

Pacific Journal of Mathematics

**GLÄTTUNGEN VON ABBILDUNGEN 3-DIMENSIONALER
MANNIGFALTIGKEITEN**

HARALD BOEHME

GLÄTTUNGEN VON ABBILDUNGEN 3-DIMENSIONALER MANNIGFALTIGKEITEN

HARALD BOEHME

Let N and M be compact 3-dimensional manifolds, $f: N \rightarrow M$ a map. Furthermore let given a Heegaard splitting for M , which certainly exists if M is closed, and then it is a pair (V, W) , where V, W are handlebodies (possibly non orientable) with $M = V \cup W$, $V \cap W = \partial V = \partial W$. It will be shown, that f can be deformed into a normal form with respect to the Heegaard splitting of M : either f has the absolute degree 0, or f is homotopic to a map g with the property that $g|g^{-1}(V)$ is a covering map.

Einen ersten Spezialfall des hier vorgeführten Resultats erhielt E. Moise im Zusammenhang mit der Poincaréschen Vermutung [6], [7]. In seinem Theorem ist die Aussage enthalten, daß eine Abbildung der 3-Sphäre $f: S^3 \rightarrow M$ mit $\text{grad } f = 1$ homotop ist zu einer Abbildung g , wobei $g|g^{-1}(V)$ ein Homöomorphismus und V ein Henkelkörper zu einer gegebenen Heegaard-Zerlegung von M ist (das gleiche gilt auch für W . Haken [2]). Dieses Ergebnis wurde von F. Waldhausen wesentlich verschärft und zugleich auf beliebige Abbildungen von geschlossenen, orientierbaren 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit $\text{grad } f = 1$ ausgedehnt [9].

Nach diesen Arbeiten entstand die Frage, ob sich auch für Abbildungen mit beliebigem Abbildungsgrad eine Normalform finden läßt. Dies ist tatsächlich der Fall, und ergibt sich aus einer Verallgemeinerung der alten Methode von H. Kneser zur Glättung von Flächenabbildungen [4], [5]. Er ging dabei von simplizialen Abbildungen aus und betrachtete die Urbilder der einzelnen Simplexe. Es ist klar, daß diese für die Codimensionen 0 und 1 nicht sehr kompliziert sein können; die entscheidenden Singularitäten sind "Falten", d.h. zwei benachbarte 2-Simplexe werden auf eins abgebildet. Eine solche Falte verschwindet durch eine einfache Deformation der gemeinsamen Grundseite, jedoch muß H. Kneser dazu noch geeignete simpliziale Unterteilungen angeben. Die adäquate Beschreibung der geometrischen Idee gelingt erst in der semilinearen Kategorie. Dazu werden die Simplexe durch Henkel ersetzt und die Glättungen über den 0- und 1-Henkeln durchgeführt, welche zusammen einen Henkelkörper V bilden. Für eine Abbildung 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten $f: N \rightarrow M$ ist nach Beseitigung der Falten $f|f^{-1}(V)$ schon eine Überlagerung auf allen wesentlichen Komponenten. Das Problem, diese Komponenten durch eine Defor-

mation von f zu vereinigen, kann gelöst werden, falls V von einer Heegaard-Zerlegung von M kommt.

0. Notation. Es wird in der semilinearen Kategorie gearbeitet. Alle vorkommenden Mannigfaltigkeiten sind kompakt. Reguläre Umgebungen sind klein gegenüber allen anderen Objekten in der Mannigfaltigkeit. Ein n -Element E^n ist homöomorph dem n -Simplex.

Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei J eine Mannigfaltigkeit in M , nicht notwendig zusammenhängend, $J \cap \partial M = \partial J$, $\text{codim } J = q$. Eine Umgebung $V(J)$ in M ist *prismatisch*, wenn sie sich mit einem Bündel $J \times E^q$ über J identifizieren läßt, so daß $J = J \times x_0$, $x_0 \in \dot{E}^q$, und $(J \times E^q) \cap \partial M = \partial J \times E^q$.

