Algebra & Number Theory

Volume 12

2018

No. 5

Représentations de réduction unipotente pour SO($2n+1$) III: Exemples de fronts d'onde

Jean-Loup Waldspurger

msp

ALGEBRA AND NUMBER THEORY 12:5 (2018)
dx.doi.org/10.2140/ant.2018.12.1107

Représentations de réduction unipotente pour SO($2n+1$) III: Exemples de fronts d'onde

Jean-Loup Waldspurger

Soit G un groupe SO($2n+1$) défini sur un corps p-adique. Nous calculons le front d'onde des représentations irréductibles anti-tempérées de $G(F)$ qui sont de réduction unipotente. Le front d'onde d'une telle représentation est l'orbite orthogonale duale à l'orbite symplectique qui intervient dans le paramètre d'Arthur de cette représentation.

Let G be a group SO($2n+1$) defined over a p-adic field. We compute the wave front set of the antitempered irreducible representations of $G(F)$ which are of unipotent reduction. The wave front set of such representations is the orthogonal orbit dual to the symplectic orbit appearing in the Arthur's parametrization of the representation.

Introduction

Cet article est la suite de [Waldspurger 2018 ; 2016b]. Le corps de base F est local, non-archimédien et de caractéristique nulle. On note p sa caractéristique résiduelle. Un entier $n \geq 1$ est fixé pour tout l'article. On suppose $p > 6n+4$. On introduit les groupes G_{iso} et G_{an} suivants. Le groupe G_{iso} est le groupe spécial orthogonal d'un espace V_{iso} de dimension $2n+1$ sur F muni d'une forme quadratique Q_{iso} et G_{an} est le groupe spécial orthogonal d'un espace V_{an} de dimension $2n+1$ sur F muni d'une forme quadratique Q_{an}. Le groupe G_{iso} est déployé et G_{an} en est la forme intérieure non déployée. Pour un indice $\sharp =$ iso ou an, on note $\text{Irr}_{\text{tunip},\sharp}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$ qui sont tempérées et de réduction unipotente, cf. [Waldspurger 2018, §1.3]

MSC2010 : 22E50.
Mots-clefs : representation of unipotent reduction, dual orbit, wave front set, unipotent orbit.

pour la définition de cette propriété. On note $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ la réunion disjointe de $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip,iso}}$ et $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip,an}}$. Pour une partition symplectique λ de $2n$, fixons un homomorphisme algébrique $\rho_\lambda : \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}(2n;\mathbb{C})$ paramétré par λ, cf. [Waldspurger 2018, §1.3]. On note $Z(\lambda)$ le commutant dans $\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{C})$ de l'image de ρ_λ. Soit $s \in Z(\lambda)$ un élément semi-simple dont toutes les valeurs propres sont de module 1. On note $Z(s,\lambda)$ le commutant de s dans $Z(\lambda)$, $\mathbf{Z}(\lambda,s)$ son groupe de composantes connexes et $\mathbf{Z}(\lambda,s)^\vee$ le groupe des caractères de $\mathbf{Z}(\lambda,s)$. La paramétrisation de Langlands prend la forme suivante, cf. [Waldspurger 2018, §1.3] : $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ est paramétré par l'ensemble des classes de conjugaison (en un sens facile à préciser) de triplets (λ,s,ϵ), où λ et s sont comme ci-dessus et $\epsilon \in \mathbf{Z}(s,\lambda)^\vee$. On note $\mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ cet ensemble de triplets. Ce paramétrage a été obtenu par différents auteurs : Lusztig [1995], Mœglin [1996b, théorème 5.2] et Arthur [2013, théorème 2.2.1] dans le cas du groupe G_{iso}.

Dans [Mœglin et Waldspurger 2003; Waldspurger 2016b], on a montré que les représentations construites par Lusztig vérifiaient les propriétés de compatibilité à l'endoscopie qui les caractérisent. En particulier, dans le cas du groupe G_{iso}, ces représentations sont les mêmes que celles d'Arthur. Pour $(\lambda,s,\epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip}}$, on note $\pi(\lambda,s,\epsilon)$ la représentation tempérée qui lui est associée par Lusztig. L'involution introduite par Zelevinsky dans le cas du groupe $\mathrm{GL}(n)$ a été généralisée par Aubert et par Schneider et Stuhler aux groupes réductifs quelconques. On la note D et on pose $\delta(\lambda,s,\epsilon) = D(\pi(\lambda,s,\epsilon))$.

Soit $\sharp =$ iso ou an et soit π une représentation admissible irréductible de $G_\sharp(F)$. Notons $\mathfrak{g}_\sharp$ l'algèbre de Lie de $G_\sharp$. Harish-Chandra a prouvé que, dans un voisinage de l'origine, le caractère de π, descendu par l'exponentielle à $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, était combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. Fixons une clôture algébrique $\bar{F}$ de F et notons $\bar{\mathcal{N}}(\pi)$ l'ensemble des orbites nilpotentes $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ dans $\mathfrak{g}_\sharp(\bar{F})$ vérifiant la condition suivante : il existe une orbite nilpotente $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, qui est incluse dans $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ et qui intervient avec un coefficient non nul dans le développement ci-dessus du caractère de π. On dit que π admet un front d'onde si $\bar{\mathcal{N}}(\pi)$ admet un unique élément maximal. Dans ce cas, on dit que cet élément maximal est le front d'onde de π. Les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_\sharp(\bar{F})$ sont paramétrées par les partitions orthogonales de $2n+1$ et nous identifierons ces deux ensembles. On conjecture (ce qui est peut-être hasardeux) que toute représentation admissible irréductible admet un front d'onde. Signalons que, dans le cas où le corps de base est non pas p-adique, mais réel, la notion de front d'onde est également définie et se révèle importante, cf. par exemple [Barbasch et Vogan 1985].

En modifiant quelque peu une construction de Spaltenstein, on définit une "dualité" qui envoie une partition symplectique λ de $2n$ sur une partition orthogonale $d(\lambda)$ de $2n+1$. La partition $d(\lambda)$ est toujours spéciale et la dualité d n'est pas bijective (par contre, sa restriction au sous-ensemble des partitions symplectiques spéciales de $2n$ est une bijection entre cet ensemble et celui des partitions orthogonales spéciales de $2n+1$). On démontre dans cet article le résultat suivant.

Théorème. *Soit* $(\lambda,s,\epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip}}$. *Alors la représentation* $\delta(\lambda,s,\epsilon)$ *admet un front d'onde et celui-ci est la partition* $d(\lambda)$.

Remarquons que l'on retrouve dans notre cas particulier le théorème 1.4 de [Mœglin 1996a] : ce front d'onde est une partition spéciale. Notre théorème n'est pas très nouveau. Mœglin [1996b, théorème 3.3.5] a démontré un résultat similaire. Ses hypothèses étaient plus générales que les nôtres. D'une part, elle considérait tous les groupes classiques et pas seulement les groupes spéciaux orthogonaux. Surtout, elle considérait les représentations dont le paramètre de Langlands, sous sa forme habituelle, se restreint au groupe de Weil en une somme de caractères d'ordre au plus 2, éventuellement ramifiés. Nous nous limitons au cas de réduction unipotente, ce qui exclut les caractères ramifiés. Toutefois, notre résultat n'est pas inclus dans celui de [Mœglin 1996b] : avec nos notations, celui-ci suppose que les termes de λ sont tous distincts. La démonstration est aussi entièrement différente.

Soit $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\text{tunip}}$, et posons $\delta = \delta(\lambda, s, \epsilon)$. Notons $\sharp$ l'indice iso ou an tel que δ soit une représentation de $G_\sharp(F)$. Dans [Waldspurger 2016a], on a donné une formule qui calcule la restriction du caractère de δ aux éléments compacts de $G_\sharp(F)$ (ceux qui sont contenus dans un sous-groupe compact). A fortiori cette formule calcule la restriction du caractère à un voisinage de l'origine. Cette restriction est somme de distributions que l'on peut calculer si l'on connaît les restrictions de δ aux différents sous-groupes compacts maximaux de $G_\sharp(F)$, ou plus exactement les représentations des groupes "résiduels" qui s'en déduisent. La construction de Lusztig donne les renseignements voulus. A partir de là, en utilisant de nombreux travaux de Lusztig (faisceaux-caractères, correspondance de Springer généralisée, etc.), on traduit l'assertion à démontrer en termes de représentations de groupes de Weyl. Il s'agit en gros de savoir quelles sont les représentations qui peuvent intervenir dans certaines restrictions d'une représentation d'un produit de groupes de Weyl déterminée par δ. C'est un problème combinatoire que nous avons longuement étudié dans [Waldspurger 2001] et les résultats de cette référence permettent de conclure.

Remarque. Dans [Waldspurger 2001], le groupe était supposé non ramifié, ce qui est le cas de G_{iso} mais pas de G_{an}. En fait, cette hypothèse ne servait qu'à utiliser des résultats d'homogénéité qui n'étaient alors connus que sous cette hypothèse restrictive. Ils sont maintenant connus sans cette hypothèse, cf. [DeBacker 2002], et la plupart des résultats de [Waldspurger 2001], en particulier ceux que l'on utilisera, s'étendent au cas général.

Évidemment, il serait tentant d'appliquer la même méthode non pas à la bête représentation $\delta(\lambda, s, \epsilon)$, mais à la représentation tempérée $\pi(\lambda, s, \epsilon)$. Indiquons où est le problème. Les représentations des groupes "résiduels" associés à $\delta(\lambda, s, \epsilon)$ sont bien calculées par Lusztig, mais en termes de représentations de groupes de Weyl peu explicites. Plus précisément, il apparaît des représentations non irréductibles dont la décomposition en composantes irréductibles est dictée par des variantes de polynômes de Kazhdan-Lusztig. Ces représentations sont notées $\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\epsilon}$ dans notre article, mais il ne s'agit plus du même couple λ, ϵ, notons-les ici $\boldsymbol{\rho}_{\nu,\tau}$. Il y a un ordre (partiel) naturel sur l'ensemble des représentations irréductibles et on contrôle très bien le terme minimal du développement de $\boldsymbol{\rho}_{\nu,\tau}$ en composantes irréductibles. Il s'avère que cela nous suffit pour conclure. Si l'on remplace $\delta(\lambda, s, \epsilon)$ par $\pi(\lambda, s, \epsilon)$, les représentations $\boldsymbol{\rho}_{\nu,\tau}$ sont remplacées par leur produit tensoriel avec sgn, le caractère signe du groupe de Weyl sous-jacent. Comme on peut s'y attendre, cela inverse l'ordre : on connaît le terme maximal du développement de $\text{sgn} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\nu,\tau}$. Mais maintenant, l'ordre va dans le mauvais sens et connaître le terme maximal ne permet plus de conclure.

1. Combinatoire

1.1. ***Partitions et représentations des groupes de Weyl.*** On appelle partition une classe d'équivalence de suites décroissantes finies de nombres entiers positifs ou nuls, deux suites étant équivalentes si elles ne diffèrent que par des termes nuls. Pour une telle partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r)$, on pose $S(\lambda) = \sum_{j=1,\dots,r} \lambda_j$ et on note $l(\lambda)$ le plus grand entier j tel que $\lambda_j \neq 0$. Cas particulier : on note $\varnothing$ la partition $(0, \dots, 0)$ et on pose $l(\varnothing) = 0$. On note mult_λ la fonction sur $\mathbb{N} - \{0\}$ telle que, pour tout i dans cet ensemble, $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ est le nombre d'entiers j tels que $\lambda_j = i$. On pose aussi $\mathrm{mult}_\lambda(\geq i) = \sum_{i' \geq i} \mathrm{mult}_\lambda(i')$. On note $\mathrm{Jord}(\lambda)$ l'ensemble des $i \geq 1$ tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. A équivalence près, on peut supposer $r \geq k$ et on pose $S_k(\lambda) = \sum_{j=1,\dots,k} \lambda_j$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des partitions λ telles que $S(\lambda) = N$. Plus généralement, pour un entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{P}_k(N)$ l'ensemble des k-uples de partitions $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tels que $S(\lambda_1) + \cdots + S(\lambda_k) = N$. On utilisera plus loin des variantes de cette notation, par exemple $\mathcal{P}_k^{\mathrm{symp}}(2N)$ etc. On définit de la façon usuelle la transposition $\lambda \mapsto {}^t\lambda$ dans $\mathcal{P}(N)$ et les applications

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 \cup \lambda_2$$

qui envoient $\mathcal{P}_2(N)$ dans $\mathcal{P}(N)$. On définit un ordre partiel sur $\mathcal{P}(N)$: pour deux partitions $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}(N)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ si et seulement si $S_k(\lambda_1) \leq S_k(\lambda_2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Plusieurs notations ci-dessus se généralisent aux suites finies $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de nombres réels pas forcément décroissantes. Par exemple, si k est un entier tel que $0 \leq k \leq r$, on pose $S_k(\alpha) = \sum_{j=1,\dots,k} \alpha_j$. On utilisera aussi la notation $\alpha_{\leq k} = S_k(\alpha)$. Si α et β sont deux suites de même longueur, on note $\alpha + \beta$ la suite $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_r + \beta_r)$.

Pour tout ensemble X, on note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel complexe de base X. Pour tout groupe fini W, on note $\widehat{W}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de W. En identifiant une telle représentation à son caractère, l'espace $\mathbb{C}[X]$ s'identifie à celui des fonctions de W dans $\mathbb{C}$ qui sont invariantes par conjugaison.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\mathfrak{S}_N$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. On sait paramétrer $\widehat{\mathfrak{S}}_N$ par $\mathcal{P}(N)$, on note $\rho(\lambda)$ la représentation irréductible correspondant à une partition λ (en particulier la représentation triviale de $\mathfrak{S}_N$ est paramétrée par la partition $\lambda = (n)$). On note sgn le caractère signe usuel de $\mathfrak{S}_N$. Si une représentation irréductible ρ est paramétrée par la partition λ, $\rho \otimes \mathrm{sgn}$ est paramétrée par ${}^t\lambda$.

On note W_N le groupe de Weyl d'un système de racines de type B_N ou C_N (avec la convention $W_0 = \{1\}$). On sait paramétrer $\widehat{W}_N$ par $\mathcal{P}_2(N)$, on note $\rho(\alpha, \beta)$ la représentation irréductible correspondant à un couple de partitions (α, β) (en particulier, la représentation triviale est paramétrée par $((N), \varnothing)$).On note sgn le caractère signe usuel de W_N et sgn_{CD} le caractère dont le noyau est le sous-groupe W_N^D d'un système de racines de type D_N. Si une représentation irréductible ρ est paramétrée par le couple de partitions (α, β), $\rho \otimes \mathrm{sgn}$ est paramétrée par $({}^t\beta, {}^t\alpha)$ et $\rho \otimes \mathrm{sgn}_{CD}$ est paramétrée par (β, α).

Supposons $N \geq 1$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N)$, les restrictions à W_N^D de $\rho(\alpha, \beta)$ et $\rho(\beta, \alpha)$ sont équivalentes. Si $\alpha \neq \beta$, ces restrictions sont irréductibles, on les note $\rho^D(\alpha, \beta)$ ou $\rho^D(\beta, \alpha)$. Si $\alpha = \beta$, la restriction de $\rho(\alpha, \alpha)$ à W_N^D se décompose en deux représentations irréductibles, que l'on note $\rho^D(\alpha, \alpha, +)$ et

$\rho^D(\alpha, \alpha, -)$. Elles sont conjuguées par un élément de $W_N - W_N^D$ et on n'aura pas besoin de les distinguer. Toutes les représentations irréductibles de W_N^D sont ainsi obtenues.

1.2. ***Symboles.*** Pour tout ensemble fini X, on note $|X|$ le nombre d'éléments de X. Si X est un ensemble de nombres, on note $S(X)$ la somme des éléments de X. Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ sa partie entière.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Un symbole de rang N est une classe d'équivalence de couples (X, Y) de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, vérifiant la condition

$$S(X) + S(Y) - \left[\left(\tfrac{1}{2}(|X| + |Y| - 1)\right)^2\right] = N.$$

La relation d'équivalence est engendrée par les deux relations (qui préservent l'égalité précédente) :

$$(X, Y) \sim (X', Y') \qquad \text{où} \quad X' = \{x + 1;\, x \in X\} \cup \{0\}, \quad Y' = \{y + 1;\, y \in Y\} \cup \{0\};$$
$$(X, Y) \sim (Y, X).$$

Remarque. Par abus de terminologie, on appellera plutôt symbole un couple (X, Y) représentant une classe d'équivalence.

Le défaut d'un symbole (X, Y) est la valeur absolue de $|X| - |Y|$ (il ne dépend que de la classe d'équivalence de (X, Y)). Pour $D \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{S}_{N,D}$ l'ensemble des symboles de rang N et de défaut D.

On regroupe les symboles en familles : deux symboles sont dans la même famille si et seulement si on peut les représenter par des couples (X, Y) et (X', Y') tels que $X \cup Y = X' \cup Y'$ et $X \cap Y = X' \cap Y'$. La parité du défaut est constante sur chaque famille. Toute famille de symboles de défaut impair contient un unique symbole spécial, c'est-à-dire représenté par un couple (X, Y) de la forme $X = (x_1 \geq \cdots \geq x_{r+1})$, $Y = (y_1 \geq \cdots \geq y_r)$ et tel que

$$x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_r \geq x_{r+1}.$$

Toute famille de symboles de défaut pair contient un unique symbole spécial, c'est-à-dire représenté par un couple (X, Y) de la forme $X = (x_1 \geq \cdots \geq x_r)$, $Y = (y_1 \geq \cdots \geq y_r)$ et tel que

$$x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_r.$$

Soit (X, Y) un symbole de rang N. Fixons un entier d majorant les éléments de $X \cup Y$. Posons

$$X' = \{d, \ldots, 0\} - \{d - y;\, y \in Y\}, \quad Y' = \{d, \ldots, 0\} - \{d - x;\, x \in X\}.$$

On vérifie que (X', Y') est un symbole de rang N. A équivalence près, il ne dépend pas du choix de d et ne dépend que de la classe d'équivalence de (X, Y). Cette construction définit une "dualité" $(X, Y) \mapsto d(X, Y) = (X', Y')$ dans l'ensemble des symboles de rang N. Cette dualité conserve le défaut et est involutive : $d \circ d$ est l'identité. Elle se restreint en une involution du sous-ensemble des symboles spéciaux. Enfin, deux symboles sont dans une même famille si et seulement si leurs images par dualité le sont. Autrement dit, si (X, Y) est dans la famille du symbole spécial $(X^{\mathrm{sp}}, Y^{\mathrm{sp}})$, alors $d(X, Y)$ est dans la famille du symbole spécial $d(X^{\mathrm{sp}}, Y^{\mathrm{sp}})$.

Soit $\rho \in \widehat{W}_N$. Comme en 1.1, on lui associe un couple de partitions $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N)$. On choisit un entier $r \geq l(\alpha), l(\beta)$. On pose $X = \alpha + \{r, \dots, 0\}$, $Y = \beta + \{r-1, \dots, 0\}$. Alors (X, Y) est un symbole de rang N et de défaut 1 dont la classe ne dépend pas de r. On pose $\mathrm{symb}(\rho) = (X, Y)$. L'application $\mathrm{symb} : \widehat{W}_N \to \mathcal{S}_{N,1}$ ainsi définie est bijective. On a $\mathrm{symb}(\rho \otimes \mathrm{sgn}) = d \circ \mathrm{symb}(\rho)$.

Soit $\rho \in \widehat{W}^D_N$. Comme en 1.1, on lui associe un couple de partitions $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(N)$. On choisit un entier $r \geq l(\alpha), l(\beta)$. On pose $X = \alpha + \{r-1, \dots, 0\}$, $Y = \beta + \{r-1, \dots, 0\}$. Alors (X, Y) est un symbole de rang N et de défaut 0 dont la classe ne dépend pas de r. On pose $\mathrm{symb}(\rho) = (X, Y)$. L'application $\mathrm{symb} : \widehat{W}^D_N \to \mathcal{S}_{N,0}$ ainsi définie est surjective. Ses fibres ont un ou deux éléments, celles à deux éléments étant formées des couples de la forme $\rho(\alpha, \alpha, +)$, $\rho(\alpha, \alpha, -)$. On a $\mathrm{symb}(\rho \otimes \mathrm{sgn}) = d \circ \mathrm{symb}(\rho)$.

1.3. ***Correspondance de Springer, cas symplectique.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$ l'ensemble des partitions symplectiques de $2n$, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathcal{P}(2n)$ telles que $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ est pair pour tout entier i impair. Pour une telle partition, on note $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ l'ensemble des entiers $i \geq 2$ pairs tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$. Plus précisément, pour un entier $k \geq 1$, on note $\mathrm{Jord}^k_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ l'ensemble des $i \geq 2$ pairs tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) = k$.

On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(2n)$ l'ensemble des couples (λ, ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$. La correspondance de Springer généralisée établit une bijection entre $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(2n)$ et l'ensemble des couples (ρ, k) tels que

$$k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad k(k+1) \leq 2n; \qquad \rho \in \widehat{W}_{n-k(k+1)/2}.$$

On note $(\rho_{\lambda,\epsilon}, k_{\lambda,\epsilon})$ le couple associé à un élément $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(2n)$. L'entier $k_{\lambda,\epsilon}$ se calcule de la façon suivante. Notons $i_1 > \cdots > i_m > 0$ les entiers pairs i tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ soit impair. Posons

$$h = \sum_{j=1,\dots,m} (-1)^j (1 - \epsilon(i_j)).$$

Alors $k_{\rho,\epsilon} = \sup(h, -h-1)$. En particulier, si $\epsilon = 1$, c'est-à-dire $\epsilon(i) = 1$ pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$, on a $k_{\lambda,1} = 0$ et $\rho_{\lambda,1} \in \widehat{W}_n$.

Une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots) \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$ est spéciale si et seulement si λ_{2j-1} et λ_{2j} sont de même parité pour tout $j \geq 1$. Cela équivaut à ce que ${}^t\lambda$ soit symplectique. En notant $\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ l'ensemble des partitions symplectiques spéciales de $2n$, l'application $\lambda \mapsto {}^t\lambda$ est une involution de $\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$. Considérons une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ et définissons $i_1 > \cdots > i_m$ comme ci-dessus. Si m est pair, on pose $m' = m$; si m est impair, on pose $m' = m+1$ et $i_{m'} = 0$. On appelle intervalle de λ un ensemble Δ de l'une des formes suivantes :

— pour un entier $h = 1, \dots, m'/2$, Δ est l'ensemble des i tels que $i = 0$ ou $i \geq 1$ et $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$ et tels que $i_{2h-1} \geq i \geq i_{2h}$;

— $\Delta = \{i\}$ où i est un entier pair tel que $i = 0$ ou $i \geq 2$ et $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$ et tel qu'il n'existe pas d'entier $h = 1, \dots, m'/2$ de sorte que $i_{2h-1} \geq i \geq i_{2h}$.

Parce que λ est spéciale, on vérifie que les intervalles sont formés d'entiers pairs (c'est évident dans le deuxième cas ci-dessus, un peu moins dans le premier). Ils forment une partition de l'ensemble $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)\cup\{0\}$. On ordonne les intervalles : $\Delta>\Delta'$ si $i>i'$ pour tous $i\in\Delta$, $i'\in\Delta'$. On note $\Delta_{\min}$ le plus petit intervalle (c'est celui qui contient 0). On note $\mathrm{Int}(\lambda)$ l'ensemble des intervalles de λ.

L'application $\lambda\mapsto \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ est une bijection de $\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ sur l'ensemble des symboles spéciaux de rang n et de défaut 1. Pour $\lambda\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$, on a défini en [Waldspurger 2001, VIII.17] une bijection fam entre la famille du symbole $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et l'ensemble des

$$(\tau,\delta)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}\quad \text{tels que }\ \tau(\Delta_{\min})=\delta(\Delta_{\min})=0.$$

Soit $\lambda\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$. Il existe une unique partition spéciale $\mathrm{sp}(\lambda)\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ telle que $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et $\mathrm{symb}(\rho_{\mathrm{sp}(\lambda),1})$ soient dans la même famille. Il est connu que $\lambda\leq\mathrm{sp}(\lambda)$ et que $\mathrm{sp}(\lambda)$ est la plus petite partition symplectique spéciale λ' telle que $\lambda\leq\lambda'$. Plus généralement, on a le lemme suivant.

Lemme. (i) *Soit* $(\lambda,\epsilon)\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(2n)$, *supposons* $k_{\lambda,\epsilon}=0$. *Notons* $\mathrm{sp}(\lambda,\epsilon)$ *l'unique partition spéciale telle que* $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$ *et* $\mathrm{symb}(\rho_{\mathrm{sp}(\lambda,\epsilon),1})$ *soient dans la même famille. Alors* $\lambda\leq\mathrm{sp}(\lambda,\epsilon)$.

(ii) *Soit* $\lambda\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$. *Pour* $\epsilon\in\{\pm1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) $k_{\lambda,\epsilon}=0$ *et* $\mathrm{sp}(\lambda,\epsilon)=\lambda$;

(b) ϵ *est constant sur tout* $\Delta\in\mathrm{Int}(\lambda)$ *et, dans le cas où* $\Delta_{\min}\neq\{0\}$, $\epsilon(i)=1$ *pour tout* $i\in\Delta_{\min}-\{0\}$.

(iii) *Soit* $\lambda\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$. *L'application* $\epsilon\mapsto\mathrm{fam}\circ\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$ *est une bijection entre l'ensemble des* ϵ *décrits au* (ii) *et le sous-ensemble des*

$$(\tau,\delta)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}\quad \textit{tels que } \delta=0 \textit{ et } \tau(\Delta_{\min})=0.$$

La preuve est similaire à celle du lemme 1.4 ci-dessous.

1.4. ***Correspondance de Springer, cas orthogonal impair.*** Soit $n\in\mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ l'ensemble des partitions orthogonales de $2n+1$, c'est-à-dire les $\lambda\in\mathcal{P}(2n+1)$ telles que $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ est pair pour tout entier $i>0$ pair. Pour une telle partition, on note $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ l'ensemble des entiers $i\geq1$ impairs tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i)\geq1$. Plus précisément, pour un entier $k\geq1$, on note $\mathrm{Jord}^k_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ l'ensemble des $i\geq1$ impairs tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i)=k$.

On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ l'ensemble des couples (λ,ϵ) où $\lambda\in\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ et $\epsilon\in(\{\pm1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)})/\{\pm1\}$, le groupe $\{\pm1\}$ s'envoyant diagonalement dans $\{\pm1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$. En pratique, on relèvera ϵ en un élément de $\{\pm1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$. Sauf indication contraire, les formules que nous écrirons ne dépendront pas du choix de ce relèvement. La correspondance de Springer généralisée établit une bijection entre $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ et l'ensemble des couples (ρ,k) tels que

$$k\in\mathbb{N},\quad k \text{ est impair et } k^2\leq 2n+1;\qquad \rho\in\widehat{W}_{n-(k^2-1)/2}.$$

On note $(\rho_{\lambda,\epsilon}, k_{\lambda,\epsilon})$ le couple associé à un élément $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$. L'entier $k_{\lambda,\epsilon}$ se calcule de la façon suivante. Notons $i_1 > \cdots > i_m$ les entiers impairs i tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ soit impair. Posons

$$h = \sum_{j=1,\ldots,m} (-1)^j (1 - \epsilon(i_j)).$$

Alors $k_{\lambda,\epsilon} = |h+1|$. En particulier, si $\epsilon = 1$, c'est-à-dire $\epsilon(i) = 1$ pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$, on a $k_{\lambda,1} = 1$ et $\rho_{\lambda,1} \in \widehat{W}_n$.

Une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ est spéciale si et seulement si λ_1 est impair et λ_{2j} et λ_{2j+1} sont de même parité pour tout $j \geq 1$. Cela équivaut à ce que ${}^t\lambda$ soit orthogonale. En notant $\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$ l'ensemble des partitions orthogonales spéciales de $2n+1$, l'application $\lambda \mapsto {}^t\lambda$ est une involution de $\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$. Considérons une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$ et définissons $i_1 > \cdots > i_m$ comme ci-dessus. L'entier m est forcément impair. On appelle intervalle de λ un ensemble Δ de l'une des formes suivantes :

— pour un entier $h = 0, \ldots, (m-1)/2$, Δ est l'ensemble des $i \geq 1$ tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$ et tels que $i_{2h} \geq i \geq i_{2h+1}$, avec la convention $i_0 = \infty$;

— $\Delta = \{i\}$ où i est un entier impair tel que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$ et tel qu'il n'existe pas d'entier $h = 0, \ldots, (m-1)/2$ de sorte que $i_{2h} \geq i \geq i_{2h+1}$.

Parce que λ est spéciale, on vérifie que les intervalles sont formés d'entiers impairs. Ils forment une partition de l'ensemble $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$. On ordonne les intervalles comme dans le cas symplectique. On note $\Delta_{\min}$ le plus petit intervalle et $\Delta_{\max}$ le plus grand. On note $\mathrm{Int}(\lambda)$ l'ensemble des intervalles.

L'application $\lambda \mapsto \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ est une bijection de $\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$ sur l'ensemble des symboles spéciaux de rang n et de défaut 1. Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$, on a défini en [Waldspurger 2001, VIII.19] une bijection fam entre la famille du symbole $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et l'ensemble des $(\tau, \delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}$ tels que $\tau(\Delta_{\max}) = \delta(\Delta_{\min}) = 0$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$. Il existe une unique partition spéciale $\mathrm{sp}(\lambda) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$ telle que $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et $\mathrm{symb}(\rho_{\mathrm{sp}(\lambda),1})$ soient dans la même famille. Il est connu que $\lambda \leq \mathrm{sp}(\lambda)$ et que $\mathrm{sp}(\lambda)$ est la plus petite partition orthogonale spéciale λ' telle que $\lambda \leq \lambda'$. Plus généralement, on a le lemme suivant.

Lemme. (i) *Soit* $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$, *supposons* $k_{\lambda,\epsilon} = 1$. *Notons* $\mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$ *l'unique partition spéciale telle que* $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$ *et* $\mathrm{symb}(\rho_{\mathrm{sp}(\lambda,\epsilon),1})$ *soient dans la même famille. Alors* $\lambda \leq \mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$.

(ii) *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$. *Pour* $\epsilon \in \{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) $k_{\lambda,\epsilon} = 1$ *et* $\mathrm{sp}(\lambda, \epsilon) = \lambda$;

(b) ϵ *est constant sur tout* $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda)$.

(iii) *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$. *L'application* $\epsilon \mapsto \mathrm{fam} \circ \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$ *est une bijection entre l'ensemble des* ϵ *décrits au* (ii), *modulo le groupe diagonal* $\{\pm 1\}$, *et le sous-ensemble des*

$$(\tau, \delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \quad \textit{tels que } \delta = 0 \textit{ et } \tau(\Delta_{\max}) = 0.$$

Preuve. Soit (λ, ϵ) comme en (i). On peut supposer $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+1})$. Dans la suite $\lambda + \{2n, \dots, 0\}$, il y a n nombres pairs notés $2z_1 > \dots > 2z_n$ et $n+1$ nombres impairs notés $2z'_1 + 1 > \dots > 2z'_{n+1} + 1$. On note $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $z' = (z'_1, \dots, z'_{n+1})$ puis

$$A^\sharp = z' + \{n, \dots, 0\} = (a^\sharp_1, \dots, a^\sharp_{n+1}), \quad B^\sharp = z + \{n-1, \dots, 0\} = (b^\sharp_1, \dots, b^\sharp_n).$$

On vérifie que

$$a^\sharp_1 \geq b^\sharp_1 \geq a^\sharp_2 \geq \dots \geq b^\sharp_n \geq a^\sharp_{n+1}. \tag{1}$$

On voit aussi qu'il y a une unique bijection croissante $i \mapsto \Sigma_i$ entre l'ensemble $\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda)$ et celui des sous-ensembles non vides de $(A^\sharp \cup B^\sharp) - (A^\sharp \cap B^\sharp)$ formés d'entiers consécutifs, et maximaux pour cette propriété. Posons

$$A = \Bigg(A^\sharp - \bigcup_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda), \epsilon_i = -1} (\Sigma_i \cap A^\sharp)\Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda), \epsilon_i = -1} (\Sigma_i \cap B^\sharp)\Bigg),$$

$$B = \Bigg(B^\sharp - \bigcup_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda), \epsilon_i = -1} (\Sigma_i \cap B^\sharp)\Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda), \epsilon_i = -1} (\Sigma_i \cap A^\sharp)\Bigg).$$

Si on multiplie ϵ par l'élément diagonal -1, on échange A et B. On peut donc choisir le relèvement ϵ de sorte que $|A| \geq |B|$. L'hypothèse $k_{\lambda,\epsilon} = 1$ entraîne alors que $|A| = n+1$ et $|B| = n$. On définit les suites $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ par $X + \{n, \dots, 0\} = A$ et $Y + \{n-1, \dots, 0\} = B$. Alors $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon}) = (X, Y)$.

Soit $k \in \{1, \dots, 2n+1\}$. On va majorer $S_k(\lambda)$ en fonction de (X, Y). Tout d'abord

$$S_k(\lambda) = S_k(\lambda + \{2n, \dots, 0\}) - \tfrac{1}{2}k(4n+1-k). \tag{2}$$

Notons $j_1 < \dots < j_s$ les indices j tels que λ_j soit impair et $h_1 < \dots < h_t$ les indices h pour lesquels λ_h est pair. Puisque la somme des λ_j vaut $2n+1$ qui est impair, s est impair et $t = 2n+1-s$ est pair. Puisque tout nombre pair non nul intervient avec multiplicité paire, la parité de t entraîne que 0 intervient aussi avec multiplicité paire. Il en résulte aussi que $h_{2r} = h_{2r-1} + 1$ pour tout $r = 1, \dots, t/2$. Pour $r = 1, \dots, s$, il y a $j_r - r$ termes λ_j qui sont pairs et strictement supérieurs à λ_{j_r}. Puisque ces termes interviennent avec multiplicité paire, j_r est de même parité que r. Soient $s_k \in \{1, \dots, s\}$ et $t_k \in \{1, \dots, t\}$ les plus grands entiers tels que $j_{s_k} \leq k$ et $h_{t_k} \leq k$. On a $s_k + t_k = k$. Les k premiers termes de $\lambda + \{2n, \dots, 0\}$ sont les

$$\lambda_{j_u} + 2n + 1 - j_u \quad \text{pour } u = 1, \dots, s_k, \tag{3}$$

$$\lambda_{h_v} + 2n + 1 - h_v \quad \text{pour } v = 1, \dots, t_k. \tag{4}$$

D'après les propriétés de nos suites, il y a $[(s_k+1)/2]$ éléments impairs et $[s_k/2]$ éléments pairs parmi les éléments (3). Si t_k est pair, il y a $t_k/2$ éléments impairs et $t_k/2$ éléments pairs parmi les éléments (4). Si t_k est impair et h_{t_k} est pair, il y a $(t_k+1)/2$ éléments impairs et $(t_k-1)/2$ éléments pairs parmi les éléments (4). Si t_k est impair et h_{t_k} est impair, il y a $(t_k-1)/2$ éléments impairs et $(t_k+1)/2$ éléments pairs parmi les éléments (4). En réunissant les deux types d'éléments, on voit que, parmi les k premiers termes de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$, il y a $[(k+1)/2]+\eta$ termes impairs et $[k/2]-\eta$ termes pairs, où

— $\eta=1$ si t_k et s_k sont impairs et h_{t_k} est pair,

— $\eta=-1$ si t_k et h_{t_k} sont impairs et s_k est pair,

— $\eta=0$ dans les autres cas.

Les k premiers termes de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ sont donc $2z'_1+1,\dots,2z'_{[(k+1)/2]+\eta}+1$ et $2z_1,\dots,2z_{[k/2]-\eta}$.

