

Pacific Journal of Mathematics

UN THÉORÈME DE RÉALISATION DE GROUPES RÉTICULÉS

PAULO RIBENBOIM

UN THÉORÈME DE RÉALISATION DE GROUPES RÉTICULÉS

P. RIBENBOIM

En 1939, Lorenzen [4] a démontré que tout groupe réticulé est isomorphe à un sous-groupe sous-réticulé d'un produit direct de groupes totalement ordonnés. Pour le faire, il a utilisé la théorie des systèmes d'idéaux, introduite auparavant par Krull [2] dans l'arithmétique des anneaux d'intégrité commutatifs.

Dans cette note, nous démontrons ce même théorème par une méthode distincte, qui utilise la notion de filet de Jaffard [1]. Notre démonstration semble plus transparente et met en relief certains aspects d'intérêt qui ne sont pas du tout apparents dans le travail de Lorenzen: (1) la réalisation qui nous obtenons est complètement régulière, de Hausdorff et fidèle (ces termes sont définis ci-dessous); (2) il y a une relation entre les ultrafiltres de l'ensemble des filets du groupe donné et les pré-ordres totaux plus fins, laquelle est utile pour exprimer l'ordre donné comme la conjonction d'ordres totaux plus fins (cf. Krull [3], Ribenboim [5, 6]).

1. Rappelons d'abord les définitions et résultats qui seront utilisés. Soit G un groupe (abélien additif) réticulé (selon l'ordre \leq) et notons P l'ensemble des éléments positifs de G ; G est un réticulé distributif. Si $f \in P$ soit $E(f) = \{g \in P \mid g \wedge f = 0\}$ l'ensemble des éléments de P étrangers à f . Posons $f \equiv g$ si et seulement si $E(f) = E(g)$. La classe d'équivalence \bar{f} contenant l'élément $f \in P$ s'appelle le *filet* de f . Soit \mathcal{F} l'ensemble des filets du groupe G , déterminés par les éléments $f \in P$. \mathcal{F} est ordonné en posant $\bar{f} \leq \bar{g}$ si et seulement si $E(f) \supseteq E(g)$; \mathcal{F} possède un premier élément $\bar{0} = \{0\}$; si $f, g \in P, f \leq g$ alors $\bar{f} \leq \bar{g}$; \mathcal{F} est un réticulé distributif:

$$\bar{f} \wedge \bar{g} = \overline{f \wedge g}, \bar{f} \vee \bar{g} = \overline{f \vee g} = \overline{f + g};$$

on a $\bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$ si et seulement si $f \wedge g = 0$; \mathcal{F} est disjonctif: si $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{F}$ \bar{f} ne suit pas \bar{g} dans \mathcal{F} , il existe $\bar{h} \in \mathcal{F}$ tel que $\bar{0} \neq \bar{h} \leq \bar{g}, \bar{h} \wedge \bar{f} = \bar{0}$.

Si $f \in G$ (mais non nécessairement $f \in P$) posons par définition: $\bar{f} = \overline{f_+ \vee f_-}$, donc $\bar{f} = \overline{|f|}$, où $|f| = f_+ + f_- \in P$.

Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes totalement ordonnés, $\prod_{i \in I} G_i$ leur produit direct ordonné; un isomorphisme θ d'un groupe ordonné G dans $\prod_{i \in I} G_i$ s'appelle une *réalisation* lorsque $pr_i \theta(G) = G_i$ quelque soit $i \in I$. Par un théorème de Lorenzen-Dieudonné, un groupe ordonné G admet une réalisation si et seulement s'il vérifie la condition suivante: si $f \in G$

Received March 16, 1959.

et $nf \geq 0$, où n est un entier strictement positif, alors $f \geq 0$. En particulier, tout groupe réticulé satisfait cette condition et admet alors une réalisation.

La réalisation $\theta : G \rightarrow \theta(G) \subseteq \prod_{i \in I} G_i$ est dite *concordante* (ou propre) lorsque $\theta(G)$ est un sous-réticulé de $\prod_{i \in I} G_i$ (la réalisation obtenue dans la démonstration du théorème de Lorenzen-Dieudonné n'est pas concordante).

Si $f \in G$ notons $\sigma(f) = \{\iota \in I \mid \text{pr}_\iota \theta(f) \neq 0\}$. Alors $\sigma(f \vee g) = \sigma(f) \cup \sigma(g)$, $\sigma(f \wedge g) = \sigma(f) \cap \sigma(g)$ lorsque θ est une réalisation concordante.

La réalisation $\theta : G \rightarrow \theta(G) \subseteq \prod_{i \in I} G_i$ est dite *complètement régulière* lorsque : si $\iota \in I$, $f \in P$, $\iota \notin \sigma(f)$ alors il existe $g \in P$ tel que $\iota \in \sigma(g)$, $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$.

