Pacific Journal of Mathematics

GLÄTTUNGEN VON ABBILDUNGEN 3-DIMENSIONALER MANNIGFALTIGKEITEN

Harald Boehme

Vol. 61, No. 1 November 1975

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 61, No. 1, 1975

GLÄTTUNGEN VON ABBILDUNGEN 3-DIMENSIONALER MANNIGFALTIGKEITEN

HARALD BOEHME

Let N and M be compact 3-dimensional manifolds, $f: N \to M$ a map. Furthermore let given a Heegaard splitting for M, which certainly exists if M is closed, and then it is a pair (V, W), where V, W are handlebodies (possibly non orientable) with $M = V \cup W$, $V \cap W = \partial V = \partial W$. It will be shown, that f can be deformed into a normal form with respect to the Heegaard splitting of M: either f has the absolute degree 0, or f is homotopic to a map g with the property that $g \mid g^{-1}(V)$ is a covering map.

Einen ersten Spezialfall des hier vorgeführten Resultats erhielt E. Moise im Zusammenhang mit der Poincaréschen Vermutung [6], [7]. In seinem Theorem ist die Aussage enthalten, daß eine Abbildung der 3-Sphäre $f: S^3 \to M$ mit grad $f = 1$ homotop ist zu einer Abbildung g, wobei $g \mid g^{-1}(V)$ ein Homöomorphismus und V ein Henkelkörper zu einer gegebenen Heegaard-Zerlegung von M ist (das gleiche gilt auch für W. Haken [2]). Dieses Ergebnis wurde von F. Waldhausen wesentlich verschärft und zugleich auf beliebige Abbildungen von geschlossenen, orientierbaren 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit grad $f = 1$ ausgedehnt [9].

Nach diesen Arbeiten entstand die Frage, ob sich auch für Abbildungen mit beliebigem Abbildungsgrad eine Normalform finden läßt. Dies ist tatsächlich der Fall, und ergibt sich aus einer Verallgemeinerung der alten Methode von H. Kneser zur Glättung von Flächenabbildungen [4], [5]. Er ging dabei von simplizialen Abbildungen aus und betrachtete die Urbilder der einzelnen Simplexe. Es ist klar, daß diese für die Codimensionen 0 und 1 nicht sehr kompliziert sein können; die entscheidenden Singularitäten sind "Falten", d.h. zwei benachbarte 2-Simplexe werden auf eins abgebildet. Eine solche Falte verschwindet durch eine einfache Deformation der gemeinsamen Grundseite, jedoch muß H. Kneser dazu noch geeignete simpliziale Unterteilungen angeben. Die adäquate Beschreibung der geometrischen Idee gelingt erst in der semilinearen Kategorie. Dazu werden die Simplexe durch Henkel ersetzt und die Glättungen über den 0- und 1-Henkeln durchgeführt, welche zusammen einen Henkelkörper V bilden. Für eine Abbildung 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten $f: N \to M$ ist nach Beseitigung der Falten $f \mid f^{-1}(V)$ schon eine Überlagerung auf allen wesentlichen Komponenten. Das Problem, diese Komponenten durch eine Deformation von f zu vereinigen, kann gelöst werden, falls V von einer Heegaard-Zerlegung von M kommt.

0. Notation. Es wird in der semilinearen Kategorie gearbeitet. Alle vorkommenden Mannigfaltigkeiten sind kompakt. Reguläre Umgebungen sind klein gegenüber allen anderen Objekten in der Mannigfaltigkeit. Ein n-Element E^n ist homöomorph dem n-Simplex.

Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei J eine Mannigfaltigkeit in M, nicht notwendig zusammenhängend, $J \cap \partial M = \partial J$, codim $J = q$. Eine Umgebung $V(J)$ in M ist *prismatisch*, wenn sie sich mit einem Bündel $J \times E^q$ über J identifizieren läßt, so daß $J = J \times x_0$, $x_0 \in \mathring{E}^q$, und $(J \times E^q) \cap \partial M = \partial J \times E^q$.

