Pacific Journal of Mathematics

SUR UN THÉORÈME DE MOONEY RELATIF AUX FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

ERIC AMAR

Vol. 49, No. 2 June 1973

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 49, No. 2, 1973

SUR UN THÉORÈME DE MOONEY RELATIF AUX FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

ERIC AMAR

We give a short proof of the following theorem of Mooney: If $\{\Phi_n\}$ is a sequence in $L^1(-\pi, \pi)$ such that $\lim_n \int f\Phi_n = l(f)$ exists for all $f \in H^\infty$, then there is $\Phi \in L^1$ such that $l(f) = \int f\Phi$ for all $f \in H^\infty$.

NOTONS. $H^\infty(D)$ l'algèbre uniforme des fonctions analytiques bornées dans:

$$D = \{z \in \boldsymbol{C};\, |z| < 1\}$$

$$T = \{z \in \boldsymbol{C};\, |z| = 1\}: \qquad \text{et } L^1(T, \lambda)$$

l'espace des fonctions intégrables pour la mesure de Haar λ sur T.

$$A(D) = H^\infty(D) \cap C(T)\,.$$

Le but de cette note est de donner une autre démonstration du théorème suivant dû à Mooney [4]:

THÉORÈME. *Si $\{\phi_n\}_{n \in N}$ est une suite d'éléments de $L^1(T, \lambda)$ telle que:*

$$\forall f \in H^\infty(D),\ l(f) = \lim_{n \to \infty} \int f\phi_n \, d\lambda$$

existe, alors il existe $\phi \in L^1(T, \lambda)$ tel que:

$$(*) \qquad l(f) = \int f\phi \, d\lambda \ \backsim\ \forall f \in H^\infty(D)\,.$$

Cette démonstration est basée sur une proposition démontrée dans [3] qui permet d'appliquer à $H^\infty(D)$ la méthode que J. P. Kahane [2] a utilisé pour démontrer (*) lorsque f appartient à $A(D)$.

1. Reduction du probleme. Soit X la frontiére de Shilov de $H^\infty(D)$; m la mesure représentative unique de l'origine, alors on sait [1] que $L^1(X, m)$ est isométriquement isomorphe à $L^1(T, \lambda)$.

Utilisant cet isomorphisme, les données sont alors les suivantes: Soit $\{\phi_n\}_{n \in N}$ une suite de $L^1(X, m)$ telle que:

$$\forall f \in H^\infty(D);\ l(f) = \lim_{n \to \infty} \int_X \hat{f}\Phi_n \, dm$$

existe; expression dans laquelle $\hat{f}$ désigne la transformée de Gelfand de f. Il s'agit alors de trouver $\phi \in L^1(X, m)$ telle que:

$$l(f) = \int_X \hat{f}\phi \, dm \qquad \forall f \in H^\infty(D) .$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, $l(f)$ est une forme linéaire continue sur $H^\infty(D)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure μ borélienne sur X telle que:

$$l(f) = \int_X \hat{f} \, d\mu .$$

Décomposons μ par rapport à m:

$$d\mu = \eta \, dm + d\mu_s; \ \eta \in L^1(X, m); \ \mu_s$$

singulière par rapport à m. Posant:

$$\Phi_n = \phi_n - \eta \text{ on a: } \lim_{n\to\infty} \int_X \hat{f}\Phi_n \, dm = \int_X \hat{f} \, d\mu_s .$$

Pour démontrer le théorème il suffit alors de montrer que μ_s est orthogonale à $H^\infty(D)$.

2. **Rappelons la proposition de [2].** (**) Pour tout compact K de X, de m mesure nulle, il existe un compact P tel que:

(i) $K \subset P \subset X$

(ii) $m(P) = 0$

(iii) P est pic pour $H^\infty(D)$ sur X.

