

Pacific Journal of Mathematics

ALTERNIERENDE PRODUKTE IN FREIEN GRUPPEN

GERHARD ROSENBERGER

ALTERNIERENDE PRODUKTE IN FREIEN GRUPPEN

GERHARD ROSENBERGER

1. Einleitung. A. In [7] and [8] untersucht H. Zieschang das Problem, wann zwei alternierende Produkte in freien Gruppen verwandt sind. Bei Anwendungen und konkreten Problemen tritt aber oft die allgemeinere Frage auf:

Sei G freie Gruppe vom Rang $n \geq 1$ mit den freien Erzeugenden a_1, \dots, a_n und

$$P(a_1, \dots, a_n) = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] \in G$$

ein alternierendes Produkt in G . Sei X Untergruppe von G vom Rang $m \geq 1$ und $P^\alpha(a_1, \dots, a_n) \in X$ für ein $\alpha \geq 1$. Wie läßt sich X durch $P(a_1, \dots, a_n)$ beschreiben? Diese Frage wurde beispielsweise schon zum Teil beantwortet in [5] (der Fall $p = n$) und [7] (der Fall $p = 0$). Hier geben wir eine vollständige Antwort auf diese Frage.

Im zweiten Teil der Arbeit finden die Ergebnisse zu dieser Frage Anwendungen bei der Behandlung gewisser Untergruppenprobleme von freien Gruppen und bei der Beschreibung von Erzeugendensystemen einer Klasse von Gruppen. Insbesondere lösen wir für eine Klasse von Gruppen mit einer definierenden Relation das Isomorphieproblem in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine beliebige Gruppe mit einer definierenden Relation zu einer Gruppe dieser Klasse isomorph ist oder nicht.

B. Diese Arbeit verwendet die Terminologie und Bezeichnungswiese von [4] und [9]. Es bedeute: $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ den Kommutator von $a, b \in G$ (G Gruppe). $\langle \dots; \dots \rangle$ die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und Relationen. $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ den größten gemeinsamen Teiler von $\beta_1, \dots, \beta_k \in N$ ($k \geq 1$).

2. Über Gleichungen in freien Gruppen. Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n; \rangle$ ($n \geq 1$) freie Gruppe vom Rang n mit den freien Erzeugenden a_1, \dots, a_n und

$$P(a_1, \dots, a_n) = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] \in G$$

ein alternierendes Produkt in G mit $0 \leq p \leq n$, $\alpha_i \geq 1$ für $i = 1, \dots, p$. Sei $\{x_1, \dots, x_m\} \subset G$ ($m \geq 1$) und X die von den x_1, \dots, x_m erzeugte Untergruppe von G . Sei $y^{-1}P^\alpha(a_1, \dots, a_n)y \in X$ für ein $\alpha \neq 0$ und $y \in G$.

SATZ 1. *Es tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(a) *Es gibt einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einem System $\{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_1 = zP^\beta(a_1, \dots, a_n)z^{-1}$, $\beta > 0$ und $z \in G$, und β ist die kleinste positive Zahl, für die eine Beziehung $y^{-1}P^\beta(a_1, \dots, a_n)y \in X$ für ein $y \in G$ gilt.*

(b) *Es ist $m \geq n$, und es gibt einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einem System $\{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i = za_i^{\gamma_i}z^{-1}$, $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i$ ($i = 1, \dots, p$), $y_j = za_jz^{-1}$ ($j = p + 1, \dots, n$) und $z \in G$.*

Beweis. Es trete nicht der Fall (a) ein. Wir können annehmen, daß kein zu $\{x_1, \dots, x_m\}$ frei äquivalentes System $\{y_1, \dots, y_q\}$ ein echtes Teilsystem $\{y_1, \dots, y_q\}$ besitzt mit $q < m$ und $y^{-1}P^\alpha(a_1, \dots, a_n)y \in \langle y_1, \dots, y_q \rangle$ für ein $\alpha \neq 0$ und $y \in G$. Wir dürfen also im folgenden voraussetzen: m ist in diesem Sinn minimal mit dieser Eigenschaft, und $\{x_1, \dots, x_m\}$ ist insbesondere schon ein freies Erzeugendensystem von X .

Im folgenden sei α die kleinste positive Zahl, für die eine Beziehung $y^{-1}P^\alpha(a_1, \dots, a_n)y \in X$ für ein $y \in G$ gilt. Wir dürfen $y = 1$ annehmen—eventuell nach Ersetzen von x_i durch yx_iy^{-1} .