Supposons λ_k impair. Alors $j_{s_k}=k$. On a dit que s_k est de la même parité que j_{s_k}, donc que k, donc $t_k=k-s_k$ est pair. Donc $\eta=0$ et il résulte de la description ci-dessus que

$$S_k(\lambda+\{2n,\dots,0\})=2S_{[(k+1)/2]}(z')+[(k+1)/2]+2S_{[k/2]}(z). \tag{5}$$

Supposons λ_k pair. Alors $h_{t_k}=k$. Si $\eta=0$, le calcul est le même que ci-dessus et on a (5). Supposons $\eta=1$. Alors $k=h_{t_k}$ est pair et les k premiers termes de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ sont $2z'_1+1,\dots,2z'_{k/2+1}+1$ et $2z_1,\dots,2z_{k/2-1}$. Le dernier de ces termes est $\lambda_k+2n+1-k$ qui est impair, donc c'est $2z'_{k/2+1}+1$. Mais, t_k étant impair, on a $h_{t_k+1}=h_{t_k}+1=k+1$ et $\lambda_k=\lambda_{k+1}$. Le $k+1$-ième terme de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ est λ_k+2n-k qui est pair, c'est donc le premier terme pair strictement inférieur à $2z_{k/2-1}$, autrement dit, c'est $2z_{k/2}$. Les égalités $\lambda_k+2n+1-k=2z'_{k/2+1}+1$ et $\lambda_k+2n-k=2z_{k/2}$ entraînent $z'_{k/2+1}=z_{k/2}$. Les k premiers termes de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ sont donc aussi bien $2z'_1+1,\dots,2z'_{k/2}+1$ et $2z_1,\dots,2z_{k/2-1},2z_{k/2}+1$. On obtient alors

$$S_k(\lambda+\{2n,\dots,0\})=2S_{[(k+1)/2]}(z')+[(k+1)/2]+1+2S_{[k/2]}(z). \tag{6}$$

Supposons maintenant $\eta=-1$. Alors $k=h_{t_k}$ est impair et les k premiers termes de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ sont $2z'_1+1,\dots,2z'_{(k-1)/2}+1$ et $2z_1,\dots,2z_{(k+1)/2}$. Le dernier de ces termes est $\lambda_k+2n+1-k$ qui est pair, donc c'est $2z_{(k+1)/2}$. Comme ci-dessus, on a $\lambda_k=\lambda_{k+1}$. Le $k+1$-ième terme de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ est λ_k+2n-k qui est impair, c'est donc le premier terme impair strictement inférieur à $2z'_{(k-1)/2}+1$, autrement dit, c'est $2z'_{(k+1)/2}+1$. Les égalités $\lambda_k+2n+1-k=2z_{(k+1)/2}$ et $\lambda_k+2n-k=2z'_{(k+1)/2}+1$ entraînent $z'_{(k+1)/2}+1=z_{(k+1)/2}$. Les k premiers termes de $\lambda+\{2n,\dots,0\}$ sont donc aussi bien $2z'_1+1,\dots,2z'_{(k-1)/2}+1,2z'_{(k+1)/2}+2$ et $2z_1,\dots,2z_{(k-1)/2}$. On obtient encore (6).

Supposons encore λ_k pair. Puisque $h_{t_k}=k=s_k+t_k$, les conditions de parité sur t_k sont redondantes dans la définition de η. On voit que $\eta=\pm1$ si et seulement si $k+s_k$ est impair. On voit aussi que s_k est de la même parité que $S_k(\lambda)$. On a obtenu que, si $S_k(\lambda)+k$ est pair, on a la formule (5) tandis que, si $S_k(\lambda)+k$ est impair, on a la formule (6). Posons alors, pour $k=1,\dots,2n+1$,

$$\nu_k(\lambda)=1 \quad \text{si } \lambda_k \text{ est pair et } S_k(\lambda)+k \text{ est impair}, \qquad \nu_k(\lambda)=0 \quad \text{sinon.}$$

On a la formule générale :

$$S_k(\lambda+\{2n,\dots,0\})=2S_{[(k+1)/2]}(z')+[(k+1)/2]+\nu_k(\lambda)+2S_{[k/2]}(z). \tag{7}$$

Remarquons que, d'après le calcul ci-dessus, on a

$$\text{si } \nu_k(\lambda) = 1, \quad \text{alors } k \leq 2n \text{ et } \lambda_{k+1} = \lambda_k. \tag{8}$$

D'après la définition des termes $A^\sharp$ et $B^\sharp$, on a les égalités

$$S_{[(k+1)/2]}(z') = S_{[(k+1)/2]}(A^\sharp) - [(k+1)/2](2n+1-[(k+1)/2])/2,$$
$$S_{[k/2]}(z) = S_{[k/2]}(B^\sharp) - [k/2](2n-1-[k/2])/2.$$

Avec les formules (2) et (7), on obtient

$$S_k(\lambda) = 2S_{[(k+1)/2]}(A^\sharp) + 2S_{[k/2]}(B^\sharp) + \nu_k(\lambda) + c_k,$$

où c_k est un nombre qui ne dépend pas de λ. Notons $A^\sharp \sqcup B^\sharp$ la réunion des suites $A^\sharp$ et $B^\sharp$, les termes étant rangés en ordre décroissant mais comptés avec leur multiplicité (c'est-à-dire qu'un terme intervenant dans les deux suites intervient avec multiplicité 2). La propriété (1) entraîne que la réunion (en ce sens) des $[(k+1)/2]$ plus grands termes de $A^\sharp$ et des $[(k-1)/2]$ plus grands termes de $B^\sharp$ n'est autre que la suite des k plus grands termes de $A^\sharp \sqcup B^\sharp$. La formule précédente se récrit

$$S_k(\lambda) = 2S_k(A^\sharp \sqcup B^\sharp) + \nu_k(\lambda) + c_k.$$

Avec une définition similaire, on a $A^\sharp \sqcup B^\sharp = A \sqcup B$, donc aussi $S_k(A^\sharp \sqcup B^\sharp) = S_k(A \sqcup B)$. Il existe deux entiers $e, f \in \mathbb{N}$ tels que $e + f = k$ et que la famille des k plus grands éléments de $A \sqcup B$ soit la réunion des familles des e plus grands éléments de A et des f plus grands éléments de B. Alors

$$S_k(A \sqcup B) = S_e(A) + S_f(B). \tag{9}$$

Par définition de X et Y, on a

$$S_e(A) = S_e(X) + e(2n+1-e)/2, \quad S_f(B) = S_f(Y) + f(2n-1-f)/2.$$

D'où

$$S_k(\lambda) = 2S_e(X) + 2S_f(Y) + \nu_k(\lambda) - e(2-e) - f^2 + c'_k,$$

où $c'_k = c_k + (2n-1)k$ est indépendant de λ. Le terme $S_e(X) + S_f(Y)$ est la somme de k termes de la famille $X \sqcup Y$, donc il est majoré par la somme des k plus grands termes de cette famille :

$$S_e(X) + S_f(Y) \leq S_k(X \sqcup Y). \tag{10}$$

D'où

$$S_k(\lambda) \leq 2S_k(X \sqcup Y) + \nu_k(\lambda) - e(e-2) - f^2 + c'_k. \tag{11}$$

Posons $\underline{\lambda} = \mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$. Reprenons le calcul en remplaçant (λ, ϵ) par $(\underline{\lambda}, 1)$. On souligne les objets associés à cette paire. Parce que le caractère ϵ est remplacé par 1, on a les égalités $\underline{A} = \underline{A}^\sharp$, $\underline{B} = \underline{B}^\sharp$ et l'on voit que $\underline{e} = [(k+1)/2]$ et $\underline{f} = [k/2]$. Parce que le symbole $(\underline{X}, \underline{Y})$ est spécial, la réunion des

$[(k+1)/2]$ plus grands termes de $\underline{X}$ et des $[k/2]$ plus grands termes de $\underline{Y}$ n'est autre que la famille des k plus grands termes de $\underline{X} \sqcup \underline{Y}$. L'analogue de l'inégalité (10) est donc une égalité et on obtient

$$S_k(\underline{\lambda}) = 2S_k(\underline{X} \sqcup \underline{Y}) + \nu_k(\underline{\lambda}) - [(k+1)/2]([(k+1)/2] - 2) - [k/2]^2 + c'_k.$$

Par définition de $\mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$, les symboles (X, Y) et $(\underline{X}, \underline{Y})$ sont dans la même famille, d'où $X \sqcup Y = \underline{X} \sqcup \underline{Y}$. En comparant (11) avec l'égalité ci-dessus, on obtient

$$S_k(\lambda) \leq S_k(\underline{\lambda}) + \nu_k(\lambda) - e(e-2) - f^2 - \nu_k(\underline{\lambda}) + [(k+1)/2]([(k+1)/2] - 2) + [k/2]^2. \tag{12}$$

On vérifie que, pour deux entiers e, f tels que $e + f = k$, on a

$$e(e-2) + f^2 \geq [(k+1)/2]([(k+1)/2] - 2) + [k/2]^2,$$

l'égalité n'étant vérifiée que pour les couples $(e, f) = ([(k+1)/2], [k/2])$ ou, si k est pair, $(e, f) = (k/2+1, k/2-1)$. On obtient

$$S_k(\lambda) \leq S_k(\underline{\lambda}) + \nu_k(\lambda) - \nu_k(\underline{\lambda}). \tag{13}$$

Supposons $S_k(\lambda) > S_k(\underline{\lambda})$. L'inégalité précédente force $\nu_k(\lambda) = 1$. Donc λ_k est pair, $k + S_k(\lambda)$ est impair et, d'après (8), $\lambda_{k+1} = \lambda_k$. Les entiers $k-1+S_{k-1}(\lambda)$ et $k+1+S_{k+1}(\lambda)$ sont pairs, donc $\nu_{k-1}(\lambda) = \nu_{k+1}(\lambda) = 0$. L'inégalité (13) entraîne donc $S_{k-1}(\lambda) \leq S_{k-1}(\underline{\lambda})$ et $S_{k+1}(\lambda) \leq S_{k+1}(\underline{\lambda})$ (pour être précis, si $k = 1$, notre calcul ne s'applique pas à $k-1$ mais, dans ce cas, l'inégalité $S_0(\lambda) \leq S_0(\underline{\lambda})$ est triviale). Les deux inégalités $S_{k-1}(\lambda) \leq S_{k-1}(\underline{\lambda})$ et $S_k(\lambda) > S_k(\underline{\lambda})$ entraînent $\lambda_k > \underline{\lambda}_k$. Donc $\lambda_{k+1} = \lambda_k > \underline{\lambda}_k \geq \underline{\lambda}_{k+1}$. Alors l'inégalité $S_k(\lambda) > S_k(\underline{\lambda})$ entraîne $S_{k+1}(\lambda) > S_{k+1}(\underline{\lambda})$, contrairement à ce que l'on a vu ci-dessus. Cette contradiction prouve l'inégalité $S_k(\lambda) \leq S_k(\underline{\lambda})$. Cela étant vrai pour tout k, on conclut $\lambda \leq \underline{\lambda}$, ce qui démontre le (i) de l'énoncé.

Supposons maintenant λ spéciale et $\lambda = \underline{\lambda}$. Considérons l'inégalité (12) pour k impair. Les termes relatifs à λ et $\underline{\lambda}$ s'annulent et il reste

$$e(e-2) + f^2 \leq ((k+1)/2)((k+1)/2 - 2) + ((k-1)/2)^2.$$

Comme on l'a dit, cela entraîne que $e = (k+1)/2$ et $f = (k-1)/2$. Parce que λ est spéciale, on calcule facilement les termes $A^\sharp$ et $B^\sharp$. Puisque λ_1 est impair, le terme $\lambda_1 + 2n$ l'est aussi, donc c'est $2z'_1 + 1$. Pour $h = 1, \ldots, n$, les termes λ_{2h} et λ_{2h+1} sont de même parité donc les termes $\lambda_{2h} + 2n + 1 - 2h$ et $\lambda_{2h+1} + 2n - 2h$ sont de parité opposée. Par récurrence, ce sont les termes $2z_h$ et $2z'_{h+1} + 1$. Cela permet le calcul des termes z_h et z'_{h+1}, puis des termes $a^\sharp_{h+1}$ et $b^\sharp_h$. On obtient

$$\begin{aligned}
a^\sharp_1 &= (\lambda_1 - 1)/2 + 2n, \\
b^\sharp_h = a^\sharp_{h+1} &= \lambda_{2h}/2 + 2n - 2h && \text{pour } h = 1, \ldots, n, \text{ si } \lambda_{2h} = \lambda_{2h+1} \text{ est pair,} \\
b^\sharp_h &= (\lambda_{2h} + 1)/2 + 2n - 2h && \text{si } \lambda_{2h} \text{ et } \lambda_{2h+1} \text{ sont impairs,} \\
a^\sharp_{h+1} &= (\lambda_{2h+1} - 1)/2 + 2n - 2h && \text{si } \lambda_{2h} \text{ et } \lambda_{2h+1} \text{ sont impairs.}
\end{aligned}$$

Considérons l'intervalle maximal $\Delta_{\max}$ de λ. Notons ses éléments $i_1 > \cdots > i_t$. Ils sont impairs. Les multiplicités de $i_1, \ldots, i_{t-1}$ sont paires et celle de i_t est impaire. On note ces multiplicités

$$2m_1, \ldots, 2m_{t-1}, 2m_t + 1.$$

L'intervalle correspond aux éléments suivants de $A^\sharp \sqcup B^\sharp$:

$$a_1^\sharp > b_1^\sharp > \cdots > a_{m_1}^\sharp > b_{m_1}^\sharp > a_{m_1+1}^\sharp > b_{m_1+1}^\sharp > \cdots > a_{m_{\leq 2}}^\sharp > b_{m_{\leq 2}}^\sharp > \cdots > a_{m_{\leq t-1}+1}^\sharp > b_{m_{\leq t-1}+1}^\sharp > \cdots > b_{m_{\leq t}}^\sharp > a_{m_{\leq t}+1}^\sharp$$

(on rappelle que $m_{\leq i} = m_1 + \cdots + m_i$). Supposons que ϵ ne vaut pas 1 sur $\Delta_{\max}$. Soit s le plus petit élément de $\{1, \ldots, t\}$ tel que $\epsilon(i_s) = -1$. Appliquons l'égalité (9) à $k = 2m_{\leq s-1} + 1$. Comme on l'a dit plus haut, on a $e = m_{\leq s-1} + 1$, $f = m_{\leq s-1}$. On obtient

$$a_1^\sharp + \cdots + a_{m_{\leq s-1}+1}^\sharp + b_1^\sharp + \cdots + b_{m_{\leq s-1}}^\sharp = a_1 + \cdots + a_{m_{\leq s-1}+1} + b_1 + \cdots + b_{m_{\leq s-1}}.$$

Par construction de A et B et par définition de s, les termes de ces ensembles sont égaux à ceux de $A^\sharp$ et $B^\sharp$ jusqu'à l'indice $m_{\leq s-1}$ et l'égalité précédente devient

$$a_{m_{\leq s-1}+1}^\sharp = a_{m_{\leq s-1}+1}.$$

Par contre, passer de $(A^\sharp, B^\sharp)$ à (A, B) échange les termes correspondant à l'entier i_s. Hormis le cas $s = t$ et $m_t = 0$, on a donc $a_{m_{\leq s-1}+1} = b_{m_{\leq s-1}+1}^\sharp$. Quand $s = t$ et $m_t = 0$, $a_{m_{\leq s-1}+1}$ est un terme de la famille $A^\sharp \sqcup B^\sharp$ qui n'est pas dans l'ensemble écrit ci-dessus. Dans tous les cas, on obtient $a_{m_{\leq s-1}+1} < a_{m_{\leq s-1}+1}^\sharp$ ce qui contredit l'égalité de ces termes prouvée ci-dessus. Cette contradiction conclut : ϵ vaut 1 sur $\Delta_{\max}$.

Considérons maintenant un intervalle $\Delta \neq \Delta_{\max}$. On note ses éléments $i_1 > \cdots > i_t$. Le premier indice j tel que $\lambda_j = i_1$ est forcément pair. Notons le $2u$. Si $t = 1$, la multiplicité de i_1 est paire. On la note $2m$. Alors l'intervalle correspond aux éléments suivants de $A^\sharp \sqcup B^\sharp$:

$$b_u^\sharp < a_{u+1}^\sharp < \cdots < b_{u+m-1}^\sharp < a_{u+m}^\sharp.$$

Si $t > 1$, les multiplicités de i_1 et i_t sont impaires et, pour $1 < s < t$, celle de i_s est paire. On les note respectivement $2m_1 + 1$, $2m_t + 1$, $2m_s$. Alors l'intervalle correspond aux éléments suivants de $A^\sharp \sqcup B^\sharp$:

$$b_u^\sharp < a_{u+1}^\sharp < \cdots < b_{u+m_1}^\sharp < a_{u+m_1+1}^\sharp < \cdots < b_{u+m_{\leq 2}}^\sharp < a_{u+m_{\leq 2}+1}^\sharp < \cdots < b_{u+m_{\leq t-1}}^\sharp < a_{u+m_{\leq t-1}+1}^\sharp < \cdots < a_{u+m_{\leq t}+1}^\sharp.$$

Supposons par récurrence que ϵ est constant sur tout intervalle strictement supérieur à Δ. Pour ces intervalles, ou bien on ne change pas les termes de $A^\sharp$ et $B^\sharp$ leur correspondant, ou bien on les échange. Mais on voit ci-dessus que chaque intervalle contribue autant à $A_\sharp$ qu'à $B_\sharp$. Cela ne perturbe pas les numérotations des termes postérieurs, on veut dire par là que la contribution à A (resp. B) de l'intervalle Δ commence par a_{u+1} (resp. b_u). Si Δ est réduit à i_1, on n'a rien à démontrer : ϵ est forcément constant sur Δ. Supposons $t > 1$ et que ϵ ne soit pas constant sur Δ. Notons s le plus petit élément de $\{2, \ldots, t\}$ tel que $\epsilon_{i_{s-1}} \neq \epsilon_{i_s}$. Appliquons l'égalité (9) à $k = 2u - 1$ (on sait qu'alors $e = u$ et $f = u - 1$) et à $k = 2u + 2m_{\leq s-1} + 1$ (on sait qu'alors $e = u + m_{\leq s-1} + 1$ et $f = u + m_{\leq s-1}$). Par différence, on obtient

$$b_u^\sharp + a_{u+1}^\sharp + \cdots + b_{u+m_{\leq s-1}}^\sharp + a_{u+m_{\leq s-1}+1}^\sharp = b_u + a_{u+1} + \cdots + b_{u+m_{\leq s-1}} + a_{u+m_{\leq s-1}+1}. \quad (14)$$

Supposons d'abord $\epsilon(i_{s-1})=1$ et $\epsilon(i_s)=-1$. Les termes de l'ensemble A sont égaux à ceux de $A^\sharp$ entre les indices $u+1$ et $u+m_{\leq s-1}$. Les termes de l'ensemble B sont égaux à ceux de $B^\sharp$ entre les indices u et $u+m_{\leq s-1}$. L'égalité (14) devient

$$a^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}=a_{u+m_{\leq s-1}+1}.$$

Parce que $\epsilon_{i_s}=-1$, on échange les termes correspondant à l'entier i_s. Hormis le cas $s=t$ et $m_t=0$, on a donc

$$a_{u+m_{\leq s-1}+1}=b^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}.$$

Si $s=t$ et $m_t=0$, $a_{u+m_{\leq s-1}+1}$ est un terme de la famille $A^\sharp\sqcup B^\sharp$ qui est au-delà de ceux écrits ci-dessus. Dans tous les cas, on obtient $a_{u+m_{\leq s-1}+1}<a^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}$ ce qui contredit l'égalité de ces termes prouvée ci-dessus.

Supposons maintenant $\epsilon(i_{s-1})=-1$ et $\epsilon(i_s)=1$. Les entiers $i_1,\dots,i_{s-1}$ contribuent à A et B en échangeant leur contribution à $A^\sharp$ et $B^\sharp$. D'où

$$a_{u+1}=b^\sharp_u,\quad \dots,\quad a_{u+m_{\leq s-1}+1}=b^\sharp_{u+m_{\leq s-1}},\qquad b_u=a^\sharp_{u+1},\quad \dots,\quad b_{u+m_{\leq s-1}-1}=a^\sharp_{u+m_{\leq s-1}}.$$

L'égalité (14) devient

$$b_{u+m_{\leq s-1}}=a^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}.$$

Par contre, l'entier i_s contribue par les mêmes termes à A et $A^\sharp$ comme à B et $B^\sharp$. Mais les indices sont décalés et on a

$$a_{u+m_{\leq s-1}+2}=a^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}$$

et, hormis le cas $s=t$ et $m_t=0$, $b_{u+m_{\leq s-1}}=b^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}$. Si $s=t$ et $m_t=0$, $b_{u+m_{\leq s-1}}$ est un terme de la famille $A^\sharp\sqcup B^\sharp$ qui est au-delà de ceux écrits ci-dessus. Dans tous les cas, on obtient $b_{u+m_{\leq s-1}}<a^\sharp_{u+m_{\leq s-1}+1}$ ce qui contredit l'égalité de ces termes prouvée ci-dessus.

Ces contradictions prouvent que ϵ est constant sur Δ. Cela prouve que, sous les hypothèses du (ii) de l'énoncé, la condition (a) implique (b).

Soit maintenant $(\lambda,\epsilon)\in\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$, supposons λ spéciale et ϵ constant sur les intervalles de λ. En notant $i_1>\dots>i_m$ les éléments de $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ intervenant avec multiplicité impaire, on a $\epsilon(i_{2h})=\epsilon(i_{2h+1})$ pour tout $h=1,\dots,(m-1)/2$. La recette indiquée plus haut pour calculer $k_{\lambda,\epsilon}$ montre que cet entier vaut 1. Relevons ϵ en l'élément de $\{\pm1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$ qui vaut 1 sur le plus grand intervalle. On a calculé ci-dessus les termes $A^\sharp$, $B^\sharp$, A, B. Remarquons que les deux premiers sont aussi les termes $\underline{A}$ et $\underline{B}$ associés à $(\lambda,1)$. On en déduit facilement les termes $\underline{X}$, $\underline{Y}$, X et Y. On voit que les ensembles suivants contribuent de la même façon à $\underline{X}$ et X comme à $\underline{Y}$ et Y :

— l'intervalle maximal ; sa contribution est de la forme

$$x_1=y_1>x_2=y_2>\dots>x_u=y_u>x_{u+1};$$

— tout couple $\lambda_{2h},\lambda_{2h+1}$ d'éléments pairs donc égaux ; sa contribution est de la forme $y_h=x_{h+1}$;

— tout intervalle non maximal sur lequel ϵ vaut 1 ; sa contribution est de la forme

$$y_u > x_{u+1} = y_{u+1} > \cdots > x_v = y_v > x_{v+1}.$$

Par contre, la contribution à $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ d'un intervalle sur lequel ϵ vaut -1 est de la forme

$$\underline{y}_u > \underline{x}_{u+1} = \underline{y}_{u+1} > \cdots > \underline{x}_v = \underline{y}_v > \underline{x}_{v+1},$$

tandis que sa contribution à X et Y est

$$x_{u+1} = \underline{y}_u > y_u = \underline{x}_{u+1} = x_{u+2} = \underline{y}_{u+1} > \cdots > y_{v-1} = \underline{x}_v = x_{v+1} = \underline{y}_v > y_v = \underline{x}_{v+1}.$$

Il est immédiat que $X \sqcup Y = \underline{X} \sqcup \underline{Y}$, autrement dit les symboles (X, Y) et $(\underline{X}, \underline{Y})$ sont dans la même famille. Cela prouve que $\lambda = \mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$, donc que la relation (b) du (ii) de l'énoncé entraîne la relation (a).

Conservons les hypothèses sur (λ, ϵ). On relève ϵ comme ci-dessus. Posons $(\tau, \delta) = \mathrm{fam} \circ \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$. En utilisant la description du symbole (X, Y) faite ci-dessus et la définition de l'application fam de [Waldspurger 2001, VIII.19], on calcule, pour tout intervalle Δ :

— $\delta(\Delta) = 0$;

— $\tau(\Delta) = 0$ si ϵ vaut 1 sur Δ et $\tau(\Delta) = 1$ si ϵ vaut -1.

Le (iii) de l'énoncé s'en déduit. □

1.5. ***Correspondance de Springer, cas orthogonal pair.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ l'ensemble des partitions orthogonales de $2n$, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathcal{P}(2n)$ telles que $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ est pair pour tout entier i pair. Pour une telle partition, on note $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ l'ensemble des entiers $i \geq 1$ impairs tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$. Plus précisément, pour un entier $k \geq 1$, on note $\mathrm{Jord}^k_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ l'ensemble des $i \geq 1$ impairs tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) = k$.

Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$, disons que λ est exceptionnelle si $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda) = \varnothing$. Si $n > 0$, on introduit l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ formé des partitions $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ non exceptionnelles et des paires $(\lambda, +)$ et $(\lambda, -)$ pour les partitions $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ exceptionnelles.

Justifions cette définition. Notons $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et $O(2n)$ le groupe orthogonal évident sur $\bar{\mathbb{F}}_q$. L'ensemble $\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ paramètre les classes de conjugaison unipotentes par $O(2n)(\bar{\mathbb{F}}_q)$ dans $\mathrm{SO}(2n)(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Mais il arrive que de telles classes se coupent en deux classes de conjugaison par $\mathrm{SO}(2n)(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Cela arrive précisément quand la classe est paramétrée par une partition λ exceptionnelle. Alors l'ensemble $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ paramètre les classes de conjugaison unipotentes par $\mathrm{SO}(2n)(\bar{\mathbb{F}}_q)$ dans $\mathrm{SO}(2n)(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Si $n = 0$, on pose $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(0) = \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(0) = \{\varnothing\}$. Il y a en tout cas une application évidente de $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ dans $\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$. Si $\underline{\lambda}$ est un élément de $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$, on note sans plus de commentaire $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ son image.

On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ l'ensemble des couples (λ, ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ et $\epsilon \in (\{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)})/\{\pm 1\}$, le groupe $\{\pm 1\}$ s'envoyant diagonalement dans $\{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$. On note $\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ l'ensemble des couples $(\underline{\lambda}, \epsilon)$ où $\underline{\lambda} \in \underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ et $\epsilon \in (\{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)})/\{\pm 1\}$. La correspondance de Springer généralisée établit une bijection entre $\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{\mathrm{orth}}(2n)$ et l'ensemble des couples (ρ, k) tels que

— $k \in \mathbb{N}$, k est pair et $k^2 \leq 2n$;

— si $k > 0$, $\rho \in \widehat{W}_{n-k^2/2}$; si $k = 0$, $\rho \in \widehat{W}^D_n$.

On note $(\rho_{\underline{\lambda},\epsilon}, k_{\lambda,\epsilon})$ le couple associé à un élément $(\underline{\lambda}, \epsilon) \in \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{\mathrm{orth}}(2n)$. L'entier $k_{\lambda,\epsilon}$ ne dépend que de l'image (λ, ϵ) de $(\underline{\lambda}, \epsilon)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$. Il se calcule de la façon suivante. Notons $i_1 > \cdots > i_m$ les entiers impairs i tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i)$ soit impair. Posons

$$h = \sum_{j=1,\ldots,m} (-1)^j (1 - \epsilon(i_j)).$$

Alors $k_{\lambda,\epsilon} = |h|$. En particulier, si $\epsilon = 1$, c'est-à-dire $\epsilon(i) = 1$ pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$, on a $k_{\lambda,1} = 0$ et $\rho_{\lambda,1} \in \widehat{W}_n^D$.

Une partition

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$$

est spéciale si et seulement si λ_{2j-1} et λ_{2j} sont de même parité pour tout $j \geq 1$. Cela équivaut à ce que ${}^t\lambda$ soit symplectique. Notons $\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$ l'ensemble des partitions orthogonales spéciales de $2n$. Considérons une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$ et définissons $i_1 > \cdots > i_m$ comme ci-dessus. L'entier m est forcément pair. On appelle intervalle de λ un ensemble Δ de l'une des formes suivantes :

— pour un entier $h = 1, \ldots, m/2$, Δ est l'ensemble des $i \geq 1$ tels que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$ et tels que $i_{2h-1} \geq i \geq i_{2h}$;

— $\Delta = \{i\}$ où i est un entier impair tel que $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 1$ et tel qu'il n'existe pas d'entier $h = 1, \ldots, m/2$ de sorte que $i_{2h-1} \geq i \geq i_{2h}$.

Parce que λ est spéciale, on vérifie que les intervalles sont formés d'entiers impairs. Ils forment une partition de $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$. On ordonne les intervalles comme dans le cas symplectique. On note $\Delta_{\min}$ (resp. $\Delta_{\max}$) le plus petit (resp. grand) intervalle. On note $\mathrm{Int}(\lambda)$ l'ensemble des intervalles.

Pour $(\underline{\lambda}, \epsilon) \in \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{\mathrm{orth}}(2n)$, le symbole $\mathrm{symb}(\rho_{\underline{\lambda},\epsilon})$ ne dépend que de λ, on le note abusivement $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$. L'application $\lambda \mapsto \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ est une bijection de $\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$ sur l'ensemble des symboles spéciaux de rang n et de défaut 0. Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$, on a défini en [Waldspurger 2001, VIII.19] une bijection fam entre la famille du symbole $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et un certain sous-ensemble de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$. Il existe une unique partition spéciale $\mathrm{sp}(\lambda) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$ telle que $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et $\mathrm{symb}(\rho_{\mathrm{sp}(\lambda),1})$ soient dans la même famille. Il est connu que $\lambda \leq \mathrm{sp}(\lambda)$ et que $\mathrm{sp}(\lambda)$ est la plus petite partition orthogonale spéciale λ' telle que $\lambda \leq \lambda'$. Plus généralement, on a le lemme suivant.

Lemme. (i) *Soit* $(\lambda, \epsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n)$, *supposons* $k_{\lambda,\epsilon} = 0$. *Notons* $\mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$ *l'unique partition spéciale telle que* $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$ *et* $\mathrm{symb}(\rho_{\mathrm{sp}(\lambda,\epsilon),1})$ *soient dans la même famille. Alors* $\lambda \leq \mathrm{sp}(\lambda, \epsilon)$.

(ii) *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$. *Pour* $\epsilon \in \{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) $k_{\lambda,\epsilon} = 0$ *et* $\mathrm{sp}(\lambda, \epsilon) = \lambda$;

(b) ϵ *est constant sur tout* $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda)$.

(iii) *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$. *L'application* $\epsilon \mapsto \mathrm{fam} \circ \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,\epsilon})$ *est une bijection entre l'ensemble des* ϵ *décrits au* (ii), *modulo le groupe diagonal* $\{\pm 1\}$, *et le sous-ensemble des*

$$(\tau, \delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \quad \textit{tels que } \delta = 0 \textit{ et } \tau(\Delta_{\max}) = 0.$$

La preuve est similaire à celle du lemme précédent.

1.6. ***Dualité, cas symplectique-orthogonal impair.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{S}_{n,1}^{\mathrm{sp}}$ l'ensemble des symboles spéciaux de rang n et de défaut impair (ce défaut est alors 1). On dispose de bijections

$$\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n) \to \mathcal{S}_{n,1}^{\mathrm{sp}}, \quad \lambda \mapsto \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1}); \qquad \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1) \to \mathcal{S}_{n,1}^{\mathrm{sp}}, \quad \lambda \mapsto \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$$

et d'une involution d de $\mathcal{S}_{n,1}^{\mathrm{sp}}$. On en déduit des bijections

$$d : \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1) \quad \text{et} \quad d : \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1) \to \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$$

inverses l'une de l'autre définies par la formule commune $\mathrm{symb}(\rho_{d(\lambda),1}) = d \circ \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$. On vérifie qu'il y a une unique bijection décroissante de $\mathrm{Int}(\lambda)$ sur $\mathrm{Int}(d(\lambda))$. Notons $\Delta_1 > \cdots > \Delta_r$ les intervalles de λ et $\Delta'_1 > \cdots > \Delta'_r$ ceux de $d(\lambda)$. On a dit que l'involution d des symboles échangeait les familles de $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et de $\mathrm{symb}(\rho_{d(\lambda),1})$. D'autre part, ces familles sont paramétrées par des sous-ensembles de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}$ et de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(d(\lambda))} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(d(\lambda))}$, respectivement. Soit (X, Y) un symbole dans la famille de $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$, notons $(\tau, \delta) = \mathrm{fam}(X, Y)$ et $(\tau', \delta') = \mathrm{fam} \circ d(X, Y)$. On vérifie les égalités

$$\tau'(\Delta'_h) = \tau(\Delta_{r+1-h}), \quad \delta'(\Delta'_h) = \delta(\Delta_{r-h})$$

pour tout $h = 1, \ldots, r$, avec la convention $\delta(\Delta_0) = 0$. En particulier cette application échange l'ensemble des (τ, δ) tels que $\delta = 0$ et celui des (τ', δ') tels que $\delta' = 0$.

On a défini des applications $\mathrm{sp} : \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n) \to \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ et $\mathrm{sp} : \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$. On étend les bijections d en des applications encore notées $d : \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$ et $d : \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1) \to \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ par la formule commune $d(\lambda) = d \circ \mathrm{sp}(\lambda)$. Il est connu que ces applications sont décroissantes : pour $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$ (resp. $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$), $\lambda \leq \lambda'$ entraîne $d(\lambda') \leq d(\lambda)$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$. On vérifie que $d(\lambda)$ est la plus grande partition $\mu \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ telle que $\mu \leq {}^t(\lambda \cup \{1\})$, cf. [Mœglin et Renard 2017, paragraphe 7].

Soit $\mu \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$. Écrivons $\mu = (\mu_1 = \cdots = \mu_s > \mu_{s+1} \geq \cdots)$. Posons

$$\mu' = (\mu_1 = \cdots = \mu_{s-1} \geq \mu_s - 1 \geq \mu_{s+1} \geq \cdots).$$

On vérifie que $d(\mu)$ est la plus grande partition $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$ telle que $\lambda \leq {}^t\mu'$, cf. [Mœglin et Renard 2017, paragraphe 7].

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ (resp. $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$). On a défini l'ensemble $\mathrm{Int}(\lambda)$. Soit $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda)$. On note $J(\Delta)$ l'ensemble des indices $j \geq 1$ tels que $\lambda_j \in \Delta$. Hormis les cas particuliers ci-dessous, on note $j_{\min}(\Delta)$ (resp. $j_{\max}(\Delta)$) le plus petit (resp. grand) élément de $J(\Delta)$. Les cas particuliers sont : λ symplectique et $\Delta = \Delta_{\min}$, auquel cas on pose $j_{\max}(\Delta) = \infty$; λ orthogonal et $\Delta = \Delta_{\max}$, auquel cas $j_{\min}(\Delta)$ n'est pas défini (plus exactement, on peut le définir en appliquant la définition ci-dessus, on obtient $j_{\min}(\Delta_{\max}) = 1$, mais cette valeur perturberait nos calculs et on considère que $j_{\min}(\Delta_{\max})$ n'est pas défini). Remarquons que, si $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$, les $j_{\min}(\Delta)$ sont impairs et les $j_{\max}(\Delta)$ sont pairs (ou ∞) ; si $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$, les $j_{\min}(\Delta)$ sont pairs et les $j_{\max}(\Delta)$ sont impairs.

On définit une suite de nombres $\zeta(\lambda) = (\zeta(\lambda)_1, \zeta(\lambda)_2, \dots)$ par

$$\zeta(\lambda)_j = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda) \text{ tel que } j = j_{\min}(\Delta), \\ -1 & \text{s'il existe } \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda) \text{ tel que } j = j_{\max}(\Delta), \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Lemme. *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$ (*resp.* $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n+1)$). *On a l'égalité*

$${}^t d(\lambda) = \lambda + \zeta(\lambda).$$

Preuve. On suppose $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n)$, la preuve étant similaire dans le cas orthogonal. Montrons d'abord

(15) ${}^t d(\lambda)$ est la plus petite partition orthogonale spéciale ν de $2n+1$ telle que $\nu \geq \lambda \cup \{1\}$.