Sei Γ ein zusammenhängender Graph in M , $\Gamma \cap \partial M = \emptyset$. Eine reguläre Umgebung $V(\Gamma)$ in M ist ein *Henkelkörper* in M . Er besteht aus einer prismatischen Umgebung $V(\Gamma^0)$ in M (Γ^0 ist die Menge der Ecken von Γ), das sind 3-Elemente h_0^1, \dots, h_s^1 , und aus einer prismatischen Umgebung $V((\Gamma - V(\Gamma^0))^-)$ in $(M - V(\Gamma^0))^-$, das sind 3-Elemente h_1^1, \dots, h_t^1 . Dabei ist h^r ein r -Henkel, und es ergibt sich insgesamt eine Henkelzerlegung von $V(\Gamma)$, siehe [3].

1. Faltenreduktion. Seien N und M 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, sei $f: (N, \partial N) \rightarrow (M, \partial M)$ eine Abbildung.

DEFINITION. Sei J eine Mannigfaltigkeit in M , $J \cap \partial M = \partial J$. f ist *transversal bzgl. J* , wenn es eine prismatische Umgebung $V(J)$ in M gibt, so daß $f^{-1}(V(J))$ ein Bündel ist, und f jede Faser homöomorph auf eine Faser von $V(J)$ abbildet.

DEFINITION. Sei Γ ein Graph in M , $\Gamma \cap \partial M = \emptyset$. f ist *transversal bzgl. Γ* , wenn gilt:

(1) f ist transversal bzgl. Γ^0 ; die zugehörige prismatische Umgebung sei $V(\Gamma^0)$.

(2) Die von f induzierte Abbildung

$$(N - f^{-1}(V(\Gamma^0)))^- \longrightarrow (M - V(\Gamma^0))^-$$

ist transversal bzgl. $(\Gamma - V(\Gamma^0))^-$.

Sei f transversal bzgl. Γ , dann ist $f^{-1}(\Gamma^0)$ eine Menge von Ecken in N , ihre Anzahl sei $\alpha(f, \Gamma^0)$, und $f^{-1}(\Gamma)$ ist ein 1-dimensionaler Komplex in N , die Anzahl der Komponenten sei $\beta(f, \Gamma)$. Das Tupel (α, β) in lexicographischer Ordnung mißt die Kompliziertheit von f bzgl. Γ .

Sei A eine Komponente von $f^{-1}(\Gamma)$, sei $A^0 = A \cap f^{-1}(\Gamma^0)$. Es gilt genau einer der folgenden Fälle:

(1) $A^0 \neq \emptyset$; A wird dann als *Graph* bezeichnet, wobei A^0 die Menge der Ecken ist.

(2) $A^0 = \emptyset$; in diesem Fall ist A ein *Zyklus*.

LEMMA 1.1. *Seien N und M 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, sei Γ ein zusammenhängender Graph in M , $\Gamma \cap \partial M = \emptyset$. Sei $f: (N, \partial N) \rightarrow (M, \partial M)$ eine Abbildung, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g , so daß gilt:*

(1) g ist transversal bzgl. Γ .

(2) Für jede Komponente A von $g^{-1}(\Gamma)$, die ein Graph ist, ist $g|_A: A \rightarrow \Gamma$ eine Überlagerung.

