KÜLÖNLENYOMAT
A PÉCSI TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
1964. ÉVI TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEIBŐL

HETYEI GÁBOR

2x1-ES TÉGLALAPOKKAL LEFEDHETŐ IDOMOKRÓL

See last page for an English abstract.

1964

2x1-ES TÉGLALAPOKKAL LEFEDHETŐ IDOMOKRÓL

HETYEI GÁBOR
Matematika tanszék

A cikk problémája a következő feladatból ered:

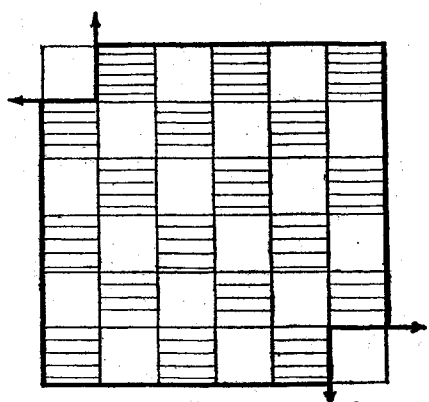
Vegyünk egy négyzetet, melynek oldalhosszúsága egész szám, és bontsuk fel az 1. ábra szerint egységoldalú négyzetekre. Kérdés, hogy ha a négyzet két szembenlévő csúcsánál egy-egy egységnégyzetet elhagyunk, a visszamaradó idom 2 × 1-es téglalapokkal lefedhető-e?

Ha a négyzet oldalhossza eredetileg páratlan volt, akkor nincs ilyen lefedés, hiszen ekkor az idomban páratlan számú egységnégyzet van. De a lefedés akkor sem hajtható végre, ha az oldalhossz páros volt:

Színezzük be ugyanis az idomot fehér és fekete színnel sakktáblaszerűen.

Minden 2 × 1-es tégla két szomszédos négyzetet, azaz egy feheret és egy feketét fed le. Így a lefedhetőséghez szükséges, hogy a fehér négyzetek száma egyenlő legyen a feketékével. Példánkban ez a feltétel eredetileg teljesült, de mivel két egyforma színű négyzetet vettünk el, a visszamaradó fehér és fekete négyzetek száma már nem lehet egyenlő.

I.



1. ábra

Ezek után általánosíthatjuk a problémát a következőképp:

Egységnégyzetekből álló tetszőleges idom mikor fedhető le 2 × 1-es téglalapokkal?

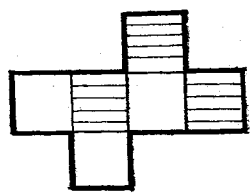
Felvethető az analóg háromdimenziós probléma is:

Mit mondhatunk egység-kockákból álló tetszőleges alakzat 2 × 1 × 1-es téglatestekkel való kitölthetőségéről?

Foglalkozzunk először a síkbeli problémával:

Bármely, egységnégyzetekből álló idomról is legyen szó, azt színezhetjük sakktáblaszerűen fehérre, feketére. A lefedhetőséghez mindig szükséges, hogy a fehér és fekete négyzetek száma egyenlő legyen.

Ez azonban, amint azt a 2. ábrán látható egyszerű idom esete mutatja, nem elegendő.



2. ábra

Állapodjunk meg abban, hogy csak olyankor nevezünk két négyzetet szomszédosnak, ha van közös oldaluk.

Ezzel a szóhasználattal problémánkra a válasz így hangzik:

1. tétel: Egységnégyzetekből álló idom 2 × 1-es téglalapokkal akkor és csakis akkor fedhető le, ha bármely k darab ($k \geqq 1$, egész) ugyanolyan színű négyzetet kiválasztva, a kiválasztott négyzetekkel szomszédos négyzetek száma is legalább k.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az idom 2 × 1-es téglalapokkal lefedhető. Tekintsünk egy lefedést. Ekkor akárhogy is választunk ki k darab ugyanolyan színű, pl. fehér négyzetet, mindegyikhez tartozik egy vele szomszédos fekete négyzet, amelyikkel egy téglalapot alkot. Ezek a fekete négyzetek mind különbözőek. Így az eredetileg kiválasztott k darab fehér négyzetnek legalább k szomszédja van.

Hasonló a helyzet, hogyha eredetileg fekete négyzeteket választottunk ki.

2. Megfordítva, tegyük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel feltételei. Ekkor az idom lefedhető:

Mindenesetre ekkor az idomban ugyanannyi fehér négyzet van, mint ahány fekete.

Legyen ugyanis a fehér négyzetek száma v, a feketéké s.

A v darab fehér négyzetnek legalább v szomszédja van, s mivel ezek mind feketék, számuk nem lehet nagyobb s-nél. Így

$$v \leqq s.$$

Ha a gondolatot a fekete négyzetekre alkalmazzuk, akkor meg az

$$s \leqq v$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ez pedig csak úgy lehet, ha $v = s$.

Ha a tételben szereplő feltételt $k = 1$ esetre alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy minden négyzetnek van legalább egy szomszédja.

Ezek után a feltétel elegendőségét indirekt módon bizonyíthatjuk:

Ha az idom 2×1-es téglalapokkal nem volna lefedhető, akkor bárhogyan is próbálkozzunk a lefedéssel, (természetesen úgy, hogy egy négyzetre nem teszünk egynél több téglalapot) — mindig az következik be, hogy maradnak egyenlő számban lefedetlen fehér és fekete négyzetek, és ezek között nincsenek szomszédosak.

Az ilyen lefedés-próbálkozások közül nézzünk egy olyant, amelyben a lefedetlenül maradt négyzetek száma a legkisebb. Ezt a lefedés-próbálkozást a továbbiakban kezdő lefedésnek nevezzük.

Vegyünk most egy lefedetlenül maradt fehér négyzetet. Ennek van szomszédja, azt azonban téglalap fedi.

A téglalapot emeljük fel és tegyük rá az eddig is lefedett fekete és az említett lefedetlen fehér négyzetre.

Így egy eddig lefedett fehér négyzet válik lefedetlenné. Szemléletesen szólva, ilymódon a fehér „lyukak" vándoroltathatók, s eközben a fekete négyzetek lefedettsége vagy le nem fedettsége nem változik.

A kezdő lefedésben lefedetlen fehér négyzeteket jelöljük $a_1, a_2, \ldots a_p$-vel ($p \geqq 1$). Az α_1 lefedetlenségét vándoroltassuk csak, a többiét rögzítsük. Nevezzük lukasnak α_1-et, és minden olyan fehér négyzetet, ahová α_1 lefedetlensége eljuthat.

A kezdő lefedésben lyukas négyzet szomszédja nem lehet lefedetlen:

Ha volna ugyanis egy lyukas fehér négyzet, amelynek fedetlen fekete négyzet a szomszédja, akkor a lyukvándoroltatással a fehér négyzetet lefedetlenné tehetnénk. Eközben a fekete négyzet természetesen lefedetlen maradna.

Ekkor erre az egymás melletti üresen álló két négyzetre elhelyezhetnénk még egy téglalapot. Ez pedig lehetetlen, mert a kezdő lefedés minimum tulajdonságú volt.

