Pacific Journal of Mathematics

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GLEASON-KAHANE-ŻELAZKO POUR LES ALGÈBRES DE BANACH

B. AUPETIT

Vol. 85, No. 1 September 1979

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 85, No. 1, 1979

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GLEASON-KAHANE-ŻELAZKO POUR LES ALGÈBRES DE BANACH

BERNARD AUPETIT

Let A and B be complex Banach algebras with identity and suppose that B has a separating family of finite dimensional irreducible representations. If T is a linear mapping from A onto B such that x invertible in A implies Tx invertible in B then we have $Tx=(T1)Sx$, for every x in A, where S is a Jordan morphism.

1. Introduction. Presque simultanément A. Gleason [7] et J.-P. Kahane et W. Żelazko [10] démontrèrent le théorème suivant: soient A et B deux algèbres de Banach complexes, commutatives, avec unité, supposons que B est sans radical et que T est une application linéaire de A dans B telle que x inversible dans A implique Tx inversible dans B et telle que $T1 = 1$, alors T est un morphisme d'algèbre. W. Żelazko [16] a montré que l'hypothèse de commutativité sur A est inutile, cela résulte en fait très facilement du lemme de Herstein qui suit ou bien d'une petite remarque de A.M. Sinclair ([5], p. 79) ou bien du Lemme 5 de [3]. Pour une démonstration de ce théorème à l'aide du théorème de Liouville réel voir [6], p. 51–53.

Dans [11], page 12, I. Kaplansky s'est posé le problème plus général suivant: soient A et B deux algèbres de Banach complexes avec unité, T une application linéaire de A dans B telle que $T1 = 1$ et T envoie tout élément inversible en un élément inversible, alors T est-il un morphisme de Jordan, c'est-à-dire tel que $Tx^2 = (Tx)^2$ pour tout $x \in A$? Ce problème est partiellement justifié par le théorème de M. Marcus et R. Purves [12]: si T est une application linéaire de $M_n(K)$ sur lui-même, où K est un corps commutatif algébriquement clos, telle que det $Tx =$ det x, pour $x \in M_n(K)$, alors il existe un morphisme de Jordan S de la forme $S(x) = uxu^1$ ou $S(x) = ut_xu^{-1}$(où ${}^tx$ est la transposée de x) tel que $Tx = (T1)S(x)$, pour tout $x \in M_n(K)$. La partie délicate de la démonstration de ce théorème est de prouver que S est un morphisme de Jordan, le reste vient du théorème de Noether-Skolem ([8], p. 99) ou bien dans le cas de $M_n(C)$ de la démonstration analytique donnée dans [13], Théorème 2.5.19. Malheureusement le problème de I. Kaplansky est trop général pour être vrai, l'exemple suivant le prouve. On prend A la sous-algèbre de $M_4(C)$ formée par les matrices$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, où a, b, $c \in M_2(C)$

et $\circ$ est la matrice nulle de $M_2(C)$, on pose $T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & {}^t b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, il est facile de vérifier que T envoie toute matrice inversible, en une matrice inversible, cependant $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2\right) - \left(T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)^2$ n'est pas nulle et est seulement nilpotente.

L'objet de cet article est de démontrer les deux résultats qui suivent.

THÉORÈME 1. *Si A est une algèbre de Banach complexe avec unité et si T est une application linéaire de A sur $M_n(C)$ telle que $T1 = 1$ et x inversible implique Tx inversible, alors T est un morphisme ou un antimorphisme d'algèbres.*

Nous dirons que l'algèbre de Banach B admet une famille séparante $\mathscr{F}$ de représentations irréductibles de dimension finie si quel que soit $y \in B$, $y \neq 0$, il existe $\Pi \in \mathscr{F}$, telle que $\Pi(x) \neq 0$. Comme exemples il y a les algèbres sans radical dont toutes les représentations irréductibles sont de dimension finie, $L^1(G)$ pour G compact ou produit d'un groupe compact et d'un groupe commutatif, $M_n(\mathfrak{A})$ pour $\mathfrak{A}$ commutative et sans radical (voir [1]), $l^1(S)$ pour S semi-groupe libre ayant un nombre fini ou dénombrable de générateurs, etc.

