Pacific Journal of Mathematics

SUR LES SUITES D'INTERPOLATION EN PLUSIEURS VARIABLES

DENISE AMAR AND ERIC AMAR

Vol. 75, No. 1 September 1978

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 75, No. 1, 1978

SUR LES SUITES D'INTERPOLATION EN PLUSIEURS VARIABLES

DENISE ET ERIC AMAR

We prove that there exists a sequence σ in the polydisc $\mathbf{D}^2$ of $\mathbf{C}^2$ (resp in the unit ball $\mathbf{B}_2$ of $\mathbf{C}^2$) such that σ is strongly $H^2(D^2)$ (resp. $H^2(\mathbf{B}^2)$) interpolating but not $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ (resp. $H^\infty(\mathbf{B}_2)$) interpolating. These results are corollaries of a result of this kind for the Bergman class $A^2(D)$ of the unit disc.

1. Introduction et notations. Soit λ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$; on note $H^\infty(\mathbf{D})$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbf{D}$ et $A^2(\mathbf{D})$ l'espace de Bergman des fonctions analytiques dans $\mathbf{D}$ telles que:

$$\int_{\mathbf{D}} |f(z)|^2 d\lambda(z) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Soit $\sigma = \{z_n, n \in \mathbf{N}\}$ une suite dans $\mathbf{D}$, on dit que σ est fortement d'interpolation $A^2(\mathbf{D})$ si l'opérateur T_2 défini sur $A^2(\mathbf{D})$ dans l'espace des suites par

$$\forall f \in A^2(\mathbf{D}), \quad T_2 f = \{(1-|z_n|^2) f(z_n), \quad n \in \mathbf{N}\}$$

est continu et surjectif sur $l^2(\mathbf{N})$;

on dit que σ est d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$ si l'opérateur T_∞ de $H^\infty(\mathbf{D})$ dans l'espace des suites définit par:

$$\forall f \in H^\infty(\mathbf{D}), \quad T_\infty f = \{f(z_n), n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif sur $l^\infty(\mathbf{N})$.

Dans cette note on montre le

THEOREME 1. *Il existe une suite σ qui est fortement d'interpolation $A^2(\mathbf{D})$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$.*

Ce résultat contraste avec la cas de la classe de Hardy $H^2(\mathbf{D})$ car on sait **[6]** que interpolation $H^2(\mathbf{D})$ entraîne interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$.

Soit $d\mathcal{M}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\mathbf{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2, |z| = |w| = 1\}$ (respectivement $d\mu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur la sphère $S_2 = \partial \mathbf{B}_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$) on note encore $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans le polydisque $\mathbf{D}^2$ et $H^2(\mathbf{S}^2)$ l'espace des fonctions analytiques f dans $\mathbf{D}^2$ telles que:

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}^2} |f(rz, rw)|^2 \, dm(z, w) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

De même $H^\infty(\mathbf{B}_2)$ désignera l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbf{B}_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ et $H^2(\mathbf{B}_2)$ l'espace des fonctions analytiques f dans $\mathbf{B}_2$ telles que

$$\sup_{r<1} \int_{S_2} |f(rz, rw)|^2 d\mu(z, w) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Soit $\sigma = (\underline{z}_n, n \in \mathbf{N})$ une suite de $\mathbf{D}^2$ (resp. de $\mathbf{B}_2$) on dit que σ est d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ si l'opérateur T_∞: $\forall f \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$, $T_\infty f = \{f(\underline{z}_n), n \in \mathbf{N}\}$ est surjectif sur $l^\infty(\mathbf{N})$ (de même pour $H^\infty(\mathbf{B}_2)$).

On dit que σ est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$ si l'opérateur

$$T_2\colon \forall f \in H^2(\mathbf{D}^2), \quad T_2 f = \{(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |w_n|^2)^{\frac{1}{2}} f(\underline{z}_n), \ n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif et continu sur $l^2(\mathbf{N})$, avec $\underline{z}_n = (z_n, w_n)$.

De même σ est fortement d'interpolation pour $H^2(\mathbf{B}_2)$ si

$$T_2\colon \forall f \in H^2(\mathbf{B}_2), \ T_2 f = \{(1 - |\underline{z}_n|^2) f(\underline{z}_n), \ n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif et continu sur $l^2(\mathbf{N})$, ($\underline{z}_n = (z_n, w_n)$, $|\underline{z}_n|^2 = |z_n|^2 + |w_n|^2$).

Comme application du théorème 1, on montre alors:

THEOREME 2. *Il existe une suite σ dans $\mathbf{D}^2$ qui est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$ mais n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.*

THEOREME 3. *Il existe une suite σ dans $\mathbf{B}_2$ qui est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{B}_2)$ mais n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{B}_2)$.*

Une autre application du théorème 1 montre que le classique théorème de Pick–Nevanlinna **[4]** **[5]** ne se généralise pas du tout en plusieurs variables **[1]**.