On en déduit le lemme suivant:

LEMME. *Soit ν une mesure sur X; ν singulière par rapport à m et telle que*:

$$\nu(X) = \alpha \neq 0 .$$

Alors il existe un ensemble pic P pour $H^\infty(D)$ tel que:

$$\nu(P) \neq 0 \ \textit{et} \ m(P) = 0 .$$

Démonstration. $|\nu|$ est singulière donc:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K \text{ compact} \subset X$$

tel que:

$$m(K) = 0; \ |\nu|(X \backslash K) < \varepsilon .$$

Par (**):

$$\exists P \supset K;\ m(P) = 0;\ P \text{ pic pour } H^\infty(D) \text{ sur } X .$$

Donc

$$|\nu|(X \backslash P) < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\nu(P)| \geqq |\nu(X)| - \varepsilon = |\alpha| - \varepsilon .$$

D'où le lemme avec $\varepsilon = |\alpha|/2$.

3. Démonstration du théorème. Supposons qu'il existe $g \in H^\infty(D)$ tel que:

$$\int \hat{g} d\mu_s \neq 0 .$$

Posant: $d\nu = \hat{g} d\mu_s$, on peut appliquer le lemme à ν. Donc il existe P, pic pour $H^\infty(D)$ tel que:

$$m(P) = 0 \quad \text{et} \quad |\nu(P)| > 0 .$$

Soit alors $h \in H^\infty(D)$ une fonction qui pique sur P:

$$\hat{h}(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in P$$

$$|\hat{h}(x)| < 1 \quad \text{si} \quad x \notin P ;$$

en particulier $|h(z)| < 1$; $z \in D$. Soit enfin:

$$\Psi_n = \hat{g}\Phi_n \in L^1(X, m) .$$

On a:

$$\lim_{n\to\infty} \int \hat{f}\Psi_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int \hat{f}\hat{g}\Phi_n dm = \int \hat{f}\hat{g} d\mu_s ; \quad \forall f \in H^\infty(D), \text{ car } fg \in H^\infty(D) .$$

De plus:

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_X \hat{h}^k d\nu = \nu(P) \neq 0$$

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_X \hat{h}^k \Psi_n dm = 0 \qquad \forall n \in N$$

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X \hat{h}^k \Psi_n dm = \int_X \hat{h}^k d\nu \qquad \forall k \in N .$$

Posant:

$$f = \sum_0^\infty (-1)^j h^{m_j};\ m_j \in N ,$$

on montre comme dans [3], que pour une suite de m_j croissant assez vite, $f \in H^\infty(D)$.

Reprenant exactement la méthode de J. P. Kahane [2], on arrive à la contradiction:

$$\int_X \hat{f} \Psi_n dm$$

n'est pas de Cauchy.

Donc il n'existe pas de $g \in H^\infty(D)$ tel que $\int \hat{g} d\mu_s \neq 0$, et μ_s est bien orthogonale à $H^\infty(D)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

1. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice Hall (1969).
2. J. P. Kahane, Proc. Amer. Math. Soc., **18** (1967), 827-831.
3. A. Lederer et E. Amar, C. R. Acad. Sc. Paris, p. 1449-1452 (2 juin 1971).
4. Mooney, *A theorem on bounded analytic functions*.

Received September 13, 1972.

FACULTE DES SCIENCES 91, ORSAY, FRANCE

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typed form or offset-reproduced, (not dittoed), double spaced with large margins. Underline Greek letters in red, German in green, and script in blue. The first paragraph or two must be capable of being used separately as a synopsis of the entire paper. Items of the bibliography should not be cited there unless absolutely necessary, in which case they must be identified by author and Journal, rather than by item number. Manuscripts, in duplicate if possible, may be sent to any one of the four editors. Please classify according to the scheme of Math. Rev. Index to Vol. **39**. All other communications to the editors should be addressed to the managing editor, or Elaine Barth, University of California, Los Angeles, California, 90024.

50 reprints are provided free for each article; additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* is issued monthly as of January 1966. Regular subscription rate: $ 48.00 a year (6 Vols., 12 issues). Special rate: $ 24.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for back numbers, and changes of address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, 103 Highland Boulevard, Berkeley, California, 94708.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION

Printed at Kokusai Bunken Insatsusha (International Academic Printing Co., Ltd.), 270, 3-chome Totsuka-cho, Shinjuku-ku, Tokyo 160, Japan.

Pacific Journal of Mathematics

Vol. 49, No. 2 June, 1973