Beweis. (1) Nach einer Homotopie analog [8, 1.1] ist f transversal bzgl. Γ^0 , die weitere Transversalität läßt sich ebenso erreichen. Die entstehende Abbildung sei g , und die zugehörige reguläre Umgebung $V(\Gamma)$ habe die Henkelzerlegung

$$V(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^s h_i^0 \cup \bigcup_{j=1}^t h_j^1.$$

(2) Sei A eine Komponente von $g^{-1}(\Gamma)$, die ein Graph ist. Um $g|_A$ zu einer Überlagerung zu machen, genügt es, wenn für jede Kante l von A mit $g(l) = k$, k ist eine Kante von Γ , die induzierte Abbildung $(l', \partial l') \rightarrow (k', \partial k')$ den Grad ± 1 hat, wobei

$$l' = \left(l - g^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^s h_i^0 \right) \right)^-, \quad k' = \left(k - \bigcup_{i=1}^s h_i^0 \right)^-.$$

Eine Kante l von A , die das nicht erfüllt, ist eine *Falte* von g über k ([4], Γ entspricht dem dualen 1-Gerüst dort).

Sei l eine Falte, seien U_i , $i = 1, 2$, Komponenten von $g^{-1}(\bigcup_{i=1}^s h_i^0)$, sei U_3 eine Komponente von $g^{-1}(\bigcup_{j=1}^t h_j^1)$, so daß $U = \bigcup_{i=1}^2 U_i \cup U_3$ eine reguläre Umgebung von l ist. Es gibt eine Homotopie von g rel $g^{-1}(\bigcup_{i=1}^s h_i^0)$, deren Abbildungen transversal bzgl. Γ sind, $g^{-1}(\Gamma)$ fest lassen, und die selben zugehörigen Umgebungen haben, so daß $g(l) = P$, $P \in \partial k'$. Sei ferner $P \in \partial h_i^0$, dann induziert jetzt g die Abbildung $g|_U: (U, \partial U) \rightarrow (h_i^0, \partial h_i^0)$. Da $P \notin g(\partial U)$, gibt es eine Homotopie von $g|_U$ rel ∂U , so daß $g(U) \subset \partial h_i^0$. Danach hat $g^{-1}(\Gamma^0)$ genau zwei Ecken weniger. Die Transversalität von g bzgl. Γ wird wieder hergestellt, ohne $g^{-1}(\Gamma^0)$ zu ändern, für die neue Kompliziertheit gilt dann $\alpha' = \alpha - 2$. Nach endlich vielen Schritten sind alle Falten beseitigt.

2. Abbildungen über Heegaard-Zerlegungen.

DEFINITION. Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine

Heegaard-Zerlegung von M ist ein geordnetes Paar von Untermannigfaltigkeiten (V, W) , so daß $M = V \cup W$, $V \cap W = \partial V = \partial_- W$, $\partial_- W$ ist eine Komponente von ∂W , und es gilt:

- (1) V ist ein Henkelkörper in M .
- (2) W hat eine Henkelzerlegung

$$W = \partial_- W \times I \cup \bigcup_{k=1}^u h_k^2 \cup \bigcup_{l=1}^v h_l^3,$$

$$\partial_- W = \partial_- W \times 0.$$

Das *Geschlecht* der Heegaard-Zerlegung ist das Geschlecht von V .

Sei $\partial M = \emptyset$, dann besitzt M sicher eine Heegaard-Zerlegung, und W ist ebenfalls ein Henkelkörper in M .

SATZ 2.1. *Seien N und M 3-dimensional Mannigfaltigkeiten, sei (V, W) eine Heegaard-Zerlegung von M , deren Geschlecht ≥ 1 ist, ferner sei Γ ein Graph in M und V eine reguläre Umgebung von Γ . Sei $f: (N, \partial N) \rightarrow (M, \partial M)$ eine Abbildung, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g , so daß entweder (a) oder (b) gilt.*

- (a) $\alpha(g, \Gamma^0) = 0$
- (b) $g|_{g^{-1}(V)}: g^{-1}(V) \rightarrow V$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Zunächst wird f in eine Abbildung g deformiert, für die (1.1) bzgl. Γ gilt. Es kann angenommen werden, daß V eine Umgebung von Γ zur Transversalität von g ist, und V habe die Henkelzerlegung $V = \bigcup_{i=1}^s h_i^0 \cup \bigcup_{j=1}^t h_j^1$. Es folgt Fall (b), wenn $g^{-1}(\Gamma)$ ein zusammenhängender Graph ist.