Sei Γ ein zusammenhängender Graph in M, $\Gamma \cap \partial M = \emptyset$. Eine reguläre Umgebung $V(\Gamma)$ in M ist ein *Henkelkörper* in M. Er besteht aus einer prismatischen Umgebung $V(\Gamma^0)$ in M (Γ^0 ist die Menge der Ecken von Γ), das sind 3-Elemente $h_1^0, \cdots, h_s^0$, und aus einer prismatischen Umgebung $V((\Gamma - V(\Gamma^0))^-)$ in $(M - V(\Gamma^0))^-$, das sind 3-Elemente $h_1^1, \cdots, h_t^1$. Dabei ist h^r ein r-Henkel, und es ergibt sich insgesamt eine Henkelzerlegung von $V(\Gamma)$, siehe [3].

1. Faltenreduktion. Seien N und M 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, sei $f: (N, \partial N) \to (M, \partial M)$ eine Abbildung.

DEFINITION. Sei J eine Mannigfaltigkeit in M, $J \cap \partial M = \partial J$. f ist *transversal bzgl.* J, wenn es eine prismatische Umgebung $V(J)$ in M gibt, so daß $f^{-1}(V(J))$ ein Bündel ist, und f jede Faser homöomorph auf eine Faser von $V(J)$ abbildet.

DEFINITION. Sei Γ ein Graph in M, $\Gamma \cap \partial M = \emptyset$. f ist *transversal bzgl.* Γ, wenn gilt:

(1) f ist transversal bzgl. Γ^0; die zugehörige prismatische Umgebung sei $V(\Gamma^0)$.

(2) Die von f induzierte Abbildung

$$(N - f^{-1}(V(\Gamma^0)))^- \longrightarrow (M - V(\Gamma^0))^-$$

ist transversal bzgl. $(\Gamma - V(\Gamma^0))^-$.

Sei f transversal bzgl. Γ, dann ist $f^{-1}(\Gamma^0)$ eine Menge von Ecken in N, ihre Anzahl sei $\alpha(f, \Gamma^0)$, und $f^{-1}(\Gamma)$ ist ein 1-dimensionaler Komplex in N, die Anzahl der Komponenten sei $\beta(f, \Gamma)$. Das Tupel (α, β) in lexicographischer Ordnung mißt die Kompliziertheit von f bzgl. Γ.

Sei Λ eine Komponente von $f^{-1}(\Gamma)$, sei $\Lambda^0 = \Lambda \cap f^{-1}(\Gamma^0)$. Es gilt genau einer der folgenden Fälle:

(1) $\Lambda^0 \neq \emptyset$; Λ wird dann als *Graph* bezeichnet, wobei Λ^0 die Menge der Ecken ist.

(2) $\Lambda^0 = \emptyset$; in diesem Fall ist Λ ein *Zyklus*.

LEMMA 1.1. *Seien N und M 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, sei Γ ein zusammenhängender Graph in M, $\Gamma \cap \partial M = \emptyset$. Sei $f: (N, \partial N) \longrightarrow (M, \partial M)$ eine Abbildung, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g, so daß gilt:*

(1) *g ist transversal bzgl. Γ.*

(2) *Für jede Komponente Λ von $g^{-1}(\Gamma)$, die ein Graph ist, ist $g \mid \Lambda: \Lambda \longrightarrow \Gamma$ eine Überlagerung.*

Beweis. (1) Nach einer Homotopie analog [8, 1.1] ist f transversal bzgl. Γ^0, die weitere Transversalität läßt sich ebenso erreichen. Die entstehende Abbildung sei g, und die zugehörige reguläre Umgebung $V(\Gamma)$ habe die Henkelzerlegung

$$V(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{s} h_i^0 \cup \bigcup_{j=1}^{t} h_j^1 .$$

(2) Sei Λ eine Komponente von $g^{-1}(\Gamma)$, die ein Graph ist. Um $g \mid \Lambda$ zu einer Überlagerung zu machen, genügt es, wenn für jede Kante l von Λ mit $g(l) = k$, k ist eine Kante von Γ, die induzierte Abbildung $(l', \partial l') \longrightarrow (k', \partial k')$ den Grad ± 1 hat, wobei

$$l' = \left(l - g^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{s} h_i^0\right)\right)^{-}, \; k' = \left(k - \bigcup_{i=1}^{s} h_i^0\right)^{-} .$$

Eine Kante l von Λ, die das nicht erfüllt, ist eine *Falte* von g über k ([4], Γ entspricht dem dualen 1-Gerüst dort).