Másrészt, ha egy (a-val jelölt) fehér négyzet lyukas, akkor bármely (b-vel jelölt) szomszédját a kezdő lefedésben a rajta lévő téglalap egy (c-vel jelölt) lyukas fehér négyzethez kapcsolja.

(Ha $a = c$, akkor ez triviális).

Ha $a \neq c$, akkor mindenesetre a lyukvándoroltatással a lefedetlenné tehető. Ha eközben a b és c-t lefedő téglalapot mozdítottuk, akkor a b, mint fekete négyzet, a mozdítás után is lefedett maradt, viszont c lefedetlenné vált, azaz lyukas típusú. Ha pedig a b és c-t lefedő téglalapot nem mozdítottuk, akkor most emeljük fel és fedjük le vele a és b-t. A c ezáltal lefedetlenné válik, tehát lyukas típusú.)

Jelöljük a lyukas fehér négyzetek számát m-mel, a velük szomszédos (fekete) négyzetek számát pedig n-nel.

A tétel feltételei szerint

(1)

A kezdő lefedésben ez az n darab fekete négyzet fedett, és a lefedő téglalap mindegyiket egy-egy lyukas fehér négyzethez kapcsolja. Van tehát biztosan n darab lefedett lyukas típusú négyzet. Mivel a feltevés szerint van le nem fedett lyukas fehér négyzet is (pl. a_1), ezért

$$m > n \tag{2}$$

Ez pedig ellentmond (1)-nek. Ellentmondásra jutva, tételünket igazoltuk.

Ezzel egyszersmind a térbeli problémát is megoldottuk. Világos ugyanis, hogy az idom minden lefedése a fehér négyzetek A halmaza és a fekete négyzetek B halmaza között egy párosítást, egy kölcsönösen egyértelmű leképezést határoz meg. (A térbeli probléma ettől csak abban különbözik, hogy ott a négyzet szó helyett kocka szerepel.)

Ha végignézzük az előbbi bizonyítást, akkor láthatjuk, hogy a síkbeliséget sehol sem használtuk ki, érvényes a következő:

2. tétel: Legyen adva két elemidegen halmaz, A és B. (A elemeit nevezhetjük fehéreknek, B elemeit feketéknek.) Legyen továbbá megadva az A és B elemeire egy szimmetrikus tulajdonságú „szomszédja" reláció, amely csak különböző halmazba tartozó elemek között állhat fent.

Az A halmaz a B halmazra akkor és csakis akkor képezhető le kölcsönösen egyértelmű módon úgy, hogy a megfelelő elemek szomszédosak legyenek, ha az A és B halmaz bármelyikére teljesül, hogy k darab ($k \geqq 1$, tetszőleges egész) elemet belőle kiválasztva, az ezekkel szomszédos elemek száma legalább k.

Ha az első tételre adott bizonyítást tüzetesebben megvizsgáljuk akkor látjuk hogy az még tovább élesíthető: Azt a tényt. hogy bármely k darab fekete négyzetnek legalább k szomszédja van, csak egyetlen egyszer használtuk, annak kimutatására, hogy a fehér négyzetek száma ugyanannyi, mint a feketéké. Ezután mindig csa azt használtuk ki, hogy a fehér négyzetekre teljesül a feltétel.

Ezek szerint, ha azt a problémát vetjük fel, hogy adott egy egységnégyzetekből álló, sakktáblaszerűen színezett idom; és 2×1-es téglalapokat akarunk benne elhelyezni úgy, hogy az összes fehér négyzet le legyen fedve, (és természetesen egy négyzetre se kerüljön egynél több téglalap), akkor a válasz a következő: Ez akkor és csakis akkor valósítható meg, ha bármely k darab fehér négyzetnek legalább k szomszédja van. Ennél a problémánál tehát a fekete négyzetek száma jóval több lehet mint a fehéreké. Ebben a problémában már csak speciális esetként fordul elő az a kérdés: Mikor van egyszerre az egész idom lefedve?

Ez az egész problémakör egy gráfelméleti problémába torkollik. Hogy ezt jól láthassuk, nevezzük az egységnégyzeteket ill. egységkockákat pontoknak, és a szomszédosakat kössük össze éllel. Ha az alakzatot előzőleg sakktáblaszerűen színeztük, akkor így egy olyan gráfhoz jutunk, amelynek bármely két szomszédos pontja közül egyik fehér, a másik fekete.

Az ilyen gráfokat páros gráfoknak szokás nevezni, mert ezekben az élekből alkotott bármely zárt vonal páros számú élből áll.

(Ha a gráf így színezhető, akkor pl. egy fehér pontból egy él mentén kiindulva, minden páros lépés után fehér pontba jutunk. Amíg kiinduló pontunkhoz visszaérünk, addig páros számú élen haladtunk keresztül.

Ha viszont a gráf páros, akkor egy alapul választott pontját fessük be fehérre, szomszédját feketére, annak szomszédját ismét fehérre s. i. t. Ha volna olyan pont, amelyet így fehérre is, feketére is kellene festeni, akkor ahhoz az alapul választott pontból két úton is eljuthatnánk. Ezek közül az egyik páros, a másik páratlan számú élt tartalmazna. Ez a két út együtt azonban egy páratlan számú élből álló körutat határozna meg.)

Eredeti problémánkat tovább általánosítva azt kérdezhetjük: Tetszőleges gráfnál, ha olyan „téglák" állnak rendelkezésünkre, hogy bármelyikkel két szomszédos pontot fedhetünk le, akkor milyen feltételek teljesülése mellett fedhető le a gráf?

Más terminológiával: Mikor van a gráfnak teljes párosítása? Azaz, mikor lehet a gráf összes pontját párokba sorolni úgy, minden pontnak legyen egyetlen, vele szomszédos párja?

A gráfelméletben n-edfokúnak neveznek egy pontot, ha n számú él illeszkedik rá, és n-edfokúnak egy gráfot, ha minden pontja n-edfokú. Egy gráf elsőfokú faktorának pedig az olyan gráfot nevezik, melynek pontjai megegyeznek az eredeti gráf pontjaival, élei mind az eredeti gráf élei közül valók, de az „elsőfokú" jelzőnek megfelelően minden pontból csak egy él vezet ki. Azaz egy elsőfokú faktor izolált élekből áll. Minden él a két végpontjával egy pontpárt ad meg. Így a gráf egy teljes párosítását keresni ugyanaz, mint azt kérdezni, hogy: Mikor van egy gráfnak elsőfokú faktora?

Az egységnégyzetekből álló idomok 2×1-es téglalapokkal való lefedési problémája minket az 1. majd a 2. tételhez vezetett, melynek gráfelméleti alakja a következő:

3. tétel (Hall—Radó tétel). Egy páros gráfnak akkor és csak akkor van elsőfokú faktora, ha bármely k darab ($k \geqq 1$, egész) ugyanolyan színű pontját kiválasztva, az ezekkel szomszédos pontok száma legalább k.