Sei $\alpha(g, \Gamma^0) \neq 0$, dann gibt es eine Komponente A_1 von $g^{-1}(\Gamma)$, die ein Graph ist, und $g|_{A_1}: A_1 \rightarrow \Gamma$ ist eine Überlagerung. Sei A_2 eine weitere Komponente von $g^{-1}(\Gamma)$, A_2 ist ein Graph oder ein Zyklus. Im ersten Fall hat A_2 das Geschlecht ≥ 1 , also gibt es in A_2 eine nicht zerlegende Kante l_2 . Im zweiten Fall sei $A_2 = l_2$. Sei k die Kante von Γ mit $g(l_2) \subset k$, und sei h_1^1 der zugehörige 1-Henkel von V . Sei $Q_2 \in l_2 \cap g^{-1}(h_1^1)$, $g(Q_2) = P$, ferner seien $Q_{1,1}, \dots, Q_{1,n}$ die Punkte in A_1 mit $g(Q_{1,p}) = P$, $p = 1, \dots, n$. Sei $P' \in \partial h_1^1$ in der Faser über P , $Q'_{1,p}$ bzw. Q'_2 seien Punkte in der Faser über $Q_{1,p}$ bzw. Q_2 mit $g(Q'_{1,p}) = g(Q'_2) = P'$.

LEMMA 2.2. *Es gibt eine Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$, wonach in $g^{-1}(W)$ ein Weg w von $Q'_{1,p}$ nach Q'_2 existiert, $p \in \{1, \dots, n\}$, so daß die von g induzierte Abbildung $(w, \partial w) \rightarrow (W, P')$ nullhomotop ist.*

Beweis. In $g^{-1}(W)$ gibt es einen Weg w von $Q'_{1,1}$ nach Q'_2 . Durch eine Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$ läßt sich $g(w)$ aus $\bigcup_{i=1}^n h_i^3$

und $\bigcup_{k=1}^m h_k^2$ herausdrücken, es ist dann $g(w) \subset (\partial_- W \times I) - (\partial_- W \times 1)$. Nach einer weiteren Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$ ist g transversal bzgl. $((\partial_- W \times 1) - \partial W)^-$, und $g^{-1}(\partial_- W \times I)$ ist eine Untermannigfaltigkeit in N , welche w enthält.

In $\partial_- W$ sei das System c_1, \dots, c_m von einfachen Kurven eine kanonische Zerschneidung mit dem gemeinsamen Punkt c_0 , ferner sei $C_i = c_i \times I$, $i = 0, \dots, m$. Nach weiteren Homotopien ist $g | g^{-1}(\partial_- W \times I)$ transversal bzgl. C_0, \dots, C_m , d.h.

(1) $g | g^{-1}(\partial_- W \times I)$ ist transversal bzgl. C_0 ; die zugehörige prismatische Umgebung sei U_0 .

(2) Die von g induzierte Abbildung

$$g^{-1}(((\partial_- W \times I) - U_0)^-) \longrightarrow ((\partial_- W \times I) - U_0)^-$$

ist transversal bzgl. $(C_1 - U_0)^-, \dots, (C_m - U_0)^-$.