Sei l eine Falte, seien U_i, $i = 1, 2$, Komponenten von $g^{-1}(\bigcup_{i=1}^{s} h_i^0)$, sei U_3 eine Komponente von $g^{-1}(\bigcup_{j=1}^{t} h_j^1)$, so daß $U = \bigcup_{i=1}^{2} U_i \cup U_3$ eine reguläre Umgebung von l ist. Es gibt eine Homotopie von g rel $g^{-1}(\bigcup_{i=1}^{s} h_i^0)$, deren Abbildungen transversal bzgl. Γ sind, $g^{-1}(\Gamma)$ fest lassen, und die selben zugehörigen Umgebungen haben, so daß $g(l') = P$, $P \in \partial k'$. Sei ferner $P \in \partial h_1^0$, dann induziert jetzt g die Abbildung $g \mid U: (U, \partial U) \longrightarrow (h_1^0, \partial h_1^0)$. Da $P \notin g(\partial U)$, gibt es eine Homotopie von $g \mid U$ rel ∂U, so daß $g(U) \subset \partial h_1^0$. Danach hat $g^{-1}(\Gamma^0)$ genau zwei Ecken weniger. Die Transversalität von g bzgl. Γ wird wieder hergestellt, ohne $g^{-1}(\Gamma^0)$ zu ändern, für die neue Kompliziertheit gilt dann $\alpha' = \alpha - 2$. Nach endlich vielen Schritten sind alle Falten beseitigt.

2. Abbildungen über Heegaard-Zerlegungen.

DEFINITION. Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine

Heegaard-Zerlegung von M ist ein geordnetes Paar von Untermannigfaltigkeiten (V, W), so daß $M = V \cup W$, $V \cap W = \partial V = \partial_- W$, $\partial_- W$ ist eine Komponente von ∂W, und es gilt:

(1) V ist ein Henkelkörper in M.

(2) W hat eine Henkelzerlegung

$$W = \partial_- W \times I \cup \bigcup_{k=1}^{u} h_k^2 \cup \bigcup_{l=1}^{v} h_l^3 ,$$

$\partial_- W = \partial_- W \times 0$.

Das *Geschlecht* der Heegaard-Zerlegung ist das Geschlecht von V.

Sei $\partial M = \varnothing$, dann besitzt M sicher eine Heegaard-Zerlegung, und W ist ebenfalls ein Henkelkörper in M.

SATZ 2.1. *Seien N und M 3-dimensional Mannigfaltigkeiten, sei (V, W) eine Heegaard-Zerlegung von M, deren Geschlecht $\geqq 1$ ist, ferner sei Γ ein Graph in M und V eine reguläre Umgebung von Γ. Sei f: $(N, \partial N) \longrightarrow (M, \partial M)$ eine Abbildung, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g, so daß entweder* (a) *oder* (b) *gilt.*

(a) $\alpha(g, \Gamma^0) = 0$

(b) $g \mid g^{-1}(V)$: $g^{-1}(V) \longrightarrow V$ *ist eine Überlagerung.*

Beweis. Zunächst wird f in eine Abbildung g deformiert, für die (1.1) bzgl. Γ gilt. Es kann angenommen werden, daß V eine Umgebung von Γ zur Transversalität von g ist, und V habe die Henkelzerlegung $V = \bigcup_{i=1}^{s} h_i^0 \cup \bigcup_{j=1}^{t} h_j^1$. Es folgt Fall (b), wenn $g^{-1}(\Gamma)$ ein zusammenhängender Graph ist.