Itt, mint a továbbiakban is tenni fogjuk, feltételeztük, hogy a gráf fehérre-feketére van színezve úgy, hogy bármely két szomszédos pontja közül, egyik fehér, másik fekete.

Tetszőleges gráfokra vonatkozóan is ismeretes a megfelelő tétel. Ez Tutte nevéhez fűződik, és így szól:

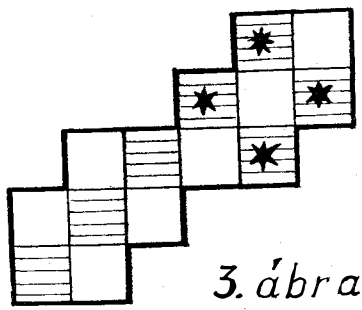
4. tétel: Egy G gráfnak akkor és csak akkor van elsőfokú faktora, ha bárhogyan is hagyjuk el G-ből pontjainak egy A halmazát (az elhagyott pontokhoz illeszkedő élekkel együtt), a visszamaradó pontok és élek alkotta összefüggő darabok (komponensek) közül azoknak a száma, amelyek páratlan sok pontból állnak, kisebb, vagy egyenlő az A halmaz pontjainak számánál.

Láthatjuk, hogy minél kevesebbet tudunk egy gráfról, annál bonyolultabbak az elsőfokú faktor létezését biztosító feltételek. Ezzel kapcsolatban szeretnénk megemlíteni a következő érdekes példát:

Egy König Dénestől származó tétel szerint (amely egy, a Hall—Radó tételből levezethető speciális eset), *az n-edfokú páros gráfnak mindig van elsőfokú faktora.* (Pontosabban, a tétel úgy szól, hogy van n darab olyan elsőfokú faktora, hogy az eredeti gráf bármely éle egy és csakis egy faktorban fordul elő.)

Eszerint bármely másodfokú gráfnak, ha az páros gráf, van elsőfokú faktora.

A 3. ábra viszont egy 7 fehér, 7 fekete négyzetből álló idomot mutat, amely 2 × 1-es téglalapokkal nem fedhető le, mert a *-gal megjelölt 4 négyzetnek cs 3 szomszédja van. Így az idomnak megfelelő páros gráfnak nincs teljes párosítása, nincs elsőfokú faktora.



3. ábra

Ez a tényt (fehér négyzetek = nők, fekete négyzetek = férfiak, szomszédos = ismerős terminológia mellett), egy kicsit König Dénes emlékének adózva, tréfásan a következőképp fogalmazhatnánk meg:

Ha egy táncteremben n férfi és n nő van, és minden férfi két nőt, minden nő két férfit ismer kölcsönösen, akkor az összes résztvevő egyszerre párbaállítható úgy, hogy minden párba egy férfi és egy nő, egymás ismerősei kerüljenek.

Ha viszont (csak férfi—nő ismeretségről beszélve), mindenkinek van két ismerőse, de vannak olyanok is, akik 2-nél több ismerőssel rendelkeznek, akkor az összes résztvevők előbbi módon való párbaállíthatósága már nem garantálható.

S ez a tény első pillanatra paradoxul hangzik.

A 3. tételt a gráfelméletben az alternáló utak módszerével szokás bizonyítani. Ennél a lyukvándoroltatási módszer — amelyben csak egyetlen lyuk vándorol —, talán egyszerűbb és szemléletesebb.

A lyukvándoroltatási módszerrel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy az tetszőleges gráfoknál is alkalmazható:

5. tétel: Ha egy G gráfnak van egy F elsőfokú faktora, akkor az a lyukvándoroltatási módszerrel megtalálható.

Bizonyítás:

Álljanak rendelkezésünkre olyan téglák, amelyekkel két szomszédos pontot lehet lefedni.

Tegyük fel a tétel állításának ellenkezőjét, vagyis azt, hogy a mondjuk $2n$ számú pontot tartalmazó G gráfban elhelyeztünk p ($p < n$) téglát, és a lyukvándoroltatási módszerrel nem tudjuk elérni újabb téglák elhelyezését; azaz nem tudunk egy lefedéshez, vagy ami ugyanaz, G egy elsőfokú faktorához eljutni.

Ekkor van olyan a_1 pont, amely lefedetlenül áll. Ez az a_1 az F faktorban egy b_1 ponthoz kapcsolódik. A b_1 nálunk is lefedett, (ellenkező esetben a_1, b_1-re tehettünk volna téglát), de valamely a_2 ponttal alkot egy párt, egy téglát. Tegyük most át ezt a téglát a_1, b_1-re, és többet ehhez ne nyúljunk.

Ha a lefedetlenné vált a_2 melletti pont is lefedetlen volna, akkor rájuk újabb téglát tehetnénk. Ez lehetetlen, mert az volt a feltevésünk, hogy az elhelyezett téglák száma nem növelhető.

Az a_2 az F faktorban egy b_2-höz kapcsolódik, de b_2 nálunk valamely a_3 ponttal alkot párt. Vegyük le róluk a téglát, és tegyük át a_2, b_2-re és többet ehhez a téglához ne nyúljunk.

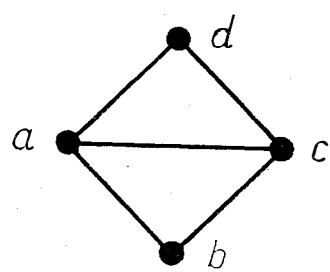
Ez a lyukvándoroltatás legfel bb p lépésben azt eredményezi, hogy a p számú tégla az F faktornak megfelelően van elhelyezve. (Azaz, ha két pontot tégla fed, akkor ez a két pont az őket összekötő éllel szerepel F-ben.)

Ez a legfeljebb p számú lépésből álló lyukvándoroltatás az összes lehetőség végigpróbálásánál okvetlen előjön. Ez egy megtalálható lépéssorozat, amelynek végén lefedetlenül áll a G egy $2n—2p$ pontból álló részgráfja, amit téglákkal le lehet fedni. (Azt, hogy ezt hogyan lehet megtenni, azt az F-ből olvashatnánk ki.) Mindenesetre az F léte biztosítja, hogy még egy téglát elhelyezhetünk, s így ellentmondásba kerültünk a kiinduló feltevéssel.

II.

A következőkben elsőfokú faktorral, vagy ami ugyanaz, teljes párosítással rendelkező gráfok belső felépítését fogjuk részletesebben megvizsgálni. Rövidség kedvéért ezeket ebben a cikkben t-gráfoknak nevezzük. (A t betű a teljes párosításra utal.)

A 4. ábrán egy ilyen gráfot láthatunk. Azonnal feltűnik, hogy az a, c pontokat hiába köti össze él; ha képezzük az a, c párt, akkor b és d-ből, mivel ezek nem szomszédosak, párt már nem alkothatunk. Az (a, c) él „tilos" él.



4. ábra

Definíció: A t-gráf egy élét tilos élnek nevezzük, ha nem fordul elő a gráf egyik elsőfokú faktorában sem.

Vegyünk egy t-gráfot. Ha ez nem összefüggő, akkor minden összefüggő darabja is t-gráf. (Azaz mindegyiknek van elsőfokú faktora, mert különben az eredeti gráfnak sem volna.)