Sei $F_i = g^{-1}((C_i - U_0)^-)$, $i = 1, \dots, m$, dies ist eine Fläche in $g^{-1}(((\partial_- W \times I) - U_0)^-)$, nicht notwendig zusammenhängend. In allgemeiner Lage ist auch w in $g^{-1}(((\partial_- W \times I) - U_0)^-)$, und w trifft die Flächen F_1, \dots, F_m transversal. Von $Q'_{1,1}$ ausgehend werde zunächst F_1 getroffen, dieser erste Teilweg sei w_1 . $g(w_1)$ zeichnet eine Seite von C_1 aus, und damit auch von c_1 . Zu dieser Seite läßt sich P' mit c_1 durch einen Weg in $\partial_- W$ verbinden, ohne daß die kanonische Zerschneidung sonst getroffen wird. Die Liftung davon ergibt einen Weg w_0 in $g^{-1}(\partial_- W)$ von $Q'_{1,1}$ nach F_1 . Der Weg $w_0 \cup w_1$ wird leicht von $g^{-1}(\partial_- W)$ abgehoben, es entsteht ein Weg w' mit $w' \cap F_i = \partial w'$, $i = 1$, und $w' \cap F_i = \emptyset$ sonst.

Aus der Konstruktion folgt, daß die von g induzierte Abbildung $(w', \partial w') \rightarrow (\partial_- W \times I, C_1)$ nullhomotop ist. Ohne die Situation sonst zu ändern gibt es eine Homotopie von $g | g^{-1}(\partial_- W \times I)$, deren Abbildungen transversal bzgl. C_0, \dots, C_m sind, so daß $g(w') \subset I$, wobei I eine Faser der zugehörigen prismatischen Umgebung von $(C_1 - U_0)^-$ ist. Dann läßt sich g so deformieren, daß in F_1 eine reguläre Umgebung von $\partial w'$ durch einen Kreisring ersetzt wird, der in einer regulären Umgebung von w' liegt und $w \cup w'$ nicht trifft (dies ist die Umkehrung zu [8, S. 507 u.]). Das nunmehr freie Ende von w' bei $g^{-1}(\partial_- W)$ wird mit einem Punkt $Q''_{1,1}$ aus $g^{-1}(\partial_- W)$ verbunden. In $\partial_- W$ gibt es einen Weg von $g(Q''_{1,1})$ nach P' , der die kanonische Zerschneidung sonst nicht trifft. Die Liftung davon ergibt einen Weg w'' in $g^{-1}(\partial_- W)$ von $Q''_{1,1}$ nach $Q'_{1,p}$, $p \in \{1, \dots, n\}$. In w wird w_1 durch $w' \cup w''$ ersetzt, der neue Weg trifft F_1, \dots, F_m in einem Punkt weniger. Schließlich ist $w \cap F_i = \emptyset$, und damit $g(w) \cap C_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, m$.

Sei w der Weg aus (2.2), es gibt dann eine Homotopie von g rel $g^{-1}(V)$ so daß $g(w) = P'$. In einer Faser von h_1^1 wird P durch

einen einfachen Weg mit P' verbunden, in den Fasern über $Q_{1,p}$ bzw. Q_2 sind die Urbilder dazu Wege nach $Q'_{1,p}$ bzw. Q'_2 , insgesamt entsteht ein einfacher Weg \tilde{w} von $Q_{1,p}$ nach Q_2 . Nun läßt sich g so deformieren, daß in $g^{-1}(\Gamma)$ eine reguläre Umgebung von $\partial\tilde{w}$ durch zwei Wege längs \tilde{w} ersetzt wird, g wieder transversal bzgl. Γ ist, und alle anderen Objekte fest bleiben. Danach hat $g^{-1}(\Gamma)$ eine Komponente weniger, für die neue Kompliziertheit gilt $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta - 1$. Es ist nun (1.1) erfüllt, oder die Beseitigung von Falten ergibt $\alpha'' < \alpha$. Die Abbildung ist also so lange zu vereinfachen, bis die Behauptung von (2.1) gilt.

KOROLLAR 2.3 *Seien N und M geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, sei (V, W) eine Heegaard-Zerlegung von M , deren Geschlecht ≥ 1 ist. Sei $f: N \rightarrow M$ eine Abbildung, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g , so daß entweder (a) oder (b) gilt.*

(a) $g(N) \subset K^2$; K^2 ist ein 2-dimensionaler Komplex in M .