THÉORÈME 2. *Soient A une algèbre de Banach complexe, avec unité, et B une algèbre de Banach complexe avec unité, admettant une famille séparante de représentations irréductibles de dimension finie, si T est une application linéaire de A sur B telle que $T1 = 1$ et x inversible implique Tx inversible, alors T est un morphisme de Jordan. Si en plus B est sans représentations irréductibles de dimension 1 il existe des idéaux bilatères I et J uniques, un morphisme unique ϕ de A sur I et un antimorphisme unique ψ de A sur J tels que $B = I \oplus J$ et $T = \phi + \psi$.*

2. **Quelques résultats préliminaires.** En utilisant les techniques de fonctions sous-harmoniques développées dans [3], Z. Słodkowski, W. Wojtyński et J. Zemánek [15] ont pu obtenir le lemme suivant qui caractérise le radical de façon purement spectrale. On dénote par ρ le rayon spectral.

LEMME 1. *Soit A une algèbre de Banach complexe, si $\rho(x + a) = 0$ pour tout x tel que $\rho(x) = 0$, alors $a \in \operatorname{Rad} A$.*

DÉMONSTRATION (a). Commençons par montrer que $\rho(ax - xa) = 0$, pour tout $x \in A$. Il est clair que $\rho(a) = 0$. Comme $e^{\lambda x}ae^{-\lambda x} = a + \lambda(xa - ax) + \cdots$ est dans A, même si A n'a pas d'unité, et que $\rho(e^{\lambda x}ae^{-\lambda x}) = \rho(a) = 0$, alors $\rho(-e^{\lambda x}ae^{-\lambda x} + a) = |\lambda|\, \rho(xa - ax + \lambda(x(xa - ax) - (xa - ax)x) + \cdots) = 0$, on déduit que $\rho(f(\lambda)) = 0$, pour $\lambda \neq 0$, où $f(\lambda)$ est la fonction analytique $xa - ax + \lambda(x(xa - ax) - (xa - ax)x) + \cdots$. D'après le théorème de Vesentini ([3], Lemme 2), $\lambda \mapsto \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique sur C et identique à 0 sur $C\backslash\{0\}$ donc

$$\rho(f(0)) = \rho(xa - ax) = \varlimsup_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \rho(f(\lambda)) = 0 .$$

(b) Soit Π une représentation irréductible de A sur l'espace de Banach X, alors $\rho(\Pi(x)\Pi(a) - \Pi(a)\Pi(x)) = 0$, pour tout $x \in A$. Si $\Pi(a)$ n'est pas de la forme $\lambda\Pi(1)$, avec $\lambda \in C$, il existe $\xi \in X$, $\xi \neq 0$, tel que $\eta = \Pi(a)\xi$ et ξ soient indépendants. D'après le théorème de densité de Jacobson il existe $x \in A$ tel que $\Pi(x)\eta = \xi$ et $\Pi(x)\xi = 0$, alors $(\Pi(x)\Pi(a) - \Pi(a)\Pi(x))\xi = \Pi(x)\eta = \xi$, donc $1 \in \mathrm{Sp}(\Pi(x)\Pi(a) - \Pi(a)\Pi(x))$, ce qui est absurde. Ainsi $\Pi(a) = \lambda\Pi(1)$, mais comme $\rho(a) = \rho(\Pi(a)) = 0$, alors $\lambda = 0$, d'où $a \in \operatorname{Ker} \Pi$ quel que soit Π irreductible, soit $a \in \bigcap \operatorname{Ker} \Pi = \operatorname{Rad} A$.

Le résultat qui suit est intéressant en lui-même et généralise fortement un certain nombre de théorèmes de continuité des morphismes d'algèbres de Banach.

PROPOSITION. *Soient A une algèbre de Banach complexe et B une algèbre de Banach complexe, sans radical, avec rayon spectral continu. Si T est une application linéaire de A dans B tel $\rho(Tx) \leqq \rho(x)$, pour tout x de A et telle que $T(A)$ soit dense dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de B, alors T est continue.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème du graphe fermé pour montrer que T est continue il suffit de montrer que si x_n tend vers 0 dans A avec Tx_n tendant vers a dans B, alors $a = 0$. Soit $x \in A$ et $\lambda \in C$, alors $x + \lambda x_n$ tend vers x et $T(x + \lambda x_n) = Tx + \lambda Tx_n$ tend vers $Tx + \lambda a$ donc, d'après la continuité du rayon spectral,

$$\rho(Tx + \lambda a) = \lim_{n \to \infty} \rho(Tx + \lambda Tx_n) \leqq \varlimsup_{n \to \infty} \rho(x + \lambda x_n) \leqq \rho(x) .$$