In G sei die freie Länge L und eine geeignete lexikographische Ordnung relativ zu den Erzeugenden a_1, \dots, a_n eingeführt. Wenden wir die klassische Nielsensche Kürzungsmethode auf $\{x_1, \dots, x_m\}$ an, so erhalten wir schließlich ein System, das der Nielsenschen Eigenschaft bzgl. L genügt, d.h. in dem kein Element und kein Inverses eines Elementes von einem anderen mehr als die Hälfte kürzt, keine zwei ein anderes ganz kürzen (vgl. [10, S. I. 12]). Das neue System erzeugt dieselbe Untergruppe von G wie $\{x_1, \dots, x_m\}$. Wir können nun annehmen, daß schon $\{x_1, \dots, x_m\}$ die Nielsensche Eigenschaft bzgl. L hat. Wir schreiben nun jedes x_i^ε , $\varepsilon = \pm 1$; als frei gekürzten Wort in a_1, \dots, a_n . Dann bleibt in jedem frei gekürzten Produkt in x_1, \dots, x_m für jedes x_i^ε , $\varepsilon = \pm 1$, mindestens ein Symbol ungeändert an der Stelle erhalten, an der x_i^ε auftrat, wenn man für die x_1, \dots, x_m ihre frei gekürzten Worte in a_1, \dots, a_n einsetzt und relativ zu a_1, \dots, a_n frei kürzt. Für jedes x_i zeichnen wir eine solche standhafte Stelle aus und nehmen für x_i^{-1} die entsprechende Stelle mit dem inversen Zeichen. $\{x_1, \dots, x_m\}$ genügt einer Gleichung

$$(2.1) \quad \prod_{j=1}^{t_1} x_{\nu_j}^{\varepsilon_j} = W(x_1, \dots, x_m) = P^\alpha(a_1, \dots, a_n),$$

$$\varepsilon_j = \pm 1, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \text{ falls } \nu_j = \nu_{j+1}.$$

Beh. (2.2). Es ist $\alpha = 1$.

Beweis von (2.2). Angenommen $\alpha \geq 2$. Da der Fall (a) nicht eintritt, ist $W(x_1, \dots, x_m)$ kein primitives Element in $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$.

Nach [1] ist $W(x_1, \dots, x_m)$ eine echte Potenz in X . Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von α . Also ist $\alpha = 1$.

Sei nun $\alpha = 1$. Für $p = n$ folgt die Behauptung aus Satz 1 von [5]. Für $p = 0$ folgt die Behauptung aus Satz 2 [5]. Sei nun $1 \leq p < n$.

Es gebe nun in (2.1) zwei verschiedene Indizes $j, i (1 \leq j < i \leq t_1)$ mit $\nu_j = \nu_i = k, \nu_h \neq k$ für $j < h < i$ und $\varepsilon_j = \varepsilon_i$. Sei ohne Einschränkung $\varepsilon_j = \varepsilon_i = 1$. Wir wollen zeigen, daß $j = i - 1$ und x_k zu einer Potenz von einem $a_\nu (1 \leq \nu \leq p)$ konjugiert ist. Sei $a_\lambda^\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, eine standhafte Stelle von x_k . Es bleibt a_λ^ε beide Male stehen. Daher tritt in (2.1) nicht x_k^{-1} auf, denn das standhafte Zeichen von x_k^{-1} ist $a_\lambda^{-\varepsilon}$, und in (2.1) kann das standhafte Zeichen $a_\lambda^{-\varepsilon}$ nicht auftreten, wenn das standhafte Zeichen a_λ^ε zweimal auftritt. Insbesondere ist $1 \leq \lambda \leq p$ und $\varepsilon = 1$. Es ist $x_k = ua_\lambda^\beta v$, wobei das frei gekürzte Wort von u bzw. v in a_1, \dots, a_n nicht mit Potenzen von a_λ endet bzw. beginnt. Weiter ist

$$\begin{aligned} x_k \left(\prod_{\mu=j+1}^{i-1} x_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu} \right) x_k &= ua_\lambda^\beta v \left(\prod_{\mu=j+1}^{i-1} x_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu} \right) ua_\lambda^\beta v \\ &= ua_\lambda^{\beta'} (a_\lambda^{\alpha_\lambda} \cdots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] a_1^{\alpha_1} \cdots a_\lambda^{\alpha_{\lambda-1}})^{\delta} \cdot a_\lambda^{\beta''} \cdot v, \\ \delta &\geq 0. \end{aligned}$$

Da in $P(a_1, \dots, a_n)$ zwischen zwei Zeichen a_λ keine anderen a_ν auftreten, ist $\delta = 0$. Dann ist $j = i - 1$ und x_k ist zu einer Potenz von a_λ konjugiert (Wegen der Minimalität von m , und da (a) nicht eintritt).