(b) In N gibt es Untermannigfaltigkeiten $X, Y, X \cap Y = \emptyset$, so daß $g|X: X \rightarrow V$, $g|Y: Y \rightarrow W$ Überlagerungen sind und $g(N - (X \cup Y))^- \subset \partial V$.

Beweis. Seien Γ bzw. Γ_1 Graphen in M , so daß V bzw. W reguläre Umgebungen davon sind. Sei W_1 eine reguläre Umgebung von Γ_1 in W , es ist dann $(W - W_1)^- = \partial W \times I$, $\partial W = \partial W \times 0$, und damit $(W_1, \partial W \times I)$ eine Heegaard-Zerlegung von W . Nach (2.1) gibt es eine zu f homotope Abbildung g , für die entweder (a) oder (b) gilt.

(a) $g(N) \subset \bigcup_{j=1}^t h_j^1 \cup W$

(b) $g|g^{-1}(V): g^{-1}(V) \rightarrow V$ ist eine Überlagerung.

Im Fall (a) läßt sich $g(N)$ auf einen Komplex K^2 retrahieren. Im Fall (b) wird (2.1) wieder für die Abbildung $g|g^{-1}(W): g^{-1}(W) \rightarrow W$ angewandt, dabei kann die Homotopie natürlich auf dem Rand konstant gewählt werden. Es entsteht eine zu f homotope Abbildung g_1 , für die entweder (a₁) oder (b₁) gilt.

(a₁) $g_1(N) \subset V \cup \partial W \times I \cup \bigcup_{k=1}^u h_k^2$

(b₁) $g_1|g_1^{-1}(W_1): g_1^{-1}(W_1) \rightarrow W_1$ ist eine Überlagerung.

Im Fall (a₁) läßt sich wieder $g_1(N)$ auf einen Komplex K_1^2 retrahieren. Im Fall (b₁) sei $X = g_1^{-1}(V)$, $Y = g_1^{-1}(W_1)$, damit ist $g_1(N - (X \cup Y))^- \subset \partial W \times I$. Es gibt eine zur Identität homotope Abbildung $p: (W_1, \partial W \times I) \rightarrow (W, \partial V)$, wobei $p|W_1: W_1 \rightarrow W$ ein Homöomorphismus ist und $p|\partial W \times I$ die Projektion auf $\partial W = \partial V$. Mit $g = pg_1$ folgt die Behauptung (b).

BEMERKUNG. In (2.1) sei A der Absolutgrad von f . Sei $z \in I^0$, dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g , so daß g transversal bzgl. z ist, und $g^{-1}(z)$ genau A Komponenten hat [1]. Im Beweis von (2.1) kann sich diese Anzahl höchstens durch Faltenreduktion verringern, was aber nicht möglich ist. Danach ergibt sich Fall (a) genau dann, wenn $A = 0$, und im Fall (b) ist A die Blätterzahl von $g | g^{-1}(V)$.

LITERATUR

1. D. B. A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc., (3) **16** (1966), 369-383.
2. W. Haken, *On homotopy 3-spheres*, Illinois J. Math., **10** (1966) 159-178.
3. J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, New York. Benjamin 1969.
4. H. Kneser, *Glättungen von Flächenabbildungen*, Math. Ann., **100** (1928), 609-617.
5. ———, *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen*, Math. Ann., **103** (1930), 347-358.
6. E. Moise, *Simply connected 3-manifolds. Topology of 3-manifolds and related topics*, Prentice-Hall 1962.
7. ———, *A monotonic mapping theorem for simply connected 3-manifolds*, Illinois J. Math., **12** (1968), 451-474.
8. F. Waldhausen, *Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Topology, **6** (1967), 505-517.
9. ———, *On mappings of handlebodies and of Heegard splittings*, Topology of manifolds, Chicago, Markham 1970.

Received July 25, 1974.