Sei $\alpha(g, \Gamma^0) \neq 0$, dann gibt es eine Komponente Λ_1 von $g^{-1}(\Gamma)$, die ein Graph ist, und $g \mid \Lambda_1$: $\Lambda_1 \longrightarrow \Gamma$ ist eine Überlagerung. Sei Λ_2 eine weitere Komponente von $g^{-1}(\Gamma)$, Λ_2 ist ein Graph oder ein Zyklus. Im ersten Fall hat Λ_2 das Geschlecht $\geqq 1$, also gibt es in Λ_2 eine nicht zerlegende Kante l_2. Im zweiten Fall sei $\Lambda_2 = l_2$ Sei k die Kante von Γ mit $g(l_2) \subset k$, und sei h_1^1 der zugehörige 1-Henkel von V. Sei $Q_2 \in l_2 \cap g^{-1}(h_1^1)$, $g(Q_2) = P$, ferner seien $Q_{1,1}, \cdots, Q_{1,n}$ die Punkte in Λ_1 mit $g(Q_{1,p}) = P$, $p = 1, \cdots, n$. Sei $P' \in \partial h_1^1$ in der Faser über P, $Q'_{1,p}$ *bzw.* Q'_2 seien Punkte in der Faser über $Q_{1,p}$*bzw.* Q_2 mit $g(Q'_{1,p}) = g(Q'_2) = P'$.

LEMMA 2.2. *Es gibt eine Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$, wonach in $g^{-1}(W)$ ein Weg w von $Q'_{1,p}$ nach Q'_2 existiert, $p \in \{1, \cdots, n\}$, so daß die von g induzierte Abbildung $(w, \partial w) \longrightarrow (W, P')$ nullhomotop ist.*

Beweis. In $g^{-1}(W)$ gibt es einen Weg w von $Q'_{1,1}$ nach Q'_2. Durch eine Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$ läßt sich $g(w)$ aus $\bigcup_{l=1}^{v} h_l^3$

und $\bigcup_{k=1}^{u} h_k^2$ herausdrücken, es ist dann $g(w) \subset (\partial_- W \times I) - (\partial_- W \times 1)$. Nach einer weiteren Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$ ist g transversal bzgl. $((\partial_- W \times 1) - \partial W)^-$, und $g^{-1}(\partial_- W \times I)$ ist eine Untermannigfaltigkeit in N, welche w enthält.

In $\partial_- W$ sei das System $c_1, \cdots, c_m$ von einfachen Kurven eine kanonische Zerschneidung mit dem gemeinsamen Punkt c_0, ferner sei $C_i = c_i \times I$, $i = 0, \cdots, m$. Nach weiteren Homotopien ist $g \mid g^{-1}(\partial_- W \times I)$ *transversal bzgl.* $C_0, \cdots, C_m$, d.h.

(1) $g \mid g^{-1}(\partial_- W \times I)$ ist transversal bzgl. C_0; die zugehörige prismatische Umgebung sei U_0.

(2) Die von g induzierte Abbildung

$$g^{-1}(((\partial_- W \times I) - U_0)^-) \longrightarrow ((\partial_- W \times I) - U_0)^-$$

ist transversal bzgl. $(C_1 - U_0)^-, \cdots, (C_m - U_0)^-$.