2. Preuve du Théorème 1. On note $K_z(\zeta)$ le noyau de Cauchy–Bergman de $\mathbf{D}$ et $E_z(\zeta)$ ce noyau normalisé dans $A^2(\mathbf{D})$:

$$E_z(\zeta) = \frac{K_z(\zeta)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\zeta)^2}.$$

Dans **[2]**, on montre que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $(z_n)\subset D$ est d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$ si et seulement si l'opérateur S de $l^2(\mathbf{N})$ défini par la matrice $(\langle E_{z_n}, E_{z_k}\rangle)_{n,k}$ est bicontinu. Une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$ est une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$ **[2]**.

(b) Construction d'une suite d'interpolation de $A^2(\mathbf{D})$ qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(\mathbf{D})$.

Cette suite (σ) sera réunion de suites finies G_n de points situés sur un même cercle et équiréparties sur ce cercle

$$G_n = \left\{ z_k\,;\, |z_k| = 1 - 2^{-g(n)},\quad \operatorname{Arg} z_k = \frac{2k\pi}{2^{g(n)}} \qquad 0 \leqq k < g(n) \right\}$$

où g est une fonction strictement croissante. G_n est la $n^{\text{ième}}$ génération de la suite σ au sens de Garnett **[3]**. $\sigma = \bigcup_n G_n$ *n*'est pas une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$. En effet $\Sigma_{z_k\in G_n}(1-|z_k|) = 1$ d'où la suite $\Sigma_{z_i\in\sigma}(1-|z_i|)$ est divergente. Par construction, chaque génération est un ensemble d'interpolation de $A^2(\mathbf{D})$ pour une même constante C. On montre qu'on peut choisir la fonction g pour que σ soit d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$.

DÉMONSTRATION. Soit S_p la matrice $(\langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle)_{ij}$, $z_i \in G_p$, $z_j \in G_p$. S_p est bicontinue et

$$\|S_p\| \leqq C^2$$
$$\|S_p^{-1}\| \leqq C^2.$$

On note T_n la matrice $(\langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle)_{ij}$, $z_i \in \bigcup_1^n G_p$, $z_j \in \bigcup_1^n G_p$. On démontre par récurrence que T_n est une matrice inversible. Supposons

$$\|T_n\| \leqq K_n^2 \quad \text{où} \quad C^2 \leqq K_n^2$$
$$\|T_n^{-1}\| \leqq K_n^2.$$

T_{n+1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} T_n & G \\ G^* & S_{n+1} \end{pmatrix}$$

où G est la matrice $(\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle$, $z_k \in \bigcup_1^n G_j$, $z_p \in G_{n+1})$. Si $z_k \in G_j$, $z_p \in G_{n+1}$

$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle| = \frac{(1-|z_k|^2)(1-|z_p|^2)}{|1-\bar{z}_k z_p|^2}$$
$$\leqq \frac{4\,2^{-g(j)-g(n+1)}}{[1-(1-2^{-g(j)})(1-2^{-g(n+1)})]^2}$$
$$\leqq 4\,2^{g(j)-g(n+1)}$$
$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leqq 16\,2^{2g(j)-2g(n+1)}$$
$$\sum_{z_k \in G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leqq 16.2^{3g(j)-g(n+1)}$$

d'où

$$\sum_{z_k \in \cup_1^n G_j,\, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leqq 16.2^{-g(n+1)}\left(\sum_1^n 2^{3g(j)}\right)$$
$$= \epsilon^2(n).$$

La fonction g sera choisie telle que:

$$\sum_n \epsilon(n) < \frac{1}{2C^2}.$$

La norme de Hilbert–Schmidt de la matrice G est inférieure à $\epsilon(n)$. Si $\lambda \in l^2(2^{g(1)} + 2^{g(2)} + \cdots + 2^{g(n)} + 2^{g(n+1)})$ alors $\lambda = \mu + \nu$ oú:

$$\mu \in l^2(2^{g(1)} + \cdots + 2^{g(n)}),\ \nu \in l^2(2^{g(n+1)})$$

$$\|\lambda\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\nu\|^2$$
$$\|T_{n+1}\lambda\|^2 = \|T_n\mu + G\nu\|^2 + \|G^\infty\mu + S_{n+1}\nu\|^2$$
$$\|T_{n+1}\lambda\|^2 \leqq (K_n^2\|\mu\| + \epsilon(n)\|\nu\|)^2 + (C^2\|\nu\| + \epsilon(n)\|\mu\|)^2$$
$$\leqq [K_n^2 + \epsilon(n)]^2\|\lambda\|^2$$

de même

$$\|T_{n+1}(\lambda)\|^2 \geqq \left[\frac{1}{K_n^2} - \epsilon(n)\right]^2 \|\lambda\|^2.$$