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN-WEST

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

EDITORS

RICHARD ARENS (Managing Editor)
University of California
Los Angeles, California 90024

J. DUGUNDJI
Department of Mathematics
University of Southern California
Los Angeles, California 90007

R. A. BEAUMONT
University of Washington
Seattle, Washington 98105

D. GILBARG AND J. MILGRAM
Stanford University
Stanford, California 94305

ASSOCIATE EDITORS

E. F. BECKENBACH

B. H. NEUMANN

F. WOLF

K. YOSHIDA

SUPPORTING INSTITUTIONS

UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
MONTANA STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF NEVADA
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
OREGON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF OREGON
OSAKA UNIVERSITY

UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA
STANFORD UNIVERSITY
UNIVERSITY OF TOKYO
UNIVERSITY OF UTAH
WASHINGTON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF WASHINGTON
* * *
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
NAVAL WEAPONS CENTER

Jiří Adámek, V. Koubek and Věra Trnková, <i>Sums of Boolean spaces represent every group</i>	1
Richard Neal Ball, <i>Full convex l-subgroups and the existence of a^*-closures of lattice ordered groups</i>	7
Joseph Becker, <i>Normal hypersurfaces</i>	17
Gerald A. Beer, <i>Starshaped sets and the Hausdorff metric</i>	21
Dennis Dale Berkey and Alan Cecil Lazer, <i>Linear differential systems with measurable coefficients</i>	29
Harald Boehme, <i>Glättungen von Abbildungen 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten</i>	45
Stephen LaVern Campbell, <i>Linear operators for which T^*T and $T + T^*$ commute</i>	53
H. P. Dikshit and Arun Kumar, <i>Absolute summability of Fourier series with factors</i>	59
Andrew George Earnest and John Sollion Hsia, <i>Spinor norms of local integral rotations. II</i>	71
Erik Maurice Ellentuck, <i>Semigroups, Horn sentences and isolic structures</i>	87
Ingrid Fotino, <i>Generalized convolution ring of arithmetic functions</i>	103
Michael Randy Gabel, <i>Lower bounds on the stable range of polynomial rings</i>	117
Fergus John Gaines, <i>Kato-Taussky-Wielandt commutator relations and characteristic curves</i>	121
Theodore William Gamelin, <i>The polynomial hulls of certain subsets of C^2</i>	129
R. J. Gazik and Darrell Conley Kent, <i>Coarse uniform convergence spaces</i>	143
Paul R. Goodey, <i>A note on starshaped sets</i>	151
Eloise A. Hamann, <i>On power-invariance</i>	153
M. Jayachandran and M. Rajagopalan, <i>Scattered compactification for $N \cup \{P\}$</i>	161
V. Karunakaran, <i>Certain classes of regular univalent functions</i>	173
John Cronan Kieffer, <i>A ratio limit theorem for a strongly subadditive set function in a locally compact amenable group</i>	183
Siu Kwong Lo and Harald G. Niederreiter, <i>Banach-Buck measure, density, and uniform distribution in rings of algebraic integers</i>	191
Harold W. Martin, <i>Contractibility of topological spaces onto metric spaces</i>	209
Harold W. Martin, <i>Local connectedness in developable spaces</i>	219
A. Meir and John W. Moon, <i>Relations between packing and covering numbers of a tree</i>	225
Hiroshi Mori, <i>Notes on stable currents</i>	235
Donald J. Newman and I. J. Schoenberg, <i>Splines and the logarithmic function</i>	241
M. Ann Piech, <i>Locality of the number of particles operator</i>	259
Fred Richman, <i>The constructive theory of KT-modules</i>	263
Gerard Sierksma, <i>Carathéodory and Helly-numbers of convex-product-structures</i>	275
Raymond Earl Smithson, <i>Subcontinuity for multifunctions</i>	283
Gary Roy Spoar, <i>Differentiability conditions and bounds on singular points</i>	289
Rosario Strano, <i>Azumaya algebras over Hensel rings</i>	295