Puisque $d(\lambda)$ est orthogonale et spéciale, sa transposée l'est également. L'inégalité $d(\lambda) \leq {}^t(\lambda \cup \{1\})$ entraîne ${}^t d(\lambda) \geq \lambda \cup \{1\}$. Inversement, soit ν une partition orthogonale spéciale de $2n+1$ telle que $\nu \geq \lambda \cup \{1\}$. Alors ${}^t\nu$ est encore orthogonale et vérifie ${}^t\nu \leq {}^t(\lambda \cup \{1\})$. Donc ${}^t\nu \leq d(\lambda)$ puis $\nu \geq {}^t d(\lambda)$. Cela démontre (15).

On vérifie facilement que $\lambda + \zeta(\lambda)$ est une partition, c'est-à-dire $\lambda_j + \zeta(\lambda)_j \geq \lambda_{j+1} + \zeta(\lambda)_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$. Puisque tout intervalle $\Delta \neq \Delta_{\min}$ crée un terme $j_{\min}(\Delta)$ pour lequel $\zeta(\lambda)_{j_{\min}(\Delta)} = 1$ et un terme $j_{\max}(\Delta)$ pour lequel $\zeta(\lambda)_{j_{\max}(\Delta)} = -1$ et puisque le dernier intervalle $\Delta_{\min}$ crée seulement un $j_{\min}(\Delta_{\min})$ la somme totale des $\zeta(\lambda)_j$ vaut 1 et $\lambda + \zeta(\lambda) \in \mathcal{P}(2n+1)$. Si λ_1 est impair, λ_1 n'est pas dans un intervalle et $\zeta(\lambda)_1 = 0$ donc $\lambda_1 + \zeta(\lambda)_1$ est impair. Si λ_1 est pair, il appartient à un intervalle Δ (le plus grand intervalle). On a $j_{\min}(\Delta) = 1$, d'où $\zeta(\lambda)_1 = 1$ et $\lambda_1 + \zeta(\lambda)_1$ est encore impair. Considérons un entier $h \geq 1$ et distinguons les cas :

— λ_{2h} et λ_{2h+1} sont impairs. Comme ci-dessus, on a alors $\zeta(\lambda)_{2h} = \zeta(\lambda)_{2h+1} = 0$ et les termes $\lambda_{2h} + \zeta(\lambda)_{2h}$ et $\lambda_{2h+1} + \zeta(\lambda)_{2h+1}$ sont impairs.

— λ_{2h} est impair et λ_{2h+1} est pair. Dans ce cas $\zeta(\lambda)_{2h} = 0$ mais λ_{2h+1} appartient à un intervalle Δ tel que $j_{\min}(\Delta) = 2h+1$, donc $\zeta(\lambda)_{2h+1} = 1$; les termes $\lambda_{2h} + \zeta(\lambda)_{2h}$ et $\lambda_{2h+1} + \zeta(\lambda)_{2h+1}$ sont impairs.

— λ_{2h} est pair et λ_{2h+1} est impair. Dans ce cas $\zeta(\lambda)_{2h+1} = 0$ mais λ_{2h} appartient à un intervalle Δ tel que $j_{\max}(\Delta) = 2h$, donc $\zeta(\lambda)_{2h} = -1$; les termes $\lambda_{2h} + \zeta(\lambda)_{2h}$ et $\lambda_{2h+1} + \zeta(\lambda)_{2h+1}$ sont impairs.

— λ_{2h} et λ_{2h+1} sont pairs et distincts. Dans ce cas, λ_{2h} appartient à un intervalle Δ tel que $j_{\max}(\Delta) = 2h$ et λ_{2h+1} appartient à l'intervalle suivant Δ' tel que $j_{\min}(\Delta') = 2h+1$; on a $\zeta(\lambda)_{2h} = -1$ et $\zeta(\lambda)_{2h+1} = 1$; les termes $\lambda_{2h} + \zeta(\lambda)_{2h}$ et $\lambda_{2h+1} + \zeta(\lambda)_{2h+1}$ sont impairs.

— λ_{2h} et λ_{2h+1} sont pairs et égaux. Dans ce cas, $\lambda_{2h} = \lambda_{2h+1}$ appartient à un intervalle Δ tel que $j_{\min}(\Delta) < 2h < 2h+1 < j_{\max}(\Delta)$ et $\zeta(\lambda)_{2h} = \zeta(\lambda)_{2h+1} = 0$; les termes $\lambda_{2h} + \zeta(\lambda)_{2h}$ et $\lambda_{2h+1} + \zeta(\lambda)_{2h+1}$ sont pairs et égaux.

Cela montre d'abord que les termes pairs de la partition $\lambda + \zeta(\lambda)$ interviennent par paires, donc sont de multiplicité paire, c'est-à-dire que $\lambda + \zeta(\lambda)$ est orthogonale. Cela montre ensuite que deux termes $\lambda_{2h} + \zeta(\lambda)_{2h}$ et $\lambda_{2h+1} + \zeta(\lambda)_{2h+1}$ sont de la même parité. Donc $\lambda + \zeta(\lambda)$ est spéciale.

Pour $k \geq 1$, on voit que $S_k(\zeta(\lambda))$ vaut 1 s'il existe $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda)$ tel que $j_{\min}(\Delta) \leq k < j_{\max}(\Delta)$ et vaut 0 sinon. Écrivons $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0)$. Alors $\lambda \cup \{1\} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l, 1, 0)$. Si $k \leq l$, on a

$$S_k(\lambda + \zeta(\lambda)) = S_k(\lambda) + S_k(\zeta(\lambda)) \geq S_k(\lambda) = S_k(\lambda \cup \{1\}).$$

Si $k \geq l + 1$, on a $k \geq j_{\min}(\Delta_{\min})$ et $S_k(\zeta(\lambda)) = 1$. Le même calcul conduit à l'égalité

$$S_k(\lambda + \zeta(\lambda)) = S_k(\lambda \cup \{1\}).$$

Donc $\lambda + \zeta(\lambda) \geq \lambda \cup \{1\}$.

Soit maintenant ν une partition orthogonale spéciale de $2n + 1$ telle que $\nu \geq \lambda \cup \{1\}$. Soit $k \geq 1$. On a $S_k(\nu) \geq S_k(\lambda \cup \{1\}) \geq S_k(\lambda)$. Supposons que $S_k(\nu) < S_k(\lambda + \zeta(\lambda))$. Alors $S_k(\nu) = S_k(\lambda)$ et $S_k(\zeta(\lambda)) = 1$. Donc il existe un intervalle Δ tel que $j_{\min}(\Delta) \leq k < j_{\max}(\Delta)$. On vérifie alors que $S_k(\lambda)$ est pair. Supposons de plus k impair. Alors $S_k(\nu)$ est impair parce que ν est spéciale. L'égalité $S_k(\nu) = S_k(\lambda)$ est contradictoire. Cela démontre que, pour k impair, $S_k(\nu) \geq S_k(\lambda + \zeta(\lambda))$. Supposons maintenant que k est pair. Les inégalités $j_{\min}(\Delta) \leq k < j_{\max}(\Delta)$ et le fait que $j_{\min}(\Delta)$ est impair tandis que $j_{\max}(\Delta)$ est pair ou infini entraînent que $j_{\min}(\Delta) \leq k - 1 < j_{\max}(\Delta)$ et $j_{\min}(\Delta) < k + 1 < j_{\max}(\Delta)$. D'après ce que l'on vient de démontrer, on a $S_{k-1}(\nu) \geq S_{k-1}(\lambda + \zeta(\lambda)) = S_{k-1}(\lambda) + 1$. Avec l'égalité $S_k(\nu) = S_k(\lambda)$, cela entraîne $\nu_k < \lambda_k$. D'autre part, λ_k et λ_{k+1} sont dans un même intervalle. L'entier k étant pair, cela entraîne $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, donc $\nu_{k+1} \leq \nu_k < \lambda_k = \lambda_{k+1}$. Avec l'égalité $S_k(\nu) = S_k(\lambda)$, cela entraîne $S_{k+1}(\nu) < S_{k+1}(\lambda)$, ce qui contredit l'hypothèse $\nu \geq \lambda \cup \{1\}$. Cette contradiction démontre encore l'inégalité $S_k(\nu) \geq S_k(\lambda + \zeta(\lambda))$. Celle-ci est donc vraie pour tout k, d'où $\nu \geq \lambda + \zeta(\lambda)$.

On a donc prouvé que $\lambda + \zeta(\lambda)$ était la plus petite partition orthogonale spéciale ν de $2n + 1$ telle que $\nu \geq \lambda \cup \{1\}$. Le lemme résulte alors de (15). □

1.7. ***Dualité, cas orthogonal pair.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{S}_{n,0}^{\mathrm{sp}}$ l'ensemble des symboles spéciaux de rang n et de défaut pair (ce défaut est alors 0). On dispose d'une bijection

$$\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n) \to \mathcal{S}_{n,0}^{\mathrm{sp}}, \quad \lambda \mapsto \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$$

et d'une involution d de $\mathcal{S}_{n,0}^{\mathrm{sp}}$. On en déduit une involution $d : \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$ définie par la formule $\mathrm{symb}(\rho_{d(\lambda),1}) = d \circ \mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$. On vérifie qu'il y a une unique bijection décroissante de $\mathrm{Int}(\lambda)$ sur $\mathrm{Int}(d(\lambda))$. Notons $\Delta_1 > \cdots > \Delta_r$ les intervalles de λ et $\Delta'_1 > \cdots > \Delta'_r$ ceux de $d(\lambda)$. On a dit que l'involution d des symboles échangeait les familles de $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$ et de $\mathrm{symb}(\rho_{d(\lambda),1})$. D'autre part, ces familles sont paramétrées par des sous-ensembles de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\lambda)}$ et de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(d(\lambda))} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(d(\lambda))}$, respectivement. Soit (X, Y) un symbole dans la famille de $\mathrm{symb}(\rho_{\lambda,1})$, notons $(\tau, \delta) = \mathrm{fam}(X, Y)$ et $(\tau', \delta') = \mathrm{fam} \circ d(X, Y)$. On vérifie les égalités suivantes, pour tout $h = 1, \ldots, r$:

$$\delta'(\Delta'_h) = \delta(\Delta_{r-h}),$$

avec la convention $\delta(\Delta_0) = 0$;

— si le défaut de (X, Y) est strictement positif,

$$\tau'(\Delta'_h) = \tau(\Delta_{r+1-h});$$

— si ce défaut est nul,

$$\tau'(\Delta'_h) = \tau(\Delta_{r+1-h}) - \tau(\Delta_1).$$

En particulier cette application échange l'ensemble des (τ, δ) tels que $\delta = 0$ et celui des (τ', δ') tels que $\delta' = 0$.

On a défini l'application $\mathrm{sp} : \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$. On étend l'involution d en une application encore notée $d : \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$ par la formule $d(\lambda) = d \circ \mathrm{sp}(\lambda)$. Il est connu que cette application est décroissante : pour $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$, $\lambda \leq \lambda'$ entraîne $d(\lambda') \leq d(\lambda)$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$. On vérifie que $d(\lambda)$ est la plus grande partition $\mu \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n)$ telle que $\mu \leq {}^t\lambda$, cf. [Mœglin et Renard 2017, paragraphe 7].

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$. On a défini l'ensemble $\mathrm{Int}(\lambda)$. Soit $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda)$. On note $J(\Delta)$ l'ensemble des indices $j \geq 1$ tels que $\lambda_j \in \Delta$. On note $j_{\min}(\Delta)$ (resp. $j_{\max}(\Delta)$) le plus petit (resp. grand) élément de $J(\Delta)$. Le nombre $j_{\min}(\Delta)$ (resp. $j_{\max}(\Delta)$) est impair (resp. pair). On définit une suite de nombres $\zeta(\lambda) = (\zeta(\lambda)_1, \zeta(\lambda)_2, \dots)$ par

$$\zeta(\lambda)_j = \begin{cases} 1 & \text{si il existe } \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda) \text{ tel que } j = j_{\min}(\Delta), \\ -1 & \text{si il existe } \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda) \text{ tel que } j = j_{\max}(\Delta), \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Lemme. *Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n)$. On a l'égalité ${}^t d(\lambda) = \lambda + \zeta(\lambda)$.*

La preuve est similaire à celle du lemme précédent.

1.8. ***Dualité et induction.*** Considérons une famille $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_t, n_0)$ d'entiers positifs ou nuls. Posons $n = \sum_{j=0,\dots,t} n_j$. Posons

$$\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{P}(n_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(n_t) \times \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n_0 + 1), \quad \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{P}(n_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(n_t) \times \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n_0).$$

On définit une opération d'induction

$$\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(\boldsymbol{n}) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_t, \lambda_0) \mapsto \mathrm{ind}(\boldsymbol{\lambda})$$

de la façon suivante : $\mathrm{ind}(\boldsymbol{\lambda})$ est la plus grande partition orthogonale λ telle que

$$\lambda \leq (\lambda_1 + \lambda_1) + \cdots + (\lambda_t + \lambda_t) + \lambda_0.$$

L'ensemble $\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(\boldsymbol{n})$ étant le produit d'ensembles ordonnés, il l'est aussi par l'ordre produit. On vérifie que l'application d'induction est strictement croissante.

On définit l'application

$$\mathrm{cup} : \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(\boldsymbol{n}) \to \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$$

par la formule

$$\mathrm{cup}(\lambda_1, \dots, \lambda_t, \lambda_0) = (\lambda_1 \cup \lambda_1) \cup \dots \cup (\lambda_t \cup \lambda_t) \cup \lambda_0.$$

On définit enfin une dualité $d : \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(\boldsymbol{n}) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(\boldsymbol{n})$. C'est le produit des applications $\lambda \mapsto {}^t\lambda$ sur chaque facteur $\mathcal{P}(n_i)$ pour $i = 1, \dots, t$ et de la dualité $d : \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n_0) \to \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n_0+1) \subset \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n_0+1)$. On a alors (Cf. [Barbasch et Vogan 1985, corollaire A.4]) :

Lemme. *Pour $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_t, \lambda_0) \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(\boldsymbol{n})$, on a l'égalité $d \circ \mathrm{cup}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{ind} \circ d(\boldsymbol{\lambda})$.*

1.9. ***Induction endoscopique.*** Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, posons $n = n_1 + n_2$. Soient $\lambda_1 \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n_1)$ et $\lambda_2 \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n_2)$. Rappelons la définition de l'induite endoscopique $\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$, cf. [Waldspurger 2001, XI.6]. On note J^+ l'ensemble des entiers $j \geq 1$ tels que

> $\lambda_{1,j}$ est pair, $\lambda_{2,j}$ est impair et il existe $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1) \cup \mathrm{Int}(\lambda_2)$ de sorte que $j = j_{\min}(\Delta)$ (cela entraîne que j est impair).

On note J^- l'ensemble des entiers $j \geq 1$ tels que

> $\lambda_{1,j}$ est pair, $\lambda_{2,j}$ est impair et il existe $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1) \cup \mathrm{Int}(\lambda_2)$ de sorte que $j = j_{\max}(\Delta)$ (cela entraîne que j est pair).

On vérifie que J^+ et J^- ont même nombre d'éléments et que, si on note leurs éléments $j_1^+ < \dots < j_r^+$ et $j_1^- < \dots < j_r^-$, on a

$$j_1^+ < j_1^- < j_2^+ < j_2^- < \dots < j_r^+ < j_r^-.$$

On note $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ la famille définie par $\xi_j = 1$ si $j \in J^+$, $\xi_j = -1$ si $j \in J^-$ et $\xi_j = 0$ pour $j \geq 1$ tel que $j \notin J^+ \cup J^-$. Alors $\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \xi$.

Proposition. $$d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) \leq d(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2)).$$

Preuve. Les deux membres de l'inégalité à prouver sont des partitions de $2n+1$. Les partitions $d(\lambda_1)$ et $d(\lambda_2)$ sont orthogonales, leur réunion l'est aussi. D'après la caractérisation de $d(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2))$ donnée en 1.6, il suffit de prouver l'inégalité

$$d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) \leq {}^t(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2) \cup \{1\}), \quad \text{ou encore} \quad {}^td(\lambda_1) + {}^td(\lambda_2) \geq \mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2) \cup \{1\},$$

ou encore, d'après les lemmes 1.6 et 1.7 et la définition ci-dessus,

$$\lambda_1 + \zeta(\lambda_1) + \lambda_2 + \zeta(\lambda_2) \geq (\lambda_1 + \lambda_2 + \xi) \cup \{1\}.$$

Cette inégalité se traduit par les inégalités suivantes, pour tout $k \geq 1$:

$$S_k(\zeta(\lambda_1)) + S_k(\zeta(\lambda_2)) \geq S_k(\xi), \qquad \text{si } k \leq l(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2)); \tag{16}$$

$$S_k(\zeta(\lambda_1)) + S_k(\zeta(\lambda_2)) \geq S_k(\xi) + 1, \quad \text{si } k > l(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2)). \tag{17}$$

Les entiers $S_k(\zeta(\lambda_1))$, $S_k(\zeta(\lambda_2))$ et $S_k(\xi)$ valent toujours 0 ou 1. L'inégalité (16) est donc vérifiée si $S_k(\xi) = 0$. Supposons $S_k(\xi) = 1$. Avec les notations introduites plus haut, il existe alors $s \in \{1, \dots, r\}$

tel que $j_s^+ \leq k < j_s^-$. L'entier λ_{1,j_s^-} est pair et l'entier λ_{2,j_s^-} est impair. Il existe donc $\Delta_1 \in \mathrm{Int}(\lambda_1)$ et $\Delta_2 \in \mathrm{Int}(\lambda_2)$ tels que $\lambda_{1,j_s^-} \in \Delta_1$ et $\lambda_{2,j_s^-} \in \Delta_2$. Posons $u = \max(j_{\min}(\Delta_1), j_{\min}(\Delta_2))$. Alors $\lambda_{1,u} \in \Delta_1$ est pair et $\lambda_{2,u} \in \Delta_2$ est impair. En appliquant la définition de J^+, on voit que $u \in J^+$. On a aussi $u \leq j_s^-$, donc $u \leq j_s^+$. On a alors $j_{\min}(\Delta_2) \leq u \leq j_s^+ \leq k < j_s^- \leq j_{\max}(\Delta_2)$ et $j_{\min}(\Delta_1) \leq u \leq j_s^+ \leq k < j_s^- \leq j_{\max}(\Delta_1)$. Ces inégalités entraînent $S_k(\zeta(\lambda_1)) = S_k(\zeta(\lambda_2)) = 1$. On a alors l'égalité

$$S_k(\zeta(\lambda_1)) + S_k(\zeta(\lambda_2)) = 2 = S_k(\xi) + 1,$$

qui est plus forte que (16). Cela prouve cette inégalité (16).

Supposons $k > l(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2))$. Si $S_k(\xi) = 1$, on vient de voir que l'inégalité (17) est vérifiée (et que c'est une égalité). On peut donc supposer $S_k(\xi) = 0$ et il suffit de montrer que $S_k(\zeta(\lambda_1)) = 1$. Puisque $k > l(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2))$, on a $\lambda_{1,k} + \lambda_{2,k} + \xi_k = 0$. Si $\xi_k \neq -1$, cela force $\lambda_{1,k} = 0$. Si $\xi_k = -1$, alors d'une part $\lambda_{1,k} \leq 1$, d'autre part $k \in J^-$. Donc $\lambda_{1,k}$ est pair et on a encore $\lambda_{1,k} = 0$. Donc $k \in J(\Delta_{1,\min})$, où $\Delta_{1,\min}$ est le plus petit élément de $\mathrm{Int}(\lambda_1)$. Cela entraîne $S_k(\zeta(\lambda_1)) = 1$, ce qui achève la démonstration. □

1.10. ***Intervalles relatifs, induction endoscopique régulière.*** On conserve les données n_1, n_2, λ_1 et λ_2. On pose $\lambda = \mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2)$.

On a défini en [Waldspurger 2001, XI.11] un ensemble d'intervalles de λ. La terminologie est mal choisie car il se peut que λ soit spéciale et que cet ensemble ne soit pas celui défini en 1.3 ci-dessus. Nous appellerons ici intervalles relatifs (à λ_1 et λ_2) ces nouveaux intervalles. Rappelons leur définition. On pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \{j_{\min}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1) \cup \mathrm{Int}(\lambda_2)\} \cup \{j_{\max}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1) \cup \mathrm{Int}(\lambda_2)\},\\
\mathcal{J}^+ &= \{j_{\min}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1)\} \cap \{j_{\min}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_2)\},\\
\mathcal{J}^- &= \{j_{\max}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1)\} \cap \{j_{\max}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_2)\}.
\end{aligned}$$

Remarquons que $\mathcal{J}$ contient ∞ qui est $j_{\max}(\Delta)$ pour le plus petit $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1)$. Appelons intervalle relatif d'indices tout intervalle d'entiers $\{j, \dots, j'\}$ (avec éventuellement $j' = \infty$) vérifiant l'une des conditions suivantes :

(18) $j = j' \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$;

(19) $j < j'$, j et j' sont deux termes consécutifs de $\mathcal{J}$ et il existe un unique $d \in \{1, 2\}$ et un unique $\Delta_d \in \mathrm{Int}(\lambda_d)$ de sorte que $j_{\min}(\Delta_d) \leq j < j' \leq j_{\max}(\Delta_d)$.

Pour tout tel intervalle relatif d'indices $J = \{j, \dots, j'\}$, on pose $D(J) = \{\lambda_{j''};\ j \leq j'' \leq j'\}$. On appelle intervalle relatif un tel ensemble $D(J)$. Inversement, pour un intervalle relatif D, on note $J(D)$ l'intervalle relatif d'indices J dont il provient et on note $j_{\min}(D)$ (resp. $j_{\max}(D)$) le plus petit (resp. grand) terme de $J(D)$. On note $\mathrm{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ l'ensemble de ces intervalles relatifs. On montre que cet ensemble d'intervalles relatifs forme une partition de $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda) \cup \{0\}$.

Remarque. Comme on l'a dit ci-dessus, la définition des intervalles relatifs n'est pas la même que celle des intervalles d'une partition spéciale donnée en 1.3. Ces deux types d'intervalles n'ont pas les mêmes propriétés. En particulier, si Δ est un intervalle d'une partition symplectique spéciale, $j_{\min}(\Delta)$ est impair et $j_{\max}(\Delta)$ est pair (ou ∞). Tandis que, pour un intervalle relatif D comme ci-dessus, $j_{\min}(D)$ et $j_{\max}(D)$ sont de parité quelconque.

On dit que λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ si et seulement si tout intervalle relatif est réduit à un élément. Autrement dit, $\mathrm{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ est la partition maximale de $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)\cup\{0\}$.

Supposons que λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ. On définit alors une fonction $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}:\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la façon suivante. Soit $i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$. L'ensemble $\{i\}$ est un intervalle relatif. Remarquons que $\mathrm{mult}_\lambda(i)=1$ si et seulement si $J(\{i\})$ n'a qu'un élément, autrement dit $J(\{i\})$ est du type (18). Si $\mathrm{mult}_\lambda(i)=1$, on pose $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}(i)=0$. Si $\mathrm{mult}_\lambda(i)\geq 2$, $J(\{i\})$ est du type (19) et on note $d(i)\in\{1,2\}$ l'indice tel qu'il existe $\Delta_{d(i)}\in\mathrm{Int}(\lambda_{d(i)})$ de sorte que $J(\{i\})\subset\{j_{\min}(\Delta_{d(i)}),\dots,j_{\max}(\Delta_{d(i)})\}$. On pose $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}(i)=d(i)+1 \mod 2\mathbb{Z}$.

1.11. ***Une proposition d'existence.*** Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\lambda\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$. On se limite ici au cas où tous les termes de λ sont pairs. En particulier, λ est spéciale. Fixons une fonction $\tau:\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que $\tau(i)=0$ pour tout $i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ tel que $\mathrm{mult}_\lambda(i)=1$.

Proposition. *Soient λ et τ comme ci-dessus. Il existe $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $n_1+n_2=n$ et il existe $\lambda_1\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n_1)$ et $\lambda_2\in\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n_2)$ tels que*

(a) *λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ ;*

(b) $d(\lambda_1)\cup d(\lambda_2)=d(\lambda)$;

(c) $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}=\tau$.

Preuve. Notons $\mathfrak{J}^+$ l'ensemble des $j\geq 1$ tels que j soit impair et $\lambda_j>\lambda_{j+1}$. Notons $\mathfrak{J}^-$ l'ensemble des $j\geq 2$ tels que j soit pair et $\lambda_{j-1}>\lambda_j$. Les ensembles $\mathfrak{J}^+$ et $\mathfrak{J}^-$ sont disjoints et leur réunion est égale à la réunion des couples $\{2k-1,2k\}$, pour $k\geq 1$, tels que $\lambda_{2k-1}>\lambda_{2k}$. On note $\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2,\dots)$ la suite telle que $\mathfrak{x}_j=1$ si $j\in\mathfrak{J}^+$, $\mathfrak{x}_j=-1$ si $j\in\mathfrak{J}^-$ et $\mathfrak{x}_j=0$ si $j\notin\mathfrak{J}^+\cup\mathfrak{J}^-$.

On prolonge la fonction τ à $\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)\cup\{0\}$ en posant $\tau(0)=0$. Soit $d\in\{1,2\}$. Pour $j\geq 1$, disons que j et $j+1$ sont d-liés si et seulement s'ils vérifient l'une des conditions suivantes :

(20) $\lambda_j=\lambda_{j+1}$ et $\tau(\lambda_j)=d+1$ (on veut dire par là $\tau(\lambda_j)\equiv d+1 \mod 2\mathbb{Z}$);

(21) j est impair et $\lambda_j>\lambda_{j+1}$.

Pour deux entiers $1\leq j\leq j'$, disons qu'ils sont d-liés si et seulement si k et $k+1$ sont d-liés pour tout $k=j,\dots,j'-1$. C'est une relation d'équivalence. On note $\mathfrak{Int}_d$ l'ensemble des classes d'équivalence dont le nombre d'éléments est au moins 2. Pour $\mathfrak{I}\in\mathfrak{Int}_d$, on note $j_{\min}(\mathfrak{I})$ (resp. $j_{\max}(\mathfrak{I})$) le plus petit (resp. plus grand) élément de $\mathfrak{I}$ (éventuellement $j_{\max}(\mathfrak{I})=\infty$). Montrons que :

(22) L'ensemble $\mathfrak{Int}_d$ est fini ; il contient un élément infini si et seulement si $d=1$.

(23) Pour $\mathfrak{I}\in\mathfrak{Int}_d$, $j_{\min}(\mathfrak{I})$ est impair et $j_{\max}(\mathfrak{I})$ est pair ou infini.

(24) Pour tout $k\geq 1$, il existe au moins un $d\in\{1,2\}$ et un $\mathfrak{I}\in\mathfrak{Int}_d$ tel que $\{2k-1,2k\}\subset\mathfrak{I}_d$; les deux éléments de $\{1,2\}$ vérifient cette condition si et seulement si $2k-1\in\mathfrak{J}^+$ (ce qui équivaut à $2k\in\mathfrak{J}^-$).

(25) Pour tout $k \geq 1$, il existe au plus un $d \in \{1, 2\}$ et un $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $\{2k, 2k+1\} \subset \mathfrak{I}_d$.

(26) Pour tout $j \geq 1$, il existe au moins un $d \in \{1, 2\}$ et un $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j \in \mathfrak{I}$; les deux éléments de $\{1, 2\}$ vérifient cette condition si et seulement si $j \in \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$.

Pour $j \geq l(\lambda)+1$, on a $\lambda_j = \lambda_{j+1} = 0$ et, puisque $\tau(0) = 0$, j et $j+1$ sont 1-liés mais pas 2-liés. Donc $\{l(\lambda)+1, \ldots, \infty\}$ est contenu dans une classe infinie $\mathfrak{I}_{1,\min} \in \mathfrak{Int}_1$ tandis que, pour $j \geq l(\lambda)+2$, $\{j\}$ forme une classe pour la 2-équivalence donc n'est pas contenu dans un élément de $\mathfrak{Int}_2$. Cela prouve (22).

Soit $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$, posons $j = j_{\min}(\mathfrak{I})$. Montrons que j est impair. Puisque $\mathfrak{I}$ a au moins deux éléments, j et $j+1$ sont d-liés. Si la condition (21) est vérifiée, j est impair et on a terminé. Si (20) est vérifiée, on a $\tau(\lambda_j) = d+1$. Si $j = 1$, j est impair et on a terminé. Sinon, puisque j est l'élément minimal de $\mathfrak{I}$, $j-1$ et j ne sont pas d-liés. Alors le couple $(j-1, j)$ ne vérifie pas (21). Donc $j-1$ est pair ou $\lambda_{j-1} = \lambda_j$. Dans le premier cas, j est impair et on a terminé. Dans le deuxième cas, on a $\tau(\lambda_{j-1}) = \tau(\lambda_j) = d+1$ mais alors $(j-1, j)$ vérifie (20) et $j-1$ et j sont d-liés, ce qui n'est pas le cas. Cela démontre l'assertion. Un raisonnement similaire prouve que $j_{\max}(\mathfrak{I})$ est pair s'il n'est pas infini. D'où (23).

Soit $k \geq 1$. Pour $d = 1, 2$, dire qu'il existe $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $\{2k-1, 2k\} \subset \mathfrak{I}$ équivaut à ce que $2k-1$ et $2k$ soient d-liés. Si $\lambda_{2k-1} > \lambda_{2k}$, $2k-1$ et $2k$ vérifient (21) et sont d-liés pour les deux éléments $d = 1, 2$. Mais on a aussi $2k-1 \in \mathfrak{J}^+$ et l'assertion (24) est vérifiée dans ce cas. Si $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k}$, (21) n'est pas vérifiée. Alors $2k-1$ et $2k$ sont d-liés pour l'unique élément $d = \tau(\lambda_{2k-1})+1$. On a aussi $2k-1 \notin \mathfrak{J}^+$ et (24) est encore vérifiée.

Soient $k \geq 1$ et $d = 1, 2$. Le couple $(2k, 2k+1)$ ne vérifie pas la condition (21). Si $2k, 2k+1$ sont d-liés, la condition (20) est satisfaite. Donc $d = \tau(\lambda_{2k})+1$ est uniquement déterminé. D'où (25).

Soit $j \geq 1$. Posons $k = [(j+1)/2]$. On a $j \in \{2k-1, 2k\}$. Soit $d = 1, 2$ et $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$. D'après (23), les conditions $j \in \mathfrak{I}$ et $\{2k-1, 2k\} \subset \mathfrak{I}$ sont équivalentes. Alors (26) résulte de (24).

Pour $d = 1, 2$, définissons une fonction $p_d : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $p_d(j) = 1$ s'il existe $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j \in \mathfrak{I}$, $p_d(j) = 0$ sinon. La relation (23) entraîne

$$p_d(j) = p_d(j+1) \quad \text{si } j \text{ est impair.}$$

La définition de $\mathfrak{x}$ et l'assertion (26) entraînent l'égalité

$$\mathfrak{x}_j \equiv p_1(j) + p_2(j) + 1 \mod 2\mathbb{Z}. \tag{27}$$

On va montrer qu'il existe des suites d'entiers positifs ou nuls λ_1 et λ_2 vérifiant les conditions suivantes, pour $j \geq 1$:

(28) $\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + \mathfrak{x}_j = \lambda_j$;

(29) pour $d = 1, 2$, $\lambda_{d,j} \equiv d + p_d(j) \mod 2\mathbb{Z}$;

(30) pour $d = 1, 2$, on a

(a) $\lambda_{d,j} = \lambda_{d,j+1}$ si j est pair, $p_d(j) = 1$ et il n'existe pas de $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j = j_{\max}(\mathfrak{I})$ ou si j est impair et $p_d(j) = 0$;

(b) $\lambda_{d,j} > \lambda_{d,j+1}$ si j est pair et il existe $\mathfrak{J} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j = j_{\max}(\mathfrak{J})$;

(c) $\lambda_{d,j} \geq \lambda_{d,j+1}$ si j est impair et $p_d(j) = 1$ ou si j est pair et $p_d(j) = 0$.

On raisonne par récurrence descendante sur j. Pour $j \geq l(\lambda) + 2$, on pose $\lambda_{1,j} = \lambda_{2,j} = 0$. On a vu dans la preuve de (22) que j était contenu dans $\mathfrak{J}_{1,\min}$ et n'était contenu dans aucun élément de $\mathfrak{Int}_2$. On a aussi $j \notin \mathfrak{J}^+ \cup \mathfrak{J}^-$ donc $\mathfrak{x}_j = 0$. On voit que toutes nos conditions sont vérifiées.

On fixe j et on suppose que l'on a fixé des termes $\lambda_{1,j'}$ et $\lambda_{2,j'}$ pour $j' > j$ de sorte que les conditions soient vérifiées pour ces j'. Pour $d = 1, 2$, soit $e_d \in \mathbb{Z}$, posons $\lambda_{d,j} = \lambda_{d,j+1} + e_d$. Traduisons les conditions ci-dessus en termes des entiers e_1 et e_2. La condition (28) étant vérifiée pour $j+1$, on voit que cette condition pour j équivaut à

$$e_1 + e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{x}_{j+1} - \mathfrak{x}_j. \tag{31}$$

La condition (29) étant vérifiée pour $j+1$, cette condition pour j équivaut à

$$e_d \equiv p_d(j) + p_d(j+1) \mod 2\mathbb{Z}. \tag{32}$$

Remarquons que, si (31) est vérifiée et si (32) l'est pour un $d \in \{1, 2\}$, cette condition (32) est aussi vérifiée pour l'autre élément de $\{1, 2\}$: cela résulte de la parité de λ_j et de λ_{j+1} et de la relation (27). La condition (30) se traduit par les conditions $e_d = 0$ dans le cas (a), $e_d > 0$ dans le cas (b) et $e_d \geq 0$ dans le cas (c). Remarquons que, dans le cas (a), la condition $e_d = 0$ est compatible avec (32), autrement dit on a $p_d(j) + p_d(j+1) \equiv 0 \mod 2\mathbb{Z}$. En effet, si j est impair, on a toujours $p_d(j) = p_d(j+1)$. Si j est pair, la condition de (30)(a) est d'une part que $p_d(j) = 1$ donc il existe $\mathfrak{J} \in \mathfrak{Int}_d$ tel que $j \in \mathfrak{J}$, d'autre part que j n'est pas l'élément maximal de $\mathfrak{J}$. Donc $j+1 \in \mathfrak{J}$ et $p_d(j+1) = p_d(j)$.

Supposons la condition (30)(a) vérifiée pour au moins un $d = 1, 2$, disons pour $d = 1$ pour fixer la notation. On n'a pas le choix pour e_1 : on pose $e_1 = 0$. Comme on vient de le dire, la condition (32) est vérifiée pour $d = 1$. La condition (31) ne laisse plus le choix pour e_2 : on pose $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{x}_{j+1} - \mathfrak{x}_j$. Puisque (31) est vérifiée et aussi (32) pour $d = 1$, (32) est aussi vérifiée pour $d = 2$. Il reste à vérifier que e_2 vérifie les conditions résultant de (30). Supposons d'abord j pair. L'hypothèse que (30)(a) est vérifiée pour $d = 1$ signifie, comme on l'a vu ci-dessus, qu'il existe $\mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{Int}_1$ tel que $\{j, j+1\} \subset \mathfrak{J}_1$. D'après (25), cette condition ne peut pas être réalisée pour $d = 2$. Donc (30)(a) n'est pas vérifiée pour $d = 2$. Si (30)(c) est vérifiée pour $d = 2$, on doit seulement voir que $e_2 \geq 0$. Or, puisque j est pair, on a $-\mathfrak{x}_j \geq 0$ et $\mathfrak{x}_{j+1} \geq 0$, donc $\lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{x}_{j+1} - \mathfrak{x}_j \geq 0$ comme on le voulait. Si (30)(b) est vérifiée pour $d = 2$, on doit montrer que $e_2 > 0$. On a $p_1(j) = 1$ d'après (30)(a) pour $d = 1$ et $p_2(j) = 1$ d'après (30)(b) pour $d = 2$. Alors $j \in \mathfrak{J}^-$ d'après (26) et $-\mathfrak{x}_j = 1$. Donc $\lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{x}_{j+1} - \mathfrak{x}_j > 0$ comme on le voulait. Supposons maintenant j impair. L'hypothèse que (30)(a) est vérifiée pour $d = 1$ signifie que $p_1(j) = 0$. D'après (26), on a $p_2(j) = 1$ et $j \notin \mathfrak{J}^+$, donc aussi $j+1 \notin \mathfrak{J}^-$. Ces deux dernières relations entraînent $\mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_{j+1} = 0$ et $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1}$. La relation $p_2(j) = 1$ entraîne que (30)(c) est vérifiée pour $d = 2$ et que l'on doit seulement prouver que $e_2 \geq 0$, ce qui est clair d'après la formule précédente.