Sei $F_i = g^{-1}((C_i - U_0)^-)$, $\mathrm{i} = 1, \cdots, m$, dies ist eine Fläche in $g^{-1}(((\partial_- W \times I) - U_0)^-)$, nicht notwendig zusammenhängend. In allgemeiner Lage ist auch w in $g^{-1}(((\partial_- W \times I) - U_0)^-)$, und w trifft die Flächen $F_1, \cdots, F_m$ transversal. Von $Q'_{1,1}$ ausgehend werde zunächst F_1 getroffen, dieser erste Teilweg sei w_1. $g(w_1)$ zeichnet eine Seite von C_1 aus, und damit auch von c_1. Zu dieser Seite läßt sich P' mit c_1 durch einen Weg in $\partial_- W$ verbinden, ohne daß die kanonische Zerschneidung sonst getroffen wird. Die Liftung davon ergibt einen Weg w_0 in $g^{-1}(\partial_- W)$ von $Q'_{1,1}$ nach F_1. Der Weg $w_0 \cup w_1$ wird leicht von $g^{-1}(\partial_- W)$ abgehoben, es entsteht ein Weg w' mit $w' \cap F_i = \partial w'$, $i = 1$, und $w' \cap F_i = \emptyset$ sonst.

Aus der Konstruktion folgt, daß die von g induzierte Abbildung $(w', \partial w') \longrightarrow (\partial_- W \times I, C_1)$ nullhomotop ist. Ohne die Situation sonst zu ändern gibt es eine Homotopie von $g \mid g^{-1}(\partial_- W \times I)$, deren Abbildungen transversal bzgl. $C_0, \cdots, C_m$ sind, so daß $g(w') \subset I$, wobei I eine Faser der zugehörigen prismatischen Umgebung von $(C_1 - U_0)^-$ ist. Dann läßt sich g so deformieren, daß in F_1 eine reguläre Umgebung von $\partial w'$ durch einen Kreisring ersetzt wird, der in einer regulären Umgebung von w' liegt und $w \cup w'$ nicht trifft (dies ist die Umkehrung zu [8, S. 507 *u.*]). Das nunmehr freie Ende von w' bei $g^{-1}(\partial_- W)$ wird mit einem Punkt $Q''_{1,1}$ aus $g^{-1}(\partial_- W)$ verbunden. In $\partial_- W$ gibt es einen Weg von $g(Q''_{1,1})$ nach P', der die kanonische Zerschneidung sonst nicht trifft. Die Liftung davon ergibt einen Weg w'' in $g^{-1}(\partial_- W)$ von $Q''_{1,1}$ nach $Q'_{1,p}$, $p \in \{1, \cdots, n\}$. In w wird w_1 durch $w' \cup w''$ ersetzt, der neue Weg trifft $F_1, \cdots, F_m$ in einem Punkt weniger. Schließlich ist $\mathrm{w} \cap F_i = \emptyset$, und damit $g(w) \cap C_i = \emptyset$, $i = 1, \cdots, m$.

Sei w der Weg aus (2.2), es gibt dann eine Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$ so daß $g(w) = P'$. In einer Faser von h_1^1 wird P durch einen einfachen Weg mit P' verbunden, in den Fasern über $Q_{1,p}$ bzw. Q_2 sind die Urbilder dazu Wege nach $Q'_{1,p}$ bzw. Q'_2, insgesamt entsteht ein einfacher Weg $\tilde{w}$ von $Q_{1,p}$ nach Q_2. Nun läßt sich g so deformieren, daß in $g^{-1}(\Gamma)$ eine reguläre Umgebung von $\partial\tilde{w}$ durch zwei Wege längs $\tilde{w}$ ersetzt wird, g wieder transversal bzgl. Γ ist, und alle anderen Objekte fest bleiben. Danach hat $g^{-1}(\Gamma)$ eine Komponente weniger, für die neue Kompliziertheit gilt $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta - 1$. Es ist nun (1.1) erfüllt, oder die Beseitigung von Falten ergibt $\alpha'' < \alpha$. Die Abbildung ist also so lange zu vereinfachen, bis die Behauptung von (2.1) gilt.