La réalisation $\theta : G \rightarrow \theta(G) \subseteq \prod_{i \in I} G_i$ est dite *de Hausdorff* lorsque : si $\iota, \kappa \in I$, $\iota \neq \kappa$, il existe $f, g \in P$ tels que $\iota \in \sigma(f)$, $\kappa \in \sigma(g)$, $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$.

La réalisation indiquée dans le théorème de Lorenzen-Dieudonné n'est pas complètement régulière, ni de Hausdorff.

LEMME 1. *Si θ est une réalisation concordante et complètement régulière alors θ est fidèle, c'est-à-dire : si $f, g \in P$ alors $\bar{f} = \bar{g}$ si et seulement si $\sigma(f) = \sigma(g)$; ainsi σ définit un isomorphisme du réticulé \mathcal{F} des filets de G sur un sous-réticulé de celui de parties de l'ensemble I , en posant $\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f})$.*

En effet, soit $\bar{f} = \bar{g}$ et $\iota \in \sigma(g)$, $\iota \notin \sigma(f)$; alors il existe $h \in P$ tel que $\iota \in \sigma(h)$, $\sigma(h) \cap \sigma(f) = \emptyset$; donc $\sigma(h \wedge f) = \emptyset$ et $h \wedge f = 0$; or, θ étant concordante, $\iota \in \sigma(h) \cap \sigma(g) = \sigma(h \wedge g)$ donc $h \wedge g \neq 0$ et alors $\bar{f} \neq \bar{g}$, absurde! Ainsi, on a bien $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Réciproquement, si $\sigma(f) = \sigma(g)$, si $h \in P$ est tel que $h \wedge f = 0$, alors

$$\phi = \sigma(h \wedge f) = \sigma(h) \cap \sigma(f) = \sigma(h) \cap \sigma(g) = \sigma(h \wedge g)$$

donc $h \wedge g = 0$, et vice-versa, donc $\bar{f} = \bar{g}$.

Par conséquent, si on pose $\bar{\sigma}(\bar{f}) = \sigma(f)$ alors $\bar{\sigma}(\bar{0}) = \emptyset$, $\bar{\sigma}(\bar{f} \vee \bar{g}) = \bar{\sigma}(\bar{f}) \cup \bar{\sigma}(\bar{g})$, $\bar{\sigma}(\bar{f} \wedge \bar{g}) = \bar{\sigma}(\bar{f}) \cap \bar{\sigma}(\bar{g})$ (où $\bar{f}, \bar{g} \in P$) et $\bar{\sigma}$ est bien un isomorphisme du réticulé \mathcal{F} des filets de G dans celui des parties de I .

2. Théorème de réalisation. Tout groupe réticulé admet une réalisation concordante et complètement régulière.

Démonstration.

1°. Soit G le groupe réticulé donné, \mathcal{F} le réticulé des filets de G , Ω l'ensemble des ultrafiltres de \mathcal{F} . Pour tout $U \in \Omega$ soit $P_U = \{f \in G \mid \text{il existe } \alpha \in U \text{ tel que } \bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}\}$. Alors $P_U + P_U \subseteq P_U$. En effet, si $f, g \in G$ et $\beta, \gamma \in U$ sont tels que $\bar{f} \wedge \beta = \bar{0}$, $\bar{g} \wedge \gamma = \bar{0}$ alors

$$\begin{aligned} \overline{(f + g)} \wedge (\beta \wedge \gamma) &\leq \overline{f + g} \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\bar{f} \vee \bar{g}) \wedge (\beta \wedge \gamma) \\ &= (\bar{f} \wedge \beta \wedge \gamma) \vee (\bar{g} \wedge \beta \wedge \gamma) = \bar{0} \end{aligned}$$

avec $\beta \wedge \gamma \in U$, donc $f + g \in P_U$. De même, $P_U \cap (-P_U) = \{f \in G \mid \text{il existe } \alpha \in U \text{ tel que } \bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}\}$. En effet, si $\bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}$ alors de $\bar{f} = \bar{f}_+ \vee \bar{f}_-$ vient $\bar{0} = \bar{f} \wedge \alpha = (\bar{f}_+ \vee \bar{f}_-) \wedge \alpha = (\bar{f}_+ \wedge \alpha) \vee (\bar{f}_- \wedge \alpha)$ donc $\bar{f}_- \wedge \alpha = \bar{0}$, $(-\bar{f})_- \wedge \alpha = \bar{f}_+ \wedge \alpha = \bar{0}$; réciproquement. Enfin, $G = P_U \cup (-P_U)$. En effet, si $f \notin P_U$ alors $\bar{f}_- \wedge \alpha \neq \bar{0}$ quelque soit $\alpha \in U$, donc $\bar{f}_+ \notin U$ (car $\bar{f}_- \wedge \bar{f}_+ = \bar{0}$) et alors il existe $\beta \in U$ tel que $\bar{0} = \bar{f}_+ \wedge \beta = \overline{(-f)}_- \wedge \beta$, c'est-à-dire $-f \in P_U$.