Wir haben also:

Tritt in (2.1) ein x_j mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auf, so ist dieses x_j zu einer Potenz von einem $a_i (1 \leq i \leq p)$ konjugiert.

Da der Fall (a) nicht eintritt, erhalten wir gleichzeitig: Jedes x_j , das in (2.1) vorkommt, tritt dort entweder mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten, d.h. ist zu einer Potenz von einem $a_i (1 \leq i \leq p)$ konjugiert, oder genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und genau einmal mit dem Exponenten -1 auf.

Sei $r (0 \leq r \leq m)$ die Zahl der x_j , die in (2.1) mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auftreten, und sei $s (0 \leq s \leq m)$ die Zahl der x_j , die in (2.1) genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und genau einmal mit dem Exponenten -1 auftreten.

Indem wir unwesentliche und überflüssige Elemente entfernen, können wir annehmen, daß jedes x_j in (2.1) auftritt, und wir bezeichnen das neue System flüchtig mit den gleichen Symbolen. Damit ist $1 \leq r + s = m$ (Die nachfolgenden Überlegungen zeigen $m = n$).

Beh. (2.3). Es ist $r = p$.

Beweis von (2.3). Angenommen $r < p$. Dann gibt es ein $a_\lambda (1 \leq \lambda \leq p)$, für das kein x_ν zu einer Potenz von diesem a_λ konjugiert ist, etwa a_1 . Dann liegt in der abelsch-gemachten Gruppe ein $a_1^\gamma, \gamma \neq 0$, in der von den a_2, \dots, a_n erzeugten abelschen Gruppe. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß die abelsch-gemachte Gruppe freie abelsche Gruppe vom Rang n ist.

Also ist $r \geq p$. Es ist auch $r \leq p$, denn für $r > p$ sind zwei verschiedene x_j zu einer Potenz desselben $a_\lambda (1 \leq \lambda \leq p)$ konjugiert, und das steht im Widerspruch dazu, daß das System $\{x_1, \dots, x_m\}$ Nielsensche Eigenschaft hat und (2.1) genügt und jedes x_j in (2.1) auftritt. Also ist $r = p$.

Aus der Nielsenschen Eigenschaft von $\{x_1, \dots, x_m\}$ folgt nun, daß wir—eventuell nach einem geeigneten freien Übergang und Umnummerierung—

$$x_i = a_i^{\gamma_i}, \quad 1 \leq \gamma_i < \alpha_i, \quad \gamma_i | \alpha_i \quad \text{für } i = 1, \dots, p$$

annehmen können.

Damit haben wir Satz 1 auf die folgende Situation zurückgeführt: $\{x_{p+1}, \dots, x_m\}$ genügt einer Gleichung

$$(2.3) \quad \prod_{j=1}^{t_2} x_j^{\varepsilon_j} = [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n], \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

$\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ falls $\nu_j = \nu_{j+1}$, in der jedes $x_j (p+1 \leq j \leq m)$ genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und genau einmal mit dem Exponenten -1 auftritt (es können noch Erzeugende $a_i (1 \leq i \leq p)$ in den Worten $x_j (p+1 \leq j \leq m)$ auftreten). Es ist $m \leq n$, da sonst in (2.3) die Zahl der standhaften Zeichen größer als $2(n-p)$ wäre, d.h.

$$L([a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n]) = 2(n-p) \geq t_2 - 1 \geq 2(n-p) + 1$$

wäre. Andererseits ist $m \geq n$ (vgl. [5] und [2]).

Also ist $m = n = r + s = p + s$.

Analog wie beim Beweis von Satz V. 2 von [10; pp. V. 6 und V. 7] zeigt man nun aber: Es gibt einen freien Übergang von

$$\{a_1^{\gamma_1}, \dots, a_p^{\gamma_p}, x_{p+1}, \dots, x_m\} \text{ zu } \{a_1^{\gamma_1}, \dots, a_p^{\gamma_p}, a_{p+1}, \dots, a_n\}.$$

KOROLLAR 1. Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \geq 2$. Ist φ ein Endomorphismus von G , der $P(a_1, \dots, a_n)$ festläßt, so ist φ ein Automorphismus von G .