KOROLLAR 2.3 *Seien N und M geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, sei (V, W) eine Heegaard-Zerlegung von M, deren Gechlecht $\geqq 1$ ist. Sei $f\colon N \to M$ eine Abbildung, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g, so daß entweder* (a) *oder* (b) *gilt.*

(a) *$g(N) \subset K^2$; K^2 ist ein 2-dimensionaler Komplex in M.*

(b) *In N gibt es Untermannigfaltigkeiten $X, Y, X \cap Y = \emptyset$, so daß $g \mid X\colon X \to V$, $g \mid Y\colon Y \to W$ Überlagerungen sind und $g(N - (X \cup Y))^- \subset \partial V$.*

Beweis. Seien Γ bzw. Γ_1 Graphen in M, so daß V bzw. W reguläre Umgebungen davon sind. Sei W_1 eine reguläre Umgebung von Γ_1 in W, es ist dann $(W - W_1)^- = \partial W \times I$, $\partial W = \partial W \times 0$, und damit $(W_1, \partial W \times I)$ eine Heegaard-Zerlegung von W. Nach (2.1) gibt es eine zu f homotope Abbildung g, für die entweder (a) oder (b) gilt.

(a) $g(N) \subset \bigcup_{j=1}^{t} h_j^1 \cup W$

(b) $g \mid g^{-1}(V)\colon g^{-1}(V) \to V$ ist eine Überlagerung.

Im Fall (a) läßt sich $g(N)$ auf einen Komplex K^2 retrahieren. Im Fall (b) wird (2.1) wieder für die Abbildung $g \mid g^{-1}(W)\colon g^{-1}(W) \to W$ angewandt, dabei kann die Homotopie natürlich auf dem Rand konstant gewählt werden. Es entsteht eine zu f homotope Abbildung g_1, für die entweder (a_1) oder (b_1) gilt.

(a_1) $g_1(N) \subset V \cup \partial W \times I \cup \bigcup_{k=1}^{u} h_k^2$

(b_1) $g_1 \mid g_1^{-1}(W_1)\colon g_1^{-1}(W_1) \to W_1$ ist eine Überlagerung.

Im Fall (a_1) läßt sich wieder $g_1(N)$ auf einen Komplex K_1^2 retrahieren. Im Fall (b_1) sei $X = g_1^{-1}(V)$, $Y = g_1^{-1}(W_1)$, damit ist $g_1(N - (X \cup Y))^- \subset \partial W \times I$. Es gibt eine zur Identität homotope Abbildung $p\colon (W_1, \partial W \times I) \to (W, \partial V)$, wobei $p \mid W_1\colon W_1 \to W$ ein Homöomorphismus ist und $p \mid \partial W \times I$ die Projektion auf $\partial W = \partial V$. Mit $g = pg_1$ folgt die Behauptung (b).

BEMERKUNG. In (2.1) sei A der Absolutgrad von f. Sei $z \in \Gamma^0$, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g, so daß g transversal bzgl. z ist, und $g^{-1}(z)$ genau A Komponenten hat [1]. Im Beweis von (2.1) kann sich diese Anzahl höchstens durch Faltenreduktion verringern, was aber nicht möglich ist. Danach ergibt sich Fall (a) genau dann, wenn $A = 0$, und im Fall (b) ist A die Blätterzahl von $g \mid g^{-1}(V)$.

LITERATUR

1. D. B. A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc., (3) **16** (1966), 369-383.
2. W. Haken, *On homotopy 3-spheres*, Illinois J. Math., **10** (1966) 159-178.
3. J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, New York. Benjamin 1969.
4. H. Kneser, *Glättungen von Flächenabbildungen*, Math. Ann., **100** (1928), 609-617.
5. ———, *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen*, Math. Ann., **103** (1930), 347-358.
6. E. Moise, *Simply connected 3-manifolds. Topology of 3-manifolds and related topics*, Prentice-Hall 1962.
7. ———, *A monotonic mapping theorem for simply connected 3-manifolds*, Illinois J. Math., **12** (1968), 451-474.
8. F. Waldhausen, *Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Topology, **6** (1967), 505-517.
9. ———, *On mappings of handlebodies and of Heegard splittings*, Topology of manifolds, Chicago, Markham 1970.

Received July 25, 1974.

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN-WEST

Printed in Japan by International Academic Printing Co., Ltd., Tokyo, Japan

Pacific Journal of Mathematics

Vol. 61, No. 1 November, 1975