2°. Nous venons de voir que P_U définit un pré-ordre total compatible sur G . Soit $G'_U = G/(P_U \cap (-P_U))$ et considérons $P'_U = P_U/(P_U \cap (-P_U))$ donc P'_U définit un ordre total compatible sur G'_U . Pour tout $f \in G$ soit f'_U son image canonique en G'_U . Si $f \in G$ posons $\theta(f) = (f'_U)_{U \in \Omega} \in \prod_{U \in \Omega} G'_U$ et montrons que θ est un isomorphisme de G dans le produit direct ordonné $\prod_{U \in \Omega} G'_U$. D'abord $\theta(f + g) = \theta(f) + \theta(g)$ car $(f + g)'_U = f'_U + g'_U$ quelque soit $U \in \Omega$. Si $f \neq 0$ il existe $U \in \Omega$ tel que $\bar{f} \in U$ donc $\bar{f} \wedge \alpha \neq \bar{0}$ quelque soit $\alpha \in U$ et $f \notin P_U \cap (-P_U)$, c'est-à-dire $f'_U \neq 0$ et alors $\theta(f) \neq 0$. Si $f \in P$ alors $f_- = 0$ donc $f \in P_U$ quelque soit $U \in \Omega$ et alors $\theta(f) = (f'_U)_{U \in \Omega}$ est positif dans $\prod_{U \in \Omega} G'_U$. Réciproquement, si $f \notin P$ alors $f_- \neq 0$ donc il existe $U \in \Omega$ tel que $\bar{f}_- \in U$ et alors $f \notin P_U$ car $\bar{f}_- \wedge \alpha \neq \bar{0}$ quelque soit $\alpha \in U$, donc $\theta(f)$ n'est pas positif, car $f'_U \notin P'_U$.

3°. θ est une réalisation, car $pr_U \theta(G) = G'_U$ quelque soit $U \in \Omega$; en effet, si $f'_U \in G'_U$ avec $f \in G$ alors $pr_U \theta(f) = f'_U$. L'isomorphisme θ est concordant, c'est-à-dire, $\theta(f \wedge g) = \inf \{\theta(f), \theta(g)\}$, $\theta(f \vee g) = \sup \{\theta(f), \theta(g)\}$ (inf et sup pris dans $\prod_{U \in \Omega} G'_U$); pour cela, on doit montrer que $pr_U \theta(f \wedge g) = \inf \{pr_U \theta(f), pr_U \theta(g)\}$ (inf pris dans G'_U) pour tout $U \in \Omega$ (analoguement pour le sup). Puisque G'_U est totalement ordonné, alors par exemple $f'_U \leq g'_U$ dans G'_U dans $g'_U - f'_U = (g - f)'_U \in P'_U$ et alors $g - f \in P_U$, donc il existe $\beta \in U$ tel que $\overline{(g - f)}_- \wedge \beta = \bar{0}$; or, alors $f \wedge g$ et f sont quasi-égaux selon le pré-ordre défini par P_U , c'est-à-dire, $f \wedge g - f \in P_U \cap (-P_U)$; en effet, $\overline{f \wedge g - f} \wedge \beta = \bar{0} \wedge \overline{(g - f)}_- \wedge \beta = \overline{-(g - f)}_- \wedge \beta = \bar{0}$. Donc $pr_U \theta(f \wedge g) = (f \wedge g)'_U = f'_U = f'_U \wedge g'_U = \inf \{pr_U \theta(f), pr_U \theta(g)\}$.

4°. Montrons maintenant que la réalisation est complètement régulière. Soit $U \in \Omega$, $f \in P$ tel que $U \notin \sigma(f) = \{V \in \Omega \mid pr_V \theta(f) \neq 0\}$, donc $pr_U \theta(f) = 0$ et alors $f \in P_U \cap (-P_U)$; ainsi, il existe $g \in P$, $\bar{g} \in U$, tel que $\bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$, donc $f \wedge g = 0$ et par conséquent $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \emptyset$; enfin $pr_U \theta(g) \neq 0$, c'est-à-dire $g \notin P_U \cap (-P_U)$, sinon il existe $\beta \in U$ tel que $\bar{g} \wedge \beta = \bar{0}$, absurde!

REMARQUE. On a $\sigma(f) = \{U \in \Omega \mid \bar{f} \in U\}$ quelque soit $f \in G$, et θ est une réalisation de Hausdorff. En effet, si $f \in G$, $\bar{f} \in U$, alors $pr_U \theta(f) \neq 0$, car sinon $f \in P_U \cap (-P_U)$ et il existe $\alpha \in U$ tel que $\bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}$, absurde!