Supposons maintenant que (30)(a) n'est vérifiée ni pour $d = 1$, ni pour $d = 2$. Supposons la condition (30)(b) vérifiée pour au moins un $d = 1, 2$, disons pour $d = 1$. Cela entraîne que j est pair. Choisissons pour e_1 le plus petit entier strictement positif vérifiant la condition (32). On a $e_1 = 1$ ou 2. Posons $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{x}_{j+1} - \mathfrak{x}_j - e_1$. Comme ci-dessus, on doit montrer que e_2 vérifie les conditions résultant de (30). On a supposé que (30)(a) n'était pas vérifiée pour $d = 2$. Supposons que (30)(c) soit vérifiée pour $d = 2$. Il faut voir que $e_2 \geq 0$. D'après (30)(b) pour $d = 1$, il existe $\mathfrak{I}_1 \in \mathfrak{Int}_1$ tel que $j = j_{\max}(\mathfrak{I}_1)$. Donc j et $j+1$ ne sont pas 1-liés. D'après (30)(c) pour $d = 2$ et parce que j est pair, on a $p_2(j) = 0$ donc j et $j+1$ ne sont pas 2 liés. Si $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ la condition (20) est vérifiée pour un d donc j et $j+1$ sont d-liés pour ce d. Puisque ce n'est pas le cas, on a $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$, donc $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 2$, puisque les termes de λ sont pairs. Le même calcul que plus haut conduit à l'inégalité cherchée $e_2 \geq 0$. Supposons maintenant (30)(b) vérifiée pour $d = 2$. On doit prouver $e_2 > 0$. On vient de montrer que j et $j+1$ n'étaient pas 1-liés. Pour la même raison, ils ne sont pas 2-liés et cela entraîne encore $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 2$. Les conditions (30)(b) pour $d = 1, 2$ entraînent que $p_1(j) = p_2(j) = 1$, donc $j \in \mathfrak{J}^-$ d'après (26). Alors $-\mathfrak{x}_j = 1$ et on voit que $e_2 > 0$.

Il reste le cas où (30)(c) est vérifiée pour $d = 1, 2$. Puisque $p_d(j) = 1$ pour au moins un d, cette hypothèse entraîne que j est impair et $p_1(j) = p_2(j) = 1$. Donc $j \in \mathfrak{J}^+$, puis $j+1 \in \mathfrak{J}^-$. Ces relations entraînent que $\mathfrak{x}_j = 1$ et $\mathfrak{x}_{j+1} = -1$ et aussi que $\lambda_j > \lambda_{j+1}$, donc $\lambda_j \geq \lambda_{j+1} + 2$. Puisque j est impair, on a $p_1(j+1) = p_1(j) = 1$. La condition (32) pour $d = 1$ signifie que e_1 doit être pair. Choisissons $e_1 = 0$, qui vérifie la condition résultant de (30)(c) pour $d = 1$. Posons $e_2 = \lambda_j - \lambda_{j+1} + \mathfrak{x}_{j+1} - \mathfrak{x}_j - e_1 = \lambda_j - \lambda_{j+1} - 2$. On a $e_2 \geq 0$, ce qui vérifie la condition résultant de (30)(c) pour $d = 2$. Cela démontre l'existence de nos suites λ_1 et λ_2.

Fixons donc de telles suites λ_1 et λ_2. La condition (30) entraîne que ce sont des partitions, c'est-à-dire qu'elles sont décroissantes. Montrons que :

(33) Il existe des entiers n_1, n_2 tels que $n_1 + n_2 = n$, que λ_1 appartienne à $\mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n_1)$ et que λ_2 appartienne à $\mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n_2)$.

On voit qu'il s'agit de prouver que, pour $d = 1, 2$ et $k \geq 1$, les termes $\lambda_{d,2k-1}$ et $\lambda_{d,2k}$ sont de même parité et que, quand cette parité est celle de d, on a $\lambda_{d,2k-1} = \lambda_{d,2k}$. La première propriété résulte de (29) et de l'égalité $p_d(2k-1) = p_d(2k)$. Si la parité de $\lambda_{d,2k-1}$ est celle de d, cette même relation (29) entraîne $p_d(2k-1) = 0$. Mais alors (30)(a) est vérifiée pour $2k-1$, d'où $\lambda_{d,2k-1} = \lambda_{d,2k}$. D'où (33).

Grâce à cette relation, on peut définir les ensembles d'intervalles $\mathrm{Int}(\lambda_1)$ et $\mathrm{Int}(\lambda_2)$ et, comme en 1.9, les ensembles J^+ et J^- et la fonction ξ. Montrons que

$$\{J(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_1)\} = \mathfrak{Int}_1, \quad \{J(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_2)\} = \mathfrak{Int}_2, \quad J^+ = \mathfrak{J}^+, \quad J^- = \mathfrak{J}^-, \quad \xi = \mathfrak{x}. \tag{34}$$

Soit $d = 1, 2$. La réunion des $J(\Delta)$ quand Δ parcourt $\mathrm{Int}(\lambda_d)$ est l'ensemble des $j \geq 1$ tels que $\lambda_{d,j} \equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$. En vertu de (29), c'est l'ensemble des $j \geq 1$ tels que $p_d(j) = 1$, autrement dit c'est la réunion des éléments de $\mathfrak{Int}_d$. On a donc un même ensemble d'indices découpé de deux façons en intervalles disjoints : les $J(\Delta)$ pour $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_d)$ ou les $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d$. Pour prouver que ces découpages sont les mêmes, il suffit de prouver que les éléments maximaux de ces intervalles sont les mêmes, c'est-à-dire

$$\{j_{\max}(\Delta);\ \Delta \in \mathrm{Int}(\lambda_d)\} = \{j_{\max}(\mathfrak{I});\ \mathfrak{I} \in \mathfrak{Int}_d\}.$$

Comme on l'a vu en (22), l'infini intervient dans les deux ensembles si $d=1$ et n'y intervient pas si $d=2$. Soit $j\geq 1$. Par définition de $\mathrm{Int}(\lambda_d)$, j appartient à l'ensemble de gauche ci-dessus si et seulement si j est pair, $\lambda_{d,j}\equiv d+1 \mod 2\mathbb{Z}$ et $\lambda_{d,j}>\lambda_{d,j+1}$. On vient de voir que la congruence est équivalente à $p_d(j)=1$. Les relations (30) entraînent alors que ces conditions équivalent à ce que j soit de la forme $j_{\max}(\mathfrak{I})$ pour un $\mathfrak{I}\in\mathfrak{Int}_d$. Cela démontre les deux premières égalités de (34). Soit $j\in J^+$. Alors j est impair $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont "de bonne parité", d'où, comme on l'a vu, $p_d(j)=1$ pour $d=1,2$. Alors $j\in\mathfrak{J}^+$ d'après (26) et l'imparité de j. Inversement, soit $j\in\mathfrak{J}^+$. Alors j est impair et, en inversant le raisonnement précédent, $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont de bonne parité. Il existe $\Delta_1\in\mathrm{Int}(\lambda_1)$ et $\Delta_2\in\mathrm{Int}(\lambda_2)$ tels que $j\in J(\Delta_1)\cap J(\Delta_2)$. Si $j=1$, on a évidemment $j=j_{\min}(\Delta_1)=j_{\min}(\Delta_2)$ et $j\in J^+$. Si $j>1$, l'assertion (25) implique qu'il existe d tel que $j-1$ n'appartienne pas à $\mathfrak{I}_d$, où $\mathfrak{I}_d=J(\Delta_d)$. Alors $j=j_{\min}(\mathfrak{I}_d)$ pour ce d, ou encore $j=j_{\min}(\Delta_d)$. Par définition de l'ensemble J^+, on a alors $j\in J^+$. Cela prouve l'égalité $J^+=\mathfrak{J}^+$ et l'égalité $J^-=\mathfrak{J}^-$ se démontre de même. Ces égalités et les définitions de ξ et $\mathfrak{x}$ entraînent la dernière égalité de (34).

L'égalité $\xi=\mathfrak{x}$ et la relation (28) entraînent l'égalité $\mathrm{Ind}(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda$. Montrons que

$$\lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ induisent régulièrement } \lambda. \tag{35}$$

Cela signifie que tout intervalle relatif est réduit à un seul élément. Soit D un tel intervalle relatif. Évidemment, si $J(D)$ est réduit à un seul élément, D aussi. Supposons que $J(D)$ a au moins deux éléments. Il vérifie la relation (19). Pour fixer la notation, supposons que l'entier d qui figure dans cette relation soit 1. Il existe donc $\mathfrak{I}_1\in\mathfrak{Int}_1$ tel que $J(D)\subset\mathfrak{I}_1$. Considérons deux éléments consécutifs $j,j+1\in J(D)$. Supposons qu'il existe $\mathfrak{I}_2\in\mathfrak{Int}_2$ tel que $\{j,j+1\}\subset\mathfrak{I}_2$. On a $j_{\min}(\mathfrak{I}_2)<j+1\leq j_{\max}(D)$. Puisque les termes $j_{\min}(D)$ et $j_{\max}(D)$ sont par définition des éléments consécutifs de $\mathcal{J}$, cela entraîne $j_{\min}(\mathfrak{I}_2)\leq j_{\min}(D)$. De même $j_{\max}(D)\leq j_{\max}(\mathfrak{I}_2)$. Alors $J(D)\subset\mathfrak{I}_2$ ce qui est exclu par (19). Cela démontre que, pour deux elements $j,j+1\in J(D)$, il n'existe pas de $\mathfrak{I}_2\in\mathfrak{Int}_2$ tel que $\{j,j+1\}\subset\mathfrak{I}_2$. Donc j et $j+1$ sont 1-liés mais pas 2-liés. En se reportant aux relations (20) et (21) qui définissent la liaison, on voit que, si j est impair, le fait que j et $j+1$ ne sont pas 2-liés entraîne que $\lambda_j=\lambda_{j+1}$, tandis que, si j est pair, le fait que j et $j+1$ sont 1-liés entraîne la même égalité. Cette égalité pour tout couple $j,j+1\in J(D)$ entraîne que λ_j est constant pour $j\in J(D)$, ce que l'on voulait démontrer.

Montrons que

$$\tau_{\lambda_1,\lambda_2}=\tau. \tag{36}$$

Soit $i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$. Si $\mathrm{mult}_\lambda(i)=1$, on a $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}(i)=\tau(i)=0$ par définition. Supposons $\mathrm{mult}_\lambda(i)\geq 2$. Comme ci-dessus, il existe un unique $d=1,2$ et un unique $\mathfrak{I}_d\in\mathfrak{Int}_d$ tel que $J(\{i\})\subset\mathfrak{I}_d$. On a alors $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}(i)=d+1$. Considérons un couple $j,j+1\in J(\{i\})$. Ils sont d-liés et on a $\lambda_j=\lambda_{j+1}=i$. L'une des relations (20) ou (21) est vérifiée pour d et ce ne peut être que (20). Donc $\tau(i)=d+1$, d'où l'égalité cherchée $\tau_{\lambda_1,\lambda_2}(i)=\tau(i)$.

Montrons qu'on a l'égalité

$$\zeta(\lambda_1)+\zeta(\lambda_2)=\zeta(\lambda)+\xi. \tag{37}$$

Soit $j \geq 1$. Supposons j impair. Chacune des quatre fonctions vaut 0 ou 1 en j. Supposons d'abord $\zeta(\lambda_1)_j = \zeta(\lambda_2)_j = 1$. Alors il existe $\mathfrak{I}_1 \in \mathfrak{Int}_1$ et $\mathfrak{I}_2 \in \mathfrak{Int}_2$ de sorte que $j = j_{\min}(\mathfrak{I}_1) = j_{\min}(\mathfrak{I}_2)$. D'après (26) et (34), on a $j \in J^+$, d'où $\xi_j = 1$. Si $j = 1$, j est le plus petit indice tel que λ_j appartienne au plus grand intervalle de λ (il s'agit ici des intervalles au sens des partitions spéciales) donc $\zeta(\lambda)_j = 1$. Si $j > 1$, l'hypothèse sur j implique que $j-1$ et j ne sont ni 1-liés, ni 2-liés. Si $\lambda_{j-1} = \lambda_j$, $j-1$ et j sont d-liés pour le d tel que $\tau(\lambda_j) = d+1$, cf. (20). C'est impossible donc $\lambda_{j-1} > \lambda_j$. Puisque j est impair, c'est la condition pour que j soit de la forme $j = j_{\min}(\Delta)$ pour un $\Delta \in \mathrm{Int}(\lambda)$. Donc $\zeta(\lambda)_j = 1$. L'égalité (37) est vérifiée en j. Supposons maintenant $\zeta(\lambda_1)_j = 1$ et $\zeta(\lambda_2)_j = 0$ (un raisonnement analogue vaut si on échange les indices 1 et 2). Il existe $\mathfrak{I}_1 \in \mathfrak{Int}_1$ tel que $j = j_{\min}(\mathfrak{I}_1)$ mais il n'y a pas de $\mathfrak{I}_2$ vérifiant la même égalité. Supposons d'abord $p_2(j) = 1$. De nouveau, $j \in J^+$ et $\xi_j = 1$. Puisque $p_2(j) = 1$, le fait que j ne soit pas le plus petit élément d'un élément de $\mathfrak{Int}_2$ entraîne que $j \geq 2$ et que $j-1$ et j sont 2-liés. Puisque $j-1$ est pair, cette condition implique $\lambda_{j-1} = \lambda_j$. Donc $\zeta(\lambda)_j = 0$ et on obtient l'égalité cherchée. Supposons au contraire $p_2(j) = 0$. Alors $j \notin J^+$ et $\xi_j = 0$. Si $j = 1$, on a $\zeta(\lambda)_j = 1$ comme ci-dessus. Sinon, $j-1$ et j ne sont pas 1-liés (car $j = j_{\min}(\mathfrak{I}_1)$) et ne sont pas 2-liés (car $p_2(j) = 0$). Comme ci-dessus, cela entraîne $\lambda_{j-1} > \lambda_j$ et $\zeta(\lambda)_j = 1$. D'où l'égalité cherchée. Supposons enfin $\zeta(\lambda_1)_j = \zeta(\lambda_2)_j = 0$. D'après (26), on peut supposer par exemple $p_1(j) = 1$. Comme ci-dessus, l'hypothèse $\zeta(\lambda_1)_j = 0$ implique alors $j \geq 2$ et $j-1$ et j sont 1-liés. D'où $\lambda_{j-1} = \lambda_j$ et $\tau(\lambda_j) = 0$. La première relation entraîne $\zeta(\lambda)_j = 0$. La seconde entraîne que $j-1$ et j ne sont pas 2-liés. Si $p_2(j) = 1$, j est de la forme $j_{\min}(\mathfrak{I}_2)$ et alors $\zeta(\lambda)_j = 1$ contrairement à l'hypothèse. Donc $p_2(j) = 0$ et $j \notin J^+$. Donc $\xi_j = 0$ et on obtient l'égalité cherchée. Des calculs similaires valent dans le cas j pair. Cela prouve (37).

Cette égalité entraîne

$$\lambda_1 + \zeta(\lambda_1) + \lambda_2 + \zeta(\lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \xi + \zeta(\lambda) = \lambda + \zeta(\lambda).$$

En utilisant les lemmes 1.6 et 1.7, cette égalité se transforme en

$$ {}^t d(\lambda_1) + {}^t d(\lambda_2) = {}^t d(\lambda), \quad \text{qui équivaut à} \quad d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) = d(\lambda). \qquad \square$$

1.12. ***Multiplicités.*** Soient $n, n', n'', n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n = n' + n'' = n_1 + n_2$. Soient $\rho_1 \in \widehat{W}_{n_1}$ et $\rho_2 \in \widehat{W}^D_{n_2}$. A ρ_1 est associé un symbole (X_1, Y_1) de rang n_1 et de défaut 1. On note λ_1 la partition symplectique spéciale de $2n_1$ associée à la famille de (X_1, Y_1) et on pose $(\tau_1, \delta_1) = \mathrm{fam}(X_1, Y_1)$. A ρ_2 est associé un symbole (X_2, Y_2) de rang n_2 et de défaut 0. On note λ_2 la partition orthogonale spéciale de $2n_2$ associée à la famille de (X_2, Y_2) et on pose $(\tau_2, \delta_2) = \mathrm{fam}(X_2, Y_2)$. On définit des représentations ρ_2^+ et ρ_2^- de W_{n_2} de la façon suivante. Introduisons le couple $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{P}_2(n_2)$ qui paramètre ρ_2. C'est-à-dire que, si $\alpha_2 \neq \beta_2$, $\rho_2 = \rho^D(\alpha_2, \beta_2)$; si $\alpha_2 = \beta_2$, il existe un signe $\eta = \pm$ tel que $\rho_2 = \rho^D(\alpha_2, \alpha_2, \eta)$. Dans ce dernier cas, on pose $\rho_2^+ = \rho_2^- = \rho(\alpha_2, \alpha_2)$. Si $\alpha_2 \neq \beta_2$, on sait que l'on peut permuter α_2 et β_2. Supposons α_2 plus grand que β_2 pour l'ordre lexicographique (pour le plus petit indice j tel que $\alpha_{2,j} \neq \beta_{2,j}$, on a $\alpha_{2,j} > \beta_{2,j}$). On pose

$$\rho_2^+ = \rho(\alpha_2, \beta_2) \quad \text{et} \quad \rho_2^- = \rho(\beta_2, \alpha_2).$$

Soient $(\lambda', \epsilon') \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{symp}}(2n')$, $(\lambda'', \epsilon'') \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{symp}}(2n'')$. Considérons l'hypothèse

$$k_{\lambda',\epsilon'} = k_{\lambda'',\epsilon''} = 0. \tag{Hyp}$$

Supposons-la vérifiée. Dans [Waldspurger 2018, §1.8 et §1.10] , on a défini des espaces $\mathcal{R} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{R}(\gamma)$, $\mathcal{R}^{\text{glob}} \subset \mathcal{R}$ et une application linéaire $\rho\iota : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{\text{glob}}$ (ces objets sont relatifs à l'entier n). Posons $\gamma = (0, 0, n', n'')$. C'est un élément de Γ et $\rho_{\lambda',\epsilon'} \otimes \rho_{\lambda'',\epsilon''}$ s'identifie à un élément de $\mathcal{R}(\gamma)$. On dispose donc de l'élément $\rho\iota(\rho_{\lambda',\epsilon'} \otimes \rho_{\lambda'',\epsilon''}) \in \mathcal{R}$. Remarquons en passant que l'élément $\boldsymbol{a}$ de [Waldspurger 2018, §1.10] vaut $(0, 0, 0, 1)$. Posons $\theta = (0, 0, n_1, n_2)$. C'est aussi un élément de Γ et, pour $\zeta = \pm$, $\rho_1 \otimes \rho_2^{\zeta}$ s'identifie à un élément de $\mathcal{R}(\theta)$. On peut définir la multiplicité $m(\rho_1, \rho_2^{\zeta}; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''})$ de $\rho_1 \otimes \rho_2^{\zeta}$ dans $\rho\iota(\rho_{\lambda',\epsilon'} \otimes \rho_{\lambda'',\epsilon''})$ par la formule usuelle

$$m(\rho_1, \rho_2^{\zeta}; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''}) = |W_{n_1}|^{-1}|W_{n_2}|^{-1} \sum_{w_1\in W_{n_1}, w_2\in W_{n_2}} \rho_1(w_1)\rho_2^{\zeta}(w_2)\rho\iota(\rho_{\lambda',\epsilon'} \otimes \rho_{\lambda'',\epsilon''})(w_1 \times w_2).$$

On n'a pas besoin d'introduire des conjugaisons complexes dans cette formule puisqu'on sait que les représentations irréductibles des groupes de type W_n ont des caractères réels. En réfléchissant à la définition de $\rho\iota(\rho_{\lambda',\epsilon'} \otimes \rho_{\lambda'',\epsilon''})$, on voit que sa restriction à $\mathcal{R}(\theta)$ est une "vraie" représentation, ce qui entraîne que la multiplicité ci-dessus est un entier naturel.

On a défini en 1.9 l'induite endoscopique $\text{ind}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}^{\text{symp}}(2n)$.

Proposition. *On suppose vérifiée l'hypothèse* (Hyp). *Soit* $\zeta = \pm$. *Si* $m(\rho_1, \rho_2^{\zeta}; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''}) \neq 0$, *alors* $\lambda' \cup \lambda'' \leq \text{ind}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Cette proposition, comme la suivante, se déduit des résultats de [Waldspurger 2001]. Nous donnerons la preuve dans le paragraphe suivant.

1.13. ***Multiplicités, cas particulier.*** On conserve les données du paragraphe précédent. Posons $\lambda = \text{ind}(\lambda_1, \lambda_2)$. On suppose de plus :

λ est à termes pairs ; λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ ; $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

On définit des fonctions $\delta^+, \delta^-, \tau^+, \tau^- : \text{Jord}_{\text{bp}}(\lambda) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la façon suivante, où on utilise les notations des paragraphes 1.9 et 1.10. Soit $i \in \text{Jord}_{\text{bp}}(\lambda)$. On a $\{i\} \in \text{Int}_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda)$ puisque λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ. On pose $\delta^+(i) = \delta^-(i) = 0$ sauf dans le cas où $j_{\max}(\{i\}) \in J^+$. Dans ce cas, il existe d'uniques $\Delta_1 \in \text{Int}(\lambda_1)$ et $\Delta_2 \in \text{Int}(\lambda_2)$ tels que $j_{\max}(\{i\}) \in J(\Delta_1) \cap J(\Delta_2)$ et on pose

$$\delta^+(i) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + 1, \quad \delta^-(i) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2).$$

Si $\text{mult}_\lambda(i) = 1$, il existe comme ci-dessus d'uniques $\Delta_1 \in \text{Int}(\lambda_1)$ et $\Delta_2 \in \text{Int}(\lambda_2)$ tels que $j_{\max}(\{i\}) \in J(\Delta_1) \cap J(\Delta_2)$ et on pose $\tau^+(i) = \tau^-(i) = \tau_1(\Delta_1)$. Supposons $\text{mult}_\lambda(i) \geq 2$. Alors il existe un unique $d = 1, 2$ et un unique $\Delta_d \in \text{Int}(\lambda_d)$ tels que $J(\{i\}) \subset J(\Delta_d)$. Si $d = 1$, on pose $\tau^+(i) = \tau^-(i) = \tau_1(\Delta_1)$. Si $d = 2$, on pose

$$\tau^+(i) = \tau_2(\Delta_2), \quad \tau^-(i) = \tau_2(\Delta_2) + 1.$$

Si i n'est pas l'élément maximal de $\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$, on note i^+ le plus petit élément de $\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$ strictement supérieur à i. Si i est l'élément maximal, on pose par convention $\delta^+(i^+) = \delta^-(i^+) = 1$.

Remarque. (1) On vérifie sur ces formules que $\tau^+ + \tau^- = \tau_{\lambda_1,\lambda_2}$, cf. 1.10.

(2) On a montré en [Waldspurger 2001, XI.29 remarque] que, pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$, on a la congruence $\delta^+(i) + \delta^-(i) \equiv \mathrm{mult}_\lambda(\geq i) \mod 2\mathbb{Z}$. Cela équivaut à $\mathrm{mult}_\lambda(i) \equiv \delta^+(i) + \delta^-(i) - \delta^+(i^+) - \delta^-(i^+) \mod 2\mathbb{Z}$.

Soit $\zeta = \pm$. On introduit les deux conditions suivantes :

$(A)^\zeta$ (i) $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$;

(ii) pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$, $\mathrm{mult}_{\lambda''}(i) \equiv \delta^{-\zeta}(i) - \delta^{-\zeta}(i^+) \mod 2\mathbb{Z}$;

(iii) pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda')$, $\epsilon'(i) = (-1)^{\tau^\zeta(i)}$; pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda'')$, $\epsilon''(i) = (-1)^{\tau^{-\zeta}(i)}$.

$(B)^\zeta$ (i) $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$;

(ii) l'hypothèse (Hyp) de 1.12 est vérifiée et $m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''}) \neq 0$.

Proposition. *Pour $\zeta = \pm$, les conditions* $(A)^\zeta$ *et* $(B)^\zeta$ *sont équivalentes. Si elles sont vérifiées, on a* $m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''}) = 1$.

Preuve de la proposition et de la précédente. On devra utiliser la propriété générale suivante. Soient m, m', m'' trois éléments de $\mathbb{N}$ tels que $m' + m'' = m$, soient $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(m)$, $(\alpha', \beta') \in \mathcal{P}_2(m')$ et $(\alpha'', \beta'') \in \mathcal{P}_2(m'')$. Le groupe $W_{m'} \times W_{m''}$ se plonge naturellement dans W_m et ce plongement est bien défini à conjugaison près. D'où un foncteur de restriction $\mathrm{res}^{W_m}_{W_{m'}\times W_{m''}}$. On a :

(38) Supposons que $\rho(\alpha', \beta') \otimes \rho(\alpha'', \beta'')$ intervienne dans $\mathrm{res}^{W_m}_{W_{m'}\times W_{m''}}(\rho(\alpha, \beta))$; alors

(a) $S(\alpha') + S(\alpha'') = S(\alpha)$, $\quad S(\beta') + S(\beta'') = S(\beta)$;

(b) $\alpha' \cup \alpha'' \leq \alpha$, $\quad \beta' \cup \beta'' \leq \beta$;

(c) $\alpha \leq \alpha' + \alpha''$, $\quad \beta \leq \beta' + \beta''$.

(39) Supposons que (a) soit vérifiée ainsi que l'une des conditions suivantes :

(b′) $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$, $\quad \beta' \cup \beta'' = \beta$;

(c′) $\alpha = \alpha' + \alpha''$, $\quad \beta = \beta' + \beta''$;

alors $\rho(\alpha', \beta') \otimes \rho(\alpha'', \beta'')$ intervient dans $\mathrm{res}^{W_m}_{W_{m'}\times W_{m''}}(\rho(\alpha, \beta))$ avec multiplicité 1.

Si on oublie les conditions (b) et (b′), cela résulte de [Geck et Pfeiffer 2000, Lemmas 6.1.2, 6.1.3]. En remarquant que la multiplicité de $\rho(\alpha', \beta') \otimes \rho(\alpha'', \beta'')$ dans $\mathrm{res}^{W_m}_{W_{m'}\times W_{m''}}(\rho(\alpha, \beta))$ est égale à celle de $(\rho(\alpha', \beta') \otimes \mathrm{sgn}) \otimes (\rho(\alpha'', \beta'') \otimes \mathrm{sgn})$ dans $\mathrm{res}^{W_m}_{W_{m'}\times W_{m''}}(\rho(\alpha, \beta) \otimes \mathrm{sgn})$, c'est à dire celle de $\rho({}^t\beta', {}^t\alpha') \otimes \rho({}^t\beta'', {}^t\alpha'')$ dans $\mathrm{res}^{W_m}_{W_{m'}\times W_{m''}}(\rho({}^t\beta, {}^t\alpha))$, on récupère ces assertions (b) et (b′).

Plaçons-nous dans la situation du paragraphe précédent (c'est-à-dire qu'on lève provisoirement l'hypothèse que λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ) et posons l'hypothèse (Hyp), c'est-à-dire

$$k_{\lambda',\epsilon'} = k_{\lambda'',\epsilon''} = 0. \tag{40}$$

Notons Π la composante de $\rho\iota(\rho_{\lambda',\epsilon'}\otimes\rho_{\lambda'',\epsilon''})$ dans $\mathcal{R}(\theta)$, où $\theta=(0,0,n_1,n_2)$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des quadruplets $\boldsymbol{n}=(n'_1,n'_2,n''_1,n''_2)$ tels que

$$n'=n'_1+n'_2,\quad n''=n''_1+n''_2,\quad n_1=n'_1+n''_1,\quad n_2=n'_2+n''_2.$$

Pour un tel quadruplet, posons $W_{\boldsymbol{n}}=W_{n'_1}\times W_{n''_1}\times W_{n'_2}\times W_{n''_2}$. Ce groupe se plonge dans $W_{n_1}\times W_{n_2}$ et dans $W_{n'}\times W_{n''}$ de façon évidente, les plongements étant bien définis à conjugaison près. D'où des foncteurs d'induction $\mathrm{ind}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n_1}\times W_{n_2}}$ et de restriction $\mathrm{res}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n'}\times W_{n''}}$. Notons $\mathrm{sgn}_{CD,\boldsymbol{n}}$ le caractère de $W_{\boldsymbol{n}}$ qui est le produit tensoriel du caractère sgn_{CD} de $W_{n''_2}$ et des caractères triviaux des autres facteurs. Alors, par définition de $\rho\iota$, on a l'égalité

$$\Pi=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}}\mathrm{ind}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n_1}\times W_{n_2}}\bigl(\mathrm{sgn}_{CD,\boldsymbol{n}}\otimes\mathrm{res}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n'}\times W_{n''}}(\rho_{\lambda',\epsilon'}\otimes\rho_{\lambda'',\epsilon''})\bigr).$$

Le terme $m(\rho_1,\rho_2^{\zeta};\rho_{\lambda',\epsilon'},\rho_{\lambda'',\epsilon''})$ est la multiplicité de $\rho_1\otimes\rho_2^{\zeta}$ dans Π. Supposons que cette multiplicité soit non nulle. On peut alors fixer $\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}$ et une représentation irréductible $\rho_{\boldsymbol{n}}=\rho'_1\otimes\rho'_2\otimes\rho''_1\otimes\rho''_2$ de $W_{\boldsymbol{n}}$ telle que

$$\rho_{\boldsymbol{n}}\text{ intervient dans }\mathrm{res}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n'}\times W_{n''}}(\rho_{\lambda',\epsilon'}\otimes\rho_{\lambda'',\epsilon''}),\tag{41}$$

et telle que $\rho_1\otimes\rho_2^{\zeta}$ intervient dans $\mathrm{ind}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n_1}\times W_{n_2}}(\mathrm{sgn}_{CD,\boldsymbol{n}}\otimes\rho_{\boldsymbol{n}})$. Cette dernière condition équivaut à

$$\mathrm{sgn}_{CD,\boldsymbol{n}}\otimes\rho_{\boldsymbol{n}}\text{ intervient dans }\mathrm{res}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n_1}\times W_{n_2}}(\rho_1\otimes\rho_2^{\zeta}).\tag{42}$$

Introduisons les couples de partitions qui paramètrent les différentes représentations intervenant, que l'on note avec les mêmes indices et exposants que celles-ci : par exemple (α'_1,β'_1) paramètre ρ'_1. On fait une exception, dont la raison sera expliquée plus loin : (α_2,β_2) paramètre ρ_2^{+}. Remarquons que

$$\mathrm{sgn}_{CD,\boldsymbol{n}}\otimes\rho_{\boldsymbol{n}}=\rho'_1\otimes\rho'_2\otimes\rho''_1\otimes(\mathrm{sgn}_{CD}\otimes\rho''_2),$$

et que $\mathrm{sgn}_{CD}\otimes\rho''_2$ est paramétrée par (β''_2,α''_2). Supposons d'abord $\zeta=+$ (on identifie ci-dessous les signes $\pm$ à ±1). En appliquant (38), les relations (25) et (26) entraînent :

$$\alpha'\le\alpha'_1+\alpha'_2,\quad\beta'\le\beta'_1+\beta'_2,\quad\alpha''\le\alpha''_1+\alpha''_2,\quad\beta''\le\beta''_1+\beta''_2;\tag{43}$$

$$\alpha'_1\cup\alpha''_1\le\alpha_1,\quad\beta'_1\cup\beta''_1\le\beta_1,\quad\alpha'_2\cup\beta''_2\le\alpha_2,\quad\beta'_2\cup\alpha''_2\le\beta_2.\tag{44}$$

Ce sont exactement les relations de [Waldspurger 2001, p. 377]. Plus précisément, dans cette référence, on considère le cas où V est symplectique. Les données ι_1 et ι_2 sont $(\lambda_1,\tau_1,\delta_1)$ et $(\lambda_2,\tau_2,\delta_2)$. Le terme ι_0 est $(0,0,1)$. Si maintenant $\zeta=-$, la représentation ρ_2^{-} est paramétrée par (β_2,α_2) et on obtient des relations comme ci-dessus, où on permute α_2 et β_2. On voit que seules les dernières relations sont modifiées. La condition (44) devient :

$$\alpha'_1\cup\alpha''_1\le\alpha_1,\quad\beta'_1\cup\beta''_1\le\beta_1,\quad\beta'_2\cup\alpha''_2\le\alpha_2,\quad\alpha'_2\cup\beta''_2\le\beta_2.\tag{45}$$

Ce sont de nouveau les relations de [Waldspurger 2001, p. 377], où maintenant le terme ι_0 est $(0, 0, -1)$. Remarquons qu'en [Waldspurger 2001], on a supposé $\alpha_2 \geq \beta_2$ pour l'ordre lexicographique, ce qui explique que l'on a défini ci-dessus le couple (α_2, β_2) comme celui qui paramètre ρ_2^+.

La condition (40) et l'existence de couples de partitions (α_1', β_1'), etc., vérifiant les conditions (43) et (44) ou (45) équivalent à l'appartenance du quadruplet $(\lambda', \epsilon'; \lambda'', \epsilon'')$ à l'ensemble $\mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ défini en [Waldspurger 2001, p. 377] (le L de cette référence est un réseau autodual dont la seule utilité, dans le chapitre en question, est de déterminer les entiers n' et n''). La proposition XI.28 de [Waldspurger 2001] affirme qu'on a alors l'inégalité $\lambda' \cup \lambda'' \leq \lambda$. Cela prouve la proposition 1.12.