Ezért a továbbiakban csak összefüggő t-gráfokkal foglalkozunk.

Egy összefüggő t-gráfban a gráf összes pontjainak meghagyása mellett szüntessük meg a tilos éleket. Ekkor a gráf vagy összefüggő marad, vagy szétesik összefüggő komponensekre.

Mivel egy gráfban a tilos él fogama egyértelműen meghatározott, ezért az, hogy az egyes összefügő komponensek mely pontokból állna , szintén egyértelműen meghatározott.

Ezek után, ha bevezetjük a következő definíciót:

Definíció: Az olyan t-gráfot, amely a tilos élek megszüntetése után is összefüggő marad, elemi gráfnak nevezzük.

akkor kimondhatjuk a következő tételt:

6. tétel: Bármely t-gráf pontjainak halmaza egyértelműen bontható fel diszjunkt részhalmazokra úgy, hogy minden ilyen részhalmazban megrajzolva az eredeti gráf összes olyan élét, melynek mindkét pontja a részhalmazhoz tartozik, mindig egy elemi gráfot kapunk.

(Ezeknek a részgráfoknak ugyanis van elsőfokú faktoruk, és a tilos élek megszüntetése után összefüggők maradnak.)

Ha egy t-gráfban van két különböző elemi gráfhoz tartozó szomszédos pont, akkor őket tilos él köti össze. Azaz:

7. tétel: Ha egy t-gráf két különböző elemi gráfjához tartozó szomszédos két pontját párba foglaljuk, akkor az eredeti gráfból visszamaradó részgráfnak nincs elsőfokú faktora.

(Ha a visszamaradó résznek volna elsőfokú faktora, akkor ehhez az elhagyott két pont alkotta élt hozzávéve, az eredeti gráf egy elsőfokú faktorát kapnánk, melyben két különböző elemi gráfot összekötő, azaz tilos él szerepelne.)

A 7. tétel más szóval azt jelenti, hogy a t-gráfban lévő elemi gráfok azzal a nevez tes tulajdonsággal rendelkeznek. hogy bármely párosítás önmagukra képezi le őket. Azaz, ha G elemi gráf. akkor bármely párosítás G-beli ponthoz G-beli pontot rendel hozzá. Ebben a tekintetben az elemi gráfok a legszűkebb gráfok: hasonló tulajdonságú részgráfjuk nincs:

8. tétel: Legyen egy t-gráf pontjainak halmaza V. H pedig ennek egy valódi része. (H nem üres, $H \neq V$.) Ha bármely párosításnál H-beli pont csak H-belihez kapcsolódhat, akkor a gráf nem elemi.

Bizonyítás:

Ekkor ugyanis H-beli pontból egy nem H-beli pontba vezető bármelyik él tilos él. Emiatt a tilos élek megszüntetése után H nem függ össze a gráf többi részével.

9. tétel: Bármely elemi gráfba új éleket beiktatva, a gráf elemi marad.

Bizonyítás:

A gráf bármely nem tilos éléhez találhatunk azt tart lmazó elsőfokú faktort.

Ez a faktor új él beiktatásától nem szűnik meg, azaz az említett él nem válhat tilossá. Ha a gráf a tilos élek megszüntetése után eddig össz - függő volt, akkor az új él beiktatása után is ez a helyzet.

A következő tételek a páros elemi gráfok érdekes tulajdonságait tükrözik.

10. tétel: Ha egy $2m$ ($m > 1$) pontból álló páros gráf elemi gráf, akkor bármely k darab ($o < k < m$) ugyanolyan színű pontját kiválasztva, ezek szomszédainak száma nagyobb, mint k.

Bizonyítás:

Válasszunk ki k darab ($o < k < m$) ugyanolyan színű pl. fehér pontot. Ezek halmaza legyen A, a velük szomszédos pontok halmaza pedig B.

Mivel a gráf t-gráf, ezért (a 3. tétel szerint) az A-beli pontoknak összesen legalább k darab szomszédjuk van. Azaz B-nek legalább k eleme van. De nem lehet pontosan k:

Ha B-nek k darab pontja volna, akkor bármely teljes párosításnál a B halmaz elemei csak A-beliekhez kapcsolódhatnak. Ha valamely B-beli elemet nem A-belivel párosítanánk, akkor a k darab A-beli elemhez csak $k—1$ szomszéd tartozna s így a párosítás lehetetlenné válna. (Hiszen az A-beli pontok mind fehér színűek, közöttük nem lehet párt alkotni.)

Mindez azt jelenti, hogy bármely párosításnál az $A + B$ halmaz önmagára képeződik le. A $k < m$ miatt $A + B$ pontjai nem merítik ki az eredeti gráf összes pontjait. Így a 8. tétel szerint az eredeti gráf nem lehetne elemi. Az ellentmondás csak a tétel helyességének elfogadásával oldódik fel.

11. tétel: Egy összefüggő páros t-gráf akkor és csak akkor elemi gráf, ha egy tetszőleges fehér és egy tetszőleges fekete pontot (a hozzájuk vezető élekkel együtt) elhagyva, a gráf t-gráf marad.

Bizonyítás:

Az egyetlen élből álló gráfra a tétel természetesen úgy teljesül, ha az üres gráfot t-gráfnak tekintjük.

Ezután olyan gráfokkal foglalkozzunk, amelyeknek 2-nél több pontjuk van.

1. Vegyünk egy elemi gráfot és ebből tetszőlegesen hagyjunk el egy fehér és egy fekete pontot, (a rájuk illeszkedő összes élekkel együtt.) E két pont elhagyása után keletkező gráfban bármely k darab ugyanolyan színű pontnak legalább k szomszédja marad. (A 10. tétel miatt.) Ez elsőfokú faktor létezését már biztosítja: azaz a visszamaradó gráf t-gráf.

2. Ha egy összefüggő t-gráf nem elemi gráf, akkor még két szomszédos pontot sem biztos, hogy el lehet hagyni. (Biztos, hogy elsőfokú faktor nélkülivé válik a gráf, ha az eredeti gráf két különböző elemi gráfjához tartozó két szomszédos pontját hagyjuk el. Ez a 7. tétel alapján világos.)

A jelzett tulajdonsággal tehá csak az elemi gráfok rendel ezne .

Hasonlóan bizonyítható be a következő:

12. tétel: Egy összefüggő páros t-gráf akkor és csak akkor elemi gráf, ha két tetszőleges, szomszédos pontját párbaállítva (és a gráfból elhagyva), a visszamaradó résznek is van teljes párosítása.

A tétel kifejezi a páros elemi gráfoknak azt az érdekes tulajdonságát, hogy bennük nincs tilos él.

Hasonló tulajdonsággal a nem páros gráfok általában nem rendelkeznek. Pl. a 4. ábrán látható gráf elemi gráf, de az (a, c) éle tilos él. Viszont pl. a tetraéder négy csúcsa, és az őket összekötő élek tilos él nélküli nem páros elemi gráfot alkotnak.