Beweis. Wir setzen $y_i = \varphi(a_i)$ für $i = 1, \dots, n$ und betrachten die von y_1, \dots, y_n erzeugte Untergruppe Y von G . In Y gilt

$$P(y_1, \dots, y_n) = P(a_1, \dots, a_n).$$

Analog wie bei Lemma 1 von [5] ergibt sich wegen $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \geq 2$, daß es keinen freien Übergang von $\{y_1, \dots, y_n\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_n\}$ mit $z_1 = P(a_1, \dots, a_n)$ gibt. Nun folgt die Behauptung aus Satz 1.

3. Anwendungen.

SATZ 2. Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle (n \geq 1)$ freie Gruppe vom Rang n mit den freien Erzeugenden a_1, \dots, a_n . Sei $\{x_1, \dots, x_m\} \subset G (m \geq 1)$ und X die von x_1, \dots, x_m erzeugte Untergruppe von G . Es gebe $u_1, \dots, u_k \in X$ mit

$$u_1^{\beta_1} \dots u_k^{\beta_k} = a_1^{\alpha_1} \dots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \dots [a_{n-1}, a_n],$$

$0 \leq p \leq n$, $\alpha_i \geq 1 (i = 1, \dots, p)$, $2 \leq \beta_j (j = 1, \dots, k)$ und $(\beta_1, \dots, \beta_k) \geq 2$.

Dann gilt.

(a) Es ist $m \geq n$, und es gibt einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einem System $\{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i = a_i^{\gamma_i}$, $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i (i = 1, \dots, p)$, $y_j = a_j (j = p + 1, \dots, n)$.

(b) Ist $p = n$, so ist $k \geq n$.

(c) Ist $p < n$, so ist $k \geq n + 1$.

Beweis. X ist als Untergruppe einer freien Gruppe vom Rang n auch freie Gruppe. Es ist $q = \text{Rang } X \leq m$, da X von x_1, \dots, x_m erzeugt wird. Sei $\{y_1, \dots, y_q\}$ ein freies Erzeugendensystem von X . Nach Lemma 1 von [5] gibt es keinen freien Übergang von $\{y_1, \dots, y_q\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_q\}$ mit $z_1 = a_1^{\alpha_1} \dots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \dots [a_{n-1}, a_n]$. Damit gilt nach Satz 1:

Es ist $q \geq n$, und es gibt einen freien Übergang von $\{y_1, \dots, y_q\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_q\}$ mit $z_i = a_i^{\gamma_i}$, $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i (i = 1, \dots, p)$, $z_j = a_j (j = p + 1, \dots, n)$.

Insbesondere ist $k \geq n$. Zu zeigen ist noch: Für $p < n$ ist $k \geq n + 1$.

Sei nun $p < n$. Angenommen $k = n$.

Dann gibt es einen freien Übergang von $\{u_1, \dots, u_k\}$ zu einem System $\{a_1^{\gamma_1}, \dots, a_p^{\gamma_p}, a_{p+1}, \dots, a_n\}$ mit $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i (i = 1, \dots, p)$.

Wir können also ohne Einschränkung $p = 0$ annehmen (andernfalls fügen wir die Relationen $a_1 = \dots = a_p = 1$ hinzu).

Sei nun $p = 0$. Es ist $u_1^{\beta_1} \dots u_k^{\beta_k} = 1$ in der abelsch-gemachten Gruppe, und das ist ein Widerspruch dazu, daß diese freie abelsche Gruppe vom Rang $n = k$ ist. Also ist $k \geq n + 1$.

KOROLLAR 2. Es mögen die Voraussetzungen von Satz 2 gelten. Ferner sei α_i Primzahl für $i = 1, \dots, p$. Dann gilt:

Ist $m = n$, so ist $\{x_1, \dots, x_m\}$ freies Erzeugendensystem von G .
Ist $m \geq n$, so ist $X = G$.

BEMERKUNG. Wir haben damit eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung dafür, wann ein System $\{x_1, \dots, x_n\} \subset G$ ein freies Erzeugendensystem der freien Gruppe G vom Rang n ist.

KOROLLAR 3. Seien G und X wie in Satz 2. Es gebe $u_1, \dots, u_k \in X$ mit $u_1^{\beta_1} \dots u_q^{\beta_q} [u_{q+1}, u_{q+2}] \dots [u_{k-1}, u_k] = a_1^{\alpha_1} \dots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \dots [a_{n-1}, a_n]$ $0 \leq p \leq n$, $\alpha_i \geq 1$ ($i = 1, \dots, p$), $0 \leq q \leq k$, $2 \leq \beta_j$ ($j = 1, \dots, q$) und $(\beta_1, \dots, \beta_q) \geq 2$.