On revient aux hypothèses du présent paragraphe, c'est-à-dire que λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ. Supposons satisfaite la condition $(\mathrm{B})^\zeta$. Les hypothèses ci-dessus sont aussi satisfaites, donc $(\lambda', \epsilon'; \lambda'', \epsilon'')$ appartient à l'ensemble $\mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, où $\iota_0 = (0, 0, \zeta)$. De plus, on a par hypothèse l'égalité $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. Le (i) de la proposition XI.29 de [Waldspurger 2001] affirme alors que $(\lambda', \epsilon'; \lambda'', \epsilon'')$ appartient à l'ensemble $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ défini page 380 de [Waldspurger 2001]. Compte tenu de l'hypothèse que l'induction est régulière, cette appartenance signifie précisément que $(\mathrm{A})^\zeta$ est satisfaite. Inversement, supposons vérifiée cette condition $(\mathrm{A})^\zeta$. Comme on vient de le dire, cela signifie que $(\lambda', \epsilon'; \lambda'', \epsilon'')$ appartient à l'ensemble $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, a fortiori à l'ensemble $\mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Par définition de celui-ci, cela entraîne que (40) est vérifié. Le (ii) de la proposition XI.29 de [Waldspurger 2001] affirme qu'il y a un unique quadruplet de partitions (α_1', β_1'), etc., vérifiant les relations (43) et (44) ou (45) et que, pour ce quadruplet, les inégalités figurant dans ces relations sont des égalités. La multiplicité $m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''})$ est la somme sur les $\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}$ et les représentations irréductibles $\rho_{\boldsymbol{n}}$ de $W_{\boldsymbol{n}}$ du produit de la multiplicité de $\rho_{\boldsymbol{n}}$ dans $\mathrm{res}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n'} \times W_{n''}}(\rho_{\lambda',\epsilon'} \otimes \rho_{\lambda'',\epsilon''})$ et de la multiplicité de $\mathrm{sgn}_{CD,\boldsymbol{n}} \otimes \rho_{\boldsymbol{n}}$ dans $\mathrm{res}_{W_{\boldsymbol{n}}}^{W_{n_1} \times W_{n_2}}(\rho_1 \otimes \rho_2^\zeta)$. On vient de voir qu'il y a un unique $\boldsymbol{n}$ et une unique $\rho_{\boldsymbol{n}}$ pour lesquels ces multiplicités ne sont pas nulles. Pour ce couple, les inégalités (43) et (44) ou (45) sont des égalités. Grâce à (39), on en déduit que les multiplicités en question valent 1. Alors

$$m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\lambda',\epsilon'}, \rho_{\lambda'',\epsilon''}) = 1.$$

Donc $(\mathrm{B})^\zeta$ est vérifiée ainsi que la dernière assertion de la proposition 1.13. □

2. Calcul de caractères

2.1. ***Caractères de représentations.*** Dans cette deuxième section, on reprend les données et notations de [Waldspurger 2018 ; 2016b]. Rappelons les principales. Le corps de base F est local non-archimédien et de caractéristique nulle. On note p sa caractéristique résiduelle. Un entier $n \geq 1$ est fixé. On suppose

$$p > 6n + 4.$$

On considère deux espaces vectoriels sur F de dimension $2n+1$, notés V_{iso} et V_{an}, munis de formes quadratiques non dégénérées Q_{iso} et Q_{an}. On note G_{iso} et G_{an} les groupes spéciaux orthogonaux de $(V_{\mathrm{iso}}, Q_{\mathrm{iso}})$ et $(V_{\mathrm{an}}, Q_{\mathrm{an}})$. On suppose G_{iso} déployé et G_{an} non quasi-déployé. Pour un indice $\sharp = \mathrm{iso}$ ou an, on fixe une mesure de Haar sur $G_\sharp(F)$ comme en [Waldspurger 2016b, 1.1]. On note $\mathrm{Irr}_{\mathrm{unip},\sharp}$

l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$ qui sont de réduction unipotente, cf. [Waldspurger 2018, §1.3].

Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{unip},\sharp}$. A π est associé son caractère-distribution, c'est-à-dire la forme linéaire Θ_π sur $C_c^\infty(G_\sharp(F))$ définie par $\Theta_\pi(f) = \mathrm{trace}\,\pi(f)$. Restreignons-nous aux fonctions f dont le support est formé d'éléments compacts de $G_\sharp(F)$, c'est-à-dire d'éléments dont les valeurs propres dans une clôture algébrique de F sont de valuation nulle. La représentation π étant de niveau 0, on a donné dans [Waldspurger 2016a] une formule pour $\Theta_\pi(f)$, que nous allons expliciter.

Dans [Waldspurger 2016a, paragraphe 10], on a introduit un ensemble $\mathrm{Fac}^*_{\max}(G_\sharp)$. A tout $(\mathcal{F}, \nu) \in \mathrm{Fac}^*_{\max}(G_\sharp)$ sont associés un sous-groupe compact $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ de $G_\sharp(F)$ et un sous-ensemble $K^\nu_{\mathcal{F}} \subset K^\dagger_{\mathcal{F}}$. Le groupe $G_\sharp(F)$ agit naturellement sur $\mathrm{Fac}^*_{\max}(G_\sharp)$. Il résulte facilement des définitions que l'ensemble des orbites pour cette action est en bijection avec l'ensemble des triplets (n', n'', ζ), où $(n', n'') \in D(n)$ (c'est-à-dire $n', n'' \in \mathbb{N}$ et $n' + n'' = n$) et $\zeta = \pm$, soumis aux restrictions suivantes :

— dans le cas où $\sharp = \mathrm{iso}$, on a $\zeta = +$ si $n'' = 0$ et $\zeta = -$ si $n'' = 1$;

— dans le cas où $\sharp = \mathrm{an}$, on a $n'' \geq 1$.

On peut choisir un ensemble de représentants des orbites dans $\mathrm{Fac}^*_{\max}(G_\sharp)$ de sorte que, si un élément $(\mathcal{F}, \nu)$ de cet ensemble correspond à un triplet (n', n'', ζ), le groupe $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ soit égal au groupe $K^\pm_{n',n''}$ de [Waldspurger 2018, §1.2] et l'ensemble $K^\nu_{\mathcal{F}}$ soit égal à $K^\zeta_{n',n''}$.

Considérons un triplet (n', n'', ζ) comme ci-dessus. On dispose de la fonction $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Res}^\zeta_{n',n''}(\pi)) \in \mathcal{R}^{\mathrm{par,glob}}$, cf. [Waldspurger 2018, §1.5]. On peut considérer que c'est une fonction sur $K^\zeta_{n',n''}$, invariante par $K^u_{n',n''}$. On pose

$$\Theta_{\pi,\mathrm{cusp}}(f) = \sum_{(n',n'',\zeta)} \mathrm{mes}(K^\pm_{n',n''})^{-1} \int_{G_\sharp(F)} \int_{G_\sharp(F)} f(g^{-1}hg)\, \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Res}^\zeta_{n',n''}(\pi))(h)\, dh\, dg.$$

Cette intégrale est convergente dans cet ordre. Les (n', n'', ζ) sont soumis aux restrictions ci-dessus. Mais on peut en fait lever celles-ci parce la fonction $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Res}^\zeta_{n',n''}(\pi))$ est nulle si elles ne sont pas vérifiées.

Considérons maintenant une partition $\boldsymbol{m} = (m_1 \geq \cdots \geq m_t > 0) \in \mathcal{P}(\leq n)$ (c'est-à-dire $S(\boldsymbol{m}) := m_1 + \cdots + m_t \leq n$), posons $n_0 = n - S(\boldsymbol{m})$. On suppose $n_0 \geq 1$ si $\sharp = \mathrm{an}$. On associe à $\boldsymbol{m}$ un sous-groupe de Levi $M \subset G_\sharp$. Avec les notations de [Waldspurger 2018, §1.1], c'est l'ensemble des éléments qui, pour tout $j = 1, \ldots, t$, stabilisent les deux sous-espaces de $V_\sharp$ engendrés respectivement par $v_{n_0+m_1+\cdots+m_{j-1}+1}, \ldots, v_{n_0+m_1+\cdots+m_j}$ et par $v_{2n+2-n_0-m_1-\cdots-m_j}, \ldots, v_{2n+2-n_0-m_1-\cdots-m_{j-1}-1}$. On a

$$M \simeq \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_t) \times G_{n_0,\sharp},$$

où $G_{n_0,\sharp}$ est l'analogue de $G_\sharp$ quand n est remplacé par n_0 (ce groupe est trivial si $\sharp = \mathrm{iso}$ et $n_0 = 0$). Pour tout $j = 1, \ldots, t$, fixons un sous-groupe compact maximal $K_{m_j} \subset \mathrm{GL}(m_j; F)$ et notons $K^u_{m_j}$ son radical pro-p-unipotent. On note $K_{\boldsymbol{m}}$ (resp. $K^u_{\boldsymbol{m}}$) le produit de ces groupes. On note aussi A_M le plus grand tore déployé central dans M, c'est-à-dire le produit des centres des groupes $\mathrm{GL}(m_j)$. On a défini en [Waldspurger 2016a, paragraphe 11] un ensemble $\mathrm{Fac}^*_{\max}(M)_{G_\sharp\text{-comp}}$. À tout élément $(\mathcal{F}_M, \nu)$ de cet ensemble est associé un sous-groupe $K^\dagger_{\mathcal{F}_M}$ de $M(F)$. Le groupe $M(F)$ agit naturellement sur

$\mathrm{Fac}^*_{\max}(M)_{G_\sharp\text{-comp}}$. On voit que l'ensemble des orbites est en bijection avec l'ensemble des triplets (n', n'', ζ) tels que $(n', n'') \in D(n_0)$ et $\zeta = \pm$, soumis aux restrictions similaires à celles ci-dessus. On peut choisir un ensemble de représentants des orbites de sorte que, si un élément $(\mathcal{F}_M, \nu)$ de cet ensemble correspond à un triplet (n', n'', ζ), le groupe $K^\dagger_{\mathcal{F}_M}$ soit égal à $A_M(F)K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\pm}_{n',n''}$.

L'analogue pour ce groupe M de l'espace $\mathcal{R}^{\text{par,glob}}$ est l'espace

$$\mathcal{R}^{\text{par,glob}}_{\boldsymbol{m}} = C^{\mathrm{GL}(m_1)} \otimes \cdots \otimes C^{\mathrm{GL}(m_t)} \otimes \mathcal{R}^{\text{par,glob}}_{n_0},$$

cf. [Waldspurger 2018, §1.5]. On introduit l'application linéaire $\mathrm{Res}^M : \mathbb{C}[\mathrm{Irr}_{\mathrm{unip},M}] \to \mathcal{R}^{\text{par,glob}}_{\boldsymbol{m}}$ analogue à Res. Soit P un sous-groupe parabolique de $G_\sharp$ de composante de Levi M. Le semi-simplifié du module de Jacquet π_P s'identifie à un élément de $\mathbb{C}[\mathrm{Irr}_{\mathrm{unip},M}]$. D'après [Waldspurger 2018, §1.5(1)] (qui résulte directement de [Moy et Prasad 1996, Proposition 6.7]) le terme $\mathrm{Res}(\pi_P)$ ne dépend pas du choix de P et on a l'égalité

$$\mathrm{Res}^M(\pi_P) = \mathrm{res}_{\boldsymbol{m}} \circ \mathrm{Res}(\pi).$$

Notons ce terme $\mathrm{Res}_{\boldsymbol{m}}(\pi)$ et notons ses diverses composantes $\mathrm{Res}^{\zeta}_{\boldsymbol{m},n',n''}(\pi)$. On dispose de la projection cuspidale $\mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Res}^{\zeta}_{\boldsymbol{m},n',n''}(\pi))$. On peut considérer que c'est une fonction sur $K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\zeta}_{n',n''}$, invariante par $K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}$. Pour une fonction $\phi \in C^\infty_c(M(F))$, posons

$$\Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(\phi) = \sum_{(n',n'',\zeta)} \mathrm{mes}((A_M(F)K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\pm}_{n',n''})/A_M(F))^{-1} \times \int_{M(F)/A_M(F)} \int_{M(F)} \phi(m^{-1}ym)\, \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Res}^{\zeta}_{\boldsymbol{m},n',n''}(\pi))(y)\, dy\, dm.$$

Cette intégrale converge dans cet ordre. Fixons un groupe P comme ci-dessus, notons U son radical unipotent. Fixons une mesure de Haar sur $U(F)$. De la mesure sur $M(F)$ (fixée comme en [Waldspurger 2016b, 1.1]) et de celle sur $U(F)$ se déduit une mesure invariante à gauche sur $P(F)$, puis une pseudo-mesure sur $P(F)\backslash G_\sharp(F)$ (pseudo parce qu'elle s'applique à des fonctions qui ne sont pas invariantes à gauche par $P(F)$ mais qui se transforment selon le module usuel δ_P). Définissons une fonction f_U sur $M(F)$ par

$$f_U(m) = \delta_P(m)^{1/2} \int_{U(F)} f(mu)\, du.$$

En vertu de notre hypothèse sur le support de f, on peut aussi bien supprimer le facteur $\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}$, il vaut 1 si l'intégrale est non nulle. D'autre part, pour $g \in G_\sharp(F)$, on définit la fonction ${}^g f$ sur $G_\sharp(F)$ par ${}^g f(h) = f(g^{-1}hg)$. On pose

$$\Theta_{\pi,\boldsymbol{m},\mathrm{cusp}}(f) = \int_{P(F)\backslash G_\sharp(F)} \Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(({}^g f)_U)\, dg.$$

Ce terme ne dépend pas du choix de P. Remarquons que le terme $\Theta_{\pi,\mathrm{cusp}}(f)$ introduit plus haut est égal à $\Theta_{\pi,\varnothing,\mathrm{cusp}}(f)$, où on a noté $\varnothing$ l'unique partition de 0.

Rappelons que l'on suppose que le support de f est formé d'éléments compacts de $G_\sharp(F)$. Le théorème 12 de [Waldspurger 2016a] affirme l'égalité

$$\Theta_\pi(f)=\sum_{\boldsymbol{m}} 2^{-l(\boldsymbol{m})}\,\mathrm{mult}!_{\boldsymbol{m}}^{-1}\,\Theta_{\pi,\boldsymbol{m},\mathrm{cusp}}(f), \qquad (*)$$

où on a posé

$$\mathrm{mult}!_{\boldsymbol{m}}=\prod_{i\geq 1}\mathrm{mult}_{\boldsymbol{m}}(i)!$$

et noté $l(\boldsymbol{m})$ le nombres de termes non nuls de $\boldsymbol{m}$ (qui est noté t plus haut). La somme porte sur les partitions indiquées plus haut, c'est-à-dire $\boldsymbol{m}\in\mathcal{P}(\leq n)$ si $\sharp=$ iso et $\boldsymbol{m}\in\mathcal{P}(\leq n-1)$ si $\sharp=$ an.

Remarque. Le théorème 12 de [Waldspurger 2016a] n'est pas tout-à-fait énoncé comme ci-dessus mais on voit facilement que les deux énoncés sont équivalents.

2.2. ***Un lemme élémentaire.*** Soit $\sharp=$ iso ou an. Pour $g\in G_\sharp(F)$, on dit que g est topologiquement unipotent si et seulement si $\lim_{m\to\infty} g^{p^m}=1$. Pour $X\in\mathfrak{g}_\sharp(F)$, on dit que X est topologiquement nilpotent si et seulement si $\lim_{m\to\infty} X^m=0$. Sous certaines hypothèses sur p (du type $p>A+B\,\mathrm{val}_F(p)$, où val_F est la valuation usuelle de F), l'exponentielle est définie sur l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ et est une bijection de cet ensemble sur celui des éléments topologiquement unipotents de $G_\sharp(F)$. Pour simplifier les hypothèses sur p, on remplace l'exponentielle par l'application E définie par $E(X)=(1+X/2)/(1-X/2)$. Pour $p>2$, c'est une bijection de l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$ sur celui des éléments topologiquement unipotents de $G_\sharp(F)$. Rappelons que l'on a supposé $p>6n+4$, a fortiori $p>2$.

Soit $(n',n'')\in D(n)$. On suppose $n''\geq 1$ si $\sharp=$ an. On a défini en [Waldspurger 2018, §1.2] le réseau $L_{n',n''}\subset V_\sharp$, le sous-groupe compact $K^+_{n',n''}$ de $G_\sharp(F)$ et son radical pro-p-unipotent $K^u_{n',n''}$. On définit deux réseaux $\mathfrak{k}_{n',n''}$ et $\mathfrak{k}^u_{n',n''}$ de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$: ce sont les sous-ensembles des éléments $X\in\mathfrak{g}_\sharp(F)$ tels que $X(L_{n',n''})\subset L_{n',n''}$ (ce qui entraîne aussi $X(L^*_{n',n''})\subset L^*_{n',n''}$) (resp. $X(L_{n',n''})\subset\varpi L^*_{n',n''}$ et $X(L^*_{n',n''})\subset L_{n',n''}$). On vérifie que, pour $X\in\mathfrak{g}_\sharp(F)$ topologiquement nilpotent, on a

$$X\in\mathfrak{k}_{n',n''}\iff E(X)\in K^+_{n',n''},\qquad X\in\mathfrak{k}^u_{n',n''}\iff E(X)\in K^u_{n',n''}.$$

Posons $\boldsymbol{G}=SO(2n'+1)\times SO(2n'')_\sharp$, avec les notations de [Waldspurger 2018, §1.1]. On sait que $K^+_{n',n''}/K^u_{n',n''}\simeq\boldsymbol{G}(\mathbb{F}_q)$. Notons $\boldsymbol{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\boldsymbol{G}$. On vérifie que $\mathfrak{k}_{n',n''}/\mathfrak{k}^u_{n',n''}\simeq\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\mathbb{F}_q)$. On note encore E l'application définie par $E(X)=(1+X/2)/(1-X/2)$ sur l'ensemble des éléments nilpotents de $\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\mathbb{F}_q)$. C'est une bijection de cet ensemble sur celui des éléments unipotents de $\boldsymbol{G}(\mathbb{F}_q)$.

Soit $f\in C_c^\infty(G_\sharp(F))$. Supposons que le support de f est formé d'éléments topologiquement unipotents. On déduit de f une fonction $f_{\mathrm{Lie}}\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$. Son support est formé d'éléments topologiquement nilpotents. Pour un tel élément X, on a $f_{\mathrm{Lie}}(X)=f(E(X))$. On déduit aussi de f une fonction f_{red} sur $K^+_{n',n''}$ telle que, pour tout $g\in K_{n',n''}$,

$$f_{\mathrm{red}}(g)=\int_{K^u_{n',n''}} f(gh)\,dh.$$

Cette fonction est invariante par $K^u_{n',n''}$, on peut considérer que c'est une fonction sur $\boldsymbol{G}(\mathbb{F}_q)$. Elle est alors à support unipotent. On en déduit une fonction $f_{\mathrm{red,Lie}}$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$: celle-ci est à support nilpotent et, pour un élément nilpotent $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité $f_{\mathrm{red,Lie}}(X) = f_{\mathrm{red}}(E(X))$. Enfin, on déduit de f_{Lie} une fonction $f_{\mathrm{Lie,red}}$ sur $\mathfrak{k}_{n',n''}$: pour X dans cet ensemble,

$$f_{\mathrm{Lie,red}}(X) = \int_{\mathfrak{k}^u_{n',n''}} f_{\mathrm{Lie}}(X+Y)\,dY.$$

Cette fonction est invariante par translations par $\mathfrak{k}^u_{n',n''}$. On peut la considérer comme une fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$. Elle est alors à support nilpotent.

Lemme. $$f_{\mathrm{red,Lie}} = f_{\mathrm{Lie,red}}.$$

Preuve. En détaillant les définitions, on voit qu'il s'agit de démontrer l'assertion suivante :

(46) Soit $X \in \mathfrak{k}_{n',n''}$ un élément topologiquement nilpotent ; alors l'application $Y \mapsto E(X)^{-1}E(X+Y)$ envoie bijectivement $\mathfrak{k}^u_{n',n''}$ sur $K^u_{n',n''}$ et préserve les mesures.

La démonstration est élémentaire ; on la laisse au lecteur. □

On a effectué les constructions ci-dessus pour le groupe $G_\sharp$ afin de ne pas introduire de notations supplémentaires. Mais il est clair que les mêmes constructions et le même lemme valent pour les groupes de Levi de $G_\sharp$ et nous les utiliserons pour ceux-ci.

2.3. ***Calcul du caractère sur les éléments topologiquement unipotents.*** Pour $\sharp = $ iso ou an, soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{unip},\sharp}$. On a défini l'élément $\mathrm{Res}(\pi) \in \mathcal{R}^{\mathrm{par,glob}}$ et l'isomorphisme $k : \mathcal{R}^{\mathrm{glob}} \to \mathcal{R}^{\mathrm{par,glob}}$ en [Waldspurger 2018, §1.5 et §1.9]. On note κ_π l'élément de $\mathcal{R}^{\mathrm{glob}}$ tel que $\mathrm{Res}(\pi) = k(\kappa_\pi)$. Soit $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$. On suppose que tout élément du support de f est topologiquement unipotent. Un tel élément est compact, donc $\Theta_\pi(f)$ est donné par la formule $(*)$ de 2.1. Nous allons expliciter cette formule à l'aide de l'élément $\kappa_\pi \in \mathcal{R}^{\mathrm{glob}}$.

Considérons un entier $n_0 \in \{0, \dots, n\}$, une décomposition $n_0 = n' + n''$ et une partition $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_t > 0) \in \mathcal{P}(n - n_0)$. Ces données sont soumises aux mêmes restrictions qu' en 2.1 : si $\sharp = $ an, on a $n_0 \geq 1$ et $n'' \geq 1$. On a associé à ces données un groupe de Levi M de $G_\sharp$. Soit $\phi \in C_c^\infty(M(F))$, supposons que le support de ϕ est formé d'éléments topologiquement unipotents. On va d'abord calculer

$$I = \int_{M(F)} \phi(y) \sum_\zeta \mathrm{proj}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Res}^\zeta_{\boldsymbol{m},n',n''}(\pi))(y)\,dy.$$

La somme porte sur les signes $\zeta = \pm$, soumis aux conditions : si $\sharp = $ iso, on a $\zeta = +$ si $n'' = 0$ et $\zeta = -$ si $n'' = 1$. La deuxième fonction dans l'intégrale est à support dans le groupe compact $K_{\boldsymbol{m}} \times K^\pm_{n',n''}$ et est invariante par $K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}$. On peut l'identifier à une fonction sur le groupe $\boldsymbol{M}^\pm(\mathbb{F}_q)$, où

$$\boldsymbol{M}^\pm = \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_t) \times \mathrm{SO}(2n'+1) \times O(2n'')_\sharp.$$

Définissons une fonction ϕ_{res} sur $K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\pm}_{n',n''}$ par

$$\phi_{\text{res}}(y) = \int_{K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}} \phi(yh)\, dh.$$

On peut la considérer elle-aussi comme une fonction sur $\boldsymbol{M}^{\pm}(\mathbb{F}_q)$. On a l'égalité

$$I = \sum_{y \in \boldsymbol{M}^{\pm}(\mathbb{F}_q)} \phi_{\text{res}}(y) \sum_{\zeta} \text{proj}_{\text{cusp}}(\text{Res}^{\zeta}_{\boldsymbol{m},n',n''}(\pi))(y).$$

On dispose de l'application

$$\text{res}_{\boldsymbol{m}} : \mathcal{R}^{\text{glob}} \to \mathbb{C}[\widehat{\mathfrak{S}}_{m_1}] \times \cdots \times \mathbb{C}[\widehat{\mathfrak{S}}_{m_t}] \otimes \mathcal{R}^{\text{glob}}_{n_0}$$

obtenue en itérant la construction de [Waldspurger 2018, §1.8]. Notons $\Gamma_{n',n''}$ l'ensemble des $\gamma = (r', r'', N', N'') \in \Gamma_{n_0}$ tels que $r'^2 + r' + N' = n',\ r''^2 + N'' = n''$. Pour un tel γ, notons $\text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma$ la composante dans

$$\mathbb{C}[\widehat{\mathfrak{S}}_{m_1}] \times \cdots \times \mathbb{C}[\widehat{\mathfrak{S}}_{m_t}] \otimes \mathcal{R}_\gamma$$

de $\text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)$. Excluons d'abord le cas où $\sharp = \text{iso}$ et $n'' = 1$. On voit que

$$\sum_{\zeta} \text{proj}_{\text{cusp}}(\text{Res}^{\zeta}_{\boldsymbol{m},n',n''}(\pi)) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{n',n''}} \text{proj}_{\text{cusp}} \circ k^M(\text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma).$$

Fixons $\gamma = (r', r'', N', N'') \in \Gamma_{n',n''}$. Dans [Mœglin et Waldspurger 2003, 2.12 et 2.13] on a introduit des fonctions $k(r', w')$ sur $\text{SO}(2n'+1)(\mathbb{F}_q)$ pour $w' \in W_{N'}$ et $k(r'', w)$ sur $O(2n'')_\sharp(\mathbb{F}_q)$ pour $w'' \in W_{N''}$. Une construction analogue vaut pour les groupes $\text{GL}(m_j)$: pour $w \in \mathfrak{S}_{m_j}$, on définit une fonction $k(w)$ sur $\text{GL}(m_j; \mathbb{F}_q)$. Posons

$$W(\boldsymbol{m}, N', N'') = \mathfrak{S}_{m_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{m_t} \times W_{N'} \times W_{N''}.$$

La fonction $\text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma$ est définie sur ce groupe. Pour $w = (w_1, \ldots, w_t, w', w'') \in W(\boldsymbol{m}, N', N'')$, on pose $k(r', r''; w) = k(w_1) \otimes \cdots \otimes k(w_t) \otimes k(r', w') \otimes k(r'', w'')$. Il résulte des définitions que

$$k^M(\text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma) = |W(\boldsymbol{m}, N', N'')|^{-1} \sum_{w \in W(\boldsymbol{m},N',N'')} \text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma(w) k(r', r''; w).$$

Dans chacun des groupes $\mathfrak{S}_{m_j}$, $W_{N'}$ et $W_{N''}$, on définit usuellement la notion d'élément elliptique. L'application k entrelace la projection $\text{proj}_{\text{cusp}}$ et la projection sur les éléments elliptiques. Donc

$$\text{proj}_{\text{cusp}} \circ k^M(\text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma) = |W(\boldsymbol{m}, N', N'')|^{-1} \sum_{w \in W(\boldsymbol{m},N',N'')_{\text{ell}}} \text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma(w) k(r', r''; w),$$

où $W(\boldsymbol{m}, N', N'')_{\text{ell}}$ est le sous-ensemble des éléments elliptiques de $W(\boldsymbol{m}, N', N'')$. On obtient

$$I = \sum_{\gamma = (r', r'', N', N'') \in \Gamma_{n',n''}} |W(\boldsymbol{m}, N', N'')|^{-1} \sum_{w \in W(\boldsymbol{m},N',N'')_{\text{ell}}} \text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_\gamma(w) \sum_{y \in \boldsymbol{M}^{\pm}(\mathbb{F}_q)} \phi_{\text{res}}(y) k(r', r''; w)(y).$$

Les hypothèses sur le support de ϕ entraînent que ϕ_{res} est à support unipotent. D'après la proposition 2.16 de [Mœglin et Waldspurger 2003], $k(r', r''; w)$ est nulle sur les unipotents sauf si $r' = r'' = 0$. Il ne reste qu'un seul γ qui contribue, à savoir l'élément $\gamma_{n',n''} = (0, 0, n', n'')$. D'où

$$I = |W(\boldsymbol{m}, n', n'')|^{-1} \sum_{w \in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\text{ell}}} \text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w) \sum_{y \in \boldsymbol{M}^{\pm}(\mathbb{F}_q)} \phi_{\text{res}}(y) k(w)(y),$$

où on a posé simplement $k(w) = k(0, 0; w)$. A ce point, on peut supprimer l'hypothèse restrictive faite plus haut. Si $\sharp = \text{iso}$ et $n'' = 1$, on a $I = 0$ car on se limite à $\zeta = -$ et $K^{-}_{n'',\text{iso}}$ ne contient pas d'élément topologiquement unipotent. Mais la formule ci-dessus donne le même résultat, car pour l'unique élément elliptique $w'' \in W_{1,\text{ell}}$, on a $k(0, w'')_{\text{iso}} = 0$, cf. [Mœglin et Waldspurger 2003, 2.13]. Notons $\boldsymbol{M}$ la composante neutre de $\boldsymbol{M}^{\pm}$ et $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. On dispose de l'application E de 2.2, qui est une bijection de l'ensemble $\mathfrak{m}_{\text{nil}}(\mathbb{F}_q)$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$ sur l'ensemble $\boldsymbol{M}_{\text{unip}}(\mathbb{F}_q)$ des éléments unipotents de $\boldsymbol{M}(\mathbb{F}_q)$. Notons $\phi_{\text{red,Lie}}$ la fonction sur $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$ qui est nulle hors des éléments nilpotents et qui vérifie $\phi_{\text{red,Lie}}(X) = \phi_{\text{red}}(E(X))$ pour tout X nilpotent. Pour $w \in W(\boldsymbol{m}, n', n'')_{\text{ell}}$, définissons de même une fonction $k(w)_{\text{Lie}}$. On obtient

$$I = |W(\boldsymbol{m}, n', n'')|^{-1} \sum_{w \in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\text{ell}}} \text{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w) I_w, \tag{47}$$

où

$$I_w = \sum_{X \in \mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)} \phi_{\text{red,Lie}}(X) k(w)_{\text{Lie}}(X).$$

Fixons $w = (w_1, \dots, w_t, w', w'') \in W(\boldsymbol{m}, n', n'')_{\text{ell}}$. On peut supposer $\text{sgn}_{CD}(w'') = 1$ si $\sharp = \text{iso}$, $\text{sgn}_{CD}(w'') = -1$ si $\sharp = \text{an}$, sinon la fonction $k(0, w'')$ est nulle sur $\text{SO}_{\sharp}(\mathbb{F}_q)$, cf. [Mœglin et Waldspurger 2003, 2.13]. A tout w_j est associée une classe de conjugaison de sous-tore maximal elliptique dans $\text{GL}(m_j)$ (qui est d'ailleurs l'unique telle classe). A w' (resp. w'') est associée une classe de conjugaison de sous-tore maximal elliptique dans $\text{SO}(2n'+1)$ (resp. $\text{SO}(2n'')_{\sharp}$). On fixe des tores dans ces classes de conjugaison et on note $\boldsymbol{T}_w$ leur produit qui est donc un sous-tore maximal elliptique dans $\boldsymbol{M}$. On dispose de l'induction de Deligne–Lusztig de $\boldsymbol{T}_w$ à $\boldsymbol{M}$. Ce foncteur vaut aussi pour les algèbres de Lie. Notons $\mathfrak{t}_w$ l'algèbre de Lie de $\boldsymbol{T}_w$ et considérons la fonction caractéristique de $\{0\}$ dans $\mathfrak{t}_w(\mathbb{F}_q)$. On note Q_w son image par induction de Deligne–Lusztig, qui est une fonction sur $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$, à support nilpotent. On a l'égalité

$$k(w)_{\text{Lie}} = 2^{\beta} Q_w, \qquad \text{où } \beta = 0 \text{ si } n'' = 0, \quad \beta = 1 \text{ si } n'' > 0. \tag{48}$$

En effet, d'après nos définitions de [Mœglin et Waldspurger 2003, 2.12 et 2.13], $k(w)$ est égal à $(-1)^n 2^{\beta}$ fois la trace d'un Frobenius sur un faisceau-caractère. D'après [Lusztig 1990, Theorem 1.14], cette trace est égale, sur les unipotents, $(-1)^n$ fois l'image par induction de Deligne–Lusztig de la fonction caractéristique de 1 dans $\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)$. En descendant par l'application E à l'algèbre de Lie, on obtient (48).

En [Waldspurger 2016b, 1.1], on a fixé un caractère ψ_F de F de conducteur $\varpi\mathfrak{o}$. Il lui est associé un caractère de $\mathbb{F}_q$ grâce auquel on définit, comme en [Waldspurger 2016b, 1.1], une transformation de

Fourier $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q))$. On la normalise de sorte que $\hat{\hat{\varphi}}(X) = \varphi(-X)$. D'après la proposition 7.2 et l'égalité 6.15(a) de [Lusztig 1992], on a l'égalité

$$\hat{Q}_w(X) = \mathrm{sgn}(w) q^{-n/2} Q_w(X) \text{ pour tout élément nilpotent } X \in \mathfrak{m}_{\mathrm{nil}}(\mathbb{F}_q). \tag{49}$$

Fixons un point $\boldsymbol{X}_w \in \mathfrak{t}_w(\mathbb{F}_q)$ en position générale. Notons $\varphi[\boldsymbol{X}_w]$ la fonction caractéristique de la classe de conjugaison par $\boldsymbol{M}(\mathbb{F}_q)$ de $\boldsymbol{X}_w$. D'après [Waldspurger 2001, proposition II.8], on a l'égalité

$$\hat{\varphi}[\boldsymbol{X}_w](X) = \hat{Q}_w(X) \text{ pour tout élément nilpotent } X \in \mathfrak{m}_{\mathrm{nil}}(\mathbb{F}_q). \tag{50}$$

En rassemblant (48), (49) et (50), on obtient l'égalité $k(w)_{\mathrm{Lie}}(X) = \mathrm{sgn}(w) q^{n/2} 2^\beta \hat{\varphi}[\boldsymbol{X}_w](X)$, pour $X \in \mathfrak{m}_{\mathrm{nil}}(\mathbb{F}_q)$. D'où

$$I_w = \mathrm{sgn}(w) q^{n/2} 2^\beta \sum_{X \in \mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)} \phi_{\mathrm{red,Lie}}(X) \hat{\varphi}[\boldsymbol{X}_w](X),$$

puis, par la formule de Parseval,

$$I_w = \mathrm{sgn}(w) q^{n/2} 2^\beta \sum_{X \in \mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)} \hat{\phi}_{\mathrm{red,Lie}}(X) \varphi[\boldsymbol{X}_w](X).$$

Ou encore, en explicitant la fonction $\varphi[\boldsymbol{X}_w]$,

$$I_w = \mathrm{sgn}(w) q^{n/2} 2^\beta |\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{x \in \boldsymbol{M}(\mathbb{F}_q)} \hat{\phi}_{\mathrm{red,Lie}}(x^{-1} \boldsymbol{X}_w x).$$

La conjugaison se fait ici par le groupe $\boldsymbol{M}(\mathbb{F}_q)$ et on rappelle que $\boldsymbol{M}$ est la composante neutre de $\boldsymbol{M}^\pm$. Mais, dans la formule ci-dessus, on peut remplacer $\boldsymbol{X}_w$ par un conjugué quelconque par un élément de $\boldsymbol{M}^\pm(\mathbb{F}_q)$. Un tel conjugué vérifie les mêmes propriétés que $\boldsymbol{X}_w$. On peut donc remplacer la conjugaison par $\boldsymbol{M}(\mathbb{F}_q)$ par la conjugaison par $\boldsymbol{M}^\pm(\mathbb{F}_q)$ tout entier, à condition de diviser par $[\boldsymbol{M}^\pm(\mathbb{F}_q) : \boldsymbol{M}(\mathbb{F}_q)]$, qui vaut précisément 2^β. D'où

$$I_w = \mathrm{sgn}(w) q^{n/2} |\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{x \in \boldsymbol{M}^\pm(\mathbb{F}_q)} \hat{\phi}_{\mathrm{red,Lie}}(x^{-1} \boldsymbol{X}_w x). \tag{51}$$

Notons $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. Comme en 2.2, on définit une fonction ϕ_{Lie} sur $\mathfrak{m}(F)$: elle est à support topologiquement nilpotent ; pour $X \in \mathfrak{m}(F)$ topologiquement nilpotent, on a $\phi_{\mathrm{Lie}}(X) = \phi(E(X))$. On en déduit une fonction $\phi_{\mathrm{Lie,red}}$ sur $\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}_{n',n''}$ (avec une définition évidente de $\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}}$ et, ci-dessous, de $\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}}^u$) par

$$\phi_{\mathrm{Lie,red}}(X) = \int_{\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}}^u \oplus \mathfrak{k}_{n',n''}^u} \phi_{\mathrm{Lie}}(X+Y)\, dY$$

pour tout $X \in \mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}_{n',n''}$. On peut considérer que c'est une fonction sur $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$. Le lemme 2.2 dit que $\phi_{\mathrm{red,Lie}} = \phi_{\mathrm{Lie,red}}$. On dispose de la fonction $\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}$ (la transformée de Fourier de ϕ_{Lie}) dont on déduit comme ci-dessus une fonction $(\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})_{\mathrm{red}}$ sur $\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}_{n',n''}$, que l'on peut considérer comme une fonction sur $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$. On vérifie l'égalité

$$(\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})_{\mathrm{red}} = \hat{\phi}_{\mathrm{Lie,red}}.$$

Dans la formule (51), remplaçons $\hat{\phi}_{\mathrm{red,Lie}}$ par $(\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})_{\mathrm{red}}$. Les termes de la formule vivent dans $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$ mais on peut les relever dans $\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}_{n',n''}$. On relève ainsi $\boldsymbol{X}_w$ en un élément de ce réseau que l'on note X_w. La somme en $x \in \boldsymbol{M}^{\pm}(\mathbb{F}_q)$ devient une intégrale sur $K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\pm}_{n',n''}$, divisée par la mesure de $K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}$. On obtient

$$I_w = \mathrm{sgn}(w) q^{n/2} |\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|^{-1} \,\mathrm{mes}(K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''})^{-1} \int_{K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\pm}_{n',n''}} (\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})_{\mathrm{red}}(x^{-1} X_w x)\, dx. \tag{52}$$

Notons T_w le centralisateur de X_w et $\mathfrak{t}_w$ son algèbre de Lie. Le tore T_w est non ramifié sur F et possède une structure naturelle sur $\mathfrak{o}$. On a $\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o}) = \mathfrak{t}_w(F) \cap (\mathfrak{k}_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}_{n',n''})$ et $\varpi \mathfrak{t}_w(\mathfrak{o}) = \mathfrak{t}_w(F) \cap (\mathfrak{k}^u_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}^u_{n',n''})$. Posons $\mathcal{X}_w = X_w + \varpi \mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})$. Montrons que

pour tout $x \in K_{\boldsymbol{m}} \times K^{\pm}_{n',n''}$,

$$(\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})_{\mathrm{red}}(x^{-1} X_w x) = \mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)^{-1} \int_{K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}} \int_{\mathcal{X}_w} \hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(x^{-1} y^{-1} Y_w y x)\, dY_w\, dy. \tag{53}$$

On se ramène immédiatement au cas $x = 1$ en conjuguant par x la fonction $\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}$. Supposons donc $x = 1$. Posons $T_w(F)^u = T_w(F) \cap (K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''})$. C'est l'image par E de $\varpi \mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})$, on a donc $\mathrm{mes}(T_w(F)^u) = \mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)$. Les éléments Y_w appartiennent à $\mathfrak{t}_w(F)$ donc $T_w(F)$ commute à ces éléments. On peut remplacer l'intégrale en $y \in K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}$ du membre de droite ci-dessus par une intégrale en $y \in T_w(F)^u \backslash (K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''})$, multipliée par $\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)$. Ce facteur fait disparaître son inverse qui figure dans ce membre de droite. Considérons l'application

$$\iota : T_w(F)^u \backslash (K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}) \times \varpi \mathfrak{t}_w(\mathfrak{o}) \to \mathfrak{m}(F), \quad (y, Z) \mapsto y^{-1}(X_w + Z) y - X_w.$$

Il est clair que son image est contenue dans $\mathfrak{k}^u_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}^u_{n',n''}$. Montrons qu'elle est injective. Si (y, Z) et (y', Z') ont même image, on a $y^{-1}(X_w + Z) y = y'^{-1}(X_w + Z') y'$. Le point $\boldsymbol{X}_w$ est en position générale et ses valeurs propres (dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$) sont distinctes. Les valeurs propres de $X_w + Z$ et $X_w + Z'$ sont entières (dans une clôture algébrique de F) et leurs réductions dans $\bar{\mathbb{F}}_q$ sont les mêmes que celles de $\boldsymbol{X}_w$. On en déduit aisément que les points $X_w + Z$ et $X_w + Z'$ ne peuvent être conjugués que s'ils sont égaux. Donc $Z = Z'$. Alors $y' y^{-1}$ commute à $X_w + Z'$ et appartient donc à $T_w(F)$. Cela prouve l'injectivité de ι. L'application ι est différentiable. Sa dérivée en un point (y, Z) est l'application

$$\mathfrak{t}_w(F) \backslash \mathfrak{m}(F) \times \mathfrak{t}_w(F) \to \mathfrak{m}(F), \quad (\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \mapsto y^{-1}([X_w + Z, \mathfrak{Y}] + \mathfrak{Z}) y.$$

Celle-ci est bijective et, parce que les valeurs propres de $X_w + Z$ sont entières et de réductions toutes distinctes, on vérifie qu'elle préserve les mesures. Donc ι est un isomorphisme local, de jacobien constant de valeur 1. On en déduit que l'image de ι est ouverte dans $\mathfrak{k}^u_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}^u_{n',n''}$ et que cette image a même mesure que l'espace de départ. D'autre part, l'image de ι est clairement compacte et l'espace de départ a même mesure que $\mathfrak{k}^u_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}^u_{n',n''}$. Cela entraîne que ι est un isomorphisme préservant les mesures de $T_w(F)^u \backslash (K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''}) \times \varpi \mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})$ sur $\mathfrak{k}^u_{\boldsymbol{m}} \oplus \mathfrak{k}^u_{n',n''}$. Le membre de droite de (53) (en $x = 1$) s'écrit

$$\int_{T_w(F)^u \backslash (K^u_{\boldsymbol{m}} \times K^u_{n',n''})} \int_{\varpi \mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})} \hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(\iota(y, Z) + X_w)\, dZ\, dy.$$

D'après les propriétés de ι, c'est aussi

$$\int_{\mathfrak{k}^u_{\boldsymbol{m}}\oplus\mathfrak{k}^u_{n',n''}} \hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(X_w+Y)\,dY.$$

Mais ceci est la définition de $(\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})_{\mathrm{red}}(X_w)$. Cela démontre (53).