Tetszőleges elemi gráfokra csak a következő sokkal gyengébb tétel érvényes:

13. tétel: 2-nél töb pontból álló elemi gráf tetszőleges élét (a végpontok megtartása mellett) megszüntetve, a gráf t-gráf marad.

Bizonyítás:

Legyen a és b a gráf két (tetszőleges) szomszédos pontja. A gráfnak biztosan van olyan elsőfokú faktora, amelyben az (a, b) él nem szerepel.

Ellenkező esetben a $H = (a, b)$ ponthalmazt bármely párosítás önmagára képezné le, s így (a 8. tétel miatt) a gráf nem lehetne elemi.

A páros gráfokhoz visszatérve, azok között mindenesetre az egyetlen él a legegyszerűbb elemi gráf. Az összes elemi gráf (sőt az összes t-gráf) ilyenekből építhető fel. Felvetődik a kérdés: elemi gráfokat új élekkel összekapcsolva mikor kapunk elemi gráfot, és mikor csak t-gráfot (amely nem elemi gráf egyúttal)?

Páros gráfokra vonatkozóan erre ad választ a

14. tétel: Az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ páros elemi gráfokból új élek segítségével egy összefüggő páros G gráfot alkotunk. Ahhoz, hogy a G gráf elemi legyen, szükséges és elegendő, hogy az E_i gráfok közül akárhányat kiválasztva, ($i = 1, 2, \ldots, n$.) ezek összességét a G többi részéhez ne csupa ugyanolyan színű pontokból kiinduló élek kapcsolják.

Bizonyítás:

Mielőtt a bizonyítás érdembeli részére térnénk, megjegyezzük a következőket:

Feltételezzük, hogy az alapul vett elemi gráfok fehérre, feketére vannak színezve. Ezután veszünk két különböző elemi gráfhoz tartozó egy-egy pontot és ezeket új éllel összekötjük. Ezt így folytatjuk, míg meg nem alkottuk a G gráfot. Ezeket az új éleket megjelölve gondoljuk. Ezek a régi elemi gráfokra vonatkozóan „kötő" élek. Ha ügyelünk arra, hogy új élt mindig csak két különböző színű pont közé iktassunk be, akkor biztosítottuk, hogy G páros gráf legyen. Továbbá világos, hogy G-nek van teljes párosítása; hisz az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ elemi gráfok mindegyikének volt. Mindegyiknél véve egy teljes párosítást, ezek együttese G egy teljes párosítását adja.

Ezután térjünk rá a bizonyításra:

1. A feltétel szükséges: Ha az elemi gráfok bizonyos H összessége pl. csupa fehér pontból kiinduló éllel kapcsolódik a G gráf többi részéhez, akkor H fekete pontjainak száma megegyezik szomszédainak számával, s így a 10. tétel szerint G nem lehetne elemi gráf.

2. A feltétel elegendő:

a) Vegyünk k darab elemi gráfot: $E_1, E_2, \ldots, E_k$-t. Ezek sorrendjét vegyük ciklikusnak (azaz E_k után E_1 következzék). Mindegyik gráf egy fehér pontját kössük össze az utána következő egy fekete pontjával. Így az 5. ábrán látható gráfhoz jutunk, amely nyilván egy összefüggő t-gráf.

A beiktatott kötő élek végpontjait egymással párba állítva, minden elemi gráfból egy fehér és egy fekete pontot vettünk el. A visszamaradó résznek a 11. tétel szerint van teljes párosítása.

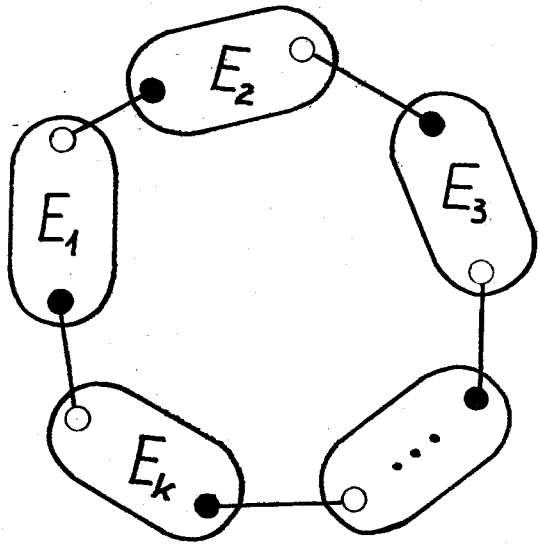
Az elemi gráfok belsejében nincs tilos él, s látjuk, hogy a többiek sem azok. Így az 5. ábrán látható gráf elemi gráf. Ezután ebbe további új éleket iktathatunk be, (ezek persze csak különböző színű pontokat köthetnek össze), a gráf elemi marad. (A 9. tétel szerint.)

b) A feltétel elegendőségét teljes indukcióval bizonyítjuk:

Ha csak két elemi gráfból készült a G gráf, akkor az *a)* szerint elemi. Azaz a 14. tétel $n = 2$-re igaz.

Tegyük fel a tétel helyességét n-nél kevesebb számú elemi gráf esetére.

Ezután mindenesetre bármely elemi gráfot tekintsük is, a tétel feltételei szerint van olyan kötő él, amelyik egy fehér pontjából indul ki és olyan is, amely feketéből indul ki.



5. ábra

Tekintsük az egyik elemi gráfot, legyen az E_1. Ennek van olyan fehér pontja, amelyből egy kötő él vezet át egy másik elemi gráf, mondjuk E_2 egy fekete pontjába. E_2-nek van egy fehér pontja, amelyből kötő él vezet át mondjuk E_3 egy fekete pontjába s. i. t. Mivel véges sok elemi gráfról van szó, bizonyos számú lépés után így egy E_p-be, s abból egy olyan E_i-be jutunk, amely E_i már az előbb képzett sorozatban szerepelt. Ekkor E_i, $E_{i+1}, \ldots,$ E_p elemi gráfok egy az *a)*-ban tárgyalt alakzatot, azaz elemi gráfot alkotnak. Beiktatva most az összes olyan kötőélt, amely a G-ben az E_i, E_{i+1}, $\ldots$, E_p elemi gráfok közül bármely kettőt összeköti, továbbra is elemi gráfot alkotnak. Így ezeket a továbbiakban egyetlen elemi gráfnak tekinthetjük. Ekkor viszont a G megalkotásában ezután n-nél kevesebb számú elemi gráf összességéről lesz szó, amelyre szintén teljesülnek a tétel feltételei. Így az indukciós feltevés miatt G elemi gráf.

III.

Láttuk, hogy egy elemi gráf két pontja között egy új élt beiktatva ismét elemi gráfot kapunk. Egy él megszüntetése után pedig a gráfnak még mindig van elsőfokú faktora.

Gallai Tibor vetette fel azt a problémát:

Melyek azok az elemi gráfok, amelyekben bármelyik élt megszüntetve, már nem elemi gráfot kapunk?