Dann ist $m \geq n$, insbesondere ist $k \geq n$, und es gibt einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einem System $\{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i = a_i^{\gamma_i}$, $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$, $\gamma_i | \alpha_i$ ($i = 1, \dots, p$), $y_j = a_j$ ($j = p+1, \dots, n$).

Ist α_i Primzahl für $i = 1, \dots, p$, so ist sogar $X = G$.

Indem wir analog wie beim Beweis von Satz 13 und Satz 24 von [4] vorgehen, erhalten wir:

SATZ 3. Sei

$$K = \langle s_1, \dots, s_m, a_1, \dots, a_n | s_1^{\gamma_1} = \dots = s_m^{\gamma_m} \\ = s_1 \dots s_m (a_1^{\alpha_1} \dots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \dots [a_{n-1}, a_n])^r = 1 \rangle$$

mit $\gamma_i \geq 2$, $\alpha_j \geq 2$, $\gamma \geq 1$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, $0 \leq p \leq n$. Ist $\{x_1, \dots, x_{n+m-1}\}$ ein Erzeugendensystem von K , so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_{n+m-1}\}$ zu einem System $\{s_1^{\beta_1}, \dots, s_m^{\beta_m}, a_1, \dots, a_n\}$ mit $\nu_i \in \{1, \dots, m\}$, $\nu_1 < \dots < \nu_{m+1}$ (falls $m > 2$) und $1 \leq \beta_i < \alpha_{\nu_i}$, $(\beta_i, \alpha_{\nu_i}) = 1$.

Indem wir mit ähnlichen, verfeinerten Methoden wie in [6] vorgehen, erhalten wir:

SATZ 4. Sei $H = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m | W(a_1, \dots, a_n) V(b_1, \dots, b_m) = 1 \rangle$ mit $W(a_1, \dots, a_n) = (a_1^{\alpha_1} \dots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \dots [a_{n-1}, a_n])^r$, $V(b_1, \dots, b_m) = (b_1^{\beta_1} \dots b_q^{\beta_q} [b_{q+1}, b_{q+2}] \dots [b_{m-1}, b_m])^s$, $\alpha_i \geq 2$, $\beta_j \geq 2$, $\gamma \geq 2$, $\delta \geq 2$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq m$ oder $\alpha_i \geq 2$, $\gamma \geq 2$, $n \geq 2$, $0 \leq p \leq n$, $m \geq 1$, $\delta = 1$, $q = 0$. Ist $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$ ein Erzeugendensystem von H , so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$ zu $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$.

Die Methode von Whitehead liefert nun (vgl. [3, Satz 1] oder [6]):

KOROLLAR 4. Sei H wie in Satz 4 gegeben. Dann ist das

Isomorphieproblem für H lösbar in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine gegebene Gruppe mit einer definierenden Relation zu H isomorph ist oder nicht.

Ähnlich wie in [3, Satz 2 und Satz 3] folgt nun:

KOROLLAR 5. *Sei H wie in Satz 4 gegeben. Dann gilt:*

(1) *H ist eine Hopfsche Gruppe, d.h. jeder Endomorphismus von H auf H ist ein Automorphismus von H .*

(2) *Jeder Automorphismus von H wird von einem Automorphismus der freien Gruppe von Rang $n + q$ induziert.*

(3) *Die Automorphismengruppe von H ist endlich erzeugt.*

Für $\delta = 1$ und $q \geq 1$ erhalten wir:

SATZ 5. *Sei $H = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid W(a_1, \dots, a_n)V(b_1, \dots, b_m) = 1 \rangle$ mit $W(a_1, \dots, a_n) = (a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p} [a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n])^\gamma$, $V(b_1, \dots, b_m) = b_1^{\beta_1} \cdots b_q^{\beta_q} [b_{q+1}, b_{q+2}] \cdots [b_{m-1}, b_m]$, $\alpha_i \geq 2$, $\beta_j \geq 2$, $\gamma \geq 2$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq m$. Ist $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$ ein Erzeugendensystem von H , so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$ zu einem System $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{i-1}, b_i^{\gamma_i}, b_{i+1}, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_m\}$ für ein i ($1 \leq i \leq q$) mit $(\gamma_i, \beta_i) = 1$ und $1 \leq \gamma_i \leq \frac{1}{2}\beta_i$.*

Für $\delta = 1$ und $\gamma = 1$ gilt Satz 3 von [6].