Utilisons (53) pour transformer (52). L'intégrale en $K^u_{\boldsymbol{m}}\times K^u_{n',n''}$ est absorbée par celle en $K_{\boldsymbol{m}}\times K_{n',n''}$ mais introduit un facteur $\mathrm{mes}(K^u_{\boldsymbol{m}}\times K^u_{n',n''})$ qui compense l'inverse de cette mesure intervenant dans (52). On obtient

$$I_w=\mathrm{sgn}(w)q^{n/2}|\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|^{-1}\,\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)^{-1}\int_{K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''}}\int_{\mathcal{X}_w}\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(x^{-1}Y_wx)\,dY_w\,dx.$$

Rappelons que l'on a supposé $\mathrm{sgn}_{CD}(w'')=1$ si $\sharp=\mathrm{iso}$ et $\mathrm{sgn}_{CD}(w'')=-1$ si $\sharp=\mathrm{an}$. Notons $W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}$ le sous-ensemble des éléments de $W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell}}$ dont la composante w'' vérifie cette condition. En revenant à (47), on obtient

$$\begin{aligned}I=|W(\boldsymbol{m},n',n'')|^{-1}\sum_{w\in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}}&\mathrm{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w)\,\mathrm{sgn}(w)q^{n/2}|\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|^{-1}\\&\times\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)^{-1}\int_{K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''}}\int_{\mathcal{X}_w}\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(x^{-1}Y_wx)\,dY_w\,dx.\end{aligned}\tag{54}$$

Notons plus précisément $I_{n',n''}(\phi)$ cette expression. En 2.1, on a défini un terme $\Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(\phi)$. On a l'égalité

$$\Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(\phi)=\sum_{n',n''}\mathrm{mes}(A_M(F)\backslash(A_M(F)K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''}))^{-1}\int_{A_M(F)\backslash M(F)}I_{n',n''}({}^m\phi)\,dm,$$

où (n',n'') parcourt $D(n)$ avec la restriction $n''\geq 1$ si $\sharp=\mathrm{an}$ et où on a noté ${}^m\phi$ la fonction $x\mapsto\phi(m^{-1}xm)$. On peut oublier la restriction sur n'' : si $\sharp=\mathrm{an}$ et $n''=0$, la formule (54) vaut 0 car l'ensemble $W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}$ est vide. On voit que l'image par transformation de Fourier de $({}^m\phi)_{\mathrm{Lie}}$ est ${}^m(\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}})$. Les intégrales sur $K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''}$ de la formule (54) sont absorbées par l'intégrale sur $A_M(F)\backslash M(F)$, mais introduisent des facteurs $\mathrm{mes}(K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''})$. Notons $A_M(F)^c$ le plus grand sous-groupe compact de $A_M(F)$. C'est aussi l'intersection de $A_M(F)$ et de $K_{\boldsymbol{m}}$. Donc

$$\mathrm{mes}(A_M(F)\backslash(A_M(F)K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''}))=\mathrm{mes}(K_{\boldsymbol{m}}\times K^{\pm}_{n',n''})\,\mathrm{mes}(A_M(F)^c)^{-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(\phi)=\sum_{(n',n'')\in D(n)}&\mathrm{mes}(A_M(F)^c)|W(\boldsymbol{m},n',n'')|^{-1}\\&\times\sum_{w\in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}}\mathrm{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w)\,\mathrm{sgn}(w)q^{n/2}|\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|^{-1}\\&\times\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)^{-1}\int_{A_M(F)\backslash M(F)}\int_{\mathcal{X}_w}\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(m^{-1}Y_wm)\,dY_w\,dm.\end{aligned}\tag{55}$$

On peut encore remplacer l'intégrale en $A_M(F)\backslash M(F)$ par une intégrale sur $T_w(F)\backslash M(F)$, à condition de multiplier par $\mathrm{mes}(A_M(F)\backslash T_w(F))$. Notons $T_w(F)^c$ le plus grand sous-groupe compact de $T_w(F)$.

Parce que T_w est non ramifié, on a $T_w(F) = A_M(F)T_w(F)^c$, d'où

$$\mathrm{mes}(A_M(F)\backslash T_w(F)) = \mathrm{mes}(A_M(F)^c)^{-1}\,\mathrm{mes}(T_w(F)^c).$$

Le premier facteur compense son inverse qui figure dans la formule ci-dessus. On a introduit plus haut le sous-groupe $T_w(F)^u$ de $T_w(F)$ et on a $T_w(F)^c/T_w(F)^u \simeq \boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)$. De plus, $\mathrm{mes}(T_w(F)^u) = \mathrm{mes}(\varpi\,\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o}))$. On a fixé sur $\mathfrak{t}_w(F)$ la mesure autoduale. Puisque $\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})$ et $\varpi\,\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})$ sont duaux pour le bicaractère $(X, Y) \mapsto \psi_F(\mathrm{trace}(XY))$, on calcule

$$\mathrm{mes}(\varpi\,\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})) = [\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o}) : \varpi\,\mathfrak{t}_w(\mathfrak{o})]^{-\frac{1}{2}} = q^{-n/2}.$$

D'où

$$\mathrm{mes}(T_w(F)^c) = q^{-n/2}|\boldsymbol{T}_w(\mathbb{F}_q)|.$$

Ces termes compensent leurs inverses figurant dans la formule (55). Finalement

$$\Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(\phi) = \sum_{(n',n'')\in D(n_0)} |W(\boldsymbol{m}, n', n'')|^{-1} \sum_{w\in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}} \mathrm{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w)\,\mathrm{sgn}(w)\,\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)^{-1} \times \int_{T_w(F)\backslash M(F)} \int_{\mathcal{X}_w} \hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(m^{-1}Y_w m)\,dY_w\,dm. \quad (56)$$

Soit maintenant $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$. On suppose que le support de f est formé d'éléments topologiquement unipotents. En 2.1, on a défini le terme

$$\Theta_{\pi,\boldsymbol{m},\mathrm{cusp}}(f) = \int_{P(F)\backslash G_\sharp(F)} \Theta^M_{\pi,\mathrm{cusp}}(({}^g f)_U)\,dg.$$

On définit la fonction f_{Lie}, cf. 2.2. Posons $\phi = f_U$. On voit que

$$\phi_{\mathrm{Lie}}(X) = \int_{\mathfrak{u}(F)} f_{\mathrm{Lie}}(X+Y)\,dY,$$

où dY est la mesure de Haar sur $\mathfrak{u}(F)$ telle que l'exponentielle de $\mathfrak{u}(F)$ sur $U(F)$ préserve les mesures. D'où aussi

$$\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(X) = \int_{\mathfrak{u}(F)} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(X+Y)\,dY.$$

Ou encore

$$\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(X) = |\det(\mathrm{ad}(X)_{|\mathfrak{u}(F)})|_F \int_{U(F)} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(u^{-1}Xu)\,du,$$

où $|\cdot|_F$ est la valeur absolue usuelle de F. On peut remplacer f par ${}^g f$. En posant $\phi = ({}^g f)_U$, on obtient

$$\hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(X) = |\det(\mathrm{ad}(X)_{|\mathfrak{u}(F)})|_F \int_{U(F)} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(g^{-1}u^{-1}Xug)\,du.$$

Les éléments Y_w intervenant dans (56) vérifient $|\det(\mathrm{ad}(Y_w)_{|\mathfrak{u}(F)})|_F = 1$ car les valeurs propres des réductions $\boldsymbol{X}_w$ sont toutes distinctes. On en déduit l'égalité

$$\int_{P(F)\backslash G_\sharp(F)} \int_{T_w(F)\backslash M(F)} \hat{\phi}_{\mathrm{Lie}}(m^{-1}Y_w m)\,dm\,dg = \int_{T_w(F)\backslash G_\sharp(F)} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(g^{-1}Y_w g)\,dg.$$

On obtient

$$\Theta_{\pi,\boldsymbol{m},\mathrm{cusp}}(f) = \sum_{(n',n'')\in D(n_0)} |W(\boldsymbol{m},n',n'')|^{-1} \sum_{w\in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}} \mathrm{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w)\,\mathrm{sgn}(w)\,\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)^{-1} \times \int_{T_w(F)\backslash G(F)} \int_{\mathcal{X}_w} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(g^{-1}Y_w g)\,dY_w\,dg.$$

Dans [Waldspurger 2001, p. 53], on a introduit la distribution

$$\varphi \mapsto \int_{T_w(F)\backslash G_\sharp(F)} \varphi(g^{-1}Y_w g)\,dg$$

sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$ (elle y est notée $\phi_\theta(X_T,\varphi)$). On a montré en [Waldspurger 2001, corollaire III.5] que sa restriction à un certain sous-espace $\mathcal{H} \subset C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$ ne dépendait pas de l'élément $Y_w \in \mathcal{X}_w$ (elle ne dépend d'ailleurs pas non plus du choix de $\boldsymbol{X}_w$ mais cela résulte déjà de nos calculs ci-dessus). L'espace $\mathcal{H}$ est défini ainsi. Soit B un sous-groupe d'Iwahori de $G_\sharp(F)$. Il lui correspond un sous-$\mathfrak{o}$-réseau $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}_\sharp(F)$. Notons $C_c^\infty(g_\sharp(F)/\mathfrak{b})$ le sous-espace des fonctions invariantes par $\mathfrak{b}$. Alors $\mathcal{H}$ est la somme de ces espaces $C_c^\infty(g_\sharp(F)/\mathfrak{b})$ quand $\mathfrak{b}$ décrit tous les sous-groupes d'Iwahori de $G_\sharp$. On voit facilement que $\mathcal{H}$ est exactement le sous-espace des fonctions φ telles que $\hat{\varphi}$ soit à support topologiquement nilpotent. En particulier, $\hat{f}_{\mathrm{Lie}}$ appartient à $\mathcal{H}$. Donc l'intégrale

$$\int_{T_w(F)\backslash G(F)} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(g^{-1}Y_w g)\,dg$$

ne dépend pas du point $Y_w \in \mathcal{X}_w$. Intégrer cette formule en Y_w revient à la multiplier par $\mathrm{mes}(\mathcal{X}_w)$ et ce facteur compense son inverse figurant dans la formule plus haut. On obtient simplement

$$\Theta_{\pi,\boldsymbol{m},\mathrm{cusp}}(f) = \sum_{(n',n'')\in D(n_0)} |W(\boldsymbol{m},n',n'')|^{-1} \sum_{w\in W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell},\sharp}} \mathrm{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w)\,\mathrm{sgn}(w) \times \int_{T_w(F)\backslash G(F)} \hat{f}_{\mathrm{Lie}}(g^{-1}X_w g)\,dg. \quad (57)$$

Pour expliciter davantage la formule obtenue, introduisons l'élément $\boldsymbol{\gamma}_0 = (0,0,n)$ de $\boldsymbol{\Gamma}$ (cf. [Waldspurger 2018, §1.8]) et la composante $\kappa_{\pi,0}$ de κ_π dans la composante $\mathcal{R}(\boldsymbol{\gamma}_0)$ de $\mathcal{R}$. Soit $(\alpha,\beta',\beta'') \in \mathcal{P}_3(n)$. On a défini en [Waldspurger 2018, §1.8] la valeur $\kappa_{\pi,0}(w_{\alpha,\beta',\beta''})$. Associons à notre triplet de partitions la partition $\boldsymbol{m} = \alpha$ et les entiers $n' = S(\beta')$, $n'' = S(\beta'')$, $n_0 = n' + n''$. Soit $w = (w_1,\dots,w_t,w',w'')$ un élément de $W(\boldsymbol{m},n',n'')_{\mathrm{ell}}$ tel que w' et w'' soient paramétrés par les partitions $(\varnothing,\beta')$ et $(\varnothing,\beta'')$. Les définitions entraînent que

$$\mathrm{res}_{\boldsymbol{m}}(\kappa_\pi)_{\gamma_{n',n''}}(w) = \kappa_{\pi,0}(w_{\alpha,\beta',\beta''}).$$

Posons $\mathrm{sgn}(w_{\alpha,\beta',\beta''}) = \mathrm{sgn}(w)$ et définissons une distribution $\phi_{\alpha,\beta',\beta''}$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$ par :

— si $\sharp = \mathrm{iso}$ et $l(\beta'')$ est impair ou si $\sharp = \mathrm{an}$ et $l(\beta'')$ est pair, $\phi_{\alpha,\beta',\beta''} = 0$;

— si $\sharp = \mathrm{iso}$ et $l(\beta'')$ est pair ou si $\sharp = \mathrm{an}$ et $l(\beta'')$ est impair,

$$\phi_{\alpha,\beta',\beta''}(\varphi) = \int_{T_w(F)\backslash G(F)} \varphi(g^{-1}X_w g)\,dg$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$.

La distinction entre les deux cas provient de ce que X_w n'existe que si $w \in W(\boldsymbol{m}, n', n'')_{\mathrm{ell},\sharp}$, c'est-à-dire si $\mathrm{sgn}(w'')$ vaut 1 si $\sharp = \mathrm{iso}$, -1 si $\sharp = \mathrm{an}$, ce qui se traduit par les conditions indiquées. Cette définition dépend des choix de w dans sa classe de conjugaison et de l'élément X_w. Mais nous n'appliquerons cette distribution qu'à des éléments de l'espace $\mathcal{H}$. Comme on l'a dit ci-dessus, cette restriction ne dépend pas de ces choix. Dans la formule (57), l'intégrale devient $\phi_{\alpha,\beta',\beta''}(\hat{f}_{\mathrm{Lie}})$. Cette formule devient une somme, indexée par les triplets $(\alpha, \beta', \beta'')$ tels que $\alpha = \boldsymbol{m}$, de termes ne dépendant que de ces triplets. Chaque triplet $(\alpha, \beta', \beta'')$ intervient avec une certaine multiplicité. Celle-ci est le produit de $|W(\boldsymbol{m}, n', n'')|^{-1}$ et du nombre d'éléments $w = (w_1, \dots, w_t, w', w'') \in W(\boldsymbol{m}, n', n'')_{\mathrm{ell}}$ tels que w' et w'' soient paramétrés par $(\varnothing, \beta')$ et $(\varnothing, \beta'')$. Pour toute partition λ, posons

$$z(\lambda) = \Big(\prod_{j=1,\dots,l(\lambda)} 2\lambda_j\Big) \prod_{i\geq 1} \mathrm{mult}_\lambda(i)!,$$

et posons

$$z(\alpha, \beta', \beta'') = z(\alpha)z(\beta')z(\beta'').$$

On voit que la multiplicité précédente est égale à

$$2^{l(\alpha)}\, \mathrm{mult}!_\alpha z(\alpha, \beta', \beta'')^{-1}.$$

Alors (57) se récrit

$$\Theta_{\pi,\boldsymbol{m},\mathrm{cusp}}(f) = \sum_{(\alpha,\beta',\beta'')\in\mathcal{P}_3(n);\, \alpha=\boldsymbol{m}} 2^{l(\alpha)}\, \mathrm{mult}!_\alpha z(\alpha, \beta', \beta'')^{-1}\, \mathrm{sgn}(w_{\alpha,\beta',\beta''})\kappa_{\pi,0}(w_{\alpha,\beta',\beta''})\phi_{\alpha,\beta',\beta''}(\hat{f}_{\mathrm{Lie}}).$$

Le résultat de 2.1 est que $\Theta_\pi(f)$ est la somme sur $\boldsymbol{m}$ des expressions ci-dessus, multipliées par $2^{-l(\boldsymbol{m})}\, \mathrm{mult}!_{\boldsymbol{m}}^{-1}$. D'où

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{(\alpha,\beta',\beta'')\in\mathcal{P}_3(n)} z(\alpha, \beta', \beta'')^{-1}\, \mathrm{sgn}(w_{\mu,\beta',\beta''})\kappa_{\pi,0}(w_{\alpha,\beta',\beta''})\phi_{\alpha,\beta',\beta''}(\hat{f}_{\mathrm{Lie}}). \tag{58}$$

3. Fronts d'onde

3.1. ***Rappel sur les orbites unipotentes.*** Soit $\sharp = \mathrm{iso}$ ou an. On appelle orbite nilpotente une classe de conjugaison par $G_\sharp(F)$ d'éléments nilpotents dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$. On note $\mathrm{Nil}_\sharp$ l'ensemble des orbites nilpotentes. Les orbites nilpotentes sont classifiées par des données $(\mu, (q_i)_{i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu)})$, où $\mu \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$; pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu)$, q_i est une classe d'équivalence d'une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel sur F de dimension $\mathrm{mult}_\mu(i)$; le noyau anisotrope de la forme quadratique $\bigoplus_{i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu)} q_i$ est équivalent à celui de $Q_\sharp$.

Pour une orbite nilpotente $\mathcal{O}$, on note $\mu(\mathcal{O})$ la partition associée à $\mathcal{O}$.

Une classification analogue vaut pour les groupes $\mathrm{SO}(2n+1)$ et $\mathrm{SO}(2n)_\sharp$ définis sur $\mathbb{F}_q$. Il y a une petite perturbation dans le cas du groupe $\mathrm{SO}(2n)_{\mathrm{iso}}$. La classification ci-dessus vaut pour les classes de conjugaison par $O(2n)_{\mathrm{iso}}(\mathbb{F}_q)$ et non pas par $\mathrm{SO}(2n)_{\mathrm{iso}}(\mathbb{F}_q)$. Il peut y avoir des classes de conjugaison par

$O(2n)_{\mathrm{iso}}(\mathbb{F}_q)$ qui se coupent en deux classes de conjugaison par $\mathrm{SO}(2n)_{\mathrm{iso}}(\mathbb{F}_q)$. A ces deux classes sont associées les mêmes données $(\mu, (q_i)_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu)})$.

La définition suivante va nous être utile. Considérons deux espaces vectoriels l_1 et l_2 sur $\mathbb{F}_q$ de dimensions d_1 et d_2, respectivement. Soient q_1 et q_2, des formes quadratiques non dégénérées sur ces espaces. À isomorphisme près, il existe un unique triplet (V, Q, L) vérifiant les conditions suivantes :

— V est un espace vectoriel sur F de dimension $d_1 + d_2$;

— Q est une forme quadratique non dégénérée sur V ;

— $L \subset V$ est un réseau presque autodual, c'est-à-dire $\varpi L^* \subseteq L \subseteq L^*$;

— (l_1, q_1) est isomorphe à (l', Q') et (l_2, q_2) est isomorphe à (l'', Q'') (rappelons que $l' = L/\varpi L^*$, $l'' = L^*/L$ et que Q' et Q'' sont les formes sur ces espaces qui se déduisent naturellement de Q, cf. [Waldspurger 2018, §1.1]).

On note Q_{q_1,q_2} cette forme quadratique Q dont la classe d'équivalence est bien déterminée.

Considérons l'ensemble $\mathbf{Nil}_\sharp$ des paires $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ telles que

> il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, avec $n_1 + n_2 = n$ et $n_2 \geq 1$ si $\sharp = \mathrm{an}$, de sorte que $\mathcal{O}_1$ soit une orbite nilpotente dans $\mathfrak{so}(2n_1 + 1)(\mathbb{F}_q)$ et $\mathcal{O}_2$ est une orbite nilpotente dans $\mathfrak{so}(2n_2)_\sharp(\mathbb{F}_q)$.

À un telle paire, on va associer une orbite nilpotente $\mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$. Notons

$$(\mu_1, (q_{1,i})_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu_1)}) \quad \text{et} \quad (\mu_2, (q_{2,i})_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu_2)})$$

les paramètres de $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$. On pose $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$ et, pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu)$, $q_i = Q_{q_{1,i},q_{2,i}}$ (avec $q_{1,i}$ ou $q_{2,i} = 0$ si $i \notin \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu_1)$ ou $i \notin \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu_2)$). On vérifie que $(\mu, (q_i)_{i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu)})$ classifie une orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}_\sharp(F)$. Alors $\mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$ est cette orbite unipotente. L'application

$$\mathbf{Nil}_\sharp \to \mathrm{Nil}_\sharp, \quad (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \mapsto \mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$$

est surjective.

Pour $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$, on note $I_\mathcal{O}$ l'intégrale orbitale associée à $\mathcal{O}$. Pour la définir, il faut bien sûr fixer une mesure sur $\mathcal{O}$ invariante par conjugaison. La définition de cette mesure n'aura pas d'importance pour nous.

Soit $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \in \mathbf{Nil}_\sharp$. En [Waldspurger 2001, IX.2], on a défini une fonction $h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_\sharp(F))$ (dans cette référence, les éléments de $\mathbf{Nil}_\sharp$ étaient notés $\check{N}$). Elle vérifie les propriétés suivantes :

— $h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2} \in \mathcal{H}$; l'espace $\mathcal{H}$ a été défini en 2.3 ; c'est celui des fonctions φ dont la transformée de Fourier est à support topologiquement nilpotent ;

(59) pour $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$ dont l'adhérence $\bar{\mathcal{O}}$ ne contient pas $\mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$, $I_\mathcal{O}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = 0$;

(60) pour $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$, $I_\mathcal{O}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) \neq 0$.

On définit une fonction $f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2} \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$ comme suit (cf. [Waldspurger 2001, lemme IX.4]) : c'est la fonction à support topologiquement unipotent telle que $(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})_{\mathrm{Lie}} = \hat{h}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$.

3.2. ***Développement des caractères à l'origine.*** Soit π une représentation lisse et irréductible de $G_\sharp(F)$. D'après Harish-Chandra, on sait qu'il existe une unique famille de nombres complexes $(c_\mathcal{O}(\pi))_{\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}_\sharp}$

et un voisinage $V(\pi)$ de 1 dans $G_\sharp(F)$ de sorte que les propriétés suivantes soit vérifiées. Le voisinage $V(\pi)$ est invariant par conjugaison par $G_\sharp(F)$ et est formé d'éléments topologiquement unipotents. Soit $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$. On suppose que le support de f est contenu dans $V(\pi)$. En particulier, on peut associer à f une fonction f_{Lie} sur $\mathfrak{g}_\sharp(F)$, à support topologiquement nilpotent. Alors on a l'égalité

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}_\sharp} c_{\mathcal{O}}(\pi) I_{\mathcal{O}}(\hat{f}_{\mathrm{Lie}}). \tag{61}$$

Remarquons que les coefficients $c_{\mathcal{O}}(\pi)$ ne sont pas tous nuls. En effet, si f est la fonction caractéristique d'un sous-groupe ouvert compact H contenu dans $V(\pi)$, $\Theta_\pi(f)$ est égal au produit de la mesure de H et de la dimension du sous-espace des invariants par H dans l'espace de π. Ce terme est non nul si H est assez petit. On dit que π admet un front d'onde s'il existe $\mu(\pi) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n+1)$ de sorte que

— pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$ tel que $c_{\mathcal{O}}(\pi) \neq 0$, on a $\mu(\mathcal{O}) \leq \mu(\pi)$;

— il existe $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$ tel que $c_{\mathcal{O}}(\pi) \neq 0$ et $\mu(\mathcal{O}) = \mu(\pi)$.

Évidemment, $\mu(\pi)$ est unique si elle existe. On conjecture que toute représentation lisse irréductible admet un front d'onde. Supposons que π admette un front d'onde. On montre que

— $\mu(\pi)$ est une partition spéciale, cf. [Mœglin 1996a, théorème 1.4] ;

— pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$ tel que $\mu(\mathcal{O}) = \mu(\pi)$, on a $c_{\mathcal{O}}(\pi) \geq 0$, cf. [Mœglin et Waldspurger 1987, corollaire 1.17].

Remarque. La construction d'Harish-Chandra utilise l'exponentielle et non pas notre exponentielle tronquée E. Mais le résultat est le même, avec les mêmes coefficients, que l'on utilise l'une ou l'autre de ces applications.

Dans le cas où $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{unip},\sharp}$, on peut prendre pour voisinage $V(\pi)$ l'ensemble tout entier des éléments topologiquement unipotents de $G_\sharp(F)$. En effet, pour f à support topologiquement unipotent, $\Theta_\pi(f)$ est calculé par la formule (58). Or il résulte de [DeBacker 2002, Theorem 2.1.5] que le membre de droite de cette formule est de la même forme que celui de (61) ci-dessus. Ces deux expressions doivent coïncider si le support de f est dans un voisinage assez petit de l'origine. Les distributions $f \mapsto I_{\mathcal{O}}(\hat{f}_{\mathrm{Lie}})$ sont linéairement indépendantes, même si on les restreint aux fonctions vérifiant cette condition de support. Cela implique que les coefficients sont les mêmes dans les deux expressions. Donc (61) est valable pour toute f à support topologiquement unipotent.

3.3. ***Le théorème.*** Pour $\sharp = $ iso ou an, notons $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip},\sharp}$ le sous-ensemble des représentations admissibles irréductibles de $G_\sharp(F)$ qui sont tempérées et de réduction unipotente. Notons $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ la réunion disjointe de $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip,iso}}$ et $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip,an}}$. Dans [Waldspurger 2018, §1.3], on a adapté l'habituelle classification de Langlands : l'ensemble $\mathrm{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ est paramétré par un ensemble $\mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ de triplets (λ, s, ϵ). En particulier, le terme λ est un élément de $\mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(2n)$. Pour un tel triplet, on a noté $\pi(\lambda, s, \epsilon)$ la représentation qui lui est associée par Lusztig (elle est tempérée). On a introduit l'involution D de Zelevinsky–Aubert–Schneider–Stuhler en [Waldspurger 2018, §1.7] et une dualité d entre partitions en 1.6 et 1.7 ci-dessus. On pose $\delta(\lambda, s, \epsilon) = D(\pi(\lambda, s, \epsilon))$.

Théorème. *Soit* $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\text{tunip}}$. *Alors* $\delta(\lambda, s, \epsilon)$ *admet un front d'onde et on a l'égalité*

$$\mu(\delta(\lambda, s, \epsilon)) = d(\lambda).$$

La fin de l'article est consacrée à la démonstration du théorème.

3.4. ***Une première réduction.*** En [Waldspurger 2018, §1.3], on a introduit le sous-ensemble $\mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad}}$ des triplets $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\text{tunip}}$ tels que $s^2 = 1$. Supposons que le théorème soit prouvé pour les triplets $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad}}$ tels que λ n'ait que des termes pairs. Montrons que le théorème résulte de ce cas particulier.

Soit $\sharp =$ iso ou an et soit P un sous-groupe parabolique de $G_\sharp$, de composante de Levi M. Soit π^M une représentation lisse irréductible de $M(F)$, notons $\pi = \text{Ind}_P^{G_\sharp}(\pi^M)$ son induite et supposons π irréductible. On a défini en 3.2 la notion de front d'onde pour le groupe $G_\sharp$ mais on sait bien que la définition est générale et s'applique en particulier au Levi M. Supposons que π^M admette un front d'onde. Si

$$M = \text{GL}(m_1) \times \cdots \times \text{GL}(m_t) \times G_{\sharp,n_0},$$

$\mu(\pi^M)$ est alors une famille $(\mu_1, \ldots, \mu_t, \mu_0)$ où, pour $i = 1, \ldots, t$, $\mu_i \in \mathcal{P}(m_i)$ et $\mu_0 \in \mathcal{P}^{\text{orth}}(2n_0+1)$. On a défini en 1.8 une opération d'induction qui envoie $\mu(\pi^M)$ sur une partition $\text{ind}(\mu(\pi^M)) \in \mathcal{P}^{\text{orth}}(2n+1)$.

Sous ces hypothèses, on a

$$\pi \text{ admet un front d'onde et on a } \quad \mu(\pi) = \text{ind}(\mu(\pi^M)). \tag{62}$$

Preuve. Pour $f \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$, on a l'égalité $\Theta_\pi(f) = \Theta_{\pi^M}(f_P)$, où f_P est l'habituel “terme constant” de f. On définit facilement un voisinage $V(\pi)$ de 1 dans $G_\sharp(F)$ invariant par conjugaison et formé d'éléments topologiquement unipotents, de sorte que, si f est à support dans $V(\pi)$, f_P soit à support dans $V(\pi^M)$. Pour une telle fonction f, on a alors

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{\mathcal{O}^M \in \text{Nil}^M} c_{\mathcal{O}^M}(\pi^M) I_{\mathcal{O}^M}(f_P),$$

où Nil^M est l'analogue de $\text{Nil}_\sharp$ pour le groupe M. Notons $\mathfrak{u}$ le radical nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. Pour $\mathcal{O}^M \in \text{Nil}^M$ et $\mathcal{O} \in \text{Nil}_\sharp$, on dit que $\mathcal{O}$ est induite de $\mathcal{O}^M$ si $\mathcal{O}$ coupe $\mathcal{O}^M + \mathfrak{u}(F)$ selon un ouvert non vide. On note cette relation $\mathcal{O} \subset \text{ind}(\mathcal{O}^M)$. Si on se plaçait sur la clôture algébrique $\bar{F}$, il y aurait une et une seule orbite induite mais, parce que l'on travaille sur F, il y en a plusieurs en général. Cette opération d'induction d'orbites est reliée à l'induction des partitions par la relation suivante :

$$\text{si } \mathcal{O} \subset \text{ind}(\mathcal{O}^M), \quad \text{alors} \quad \mu(\mathcal{O}) = \text{ind}(\mu(\mathcal{O}^M)).$$

On a une égalité

$$I_{\mathcal{O}^M}(f_P) = \sum_{\mathcal{O} \subset \text{ind}(\mathcal{O}^M)} c_{\mathcal{O}^M,\mathcal{O}} I_{\mathcal{O}}(f),$$

avec des coefficients $c_{\mathcal{O}^M,\mathcal{O}} > 0$. D'où

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}_\sharp} c_{\mathcal{O}}(\pi) I_{\mathcal{O}}(f),$$

où, pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$, on a

$$c_{\mathcal{O}}(\pi) = \sum_{\substack{\mathcal{O}^M \in \mathrm{Nil}^M \\ \mathcal{O}\subset \mathrm{ind}(\mathcal{O}^M)}} c_{\mathcal{O}^M}(\pi^M) c_{\mathcal{O}^M,\mathcal{O}}. \tag{63}$$

Si $c_{\mathcal{O}}(\pi) \neq 0$, il existe $\mathcal{O}^M$ tel que $\mathcal{O} \subset \mathrm{ind}(\mathcal{O}^M)$ et $c_{\mathcal{O}^M}(\pi^M) \neq 0$. On a alors $\mu(\mathcal{O}) = \mathrm{ind}(\mu(\mathcal{O}^M))$ et $\mathcal{O}^M \leq \mu(\pi^M)$. D'où $\mu(\mathcal{O}) \leq \mathrm{ind}(\mu(\pi^M))$ car l'opération d'induction est croissante. Inversement, soit $\mathcal{O}_0^M \in \mathrm{Nil}^M$ tel que $c_{\mathcal{O}_0^M}(\pi^M) \neq 0$ et $\mu(\mathcal{O}_0^M) = \mu(\pi^M)$. Soit $\mathcal{O} \subset \mathrm{ind}(\mathcal{O}_0^M)$. On a $\mu(\mathcal{O}) = \mathrm{ind}(\mu(\pi^M))$. Montrons que $c_{\mathcal{O}}(\pi) \neq 0$. Soit $\mathcal{O}^M$ intervenant de façon non nulle dans la formule (63). On a $c_{\mathcal{O}^M}(\pi^M) \neq 0$ donc $\mu(\mathcal{O}^M) \leq \mu(\pi^M)$. Si cette relation n'est pas une égalité, on a $\mathrm{ind}(\mu(\mathcal{O}^M)) < \mathrm{ind}(\mu(\pi^M))$ car l'opération d'induction est strictement croissante. Cela contredit la relation $\mathrm{ind}(\mu(\mathcal{O}^M)) = \mu(\mathcal{O}) = \mathrm{ind}(\mu(\pi^M))$. Donc $\mu(\mathcal{O}^M) = \mu(\pi^M)$. Alors le coefficient $c_{\mathcal{O}^M}(\pi^M) c_{\mathcal{O}^M,\mathcal{O}}$ est strictement positif. Par construction, il y a au moins une telle orbite $\mathcal{O}^M$, à savoir $\mathcal{O}_0^M$. Le coefficient $c_{\mathcal{O}}(\pi)$ est une somme non vide de termes strictement positifs, donc $c_{\mathcal{O}}(\pi) > 0$, ce qui achève la démonstration de (62) □

Soit $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip},\sharp}$. En reprenant les considérations de [Waldspurger 2018, §1.3], on voit qu'il existe

— un sous-groupe parabolique P de $G_\sharp$ de composante de Levi

$$M = \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_t) \times G_{\sharp,n_0};$$

— pour tout $j = 1, \ldots, t$, un caractère non ramifié χ_j de $F^\times$ tel que $\chi_j^2 \neq 1$ si m_j est pair ;

— un élément $(\lambda_0, s_0, \epsilon_0) \in \mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad},n_0,\sharp}$ tel que λ_0 n'ait que des termes pairs ;

de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\pi(\lambda, s, \epsilon) = \mathrm{Ind}_P^{G_\sharp}\big(\mathrm{st}_{m_1}(\chi_1 \circ \det) \otimes \cdots \otimes \mathrm{st}_{m_t}(\chi_t \circ \det) \otimes \pi(\lambda_0, s_0, \epsilon_0)\big), \tag{64}$$

où st_{m_j} est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(m_j; F)$:

$$\lambda = (m_1, m_1) \cup \cdots \cup (m_t, m_t) \cup \lambda_0. \tag{65}$$

Remarque. Le couple (λ_0, s_0) se déduit de (λ, s) en éliminant les termes impairs de λ ainsi que les termes pairs pour lesquels la valeur propre correspondante de s est différente de ± 1. On voit que $\boldsymbol{Z}(\lambda, s) = \boldsymbol{Z}(\lambda_0, s_0)$ (avec les notations de l'introduction) et ϵ s'identifie à un caractère ϵ_0 de $\boldsymbol{Z}(\lambda_0, s_0)$. L'égalité (64) exprime la compatibilité du paramétrage de Langlands avec l'induction. Cette compatibilité est bien vérifiée par les représentations construites par Lusztig, cf., par exemple, [Waldspurger 2004, lemme 3.8].