Réciproquement, si $\bar{f} \notin U$ il existe $\beta \in U$ tel que $\bar{f} \wedge \beta = \bar{0}$ donc $f \in P_U \cap (-P_V)$ et alors $\text{pr}_U \theta(f) = 0$. Il résulte que si $U, V \in \Omega$, $U \neq V$, il existe $f, g \in P$ tel que $\bar{f} \in U, \bar{f} \notin V, \bar{g} \in V, \bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$, donc $\bar{g} \notin U$ et alors $U \in \sigma(f)$, $V \in \sigma(g)$, $f \wedge g = 0$, donc $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \phi$.

REFERENCES

1. P. Jaffard, *Contribution à l'Etude des Groupes Ordonnés*, J. Math. Pures et Appl., **32** (1953), 203-280.
2. W. Krull, *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I*, Math. Z., **41** (1936), 545-577.
3. W. Krull, *Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen*, Math. Z., **64** (1956), 10-40.
4. P. Lorenzen, *Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie*, Math. Z., **45** (1939), 533-553.
5. P. Ribenboim, *Conjonction d'Ordres dans les Groupes Abéliens Ordonnés* Anais Acad. Bras. Ci., **29** (1957), 201-224.
6. ———, *Sur quelques Construction de Groupes Réticulés et l'Equivalence Logique entre l'Affinement de Filtres et d'Ordres*, Summa Bras. Math., **4** (1958) 65-89.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA,
RIO DE JANEIRO, BRASIL

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

EDITORS

DAVID GILBARG
Stanford University
Stanford, California

F. H. BROWNELL
University of Washington
Seattle 5, Washington

A. L. WHITEMAN
University of Southern California
Los Angeles 7, California

L. J. PAIGE
University of California
Los Angeles 24, California

ASSOCIATE EDITORS

E. F. BECKENBACH
G. M. CHERRY
D. DERRY

E. HEWITT
A. HORN
L. NACHBIN

M. OHTSUKA
H. L. ROYDEN
M. M. SCHIFFER

E. SPANIER
E. G. STRAUS
F. WOLF

SUPPORTING INSTITUTIONS

UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
MONTANA STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF NEVADA
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
OREGON STATE COLLEGE
UNIVERSITY OF OREGON
OSAKA UNIVERSITY
UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA

STANFORD UNIVERSITY
UNIVERSITY OF TOKYO
UNIVERSITY OF UTAH
WASHINGTON STATE COLLEGE
UNIVERSITY OF WASHINGTON
* * *
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
CALIFORNIA RESEARCH CORPORATION
HUGHES AIRCRAFT COMPANY
SPACE TECHNOLOGY LABORATORIES
NAVAL ORDNANCE TEST STATION

Printed in Japan by Kokusai Bunken Insatsusha
(International Academic Printing Co., Ltd.), Tokyo, Japan

Pacific Journal of Mathematics

Vol. 10, No. 1

September, 1960

Richard Arens, <i>Extensions of Banach algebras</i>	1
Fred Guenther Brauer, <i>Spectral theory for linear systems of differential equations</i>	17
Herbert Busemann and Ernst Gabor Straus, <i>Area and normality</i>	35
J. H. Case and Richard Eliot Chamberlin, <i>Characterizations of tree-like continua</i>	73
Ralph Boyett Crouch, <i>Characteristic subgroups of monomial groups</i>	85
Richard J. Driscoll, <i>Existence theorems for certain classes of two-point boundary problems by variational methods</i>	91
A. M. Duguid, <i>A class of hyper-FC-groups</i>	117
Adriano Mario Garsia, <i>The calculation of conformal parameters for some imbedded Riemann surfaces</i>	121
Irving Leonard Glicksberg, <i>Homomorphisms of certain algebras of measures</i>	167
Branko Grünbaum, <i>Some applications of expansion constants</i>	193
John Hilzman, <i>Error bounds for an approximate solution to the Volterra integral equation</i>	203
Charles Ray Hobby, <i>The Frattini subgroup of a p-group</i>	209
Milton Lees, <i>von Neumann difference approximation to hyperbolic equations</i>	213
Azriel Lévy, <i>Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory</i>	223
Benjamin Muckenhoupt, <i>On certain singular integrals</i>	239
Kotaro Oikawa, <i>On the stability of boundary components</i>	263
J. Marshall Osborn, <i>Loops with the weak inverse property</i>	295
Paulo Ribenboim, <i>Un théorème de réalisation de groupes réticulés</i>	305
Daniel Saltz, <i>An inversion theorem for Laplace-Stieltjes transforms</i>	309
Berthold Schweizer and Abe Sklar, <i>Statistical metric spaces</i>	313
Morris Weisfeld, <i>On derivations in division rings</i>	335
Bertram Yood, <i>Faithful $*$-representations of normed algebras</i>	345