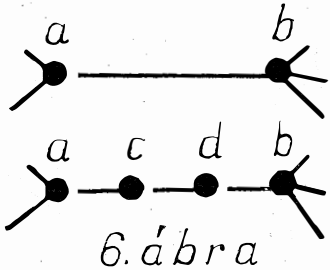
Ezeket a minimum tulajdonságú elemi gráfokat a továbbiakban csak m-gráfoknak nevezzük. Ezek nyilván mind tilos él nélküliek.

A kérdés tisztázására bebizonyítjuk a következő tételeket:

15. tétel: 2-nél több pontú elemi gráf egy nem tilos élén két újabb pontot létesítve, elemi gráfot kapunk, amelynek ugyanannyi teljes párosítása van, mint az eredetinek.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy az *(a,b)* nem tilos élen létesítettünk két új pontot, *c*-t és *d*-t, a 6. ábra szerint.



6. ábra

Az eredeti gráf összes párosítása t tekintve, azok egy részében *a* és *b* nem egy párban szerepelt. (Ellenkező esetben a 8. tétel miatt a gráf nem lehetne elemi.) Ezen párosítások mindegyikéhez a *(c, d)* párt hozzávéve, csupa különböző párosítást kapunk.

A régi gráf azon párosításaiból, ahol *a* és *b* egy párt alkotott, vegyük el ezt a párt. Tegyük helyébe az *(a, c)* és *(d, b)* párokat. Így az új gráf csupa különböző párosításait kapjuk. (Ha a régiek azok voltak.)

Látjuk, hogy az eredeti és az új gráfnak ugyanannyi párosítása van. S mivel az *(a, c)* és *(d, b)* illetve *(c, d)* élek mindegyike szerepel az új gráf valamelyik párosítá ában, ezért ezek egyike sem tilos él.

A többi él tilos vagy nem tilos volta nem változott meg, ezért ha a gráf a tilos élek megszüntetése után eddig összefüggő volt, akkor most is az. Azaz: az új gráf elemi.

Az eljá ás ismételt alkalmazásával adódik a

16. tétel. Bármely 2n (n > 1) pontból álló, s számú elsőfokú faktorral rendelkező elemi gráfhoz, és bámely p≧n számhoz van olyan 2p pontból alkotott elemi, gráf, amely szintén s számú elsőfokú faktorral rendelkezik.

17. tétel: Azzal az eljárással, hogy elemi gráf egy-egy nem tilos élén két új pontot létesítünk, bármely 2-nél több pontból álló, tilos él nélküli elemi gráfhoz található (ugyanannyi elsőfokú faktorral rendelkező) tetszőleges sok m-gráf.

Bizonyítás:

Létesítsünk például a gráf minden élén két új pontot. Mivel a gráfnak nem volt tilos éle, így egy tilos él nélküli (elemi) gráfot kapunk, melynek ugyanannyi el őfokú faktora van, mint az eredetinek.

Az így lét ejött gráf bármelyik élének egyik végpontja másodfokú. Ha tehát bármelyik élt is szüntetjük meg, a gráfban létrejön legalább egy elsőfokú pont. Mivel ennek csak egy szomszédja van, minden párosításnál csak együtt alkothatnak párt. Ez (a 8. tétel miatt) azt jelenti, hogy az él megszüntetése után kapott gráf nem elemi. Vagyis: az él megszüntetése előtti gráf m-gráf volt.

Ebben az m-gráfban akárhány élen ismét két új pontot létesítve, ismét m-gráfot kapunk, melynek ugyanannyi elsőfokú faktora van. És így tovább, az eljárás folytatható.

Természetesen lehetséges, hogy véve egy tilos él nélküli elemi gráfot, nem kell minden élen két új pontot létesíteni, s már úgy is m-gráfhoz jutunk.

Az m-gráfokra egyébként a legegyszerűbb példa: az egyetlen él, illetve a másodfokú elemi gráf. (Páros számú pontot tartalmazó egyetlen kör.)

Ezeket a továbbiakban triviális m-gráfoknak nevezzük.

A nem triviális m-gráfokkal foglalkozva, felvetődik az a kérdés: vajon ezek mind előállíthatók a 17. tételben leírt módon? — Ezzel kapcsolatos a következő két tétel:

18. tétel: Legyen a nem triviális m-gráf két szomszédos másodfokú pontja c és d, továbbá c másik szomszédja a, d másik szomszédja b. (6. ábra.) Ha a c és d pontot a gráfból eltávolítjuk, de ugyanakkor a-t és b-t összekötjük, akkor tilos él nélküli elemi gráfot kapnunk.

Bizonyítás:

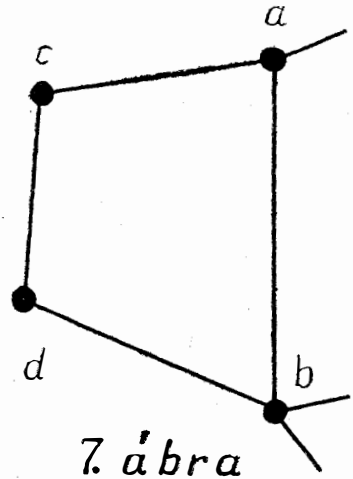
Az eredeti m-gráf azon párosításaiból, melyben a *(c, d)* pár előfordult, ezt a párt töröljük. Így az új gráf egy-egy párosítását kapjuk.

Az eredeti gráf azon párosításaiban, amelyben *(c, d)* pár nincs, az *(a, c)* és *(d, b)* párok fordulnak elő. Ezek helyett az *(a, b)* párt iktatjuk be. Így ismét az új gráf egy-egy párosítását kapjuk. (Az az eset, hogy $a = b$, nem fordulhat elő. Ekkor ugyanis a *c* csak *d*-vel alkothatna párt, s így a gráf nem lenne elemi.)

Ha a régi gráf mindegyik éle előfordult valmelyik régi párosításban, akkor az új gráf mindegyik éle szintén előfordul valamelyik új párosításban.

Azaz az új gráf tilos él nélküli elemi gráf. (És természetesen lehet, hogy még ez is m-gráf.)

Elképzelhető, hogy az *a*, *b* pontok már eredetileg éllel voltak összekötve. (7. ábra.) Ekkor a *c*, *d* pontok törlése, és ezzel egyidőben az *a* és *b* pontok összekötése az *a* és *b* között kétszeres élt hozna létre. Ez azonban nem triviális m-gráfban nem fordulhat elő:



7. ábra

Ekkor ugyanis a g áf párosításait három osztályba sorolhatnánk:

1. Van *(c, d)* pár, de nincs *(a, b)* pár.
2. Van *(a, b)* pár, és emiatt van *(c, d)* pár is.
3. Nincs *(c, d)* pár, így *(a, c)* és *(b, d)* pár van, tehát nincs *(a, b)* pár sem.

E háromfajta párosításban bármely él (pontosabban bármely él két végpontja által alkotott pár) szerepel, mert az m-gráfban nincs tilos él. Az *a* és *b* közötti él megszüntetése csak a 2. fajta párosításokat érinti.