En appliquant l'involution D, on déduit de (64) l'égalité

$$\delta(\lambda, s, \epsilon) = \mathrm{Ind}_P^{G_\sharp}(\delta^M),$$

où

$$\delta^M = (\chi_1 \circ \det) \otimes \cdots \otimes (\chi_t \circ \det) \otimes \delta(\lambda_0, s_0, \epsilon_0).$$

Puisqu'on suppose connu le théorème pour $\delta(\lambda_0, s_0, \epsilon_0)$ (et que les fronts d'onde des représentations des groupes $GL(m_j)$ sont bien connus), il résulte de (62) que $\delta(\lambda, s, \epsilon)$ admet un front d'onde et que

$$\mu(\delta(\lambda, s, \epsilon)) = \mathrm{ind}(\mu(\delta^M)).$$

Le front d'onde d'un caractère de $GL(m_j; F)$ est ${}^t(m_j)$, c'est-à-dire la partition composée de m_j fois le nombre 1. On a donc

$$\mu(\delta^M) = ({}^t(m_1), \dots, {}^t(m_t), d(\lambda_0)).$$

Posons $\boldsymbol{\lambda} = ((m_1), \dots, (m_t), \lambda_0)$. Avec les définitions de 1.8, cette dernière relation s'écrit $\mu(\delta^M) = d(\boldsymbol{\lambda})$ tandis que l'égalité (65) s'écrit $\lambda = \mathrm{cup}(\boldsymbol{\lambda})$. En appliquant le lemme 1.8, on obtient $\mathrm{ind}(\mu(\delta^M)) = d(\lambda)$. D'où $\mu(\delta(\lambda, s, \epsilon)) = d(\lambda)$, ce qui démontre le théorème.

3.5. ***Traduction de ce que l'on veut démontrer.*** On fixe désormais un élément $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ et on pose $\delta = \delta(\lambda, s, \epsilon)$. On note $\sharp$ l'indice tel que δ soit une représentation de $G_\sharp(F)$. On veut prouver que δ admet un front d'onde et que $\mu(\delta) = d(\lambda)$. Montrons qu'il suffit de prouver :

(66) Pour tout $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \in \mathbf{Nil}_\sharp$, la relation $\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) \neq 0$ entraîne $\mu(\mathcal{O}_1) \cup \mu(\mathcal{O}_2) \leq d(\lambda)$.

(67) Il existe $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \in \mathbf{Nil}_\sharp$ tel que $\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) \neq 0$ et $\mu(\mathcal{O}_1) \cup \mu(\mathcal{O}_2) = d(\lambda)$.

Comme on l'a dit en 3.2, on peut prendre pour voisinage $V(\delta)$ l'ensemble tout entier des éléments topologiquement unipotents. En particulier, le développement de 3.2 vaut pour toute fonction $f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$. D'après la définition de cette fonction, on a

$$\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp} c_{\mathcal{O}}(\delta) I_{\mathcal{O}}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}). \tag{68}$$

Soit $\mathcal{O}_0$ un élément maximal dans l'ensemble des $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_\sharp$ pour lesquels $c_{\mathcal{O}}(\delta) \neq 0$. Appliquons l'égalité (68) à une paire $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ telle que $\mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2} = \mathcal{O}_0$. En vertu de (59), il ne reste dans la somme que des $\mathcal{O}$ pour lesquels $\bar{\mathcal{O}}$ contient $\mathcal{O}_0$. Par maximalité de $\mathcal{O}_0$, il ne reste donc que $\mathcal{O}_0$. Le coefficient $c_{\mathcal{O}_0}(\delta)$ est non nul par hypothèse et l'intégrale orbitale $I_{\mathcal{O}_0}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})$ ne l'est pas par (60). Donc $\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) \neq 0$. D'où $\mu(\mathcal{O}_0) \leq d(\lambda)$ d'après (66). Ceci étant vrai pour tout élément maximal $\mathcal{O}_0$, c'est vrai pour tout élément : pour tout $\mathcal{O}$ tel que $c_{\mathcal{O}}(\delta) \neq 0$, on a $\mu(\mathcal{O}) \leq d(\lambda)$. En appliquant maintenant (68) pour une paire $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifiant (67), le même calcul montre que $c_{\mathcal{O}}(\delta) \neq 0$ pour l'orbite $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$. Pour cette orbite, on a $\mu(\mathcal{O}) = d(\lambda)$. Cela vérifie les propriétés requises pour que δ admette un front d'onde et que l'on ait $\mu(\delta) = d(\lambda)$.

3.6. ***Début du calcul.*** Fixons un couple $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \in \mathbf{Nil}_\sharp$, posons

$$\mu_1 = \mu(\mathcal{O}_1), \quad \mu_2 = \mu(\mathcal{O}_2), \quad S(\mu_1) = 2n_1 + 1, \quad S(\mu_2) = 2n_2.$$

Si $\sharp=$iso, on pose $W_{n_2,\mathrm{iso}}=W^D_{n_2}$. Si $\sharp=$an, auquel cas $n_2>0$, on note $W_{n_2,\mathrm{an}}=\{w\in W_{n_2};\ \mathrm{sgn}_{CD}(w)=-1\}$. On fixe des éléments nilpotents $Y_1\in\mathcal{O}_1$ et $Y_2\in\mathcal{O}_2$.

La formule (58) calcule $\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})$ en fonction de termes $\phi_{\alpha,\beta_1,\beta_2}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})$ pour $(\alpha,\beta_1,\beta_2)\in\mathcal{P}_3(n)$. On a calculé ce terme en [Waldspurger 2001, proposition 3.5]. On va rappeler ce résultat en modifiant quelque peu ses notations. Pour $w_1\in W_{n_1}$, on définit une certaine fonction $Q^\natural_{w_1}$ sur l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathrm{SO}(2n_1+1)(\mathbb{F}_q)$, cf. [Waldspurger 2001, VIII.13]. Elle est invariante par conjugaison par $\mathrm{SO}(2n_1+1)(\mathbb{F}_q)$ et ne dépend que de la classe de conjugaison de w_1. Pour $w_2\in W_{n_2,\sharp}$, on définit de même une fonction $Q^\natural_{w_2}$ sur l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathrm{SO}(2n_2)_\sharp(\mathbb{F}_q)$, cf. [Waldspurger 2001, VIII.13]. Elle est invariante par conjugaison par $\mathrm{SO}(2n_2)_\sharp(\mathbb{F}_q)$ et ne dépend que de la classe de conjugaison par $W^D_{n_2}$ de w_2.

Remarque. Dans le cas où $\sharp=$ an, la construction de [Waldspurger 2001] était un peu différente. On y avait fixé une certaine symétrie élémentaire $w_\phi\in W_{n_2,\mathrm{an}}$ et défini une fonction $Q^\natural_{w_2}$ indexée non pas par un élément $w_2\in W_{n_2,\mathrm{an}}$, mais par un élément $w_2\in W^D_{n_2}$. Cette fonction ne dépendait que de la classe de w_ϕ-conjugaison de w_2. Notre présente fonction $Q^\natural_{w_2}$ est la fonction $Q^\natural_{w_\phi w_2}$ de [Waldspurger 2001].

Notons $W(\alpha,\beta_1,\beta_2)$ l'ensemble des paires $(w_1,w_2)\in W_{n_1}\times W_{n_2,\sharp}$ vérifiant la condition suivante. Notons (α_1,β'_1) la paire de partitions paramétrant la classe de conjugaison de w_1 et (α_2,β'_2) celle qui paramètre la classe de conjugaison par W_{n_2} de w_2. Alors

$$\alpha=\alpha_1\cup\alpha_2,\quad \beta'_1=\beta_1,\quad \beta'_2=\beta_2.$$

Pour une telle paire (w_1,w_2), posons

$$[w_1,w_2]=\frac{z(\alpha)}{z(\alpha_1)z(\alpha_2)},$$

cf. 2.3 pour la définition de ces termes ;

- $\eta(w_1,w_2)=2$ si $n_2\geq 1$ et la classe de conjugaison de w_2 par W_{n_2} coïncide avec sa classe de conjugaison par $W^D_{n_2}$;
- $\eta(w_1,w_2)=1$ si $n_2=0$ ou si $n_2\geq 1$ et la classe de conjugaison de w_2 par W_{n_2} se coupe en deux classes de conjugaison par $W^D_{n_2}$.

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{W}(\alpha,\beta_1,\beta_2)$ des classes de conjugaison par $W_{n_1}\times W^D_{n_2}$ dans $W(\alpha,\beta_1,\beta_2)$.

La proposition IX.5 de [Waldspurger 2001] affirme alors l'existence d'un demi-entier $d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}$ (ne dépendant que de $(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2)$) de sorte que

$$\phi_{\alpha,\beta_1,\beta_2}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})=q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}}\sum_{(w_1,w_2)\in\mathcal{W}(\alpha,\beta_1,\beta_2)}\eta(w_1,w_2)[w_1,w_2]Q^\natural_{w_1}(Y_1)Q^\natural_{w_2}(Y_2).$$

Cette formule peut se simplifier. Pour $w_1\in W_{n_1}$, notons $Z(w_1)$ son centralisateur dans W_{n_1}. Pour $w_2\in W_{n_2}$, notons $Z^D(w_2)$ son centralisateur dans $W^D_{n_2}$. Le terme $Q^\natural_{w_1}(Y_1)Q^\natural_{w_2}(Y_2)$ ne dépendant que de la classe de conjugaison de (w_1,w_2) par $W_{n_1}\times W^D_{n_2}$, on peut remplacer la somme sur le système de représentants

$\mathcal{W}(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ par une somme sur $W(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, à condition de multiplier chaque terme indexé par (w_1, w_2) par l'inverse du nombre d'éléments de sa classe de conjugaison par $W_{n_1} \times W^D_{n_2}$. Cet inverse est égal à

$$|Z(w_1)|\,|Z^D(w_2)|\,|W_{n_1}|^{-1}\,|W^D_{n_2}|^{-1}.$$

D'autre part, soit $(w_1, w_2) \in W(\alpha, \beta_1, \beta_2)$. On vérifie l'égalité

$$z(\alpha, \beta_1, \beta_2)^{-1}\eta(w_1, w_2)[w_1, w_2] = |Z(w_1)|^{-1}|Z^D(w_2)|^{-1}.$$

La formule ci-dessus se récrit

$$z(\alpha, \beta_1, \beta_2)^{-1}\phi_{\alpha,\beta_1,\beta_2}(h_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}}|W_{n_1}|^{-1}|W^D_{n_2}|^{-1} \sum_{(w_1,w_2)\in W(\alpha,\beta_1,\beta_2)} Q^\natural_{w_1}(Y_1)Q^\natural_{w_2}(Y_2).$$

Reportons cette égalité dans la formule (58). On obtient

$$\begin{aligned}&\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})\\ &\quad = q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}}|W_{n_1}|^{-1}|W^D_{n_2}|^{-1} \sum_{(\alpha,\beta_1,\beta_2)\in\mathcal{P}_3(n)} \operatorname{sgn}(w_{\alpha,\beta_1,\beta_2})\kappa_{\delta,0}(w_{\alpha,\beta_1,\beta_2}) \sum_{(w_1,w_2)\in W(\alpha,\beta_1,\beta_2)} Q^\natural_{w_1}(Y_1)Q^\natural_{w_2}(Y_2).\end{aligned}$$

Sommer en $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ puis en $(w_1, w_2) \in W(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ revient à sommer sur tout $(w_1, w_2) \in W_{n_1} \times W_{n_2,\sharp}$. D'où

$$\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}}|W_{n_1}|^{-1}|W^D_{n_2}|^{-1} \sum_{(w_1,w_2)\in W_{n_1}\times W_{n_2,\sharp}} \operatorname{sgn}(w_1)\operatorname{sgn}(w_2)\kappa_{\delta,0}(w_1\times w_2)Q^\natural_{w_1}(Y_1)Q^\natural_{w_2}(Y_2).$$

Pour toute paire $(\rho_1, \rho_2) \in \widehat{W}_{n_1} \times \widehat{W}_{n_2}$, posons

$$m_\delta(\rho_1, \rho_2) = |W_{n_1}|^{-1}|W_{n_2}|^{-1} \sum_{(w_1,w_2)\in W_{n_1}\times W_{n_2}} \kappa_{\delta,0}(w_1, w_2)\rho_1(w_1)\rho_2(w_2).$$

Posons aussi

$$\chi^\natural_{\rho_1} = |W_{n_1}|^{-1}\sum_{w_1\in W_{n_1}} \rho_1(w_1)Q^\natural_{w_1} \quad \text{et} \quad \chi^\natural_{\rho_2,\sharp} = |W^D_{n_2}|^{-1}\sum_{w_2\in W_{n_2,\sharp}} \rho_2(w_2)Q^\natural_{w_2}.$$

Pour $(w_1, w_2) \in W_{n_1} \times W_{n_2}$, on a l'égalité

$$\operatorname{sgn}(w_1)\operatorname{sgn}(w_2)\kappa_{\delta,0}(w_1\times w_2) = \sum_{(\rho_1,\rho_2)\in\widehat{W}_{n_1}\times\widehat{W}_{n_2}} m_\delta(\rho_1\otimes\operatorname{sgn}, \rho_2\otimes\operatorname{sgn})\rho_1(w_1)\rho_2(w_2).$$

On obtient alors

$$\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}} \sum_{(\rho_1,\rho_2)\in\widehat{W}_{n_1}\times\widehat{W}_{n_2}} m_\delta(\rho_1\otimes\operatorname{sgn}, \rho_2\otimes\operatorname{sgn})\chi^\natural_{\rho_1}(Y_1)\chi^\natural_{\rho_2,\sharp}(Y_2). \tag{69}$$

Soit $(\mu_1, \eta_1) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_1+1)$. Supposons $k_{\mu_1,\eta_1} = 1$. On a défini en [Waldspurger 2001, VIII.13] une fonction $\chi^\natural_{\mu_1,\eta_1}$ sur l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{so}(2n_1+1)(\mathbb{F}_q)$. Il existe un demi-entier d_{μ_1,η_1}

tel que $\chi^{\natural}_{\mu_1,\eta_1} = q^{d_{\mu_1,\eta_1}} \chi^{\natural}_{\rho_{\mu_1,\eta_1}}$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_1+1; k=1)$ le sous-ensemble des $(\mu_1, \eta_1) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_1+1)$ tels que $k_{\mu_1,\eta_1} = 1$. Rappelons que l'application

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_1+1; k=1) \to \widehat{W}_{n_1}, \quad (\mu_1, \eta_1) \mapsto \rho_{\mu_1,\eta_1}$$

est bijective.

Soit $(\underline{\mu}_2, \eta_2) \in \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{\text{orth}}(2n_2)$, cf. 1.5. Supposons $k_{\mu_2,\eta_2} = 0$. On a défini en [Waldspurger 2001, VIII.13] une fonction $\chi^{\natural}_{\underline{\mu}_2,\eta_2,\sharp}$ sur l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{so}(2n_2)_{\sharp}(\mathbb{F}_q)$ (on a ajouté un indice $\sharp$ à la notation de [Waldspurger 2001]). Soit $(\mu_2, \eta_2) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2)$ tel que $k_{\mu_2,\eta_2} = 0$. Si μ_2 n'est pas exceptionnel, (μ_2, η_2) est aussi un élément de $\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{\text{orth}}(2n_2)$; la représentation ρ_{μ_2,ϵ_2} est définie ainsi que ses prolongements $\rho^{+}_{\mu_2,\epsilon_2}$ et $\rho^{-}_{\mu_2,\epsilon_2}$, cf. 1.12. La fonction $\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\sharp}$ est aussi définie. Si μ_2 est exceptionnel, auquel cas $\eta_2 = 1$, μ_2 se relève en les deux éléments $(\mu_2, +)$ et $(\mu_2, -)$ de $\underline{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2)$. Les représentations $\rho_{\mu_2,+,\eta_2}$ et $\rho_{\mu_2,-,\eta_2}$ sont définies. Les représentations $\rho^{+}_{\mu_2,+,\eta_2}$, $\rho^{-}_{\mu_2,+,\eta_2}$, $\rho^{+}_{\mu_2,-,\eta_2}$ et $\rho^{-}_{\mu_2,-,\eta_2}$ sont toutes égales. On note $\rho^{+}_{\mu_2,\eta_2} = \rho^{-}_{\mu_2,\eta_2}$ ce prolongement. On pose

$$\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\sharp} = \chi^{\natural}_{\mu_2,+,\eta_2,\sharp} + \chi^{\natural}_{\mu_2,-,\eta_2,\sharp}.$$

En tout cas, il existe un demi-entier d_{μ_2,η_2} tel que les égalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} &\text{si } \sharp = \text{iso}, \quad \chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\text{iso}} = q^{d_{\mu_2,\eta_2}} \chi^{\natural}_{\rho^{+}_{\mu_2,\eta_2},\text{iso}} = q^{d_{\mu_2,\eta_2}} \chi^{\natural}_{\rho^{-}_{\mu_2,\eta_2},\text{iso}}; \\ &\text{si } \sharp = \text{an}, \quad \chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\text{an}} = q^{d_{\mu_2,\eta_2}} \chi^{\natural}_{\rho^{+}_{\mu_2,\eta_2},\text{an}} = -q^{d_{\mu_2,\eta_2}} \chi^{\natural}_{\rho^{-}_{\mu_2,\eta_2},\text{an}}. \end{aligned}$$

Remarquons que, quand μ_2 est exceptionnel, on a $\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\text{an}} = 0$.

On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2; k=0)$ l'ensemble des $(\mu_2, \eta_2) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2)$ tels que $k_{\mu_2,\eta_2} = 0$. Rappelons que $\widehat{W}_{n_2}$ est réunion disjointe des ensembles $\{\rho^{+}_{\mu_2,\eta_2}, \rho^{-}_{\mu_2,\eta_2}\}$ pour $(\mu_2, \eta_2) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2; k=0)$ avec μ_2 non exceptionnel et des ensembles $\{\rho^{+}_{\mu_2,+,\eta_2}\} = \{\rho^{-}_{\mu_2,+,\eta_2}\} = \{\rho^{+}_{\mu_2,-,\eta_2}\} = \{\rho^{-}_{\mu_2,-,\eta_2}\}$ pour $(\mu_2, \eta_2) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2; k=0)$ avec μ_2 exceptionnel.

On pose

$$\boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{P}}^{\text{orth}}(n_1, n_2) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_1+1; k=1) \times \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\text{orth}}(2n_2; k=0)$$

pour abréger la notation. Pour $(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) \in \boldsymbol{\mathcal{P}\mathcal{P}}^{\text{orth}}(n_1, n_2)$, posons

— si $\sharp = \text{iso}$, $n_2 \neq 0$ et μ_2 n'est pas exceptionnel,

$$m_{\delta,\text{iso}}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) = m_{\delta}(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \text{sgn}, \rho^{+}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \text{sgn}) + m_{\delta}(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \text{sgn}, \rho^{-}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \text{sgn});$$

— si $\sharp = \text{an}$, $n_2 \neq 0$ et μ_2 n'est pas exceptionnel,

$$m_{\delta,\text{an}}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) = m_{\delta}(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \text{sgn}, \rho^{+}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \text{sgn}) - m_{\delta}(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \text{sgn}, \rho^{-}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \text{sgn});$$

— si $\sharp = \text{iso}$ et si $n_2 = 0$ ou μ_2 est exceptionnel

$$m_{\delta,\text{iso}}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) = \tfrac{1}{2}\big(m_{\delta}(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \text{sgn}, \rho^{+}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \text{sgn}) + m_{\delta}(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \text{sgn}, \rho^{-}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \text{sgn})\big);$$

— si $\sharp=$ an et μ_2 est exceptionnel

$$m_{\delta,\mathrm{an}}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)=0.$$

On voit alors que la formule (69) se récrit

$$\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}} \sum_{(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\in\mathcal{PP}^{\mathrm{orth}}(n_1,n_2)} q^{-d_{\mu_1,\eta_1}-d_{\mu_2,\eta_2}} m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\chi^{\natural}_{\mu_1,\eta_1}(Y_1)\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\sharp}(Y_2). \quad (70)$$

3.7. ***Traduction des conditions en termes de représentations de groupes de Weyl.*** Montrons qu'il nous suffit de prouver les deux assertions suivantes :

(71) Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ avec $n_1+n_2=n$ et $n_2\geq 1$ si $\sharp=$ an ; soient $(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\in\mathcal{PP}^{\mathrm{orth}}(n_1,n_2)$; supposons $m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$; alors $\mu_1\cup\mu_2\leq d(\lambda)$.

(72) Il existe $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ avec $n_1+n_2=n$ et $n_2\geq 1$ si $\sharp=$ an et il existe $(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\in\mathcal{PP}^{\mathrm{orth}}(n_1,n_2)$ tels que $m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$ et $\mu_1\cup\mu_2=d(\lambda)$.

Soit $(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2)\in\mathbf{Nil}_\sharp$. On en déduit des entiers n_1,n_2 comme en 3.6. Supposons $\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2})\neq 0$. La formule (70) implique qu'il existe $(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\in\mathcal{PP}^{\mathrm{orth}}(n_1,n_2)$ tel que

$$m_{\delta,\mathrm{iso}}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0 \quad \text{et} \quad \chi^{\natural}_{\mu_1,\eta_1}(Y_1)\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\sharp}(Y_2)\neq 0.$$

Or la fonction $\chi^{\natural}_{\mu_1,\eta_1}$ n'est non nulle que sur les orbites nilpotentes $\mathcal{O}'_1$ vérifiant $\mu(\mathcal{O}'_1)\leq\mu_1$, cf. [Waldspurger 2001, VIII.13]. Puisque $Y_1\in\mathcal{O}_1$, cela entraîne $\mu(\mathcal{O}_1)\leq\mu_1$. La fonction $\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta_2,\sharp}$ vérifie une propriété analogue. Donc $\mu(\mathcal{O}_2)\leq\mu_2$. Grâce à (71), on a aussi $\mu_1\cup\mu_2\leq d(\lambda)$. Donc $\mu(\mathcal{O}_1)\cup\mu(\mathcal{O}_2)\leq d(\lambda)$, ce qui vérifie la propriété (66).

Fixons des données vérifiant (72). Considérons la somme

$$\Psi=\sum_{\eta'_1,\eta'_2} q^{-d_{\mu_1,\eta_1}-d_{\mu_2,\eta_2}} m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta'_1;\mu_2,\eta'_2)\chi^{\natural}_{\mu_1,\eta'_1}\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta'_2,\sharp},$$

où η'_1 parcourt les éléments de $\{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu_1)}/\{\pm 1\}$ tels que $k(\mu_1,\eta'_1)=1$ et η'_2 parcourt les éléments de $\{\pm 1\}^{\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\mu_2)}/\{\pm 1\}$ tels que $k(\mu_2,\eta'_2)=1$. C'est une fonction invariante par conjugaison sur le produit des ensembles d'éléments nilpotents de $\mathfrak{so}(2n_1+1)(\mathbb{F}_q)$ et de $\mathfrak{so}(2n_2)_\sharp(\mathbb{F}_q)$. Notons $\mathcal{U}(\mu_1)$ la réunion des orbites nilpotentes $\mathcal{O}_1$ dans $\mathfrak{so}(2n_1+1)(\mathbb{F}_q)$ telles que $\mu(\mathcal{O}_1)=\mu_1$. Notons $\mathcal{U}(\mu_2)$ la réunion des orbites nilpotentes $\mathcal{O}_2$ dans $\mathfrak{so}(2n_2)_\sharp(\mathbb{F}_q)$ telles que $\mu(\mathcal{O}_2)=\mu_2$. Quand η'_1 décrit les éléments ci-dessus, les restrictions à $\mathcal{U}(\mu_1)$ des fonctions $\chi^{\natural}_{\mu_1,\eta'_1}$ sont linéairement indépendantes, cf. [Waldspurger 2001, VIII.13]. Quand η'_2 décrit les éléments ci-dessus, les restrictions à $\mathcal{U}(\mu_2)$ des fonctions $\chi^{\natural}_{\mu_2,\eta'_2,\sharp}$ sont elles aussi linéairement indépendantes (on doit remarquer que, si $\sharp=$ an, l'hypothèse $m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$ implique que μ_2 n'est pas exceptionnel). L'hypothèse $m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$ implique donc que la restriction de Ψ à $\mathcal{U}(\mu_1)\times\mathcal{U}(\mu_2)$ est non nulle. Fixons donc des orbites $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{O}_2\subset\mathcal{U}_2$ telles que Ψ soit non nulle sur $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$. On a $\mu(\mathcal{O}_1)\cup\mu(\mathcal{O}_2)=\mu_1\cup\mu_2=d(\lambda)$. Appliquons la formule (70) au couple $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$. Notons plutôt $(\mu'_1, \eta'_1; \mu'_2, \eta'_2)$ les termes indexant la somme de cette formule. Je dis que, si $(\mu'_1, \mu'_2) \neq (\mu_1, \mu_2)$, le terme

$$m_{\delta,\sharp}(\mu'_1, \eta'_1; \mu'_2, \eta'_2)\chi^{\natural}_{\mu'_1,\eta'_1}(Y_1)\chi^{\natural}_{\mu'_2,\eta'_2,\sharp}(Y_2)$$

est nul. En effet, la non-nullité des deux derniers termes entraîne comme plus haut les inégalités $\mu(\mathcal{O}_1) \leq \mu'_1$ et $\mu(\mathcal{O}_2) \leq \mu'_2$, c'est-à-dire $\mu_1 \leq \mu'_1$ et $\mu_2 \leq \mu'_2$. La non-nullité du premier terme entraîne $\mu'_1 \cup \mu'_2 \leq d(\lambda)$ d'après (71). Puisque $\mu_1 \cup \mu_2 = d(\lambda)$, les inégalités précédentes sont forcément des égalités. Donc $\mu'_1 = \mu_1$ et $\mu'_2 = \mu_2$, contrairement à l'hypothèse. Dans la somme de (70) ne restent donc que les $(\mu'_1, \eta'_1; \mu'_2, \eta'_2)$ pour lesquels $\mu'_1 = \mu_1$ et $\mu'_2 = \mu_2$. C'est-à-dire que l'on obtient

$$\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) = q^{d_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}}\Psi(Y_1, Y_2),$$

où $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. D'où $\Theta_\delta(f_{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2}) \neq 0$. Alors $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie (67).

3.8. ***Une description de*** **$\mathrm{Res}(\delta)$.** On a fixé $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\mathrm{tunip}}$ en 3.5. Nous supposons désormais que c'est un élément de $\mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad}}$, ce qui nous suffit d'après 3.4. On a montré en [Waldspurger 2018, §2.2] que cet ensemble s'identifiait à $\mathcal{P}_2^{\mathrm{symp}}(2n)$. On note $(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-)$ l'élément de cet ensemble auquel s'identifie (λ, s, ϵ). On a $\lambda = \lambda^+ \cup \lambda^-$ et cette décomposition est déterminée par l'élément s.

Notons $\mathfrak{n}(\lambda^+, \lambda^-)$ l'ensemble des couples de partitions symplectiques (ν^+, ν^-) vérifiant les conditions suivantes :

(73) (a) $\nu^+ \cup \nu^- = \lambda$;

(b) pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ impair, $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) = 0$;

(c) pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+) \cap \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)$, $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) \leq 2$;

(d) pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ tel que $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i) = 0$ ou $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) = 0$, $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) \leq 1$.

Notons $\mathfrak{N}(\lambda_1, \lambda_2)$ l'ensemble des quadruplets $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad}}$ tels que $(\nu^+, \nu^-) \in \mathfrak{n}(\lambda^+, \lambda^-)$. Fixons un tel quadruplet $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$. Soit $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$. On définit un nombre complexe $e(i)$ par les formules suivantes, où on pose par convention $\xi^+(i) = 1$ si $i \notin \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\nu^+)$ et $\xi^-(i) = 1$ si $i \notin \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\nu^-)$:

(74) (a) si $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) = 0$, $e(i) = \xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}$;

(b) si $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) = 1$, $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i) \geq 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) \geq 1$,

$$e(i) = \epsilon^-(i)\xi^-(i)\xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1} + \epsilon^+(i)\xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)};$$

(c) si $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) = 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i) = 0$, $e(i) = \epsilon^-(i)\xi^-(i)\xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1}$;

(d) si $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) = 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) = 0$, $e(i) = \epsilon^+(i)$;

(e) si $\mathrm{mult}_{\nu^-}(i) = 2$, $e(i) = \epsilon^+(i)\epsilon^-(i)\xi^-(i)\xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1}$.

On pose

$$e(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-; \nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) = 2^{-|\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)|-|\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)|} \prod_{i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)} e(i).$$

D'autre part, en [Waldspurger 2018, §1.11], on a associé à $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$ un élément de $\mathcal{R}$ que l'on a noté $j(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+,\xi^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\nu^-,\xi^-})$. Le terme j était un isomorphisme entre $\mathcal{R}$ et un autre espace. Distinguer ces deux espaces nous était alors utile. Ce ne l'est plus, on identifie l'espace en question à $\mathcal{R}$ grâce à l'isomorphisme j et on fait disparaître ce j de la notation.

Lemme. *On a l'égalité*

$$\kappa_\delta = \sum_{(\nu^+,\xi^+,\nu^-,\xi^-)\in\mathfrak{N}(\lambda^+,\lambda^-)} e(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-; \nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)\rho\iota(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+,\xi^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\nu^-,\xi^-}).$$

Preuve. Rappelons quelques notations de [Waldspurger 2018, §1.3]. On fixe un homomorphisme $\rho_\lambda : \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}(2n;\mathbb{C})$ paramétré par λ et on note $Z(\lambda)$ le commutant dans $\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{C})$ de son image. Le terme s appartient à $Z(\lambda)$ et vérifie $s^2 = 1$. On note $Z(\lambda, s)$ le commutant de s dans $Z(\lambda)$, $\boldsymbol{Z}(\lambda, s)$ son groupe des composantes connexes et $\boldsymbol{Z}(\lambda, s)^\vee$ le groupe des caractères de $\boldsymbol{Z}(\lambda, s)$. On a $\epsilon \in \boldsymbol{Z}(\lambda, s)^\vee$. Considérons un sous-ensemble $H \subset Z(\lambda, s)$ qui s'envoie bijectivement sur $\boldsymbol{Z}(\lambda, s)$ et est formé d'éléments h vérifiant $h^2 = 1$. Pour $h \in H$, le triplet (λ, s, h) appartient à l'ensemble $\mathfrak{End}_{\text{unip-quad}}$ de [Waldspurger 2018, §2.2]. Il lui est associé une représentation virtuelle

$$\Pi(\lambda, s, h) = \sum_{\epsilon'\in\boldsymbol{Z}(\lambda,s)^\vee} \pi(\lambda, s, \epsilon')\epsilon'(h). \tag{75}$$

Par inversion de Fourier dans le groupe $\boldsymbol{Z}(\lambda, s)$, on a

$$\pi(\lambda, s, \epsilon) = |\boldsymbol{Z}(\lambda, s)|^{-1} \sum_{h\in H} \Pi(\lambda, s, h)\epsilon(h).$$

On applique $\mathrm{Res} \circ D$ à cette égalité :

$$\mathrm{Res}(\delta) = |\boldsymbol{Z}(\lambda, s)|^{-1} \sum_{h\in H} \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, s, h)\epsilon(h).$$

Utilisons l'involution $\mathcal{F}^{\text{par}}$ de [Waldspurger 2018, §1.9]. Puisque, justement, c'est une involution, on peut composer à gauche le membre de droite ci-dessus par $\mathcal{F}^{\text{par}} \circ \mathcal{F}^{\text{par}}$. Le théorème 2.7 de [Waldspurger 2018] n'est plus conditionnel puisqu'on a démontré en [Waldspurger 2016b] le théorème 2.1 de [Waldspurger 2018]. Il nous dit que $\mathcal{F}^{\text{par}} \circ \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, s, h) = \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, h, s)$. D'où

$$\mathrm{Res}(\delta) = |\boldsymbol{Z}(\lambda, s)|^{-1} \sum_{h\in H} \mathcal{F}^{\text{par}} \circ \mathrm{Res} \circ D \circ \Pi(\lambda, h, s)\epsilon(h).$$

On peut encore développer le membre de droite en utilisant (75) où l'on échange s et h :

$$\mathrm{Res}(\delta) = |\boldsymbol{Z}(\lambda, s)|^{-1} \sum_{h\in H} \sum_{\xi\in\boldsymbol{Z}(\lambda,h)^\vee} \mathcal{F}^{\text{par}} \circ \mathrm{Res} \circ D(\pi(\lambda, h, \xi))\xi(s)\epsilon(h). \tag{76}$$

L'ensemble $\mathfrak{End}_{\text{unip-quad}}$ s'identifie à $\mathcal{P}_4^{\text{symp}}(2n)$. Plus précisément, les éléments de $\mathfrak{End}_{\text{unip-quad}}$ de la forme (λ, s, h) (c'est-à-dire dont les deux premiers termes sont nos éléments fixés λ et s) s'identifient aux quadruplets $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--}) \in \mathcal{P}_4^{\text{symp}}(2n)$ tels que $\lambda^{++} \cup \lambda^{+-} = \lambda^+$ et $\lambda^{-+} \cup \lambda^{--} = \lambda^-$. Si

(λ, s, h) correspond ainsi à $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--})$, l'image de h dans

$$\boldsymbol{Z}(\lambda, s) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda^+)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda^-)}$$

est

$$(\mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i))_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda^+)} \times (\mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i))_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda^-)}, \tag{77}$$

où il s'agit en fait des images des multiplicités dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On voit que l'on peut choisir H de sorte que l'ensemble des (λ, s, h) pour $h \in H$ s'identifie à l'ensemble des quadruplets satisfaisant les conditions ci-dessus et de plus : $\mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i) \leq 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i) \leq 1$ pour tout i. On peut évidemment renforcer des inégalités en $\mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i) \leq \inf(1, \mathrm{mult}_{\lambda^+}(i))$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i) \leq \inf(1, \mathrm{mult}_{\lambda^-}(i))$ (par exemple, $\mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i) \leq \mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)$ puisque $\lambda^+ = \lambda^{++} \cup \lambda^{+-}$). On choisit ainsi l'ensemble H. Pour tout $h \in H$, continuons à noter $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--})$ le quadruplet associé à (λ, s, h) et posons $\nu^+ = \lambda^{++} \cup \lambda^{-+}$, $\nu^- = \lambda^{+-} \cup \lambda^{--}$. Le couple (ν^+, ν^-) appartient à notre ensemble $\mathfrak{n}(\lambda^+, \lambda^-)$. Le groupe $\boldsymbol{Z}(\lambda, h)$ s'identifie à

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Jord_{bp}}(\nu^+)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Jord_{bp}}(\nu^-)}$$

et un élément $\xi \in \boldsymbol{Z}(\lambda, h)^\vee$ s'identifie à un couple (ξ^+, ξ^-). Le quadruplet $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$ appartient à $\mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)$. Mais l'application $h \mapsto (\nu^+, \nu^-)$ n'est pas injective (h est une classe de conjugaison par $Z(\lambda, s)$ et (ν^+, ν^-) paramètre sa classe de conjugaison par $Z(\lambda)$). L'égalité (76) se récrit

$$\mathrm{Res}(\delta) = \sum_{(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)} f(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \mathcal{F}^{\mathrm{par}} \circ \mathrm{Res} \circ D(\pi(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)),$$

où :

— pour (λ, h, ξ) correspondant à $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$, on a noté $\pi(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) = \pi(\lambda, h, \xi)$;

— $f(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$ est la somme des $|\boldsymbol{Z}(\lambda, s)|^{-1} \epsilon(h) \xi(s)$ sur les $h \in H$ d'image (ν^+, ν^-).

