles, II”, *Duke Math. J.* **54**:2 (1987), 375–492. [MR 89f:11082](#) [Zbl 0659.14028](#)
- [Flicker et al. 1998] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer et R. Sujatha, “Grothendieck’s theorem on non-abelian H^2 and local-global principles”, *J. Amer. Math. Soc.* **11**:3 (1998), 731–750. [MR 99a:11129](#) [Zbl 0893.14015](#)
- [Harari 2002] D. Harari, “Groupes algébriques et points rationnels”, *Math. Ann.* **322**:4 (2002), 811–826. [MR 2003e:14038](#) [Zbl 1042.14004](#)
- [Harari et Skorobogatov 2002] D. Harari et A. N. Skorobogatov, “Non-abelian cohomology and rational points”, *Compositio Math.* **130**:3 (2002), 241–273. [MR 2003b:11056](#) [Zbl 1019.14012](#)
- [Harari et Skorobogatov 2005] D. Harari et A. Skorobogatov, “Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surfaces”, *Int. Math. Res. Not.* **2005**:52 (2005), 3203–3228. [MR 2006m:14031](#) [Zbl 1099.14008](#)
- [de Jong 2005] A. J. de Jong, “A result of Gabber”, prépublication, 2005, disponible sur <http://www.math.columbia.edu/~dejong/papers/2-gabber.pdf>.
- [Poonen 2008] B. Poonen, “Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers”, prépublication, 2008, disponible sur <http://math.mit.edu/~poonen/papers/insufficiency.pdf>.
- [Serre 1973] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5e éd., Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer, Berlin, 1973. [MR 53 #8030](#) [Zbl 0259.12011](#)
- [Skorobogatov 1999] A. N. Skorobogatov, “Beyond the Manin obstruction”, *Invent. Math.* **135**:2 (1999), 399–424. [MR 2000c:14022](#) [Zbl 0951.14013](#)
- [Skorobogatov 2001] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. [MR 2002d:14032](#) [Zbl 0972.14015](#)
- [Skorobogatov 2008] A. Skorobogatov, “Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction”, prépublication, 2008, disponible sur <http://www.ma.ic.ac.uk/~anskor/EQU.PDF>.
- [Stoll 2007] M. Stoll, “Finite descent obstructions and rational points on curves”, *Algebra Number Theory* **1**:4 (2007), 349–391. [MR 2008i:11086](#)

Communicated by Bjorn Poonen

Received 2008-07-11

Revised 2008-10-21

Accepted 2008-11-18

cyril.demarche@math.u-psud.fr *Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, 91405 Orsay Cedex, France*
<http://www.math.u-psud.fr/~demarche/>