Ezért megszüntetjük az *a* és *b*-t összekötő élt, és kimutatjuk, hogy még így is elemi gráfot kapunk:

A 2. fajta párosításokban az *a, b* pontok közötti élt megszüntetve (de az *a* és *b* pontokat továbbra is megtartva), az *(a, b)* párt és a *(c, d)* párt töröljük. Iktassuk a helyükre az *(a, c)* és *(b, d)* párokat. Látjuk, hogy a régi gráf összes többi éle, ha eddig szerepelt valamelyik párosításban, most is szerepel, azaz nem vált tilossá. S mivel mind ilyen volt, és a gráf most is összefüggő, ezért az új gráf tilos él nélkül elemi gráf. A régi gráf tehát nem lehetett m-gráf.

A tétel alapján világos, hogy ha egy nem triviális m-gráfnak van két szomszédos másodfokú pontja, akkor azokat a tételben leírt módon megszüntetve kapunk egy gráfot. Ha ez még mindig m-gráf, és van két szomszédos másodfokú pontja, akkor ezeket is megszüntetjük s. i. t. Így végül vagy egy tilos él nélküli elemi gráfhoz jutunk, amely már nem m-gráf, vagy olyan m-gráfhoz, amelynek nincs két szomszédos másodfokú pontja..

Kimutatjuk, hogy ilyen m-gráfok nincsenek, azaz minden nem triviális m-gráf megkapható tilos él nélküli elemi gráfból úgy, hogy bizonyos számú élen két-két újabb pontot létesítünk.

19. tétel: Ha G egy nem triviális m-gráf, akkor van két szomszédos másodfokú pontja.

Bizonyítás:

Legyen *G* egy elsőfokú faktora G_1. Jelöljük ugyanígy a G_1 által meghatározott teljes párosítást is. A gráf G_1-hez tartozó éleit vastag vonallal húzzuk meg.

Legyen G_1 egy éle *(a, b)* és vegyük azt a G_2 párosítást, amelyben az *(a, b)* pár nem szerepel. (Ilyen G_2 van, mert különben *a*-nak mindig csak *b* lenne a párja, de akkor *G* nem lehetne elemi gráf.)

A G_2 párosítás *b*-hez valami *c*-t rendel, *c*-ből egy G_1-beli vastag élen valami *d*-be jutunk. A *d*-hez a G_2 egy *e*-t rendel. Az *e*-ből egy G_1-beli vastag élen valami *f*-be jutunk s. i. t. Végesszámú lépés után vissza kell jutaz így képezett sorozatban *a*-hoz. (Ha ugyanis az *a, b, c, d, e, f, . . .* sorozat *a*-tól különböző pontjába jutnánk vissza, akkor ebbe a pontba vagy G_1-beli vastag élen, vagy G_2-beli vékony élen érkeznénk, s így a kérdéses pontban vagy két vastag és egy vékony él, vagy egy vastag és két vékony él futna össze. Ez azon an azt jelentené, hogy vagy G_1, vagy G_2 az illető ponthoz két pontot is hozzárendelne párnak, ami lehetetlen.) Így az *a, b, c, d, . . ., a* ciklikus sorozat egy olyan egyetlen körből álló H_1 elemi gráfot ad, melynek bármely két szomszédos éle közül egyik G_1, másik G_2-beli. E gráf pontjai mind másodfokúak, és egyik él sem tilos él.

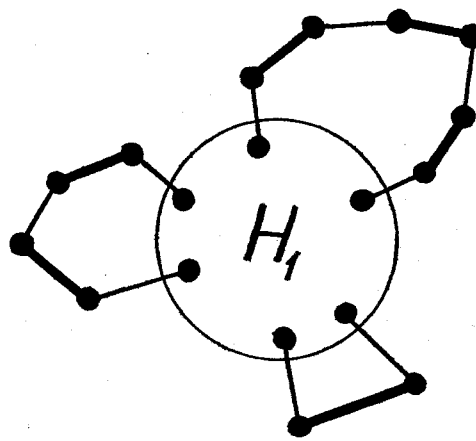
A H_1 gráf nem tartalmazza G összes pontját.

(Hiszen, ha tartalmazná, akkor amiatt, hogy H_1 triviális m-gráf, a *G* pedig nem volt az, a H_1-ből úgy kaphatnánk meg a *G*-t, hogy a pontok között új éleket létesítenénk. Ahogy ezeket az éleket egymás után beik-

tatjuk, mindig elemi gráfot kapnánk. De akkor a végeredményként kapott G gráfból ezeket az éleket a beiktatással fordított sorrendben egymásután törölve, mindig elemi gráfot kapnánk, s így a G nem lehetett volna m-gráf.)

Az, hogy a H_1 nem tartalmazza a G összes pontját, az magában véve is érdekes tény, mert azt jelenti, hogy nem triviális m-gráfnak nincs Hamilton köre. (Azaz a gráf egy pontjából elindulva, és az éleken haladva, nem lehet a kiindulási pontba úgy visszaérkezni, hogy közben a gráf többi pontján egyszer és csakis egyszer keresztülmentünk.)

Térjünk vissza az eredeti gondolatmenetünkhöz: Mivel H_1-en kívül van a G-nek pontja, az ilyen pontokból valamilyen (nem tilos) éleken keresztül el lehet jutni H_1 pontjaihoz. Lesz tehát olyan G_3 párosítás, amely egy H_1-beli a_1 ponthoz egy nem H_1-beli b_1 pontot rendel. A b_1-ből G_1-beli vastag élen egy c_1-be jutunk. A c_1-hez G_3 egy d_1-et rendel, ebből egy G_1-beli vastag élen egy e_1-be kell jutnunk, stb. Ezt addig folytatjuk, míg vissza nem jutunk H_1-beli pontba. (Az nem lehet, hogy ebben a sorozatban nem H_1-beli pont ismétlődése miatt a visszajutás lehetetlen: ekkor a kérdéses pontba ismét legalább három él futna össze, s mivel csak G_1 és G_3-beli élekről van szó, a három él közül 2 ugyanahhoz az elsőfokú faktorhoz tartozna, ami lehetetlen.)



8. ábra.

Ezután megnézzük, van-e még olyan H_1-beli pont, amelyhez G_3 nem H_1-belit rendel, s ha igen, megalkotjuk az ehhez tartozó sorozatot is. s. i. t. Az ilyen sorozatoknak nem lehet olyan közös pontja, amely nem H_1-be tartoz k: Ellenkező esetben ebbe a pontba legalább három él futna össze, melyek közül kettő ugyanazon párosításhoz tartozna, hiszen a három él összesen csak két párosításba: G_1-be és G_3-ba tartozik.

Egyszer eljutunk oda, hogy bármely H_1-beli pontot is vesszük, amelyhez G_3 nem H_1-beli pontot rendel, már megalkottuk az ehhez tartozó sorozatot. A H_1-hez ezeket a sorozatokat hozzácsatolva, egy H_2 gráfhoz jutunk. Ebben H_1 régi élei sem, az újonnan hozzácsatolt G_1-beli élek sem tilosak. De nem lehetnek tilosak a H_2-be tartozó G_3-beli élek sem: hiszen bárme-

lyik H_2-be tartozó pontot is vesszük, az a pont is H_2-beli, amelyet G_3 ehhez a ponthoz rendel.