LITERATUR

1. G. Baumslag, *Residual nilpotence and relations in free groups*, J. Algebra, **2** (1965), 271-282.
2. C. C. Edmunds, *Some properties of quadratic words in free groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **50** (1975), 20-22.
3. S. J. Pride, *The isomorphism problem for two-generator one-relator groups with torsion is solvable*, (Preprint).
4. G. Rosenberger, *Zum Rang- und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam*. Habilitationsschrift, Hamburg 1974.
5. ———, *Produkte von Potenzen und Kommutatoren in freien Gruppen*, J. of Algebra, **53** (1978), 416-422.
6. ———, *Zum Isomorphieproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation*, Illinois J. Math., **20** (1976), 614-621.
7. H. Zieschang, *Alternierende Produkte in freien Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **27** (1964), 13-31.
8. ———, *Alternierende Produkte in freien Gruppen II*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **28** (1965), 219-233.
9. ———, *Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam*, Inventiones Math., **10** (1970), 4-37.

10. H. Zieschang, E. Vogt, and H.-D. Coldewey, *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen*, Lecture notes in Math., **122**, Springer 1970.

Received December 20, 1976.

ABTEILUNG MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT DORTMUND
POSTFACH 500500
4600 DORTMUND 50

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

EDITORS

RICHARD ARENS (Managing Editor)

University of California
Los Angeles, California 90024

C. W. CURTIS

University of Oregon
Eugene, OR 97403

C. C. MOORE

University of California
Berkeley, CA 94720

J. DUGUNDJI

Department of Mathematics
University of Southern California
Los Angeles, California 90007

R. FINN AND J. MILGRAM

Stanford University
Stanford, California 94305

ASSOCIATE EDITORS

E. F. BECKENBACH

B. H. NEUMANN

F. WOLF

K. YOSHIDA

SUPPORTING INSTITUTIONS

UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
MONTANA STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF NEVADA, RENO
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
OREGON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF OREGON

UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA
STANFORD UNIVERSITY
UNIVERSITY OF HAWAII
UNIVERSITY OF TOKYO
UNIVERSITY OF UTAH
WASHINGTON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF WASHINGTON

Simeon M. Berman, <i>A class of isotropic distributions in \mathbf{R}^n and their characteristic functions</i>	1
Ezra Brown and Charles John Parry, <i>The 2-class group of biquadratic fields. II</i>	11
Thomas E. Cecil and Patrick J. Ryan, <i>Focal sets of submanifolds</i>	27
Joseph A. Cima and James Warren Roberts, <i>Denting points in B^p</i>	41
Thomas W. Cusick, <i>Integer multiples of periodic continued fractions</i>	47
Robert D. Davis, <i>The factors of the ramification sequence of a class of wildly ramified v-rings</i>	61
Robert Martin Ephraim, <i>Multiplicative linear functionals of Stein algebras</i>	89
Philip Joel Feinsilver, <i>Operator calculus</i>	95
David Andrew Gay and William Yslas Vélez, <i>On the degree of the splitting field of an irreducible binomial</i>	117
Robert William Gilmer, Jr. and William James Heinzer, <i>On the divisors of monic polynomials over a commutative ring</i>	121
Robert E. Hartwig, <i>Schur's theorem and the Drazin inverse</i>	133
Hugh M. Hilden, <i>Embeddings and branched covering spaces for three and four dimensional manifolds</i>	139
Carlos Moreno, <i>The Petersson inner product and the residue of an Euler product</i>	149
Christopher Lloyd Morgan, <i>On relations for representations of finite groups</i>	157
Ira J. Papick, <i>Finite type extensions and coherence</i>	161
R. Michael Range, <i>The Carathéodory metric and holomorphic maps on a class of weakly pseudoconvex domains</i>	173
Donald Michael Redmond, <i>Mean value theorems for a class of Dirichlet series</i>	191
Daniel Reich, <i>Partitioning integers using a finitely generated semigroup</i>	233
Georg Johann Rieger, <i>Remark on a paper of Stux concerning squarefree numbers in non-linear sequences</i>	241
Gerhard Rosenberger, <i>Alternierende Produkte in freien Gruppen</i>	243
Ryōtarō Satō, <i>Contraction semigroups in Lebesgue space</i>	251
Tord Sjödin, <i>Capacities of compact sets in linear subspaces of \mathbf{R}^n</i>	261
Robert Jeffrey Zimmer, <i>Uniform subgroups and ergodic actions of exponential Lie groups</i>	267