La matrice T_{n+1} de $\cup_1^{n+1} G_p$ vérifie donc

$$\|T_{n+1}\| \leqq K_n^2 + \epsilon(n)$$
$$\|T_{n+1}^{-1}\| \leqq \frac{1}{\dfrac{1}{K_n^2} - \epsilon(n)}.$$

La matrice S de $\bigcup_n G_n$ vérifiera donc

$$\|S\| \leqq C^2 + \sum_n \epsilon(n) \leqq 2C^2$$

$$\|S^{-1}\| \leqq \frac{1}{\frac{1}{C^2} - \sum_n \epsilon(n)} \leqq 2C^2$$

d'où $\bigcup_n G_n$ est une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$.

3. Applications.

Preuve du Théorème 2. On considère la suite $\tilde{\sigma} = \{(z_n, z_n), n \in \mathbf{N}\}$ où $\sigma = \{z_n, n \in \mathbf{N}\}$ est la suite construite dans la preuve du Théorème 1; clairement, puisque σ n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$, $\tilde{\sigma}$ n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.

Si l'on note

$$e_{(z,w)}(\xi, \eta) = \frac{(1-|z|^2)^{1/2}(1-|w|^2)^{1/2}}{(1-\bar{z}\xi)(1-\bar{w}\eta)}$$

le noyau de Cauchy Szegö $\mathbf{D}^2$ normalisé dans $H^2(\mathbf{D}^2)$ on a facilement

$$\forall n, p \in \mathbf{N},\ \langle e_{(z_n,z_n)}, e_{(z_p,z_p)}\rangle = \langle E_{z_n}, E_{z_p}\rangle$$

donc les matrices $(\langle e_{(z_n,z_n)}, e_{(z_p,z_p)}\rangle, (n,p) \in \mathbf{N}^2)$ et $(\langle E_{z_n}, E_{z_p}\rangle, (n,p) \in \mathbf{N}^2)$ définissent le même opérateur sur $l^2(\mathbf{N})$.

On en déduit alors aisément que σ est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$.

Preuve du Théorème 3. On considère dans $\mathbf{B}_2$ la suite $\tilde{\tilde{\sigma}} = \{(z_n, 0), n \in \mathbf{N}\}$ et on remarque, comme ci-dessus que $\langle e_{(z_n,0)}, e_{(z_p,0)}\rangle = \langle E_{z_n}, E_{z_p}\rangle$ où ici $e_{(z_n,0)}$ désigne le noyau de Cauchy–Szegö normalisé dans $H^2(\mathbf{B}_2)$.

REFERENCES

1. D. et E. Amar, *Sur les théorèmes de Schwarz–Pick et Nevanlinna dans C^n*, Preprint, Anal. Harm. Orsay, **167** (1975).

2. E. Amar, *Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach*, Preprint Anal. Harm. Orsay, **152** (1975) et thèse (1977).

3. J. Garnett, *Interpolating sequences for bounded harmonic functions.* Indiana Univ. Math. J., **21** (1971).

4. R. Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschnebene Werte aunehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A, **13** (1919), n. 1.
5. G. Pick, *Über die Beschränkungen analystischer Funktionen, welche durch vergegebene Funktionswerke bewirkt werden*, Math. Ann., **77** (1961), 7–23.
6. H. Shapiro, et A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl., **83** (1961).

Received January 28, 1976 and in revised form May 3, 1977.

UNIVERSITE PARIS XI
91405 ORSAY, FRANCE

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typ
ɹrm or offset-reproduced (not dittoed), double spaced with large margins. Underline Greek letters in re
ierman in green, and script in blue. The first paragraph or two must be capable of being used separately as
ʼnopsis of the entire paper. Items of the bibliography should not be cited there unless absolutely necessary,
hich case they must be identified by author and Journal, rather than by item number. Manuscripts,
uplicate, may be sent to any one of the four editors. Please classify according to the scheme of Math. Review
ıdex to Vol. **39**. All other communications should be addressed to the managing editor, or Elaine Bart
Iniversity of California, Los Angeles, California, 90024.

100 reprints are provided free for each article, only if page charges have been substantially pai
.dditional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* is issued monthly as of January 1966. Regular subscription rate: $72.
year (6 Vols., 12 issues). Special rate: $36.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for numbers issued in the last three calendar years, and changes of address should
ent to Pacific Journal of Mathematics, 103 Highland Boulevard, Berkeley, California, 94708.

UBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION
Printed at Jerusalem Academic Press, POB 2390, Jerusalem, Israel.

Pacific Journal of Mathematics
Vol. 75, No. 1 September, 1978