Mivel H_2 összefüggő is, ezért tilos él nélküli elemi gráf, és van neki két szomszédos másodfokú pontja, hiszen a H_1-be nem tartozó, de H_2-be beletartozó bármely G_1-beli vastag él két végpontja ilyen.

Az eljárást mindaddig folytassuk, míg az eredeti G összes pontjait először megkapjuk egy összefüggő, tilos él nélküli H_k gráfban. Az eljárás tulajdonságai miatt ennek is van két szomszédos másodfokú pontja. Ezzel G-t meg is kellett, hogy kapjuk, mert ha éleket kellene beiktatnunk, akkor minden él beiktatása után elemi gráfot kapnánk ugyan, de rögtön utána ezeket az éleket a beiktatáshoz képest fordított sorrendben megszüntetve, minden lépésnél szintén elemi gráfot kapnánk, ami nem lehet, mert G egy m-gráf volt. Így viszont G *kell,* hogy rendelkezzék legalább két szomszédos másodfokú ponttal.

Ezáltal az m-gráfok problémá át arra vezettük vissza: melyek a tilos él nélküli elemi gráfok? — Láttuk, hogy ilyenek az összes páros elemi gráfok, de könnyen lehet ilyet készíteni bármely elemi gráfból is, vagy a tilos éleinek elhagyásával, vagy a következőképpen:

Ha egy elemi gráfban (a, b) tilos él, akkor nézzük meg a gráf egy párosítását. Ebben mondjuk az (a, c) és (b, d) párok fordulnak elő. Ha beiktatjuk a (c, d) élt, akkor a tekintett párosításban az (a, c) és (b, d) párokat az (a, b) és (c, d) párokkal helyettesíthetjük, s így az általuk meghatározott két él egyike sem tilos él. Eközben a többi él sem válhatott tilossá. Az eljárást folytatva a tilos élek számát zérusra redukálhatjuk.

Az m-gráfok további vizsgálatától a jelen dolgozatban eltekintünk.

A cikk írója kedves kötelességének érzi, hogy köszönetet mondjon Gallai Tibornak és Pollák Györgynek a jelen cikkel kapcsolatos értékes tanácsaikért, a problémák felvetéséért.

IRODALOM

1. *König D.:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Springer, Leipzig, 1936).

2. *Berge, C.:* Théorie des graphs. (Dunod, Paris, 1958).

3. *Ore, O.:* Theory of graphs (American Mathematical Society Colloquium Publications, XXXVII. 1962).

4. Matematikai versenytételek II. (31—34. old.) (Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.)

О ФИГУРАХ, ПОКРЫВАЕМЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ В 2×1

ГАБОР ХЕТЕИ

Первая часть статьи занимается проблемой: когда могут покрываться фигуры, состоящие из единичных квадратов, прямоугольниками в 2×1.

Эта проблема ведёт к проблеме эгзистенции первостепенных факторов парных графов.

Сообщение даёт простой метод для искания покрытости, с помощью которого получается новое, наглядное доказательство тезиса Халл-Радо насчёт первостепенных факторов.

Этот метод искания покрытости (у графов: метод искания первостепенных факторов) может применяться у любых графов.

Вторая часть сообщения занимается элементарными графами. Грань графа с первостепенным фактором называется „запрещённой" гранью, если не находить её ни в каком первостепенном факторе графа. Граф называется элементарным, если после удаления „запрещённых" граней он остаётся связанным.

Затем следует описание нескольких свойств элементарных графов, в первую очередь парных.

Третья часть сообщения даёт решение следующей проблемы: какие те элементарные графы, у которых при прекращении любой грани (но при сохранении двух конечных пунктов) получается не элементарный граф.

ÜBER DIE MIT RECHTECKEN 2×1 BEDECKBAREN GEOMETRISCHEN FIGUREN

HETYEI GÁBOR
Lehrstuhl für Mathematik

Der erste Teil des Aufsatzes beschäftigt sich mit dem Problem, wann die aus Einheitquadraten bestehenden Flächenfiguren mit Rechtecken vom Mass 2x1 bedeckbar sind.

Dieses Problem führt zum Existenzproblem der erstgradigen Faktoren (im weiteren so: 1-Faktoren) der (paaren) Graphen.

Der Aufsatz macht mit einer einfachen Methode des Suchens von Möglichkeiten des Abdeckens bekannt, mit dessen Hilfe wir einen neuen, anschaulichen Beweis des sich auf die 1-Faktoren beziehenden Satzes von Hall-Radó erhalten.

Diese Methode des Suchens von Möglichkeiten des Abdeckens, (bzw. bei den Graphen die ihnen entsprechende Methode des Suchens von 1.-Faktoren) ist bei beliebigen Graphen anwendbar.

Der zweite Teil des Aufsatzes beschäftigt sich mit den elementaren Graphen.

Die Kante des über einen 1-Faktor verfügenden Graphen nennen wir „verbotene" Kante, wenn sie in keinem der 1-Faktoren des Graphen vertreten ist. Den Graphen nennen wir „elementaren Graphen", wenn er auch nach der Entfernung der verbotenen Kanten zusammenhängend bleibt.

Dann folgen im Aufsatz einige Eigenschaften der elementaren Graphen, in erster Reihe die der gepaarten.

Der dritte Teil des Aufsatzes beschreibt die Lösung folgenden Problems: Welche sind die elementaren Graphen, die keine mehr bleiben, wenn wir eine beliebige Kante (beim Behalten ihrer beiden Endpunkte) abschaffen?

Rectangular configurations that can be covered by 2×1 rectangles

GÁBOR HETYEI

Pécsi Tanárk. Főisk. Közl. **8** (1964), 351–368

The first part of the article considers the problem of when a rectangular shape, consisting of unit squares can be covered by 2×1 rectangles. This problem leads to the question whether a degree-one factor (called from now on a 1-factor) exists in a (bipartite) graph. The paper shows a simple method to search for possible coverings; with the help of which one obtains a new visual proof of the Hall–Radó theorem regarding 1-factors. This method of searching for coverings (respectively the corresponding method of searching for 1-factors in graphs) may be used on arbitrary graphs.

The second part concerns elementary graphs. In a graph possessing a 1-factor, we call an edge "forbidden" if it does not belong to any 1-factor of the graph. We call a graph "elementary" if it remains connected even after the removal of all forbidden edges. The paper provides a few properties of elementary graphs, first and foremost of bipartite elementary graphs.

The third part answers a question of Tibor Gallai by describing those elementary graphs which cease to remain elementary if one deletes any of their edges (without removing any vertex). It turns out that every nontrivial minimally elementary graph arises from an elementary graph with fewer vertices by replacing some edges by paths of length 3.

[*Note: The scan of this article was kindly provided by the author's family at Silvio Levy's request. The author's son, also called Gabor Hetyei, prepared the English abstract, adding the reference to Tibor Gallai at the author's request. Mathematical Sciences Publishers thanks all those who helped make this frequently cited article more accessible.*]