Pour $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)$, on a

$$\mathrm{Res} \circ D(\pi(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)) = \mathrm{Rep} \circ \rho\iota(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+, \xi^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\nu^-, \xi^-})$$

d'après la proposition 1.11 de [Waldspurger 2018]. On a aussi $\mathcal{F}^{\mathrm{par}} \circ \mathrm{Rep} = k$, cf. [Waldspurger 2018, §1.9]. Donc

$$\mathrm{Res}(\delta) = \sum_{(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)} f(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) k \circ \rho\iota(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+, \xi^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\nu^-, \xi^-}).$$

Puisque κ_δ est l'élément de $\mathcal{R}$ tel que $\mathrm{Res}(\delta) = k(\kappa_\delta)$, on obtient la formule de l'énoncé, à condition de prouver l'égalité

$$f(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) = e(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-; \nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \quad \text{pour tout } (\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-).$$

Fixons donc $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)$. On compare tout de suite le facteur $|\boldsymbol{Z}(\lambda, s)|^{-1}$ figurant dans la définition de $f(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$ avec le facteur $2^{-|\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda^+)| - |\mathrm{Jord_{bp}}(\lambda^-)|}$ figurant dans celle de $e(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-; \nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$: ils sont égaux. On note f le terme $f(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-)$ privé de ce facteur et on doit prouver que $f = \prod_{i \in \mathrm{Jord_{bp}}(\lambda)} e(i)$, avec les notations précédant l'énoncé. Soit $h \in H$

d'image (ν^+, ν^-). Notons encore $(\lambda^{++}, \lambda^{-+}, \lambda^{+-}, \lambda^{--})$ le quadruplet associé à (λ, s, h). D'après (77), on a

$$\epsilon(h) = \Bigg(\prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)} \epsilon^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i)}\Bigg)\Bigg(\prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)} \epsilon^-(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i)}\Bigg).$$

On simplifie cette égalité en

$$\epsilon(h) = \prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)} \epsilon^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i)} \epsilon^-(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i)},$$

avec la convention $\epsilon^+(i) = 1$ si $i \notin \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)$ et $\epsilon^-(i) = 1$ pour $i \notin \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)$. Le quadruplet associé à (λ, h, s) est $(\lambda^{++}, \lambda^{+-}, \lambda^{-+}, \lambda^{--})$. Le couple (ξ^+, ξ^-) s'identifie à un élément de $\boldsymbol{Z}(\lambda, h)^\vee$ et on a la formule similaire (avec une convention analogue) :

$$\xi(s) = \prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)} \xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^{-+}}(i)} \xi^-(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i)}.$$

Posons simplement $m^+(i) = \mathrm{mult}_{\lambda^{+-}}(i)$ et $m^-(i) = \mathrm{mult}_{\lambda^{--}}(i)$. On a $\mathrm{mult}_{\lambda^{-+}}(i) = \mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) - m^-(i)$ et on obtient

$$\epsilon(h)\xi(s) = \prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)} \epsilon^+(i)^{m^+(i)} \epsilon^-(i)^{m^-(i)} \xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) - m^-(i)} \xi^-(i)^{m^-(i)}.$$

Pour $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$, notons $E(i)$ l'ensemble des couples $(m^+, m^-) \in \{0, 1\}^2$ tels que

$$m^+ \le \inf(1, \mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)) \quad \text{et} \quad m^- \le \inf(1, \mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)); \qquad m^+ + m^- = \mathrm{mult}_{\nu^-}(i).$$

L'application

$$h \mapsto (m^+(i), m^-(i))_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)}$$

identifie l'ensemble des $h \in H$ d'image (ν^+, ν^-) avec $\prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)} E(i)$. On voit alors que $f = \prod_{i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)} f_i$, où, pour $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$, on a posé

$$f_i = \sum_{(m^+, m^-) \in E(i)} \epsilon^+(i)^{m^+} \epsilon^-(i)^{m^-} \xi^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) - m^-} \xi^-(i)^{m^-}.$$

Il reste à démontrer l'égalité $f_i = e_i$ pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$. C'est un calcul élémentaire que l'on effectue en distinguant chacun des cas (74)(a) à (74)(e). On le laisse au lecteur. □

3.9. ***Preuve de* (71).** On fixe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 + n_2 = n$ et $n_2 \ge 1$ si $\sharp = \mathrm{an}$. On fixe $(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) \in \mathcal{P}\mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(n_1, n_2)$ et on suppose $m_{\delta,\sharp}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) \ne 0$. D'après la définition de $m_{\delta,\sharp}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) \ne 0$, on peut fixer $\zeta' = \pm$ tel que $m_\delta(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \mathrm{sgn}, \rho^{\zeta'}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}) \ne 0$.

On a défini en les paragraphes 1.4 et 1.5 les partitions spéciales $\mathrm{sp}(\mu_1, \eta_1)$ et $\mathrm{sp}(\mu_2, \eta_2)$. D'après les résultats de ces paragraphes, on a

$$\mu_1 \le \mathrm{sp}(\mu_1, \eta_1), \quad \mu_2 \le \mathrm{sp}(\mu_2, \eta_2). \tag{78}$$

Le symbole associé à ρ_{μ_1,η_1} appartient à la famille de $\mathrm{sp}(\mu_1, \eta_1)$. Posons $\lambda_1 = d(\mathrm{sp}(\mu_1, \eta_1))$ et $\rho_1 = \rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \mathrm{sgn}$. D'après 1.6, le symbole associé à ρ_1 appartient à la famille de λ_1. Posons $\lambda_2 = d(\mathrm{sp}(\mu_2, \eta_2))$

et $\rho_2 = \rho_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}$ si μ_2 n'est pas exceptionnel. Si μ_2 est exceptionnel, on relève μ_2 en un élément $\underline{\mu}_2$ de $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n_2)$ et on pose $\rho_2 = \rho_{\underline{\mu}_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}$. On a de même : le symbole associé à ρ_2 appartient à la famille de λ_2. La représentation $\rho^{\zeta'}_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}$ est l'un des prolongements de ρ_2 à W_{n_2} donc est de la forme ρ_2^{ζ} pour un $\zeta = \pm$ (on n'a pas en général $\zeta = \zeta'$ mais peu importe). On a donc $m_\delta(\rho_1, \rho_2^{\zeta}) \neq 0$. Rappelons que ce terme est la "multiplicité" de $\rho_1 \otimes \rho_2^{\zeta}$ dans $\kappa_{\delta,0}$. La fonction κ_δ est calculée par le lemme 3.8 (rappelons que l'on suppose $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad}}$). La fonction $\kappa_{\delta,0}$ est calculée par une formule analogue, où l'on se restreint aux $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)$ tels que $k_{\nu^+,\xi^+} = k_{\nu^-,\xi^-} = 0$. Notons ce sous-ensemble $\mathfrak{N}_0(\lambda^+, \lambda^-)$. D'après ce lemme, on peut fixer un élément $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}_0(\lambda^+, \lambda^-)$ tel que la multiplicité de $\rho_1 \otimes \rho_2^{\zeta}$ dans $\rho\iota(\boldsymbol{\rho}_{\nu^+,\xi^+} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\nu^-,\xi^-})$ est non nulle. On sait que la représentation $\boldsymbol{\rho}_{\nu^+,\xi^+}$ est de la forme

$$\boldsymbol{\rho}_{\nu^+,\xi^+} = \sum_{\dot\nu^+,\dot\xi^+} c(\nu^+, \xi^+; \dot\nu^+, \dot\xi^+)\rho_{\dot\nu^+,\dot\xi^+},$$

où $(\dot\nu^+, \dot\xi^+)$ parcourt les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(S(\nu^+))$ tels que $k_{\dot\nu^+,\dot\xi^+} = 0$. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(S(\nu^+); k = 0)$ l'ensemble de ces éléments. Le coefficient $c(\nu^+, \xi^+; \dot\nu^+, \dot\xi^+)$ n'est non nul que si $\nu^+ \leq \dot\nu^+$. De mêmes propriétés valent pour $\boldsymbol{\rho}_{\nu^-,\xi^-}$. On peut donc fixer $(\dot\nu^+, \dot\xi^+) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(S(\nu^+); k = 0)$ et $(\dot\nu^-, \dot\xi^-) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{symp}}(S(\nu^-); k = 0)$ tels que

$$\nu^+ \leq \dot\nu^+, \quad \nu^- \leq \dot\nu^-, \tag{79}$$

et la multiplicité de $\rho_1 \otimes \rho_2^{\zeta}$ dans $\rho\iota(\rho_{\dot\nu^+,\dot\xi^+} \otimes \rho_{\dot\nu^-,\dot\xi^-})$ soit non nulle. Cette multiplicité est exactement le terme $m(\rho_1, \rho_2^{\zeta}; \rho_{\dot\nu^+,\dot\xi^+}, \rho_{\dot\nu^-,\dot\xi^-})$ défini en 1.12. D'après la proposition de ce paragraphe, la non-nullité de cette multiplicité entraîne

$$\dot\nu^+ \cup \dot\nu^- \leq \mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2). \tag{80}$$

Par définition de $\mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)$, on a $\nu^+ \cup \nu^- = \lambda$. Les inégalités (79) et (80) entraînent $\lambda \leq \mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2)$ d'où aussi $d(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2)) \leq d(\lambda)$ puisque la dualité est décroissante. On applique la proposition 1.9 : $d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) \leq d(\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2))$, d'où aussi $d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) \leq d(\lambda)$. Or $d(\lambda_1) = \mathrm{sp}(\mu_1, \eta_1)$ et $d(\lambda_2) = \mathrm{sp}(\mu_2, \eta_2)$ par définition. En utilisant les inégalités (78), on en déduit $\mu_1 \cup \mu_2 \leq d(\lambda)$, ce qui démontre (71).

3.10. ***Preuve de* (72).** On a supposé $(\lambda, s, \epsilon) \in \mathfrak{Irr}_{\text{unip-quad}}$. Maintenant, on suppose de plus que les termes de λ sont tous pairs. C'est loisible d'après 3.4.

On fixe une fonction $\tau : \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vérifiant les conditions suivantes :

(81) (a) Pour $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ tel que $\mathrm{mult}_\lambda(i) = 1$, $\tau(i) = 0$.

(b) Pour $i \in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+) \cap \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)$, $(-1)^{\tau(i)} = \epsilon^+(i)\epsilon^-(i)$.

Remarquons que les deux cas sont exclusifs : dans le cas (b), on a $\mathrm{mult}_\lambda(i) \geq 2$.

Appliquant la proposition 1.11, on introduit des entiers $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et des partitions $\lambda_1 \in \mathcal{P}^{\mathrm{symp,sp}}(2n_1)$, $\lambda_2 \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth,sp}}(2n_2)$ telles que λ_1 et λ_2 induisent régulièrement λ, $d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) = d(\lambda)$ et $\tau_{\lambda_1,\lambda_2} = \tau$. On fixe des couples (τ_1, δ_1) et (τ_2, δ_2) paramétrant des symboles (X_1, Y_1) dans la famille de λ_1 et $(X_2, , Y_2)$ dans la famille de λ_2, avec $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 0$. On pose $\mu_1 = d(\lambda_1)$, $\mu_2 = d(\lambda_2)$. Ce sont des partitions spéciales. Le symbole $d(X_1, Y_1)$ appartient à la famille de μ_1 et est paramétré par un couple (τ'_1, δ'_1) tel que $\delta'_1 = 0$. D'après le lemme 1.4, c'est le symbole de la représentation ρ_{μ_1,η_1} pour un couple $(\mu_1, \eta_1) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n_1 + 1; k = 1)$. Le symbole $d(X_2, Y_2)$ appartient à la famille de μ_2 et est paramétré par un couple (τ'_2, δ'_2) tel que $\delta'_2 = 0$. Supposons μ_2 non exceptionnel. D'après le lemme 1.5, $d(X_2, Y_2)$ est le symbole de la représentation ρ_{μ_2,η_2} pour un couple $(\mu_2, \eta_2) \in \mathcal{P}^{\mathrm{orth}}(2n_2; k = 0)$. Dans le cas où μ_2 est exceptionnel, on a de même un couple (μ_2, η_2) mais la représentation ρ_{μ_2,η_2} doit être remplacée par $\rho_{\underline{\mu}_2,\eta_2}$, où $\underline{\mu}_2$ est l'un des relèvements de μ_2 dans $\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{orth}}(2n_2)$. On va montrer que le quadruplet $(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2)$ vérifie la condition (72).

Tout d'abord, on a $\mu_1 \cup \mu_2 = d(\lambda_1) \cup d(\lambda_2) = d(\lambda)$.

On veut prouver que $m_{\delta,\sharp}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2) \neq 0$. Posons $\mathrm{sgn}_\sharp = 1$ si $\sharp = \mathrm{iso}$, $\mathrm{sgn}_\sharp = -1$ si $\sharp = \mathrm{an}$. Le terme $m_{\delta,\sharp}(\mu_1, \eta_1; \mu_2, \eta_2)$ est égal à

$$m_\delta(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \mathrm{sgn}, \rho^+_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}) + \mathrm{sgn}_\sharp\, m_\delta(\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \mathrm{sgn}, \rho^-_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}), \tag{82}$$

éventuellement divisé par $\frac{1}{2}$. La représentation $\rho_{\mu_1,\eta_1} \otimes \mathrm{sgn}$ n'est autre que la représentation ρ_1 de W_{n_1} dont le symbole est (X_1, Y_1). Les représentations $\rho^+_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}$ et $\rho^-_{\mu_2,\eta_2} \otimes \mathrm{sgn}$ sont les prolongements (éventuellement égaux) à W_{n_2} d'une représentation $\rho_2 \in W^D_{n_2}$ dont le symbole est (X_2, Y_2). Le terme (82) est égal, au signe près, à

$$m_\delta(\rho_1, \rho_2^+) + \mathrm{sgn}_\sharp\, m_\delta(\rho_1, \rho_2^-). \tag{83}$$

Soit $\zeta = \pm$. En reprenant la preuve du paragraphe précédent, on calcule

$$\begin{aligned} &m_\delta(\rho_1, \rho_2^\zeta) \\ &\quad = \sum_{(\nu^+,\xi^+,\nu^-,\xi^-)\in\mathfrak{N}_0(\lambda^+,\lambda^-)} e(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-; \nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \\ &\qquad\qquad \times \sum_{(\dot\nu^+,\dot\xi^+)\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(S(\nu^+);k=0)} \; \sum_{(\dot\nu^-,\dot\xi^-)\in\mathcal{P}^{\mathrm{symp}}(S(\nu^-);k=0)} c(\nu^+, \xi^+; \dot\nu^+, \dot\xi^+) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \times c(\nu^-, \xi^-; \dot\nu^-, \dot\xi^-) m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\dot\nu^+,\dot\xi^+}, \rho_{\dot\nu^-,\dot\xi^-}). \end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe précédent, la non-nullité du terme que l'on somme entraîne les inégalités (79) et (80) de ce paragraphe. On a $\nu^+ \cup \nu^- = \lambda$ et, ici, on sait par hypothèse que $\mathrm{ind}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$. Ces inégalités (79) et (80) sont donc des égalités. Maintenant que $\nu^+ = \dot\nu^+$, on sait que la relation $c(\nu^+, \xi^+; \dot\nu^+, \dot\xi^+) \neq 0$ équivaut à $\dot\xi^+ = \xi^+$ et que, si elle est vérifiée, on a $c(\nu^+, \xi^+; \dot\nu^+, \dot\xi^+) = 1$. De même bien sûr pour les objets associés à ν^-. Cela nous débarrasse des sommes en $(\dot\nu^+, \dot\xi^+)$ et $(\dot\nu^-, \dot\xi^-)$ et des coefficients $c(\nu^+, \xi^+; \dot\nu^+, \dot\xi^+)$ et $c(\nu^-, \xi^-; \dot\nu^-, \dot\xi^-)$. On a simplement

$$m_\delta(\rho_1, \rho_2^\zeta) = \sum_{(\nu^+,\xi^+,\nu^-,\xi^-)\in\mathfrak{N}_0(\lambda^+,\lambda^-)} e(\lambda^+, \epsilon^+, \lambda^-, \epsilon^-; \nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\nu^+,\xi^+}, \rho_{\nu^-,\xi^-}).$$

Les éléments $(\nu^+, \xi^+, \nu^-, \xi^-) \in \mathfrak{N}_0(\lambda^+, \lambda^-)$ pour lesquels $m(\rho_1, \rho_2^\zeta; \rho_{\nu^+,\xi^+}, \rho_{\nu^-,\xi^-}) \neq 0$ sont exactement les éléments de $\mathfrak{N}(\lambda^+, \lambda^-)$ qui vérifient l'hypothèse $(\mathrm{B})^\zeta$ de 1.13. D'après la proposition de ce paragraphe, ce sont aussi les éléments de $\mathfrak{N}(\lambda^+,\lambda^-)$ qui vérifient $(A)^\zeta$ et, pour ces éléments, on a $m(\rho_1,\rho_2^\zeta;\rho_{\nu^+,\xi^+},\rho_{\nu^-,\xi^-})=1$. La condition $(A)^\zeta$ se décompose en deux :

$$\text{pour } i\in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda),\quad \mathrm{mult}_{\nu^-}(i)\equiv c^\zeta(i), \tag{84}$$

où on a posé $c^\zeta(i)=\delta^{-\zeta}(i)-\delta^{-\zeta}(i^+)$;

$$\text{pour } i\in \mathrm{Jord}_{bp}(\nu^+),\quad \xi^+(i)=(-1)^{\tau^\zeta(i)};\qquad \text{pour } i\in \mathrm{Jord}_{bp}(\nu^-),\quad \xi^-(i)=(-1)^{\tau^{-\zeta}(i)}. \tag{85}$$

Notons $\mathfrak{n}^\zeta(\lambda_1,\lambda_2)$ l'ensemble des $(\nu^+,\nu^-)\in\mathfrak{n}(\lambda_1,\lambda_2)$ vérifiant la condition (84). Dans la suite du calcul, pour $(\nu^+,\nu^-)\in\mathfrak{n}^\zeta(\lambda_1,\lambda_2)$, notons (ξ^+,ξ^-) le couple déterminé par la condition (85). On obtient

$$m_\delta(\rho_1,\rho_2^\zeta)=\sum_{(\nu^+,\nu^-)\in\mathfrak{n}^\zeta(\lambda^+,\lambda^-)} e(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-;\nu^+,\xi^+,\nu^-,\xi^-). \tag{86}$$

Soit $i\in\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$. Définissons un ensemble $M^\zeta(i)$ par les égalités suivantes :
— si $c^\zeta(i)=1$, $M^\zeta(i)=\{1\}$;
— si $c^\zeta(i)=0$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)=0$, $M^\zeta(i)=\{0\}$;
— si $c^\zeta(i)=0$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\neq 0$, $M^\zeta(i)=\{0,2\}$.

On vérifie à l'aide de la définition de 3.8 et de la relation (84) ci-dessus que l'application $(\nu^+,\nu^-)\mapsto(\mathrm{mult}_{\nu^-}(i))_{i\in\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)}$ est une bijection de $\mathfrak{n}^\zeta(\lambda^+,\lambda^-)$ sur $\prod_{i\in\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)}M^\zeta(i)$.

Soit $i\in\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$ et $m\in M^\zeta(i)$. Définissons un nombre $e^\zeta(i,m)$ par les égalités suivantes :

(87) (a) $e^\zeta(i,0)=(-1)^{\tau^\zeta(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}$;

(b) si $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\neq 0$,

$$e^\zeta(i,1)=\epsilon^+(i)(-1)^{\tau^\zeta(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}+\epsilon^-(i)(-1)^{\tau^{-\zeta}(i)+\tau^\zeta(i)(\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1)};$$

(c) si $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)=0$, $e^\zeta(i,1)=\epsilon^-(i)(-1)^{\tau^{-\zeta}(i)+\tau^\zeta(i)(\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1)}$;

(d) si $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)=0$, $e^\zeta(i,1)=\epsilon^+(i)$;

(e) $e^\zeta(i,2)=\epsilon^+(i)\epsilon^-(i)(-1)^{\tau^{-\zeta}(i)+\tau^\zeta(i)(\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1)}$.

Pour $(\nu^+,\nu^-)\in\mathfrak{n}^\zeta(\lambda^+,\lambda^-)$, on vérifie à l'aide de la définition de 3.8 et de la relation (85) ci-dessus que l'on a l'égalité

$$e(\lambda^+,\epsilon^+,\lambda^-,\epsilon^-;\nu^+,\xi^+,\nu^-,\xi^-)=2^{-|\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda^+)|-|\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda^-)|}\prod_{i\in\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)} e^\zeta(i,\mathrm{mult}_{\nu^-}(i)).$$

La relation (86) se transforme en

$$m_\delta(\rho_1,\rho_2^\zeta)=2^{-|\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda^+)|-|\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda^-)|}\prod_{i\in\mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)} S^\zeta(i), \tag{88}$$

où on a posé

$$S^\zeta(i)=\sum_{m\in M^\zeta(i)} e^\zeta(i,m).$$

Fixons $i \in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$ et calculons $S^{\zeta}(i)$. Remarquons qu'en vertu de la condition (81)(b) ci-dessus, de l'égalité $\tau = \tau_{\lambda_1,\lambda_2}$ et de la remarque (1) de 1.13, on a l'égalité

$$(-1)^{\tau^+(i)+\tau^-(i)} = \epsilon^+(i)\epsilon^-(i) \quad \text{si} \;\; \mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) \neq 0. \tag{89}$$

La définition des termes $e^{\zeta}(i,m)$ se simplifie alors dans les deux cas suivants :

si $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) \neq 0$, $\quad e^{\zeta}(i,1) = 2\epsilon^+(i)(-1)^{\tau^{\zeta}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}$; $\qquad e^{\zeta}(i,2) = (-1)^{\tau^{\zeta}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}$.

On calcule alors :

(90) (a) si $c^{\zeta}(i) = 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) = 0$, $S^{\zeta}(i) = \epsilon^+(i)$;

(b) si $c^{\zeta}(i) = 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i) = 0$, $S^{\zeta}(i) = \epsilon^-(i)(-1)^{\tau^{-\zeta}(i)+\tau^{\zeta}(i)(\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)-1)}$;

(c) si $c^{\zeta}(i) = 1$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) \neq 0$, $S^{\zeta}(i) = 2\epsilon^+(i)(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^{\zeta}(i)}$;

(d) si $c^{\zeta}(i) = 0$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) = 0$, $S^{\zeta}(i) = (-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^{\zeta}(i)}$;

(e) si $c^{\zeta}(i) = 0$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) \neq 0$, $S^{\zeta}(i) = 2(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^{\zeta}(i)}$.

On voit que $S^{\zeta}(i)$ est non nul pour tout i. On déduit de (88) que $m_{\delta}(\rho_1, \rho_2^{\zeta}) \neq 0$. Mais cela ne suffit pas à prouver que l'expression (83) est non nulle. Pour cela, montrons que, pour tout $i \in \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda)$, on a l'égalité

$$S^-(i) = \epsilon^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)}\epsilon^-(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}S^+(i), \tag{91}$$

où, pour simplifier les notations, on a posé $\epsilon^+(i) = 1$ si $i \notin \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda^+)$ et $\epsilon^-(i) = 1$ si $i \notin \mathrm{Jord}_{bp}(\lambda^-)$. La vérification de cette assertion se fait cas par cas. Traitons seulement le cas où $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i) \neq 0$. D'après la définition de $c^{\zeta}(i)$ et la remarque (2) de 1.13, on a la relation $c^+(i)+c^-(i) \equiv \mathrm{mult}_{\lambda}(i) \mod 2\mathbb{Z}$. Supposons d'abord $\mathrm{mult}_{\lambda}(i)$ pair. Alors $c^+(i) = c^-(i)$. Si ces deux nombres valent 1, on a d'après (90)(c)

$$S^+(i) = 2\epsilon^+(i)(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^+(i)}, \quad S^-(i) = 2\epsilon^+(i)(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^-(i)}.$$

D'où $S^-(i) = (-1)^{(\tau^+(i)+\tau^-(i))\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}S^+(i)$. En vertu de (89), cela équivaut

$$S^-(i) = \epsilon^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}\epsilon^-(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}S^+(i).$$

Mais, puisque $\mathrm{mult}_{\lambda}(i)$ est pair, $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)$ sont de même parité et l'égalité précédente coïncide avec (91). Si $c^+(i) = c^-(i) = 0$, on a d'après (90)(e)

$$S^+(i) = 2(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^+(i)}, \quad S^-(i) = 2(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^-(i)},$$

d'où encore $S^-(i) = \epsilon^+(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}\epsilon^-(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}S^+(i)$ et la même conclusion. Supposons maintenant $\mathrm{mult}_{\lambda}(i)$ impair. Alors $c^+(i) \neq c^-(i)$. Soit $\zeta = \pm$ tel que $c^{\zeta}(i) = 1$ et $c^{-\zeta}(i) = 0$. D'après (90)(c) et (90)(e), on a

$$S^{\zeta}(i) = 2\epsilon^+(i)(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^{\zeta}(i)}, \quad S^{-\zeta}(i) = 2(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\tau^{-\zeta}(i)}.$$

D'où

$$S^{\zeta}(i) = \epsilon^+(i)(-1)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)(\tau^+(i)+\tau^-(i))}S^{-\zeta}(i),$$

ou encore, d'après (89) :

$$S^{\zeta}(i)=\epsilon^{+}(i)(\epsilon^{+}(i)\epsilon^{-}(i))^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}S^{-\zeta}(i)=\epsilon^{+}(i)^{1+\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}\epsilon^{-}(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}S^{-\zeta}(i).$$

Mais $\mathrm{mult}_{\lambda}(i)$ est impair donc $1+\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)$ est de la même parité que $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)$. L'égalité précédente coïncide avec (91). Cela démontre (91) dans le cas où $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)\neq 0$. On laisse les autres cas au lecteur.

En vertu de (88) et (91), on a l'égalité

$$m_{\delta}(\rho_1,\rho_2^+)=cm_{\delta}(\rho_1,\rho_2^-), \tag{92}$$

où

$$c=\Big(\prod_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)}\epsilon^{+}(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)}\Big)\Big(\prod_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)}\epsilon^{-}(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}\Big).$$

Mais on a vu en [Waldspurger 2018, §1.3(1)] que ce produit déterminait l'indice $\sharp$: celui-ci est iso si $c=1$, an si $c=-1$. Autrement dit, $c=\mathrm{sgn}_{\sharp}$. L'égalité (92) et la non nullité de ses deux membres entraînent la non-nullité de l'expression (83). Cela achève de prouver que $m_{\delta,\sharp}(\mu_1,\eta_1;\mu_2,\eta_2)\neq 0$.

Il reste une dernière condition à prouver, à savoir que $n_2>0$ si $\sharp=\mathrm{an}$. Mais, si $n_2=0$, les représentations ρ_2^+ et ρ_2^- sont les mêmes : ce sont l'unique représentation du groupe $W_0=\{1\}$. Donc $m_{\delta}(\rho_1,\rho_2^+)=m_{\delta}(\rho_1,\rho_2^-)$ et le calcul ci-dessus entraîne que $\sharp=\mathrm{iso}$. Cela achève la vérification de la condition (72) et en même temps la preuve du théorème 3.3.

Remarque. On peut vérifier directement que, si $\sharp=\mathrm{an}$, le couple (n_1,n_2) fourni par la proposition 1.11, pour notre fonction τ, vérifie $n_2\neq 0$. En effet, supposons par l'absurde que $n_2=0$. A fortiori, l'ensemble d'intervalles de λ_2 est vide donc j et $j+1$ ne sont 2-liés pour aucun $j\geq 1$. Pour j impair, la condition (21) entraîne $\lambda_j=\lambda_{j+1}$. Donc les multiplicités $\mathrm{mult}_{\lambda}(i)$ sont toutes paires. Puisque $\sharp=\mathrm{an}$, on a

$$\Big(\prod_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)}\epsilon^{+}(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)}\Big)\Big(\prod_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)}\epsilon^{-}(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}\Big)=-1.$$

Un $i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda)$ tel que $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)\,\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)=0$ n'intervient pas dans ce produit. Par exemple, si $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)=0$, il n'intervient évidemment pas dans le second produit. Il intervient dans le premier par $\epsilon^{+}(i)^{\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)}$. Mais $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)=\mathrm{mult}_{\lambda}(i)$ est pair et cette contribution vaut 1. En supprimant ces termes et en utilisant que $\mathrm{mult}_{\lambda^+}(i)$ et $\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)$ sont de même parité, on obtient

$$\prod_{i\in \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)\cap \mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)}(\epsilon^{+}(i)\epsilon^{-}(i))^{\mathrm{mult}_{\lambda^-}(i)}=-1.$$

On peut donc fixer $i\in\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^+)\cap\mathrm{Jord}_{\mathrm{bp}}(\lambda^-)$ tel que $\epsilon^{+}(i)\epsilon^{-}(i)=-1$. D'après (89), on a $\tau^{+}(i)\neq\tau^{-}(i)$. Par construction de ces fonctions, cela entraîne qu'il existe un intervalle $\Delta_2\in\mathrm{Int}(\lambda_2)$ tel que $J(\{i\})\subset J(\Delta_2)$. A fortiori, $\mathrm{Int}(\lambda_2)$ est non vide, ce qui contredit notre hypothèse $n_2=0$.

Index des notations

Index des notations de [Waldspurger 2018]

Index des notations de [Waldspurger 2018] (reprise)

Remerciement

Je remercie vivement le rapporteur qui a lu l'article très soigneusement et a corrigé un nombre humiliant d'erreurs.

Bibliographie

[Arthur 2013] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013. MR Zbl

[Barbasch et Vogan 1985] D. Barbasch et D. A. Vogan, Jr., "Unipotent representations of complex semisimple groups", *Ann. of Math.* (2) **121**:1 (1985), 41–110. MR Zbl

[DeBacker 2002] S. DeBacker, "Homogeneity results for invariant distributions of a reductive p-adic group", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **35**:3 (2002), 391–422. MR Zbl

[Geck et Pfeiffer 2000] M. Geck et G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori–Hecke algebras*, London Math. Soc. Monographs, New Ser. **21**, Oxford Univ. Press, 2000. MR Zbl

[Lusztig 1990] G. Lusztig, "Green functions and character sheaves", *Ann. of Math.* (2) **131**:2 (1990), 355–408. MR Zbl

[Lusztig 1992] G. Lusztig, "A unipotent support for irreducible representations", *Adv. Math.* **94**:2 (1992), 139–179. MR Zbl

[Lusztig 1995] G. Lusztig, "Classification of unipotent representations of simple p-adic groups", *Int. Math. Res. Not.* **1995**:11 (1995), 517–589. MR Zbl

[Mœglin 1996a] C. Mœglin, “Front d’onde des représentations des groupes classiques p-adiques”, *Amer. J. Math.* **118**:6 (1996), 1313–1346. MR Zbl

[Mœglin 1996b] C. Mœglin, “Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p-adiques”, *Duke Math. J.* **84**:2 (1996), 267–332. MR Zbl

[Mœglin et Renard 2017] C. Mœglin et D. Renard, “Paquets d’Arthur des groupes classiques complexes”, pp. 203–256 dans *Around Langlands correspondences* (Orsay, 2015), édité par F. Brumley et al., Contemp. Math. **691**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017. MR Zbl arXiv

[Mœglin et Waldspurger 1987] C. Mœglin et J.-L. Waldspurger, “Modèles de Whittaker dégénérés pour des groupes p-adiques”, *Math. Z.* **196**:3 (1987), 427–452. MR Zbl

[Mœglin et Waldspurger 2003] C. Mœglin et J.-L. Waldspurger, “Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour SO$(2n+1)$”, *Invent. Math.* **152**:3 (2003), 461–623. MR Zbl

[Moy et Prasad 1996] A. Moy et G. Prasad, “Jacquet functors and unrefined minimal K-types”, *Comment. Math. Helv.* **71**:1 (1996), 98–121. MR Zbl

[Waldspurger 2001] J.-L. Waldspurger, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque **269**, Soc. Math. France, Paris, 2001. MR Zbl

[Waldspurger 2004] J.-L. Waldspurger, “Représentations de réduction unipotente pour SO$(2n+1)$: quelques conséquences d’un article de Lusztig”, pp. 803–910 dans *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory* (Baltimore, 2002), édité par H. Hida et al., Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 2004. MR Zbl

[Waldspurger 2016a] J.-L. Waldspurger, “Caractères de représentations de niveau 0”, preprint, 2016. arXiv

[Waldspurger 2016b] J.-L. Waldspurger, “Représentations de réduction unipotente pour SO$(2n+1)$, II : Endoscopie”, preprint, 2016. arXiv

[Waldspurger 2018] J.-L. Waldspurger, “Représentations de réduction unipotente pour SO$(2n+1)$, I: Une involution”, *J. Lie Theory* **28**:2 (2018), 381–426. MR

Communicated by Shou-Wu Zhang
Received 2017-02-17 Revised 2018-01-22 Accepted 2018-02-23

jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr *CNRS IMJ-PRG, Paris, France*

Algebra & Number Theory

msp.org/ant

See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2018 is US $340/year for the electronic version, and $535/year (+$55, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

ANT peer review and production are managed by EditFLOW® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Algebra & Number Theory

Volume 12 No. 5 2018

1937-0652(2018)12:5;1-C