Ainsi $\rho(Tx + \lambda a) \leqq \rho(x)$, pour tout $\lambda \in C$, ce qui implique d'après le théorème de Vesentini et le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques que $\rho(Tx + \lambda a) \equiv \rho(Tx)$. Comme $T(A)$ est dense dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de B, et que ρ est continue sur B on obtient que $\rho(y + \lambda a) = 0$ pour tout y quasi-nilpotent de B donc que $a \in \operatorname{Rad} B = \{0\}$, soit $a = 0$, d'après le Lemme 1.

REMARQUE 1. Il serait fort intéressant de savoir, lorsqu'on laisse tomber l'hypothèse que $T(A)$ est dense dans l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de B, si T est continue modulo le radical de la sous-algèbre fermée C engendrée par $T(A)$, autrement dit si $a \in \operatorname{Rad} C$ dans la démonstration précédente. Pour cela il suffirait de prouver que $\rho(Tx_1Tx_2 \cdots Tx_n + a) = \rho(Tx_1Tx_2 \cdots Tx_n)$, pour toute famille finie $x_1, \cdots, x_n$ d'éléments de A.

Rappelons qu'un anneau A est dit premier si $aAb = \{0\}$, pour $a, b \in A$, implique $a = 0$ ou $b = 0$. D'après le théorème de densité de Jacobson un anneau primitif est premier, donc en particulier le lemme qui suit va pouvoir s'appliquer aux algèbres de Banach primitives.

LEMME 2 (*Herstein*). *Soient A, B deux anneaux et T un morphisme de Jordan de A sur B. Si B est premier alors T est un morphisme d'anneau ou un antimorphisme.*

Ce résultat qui est une très belle généralisation du théorème de Hua sur les corps (voir par exemple [2], p. 38–40) admet une démonstration très calculatoire (voir [9], pp. 47–51).

3. Démonstration du Théorème 1. D'après la proposition, T est continue, ainsi $(\lambda, \mu) \to \phi(\lambda, \mu) = \det(T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty})$ est analytique en λ, μ et ne s'annule pas, donc $(\lambda, \mu) \to \operatorname{Log} \phi(\lambda, \mu)$ est analytique en λ, μ. Comme:

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda, \mu)| &\leqq \| T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty} \|^n \\ &\leqq \| T \|^n \exp\{|\lambda| n \| x \| + |\lambda| n \| Tx \| + |\mu| n \| y \| + |\mu| n \| Ty \|\} \end{aligned}$$

on déduit que $\operatorname{Re} \operatorname{Log} \phi(\lambda, \mu) \leqq L|\lambda| + M|\mu| + N$, pour $L, M, N > 0$ convenables. En appliquant le théorème de Liouville réel, comme il est fait dans [6], p. 51–53, séparément en λ et μ, on obtient que:

$$\det(T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty}) = \gamma e^{\alpha\lambda + \beta\mu} \tag{1}$$

pour $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{C}$. De $T1 = 1$ on déduit $\gamma = 1$. Il est bien connu que $\det(1 + m) = 1 + Trm + \sigma_2(m) + \sigma_3(m) + \cdots + \det m$, où $\sigma_2, \sigma_3, \cdots$ désignent les fonctions symétriques fondamentales, de degré $\geqq 2$, des valeurs propres de m. En faisant un développement jusqu'au degré 3 on obtient:

$$T(e^{\lambda x}e^{\mu y})e^{-\lambda Tx}e^{-\mu Ty} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}(Tx)^2 - \frac{\mu^2}{2}(Ty)^2 + \frac{\lambda^2}{2}Tx^2$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{\mu^2}{2}Ty^2+\lambda\mu(Txy-TxTy) \\
+\dfrac{\lambda^3}{6}[Tx^3-(Tx)^3+3(Tx)^3-3Tx^2\cdot Tx] \\
+\dfrac{\lambda^2\mu}{2}[Tx^2y+(Tx)^2Ty+Ty(Tx)^2-Tx^2\cdot Ty-2Txy\cdot Tx] \\
+\dfrac{\lambda\mu^2}{2}[Txy^2+2\,TyTyTy-2\,TxyTy-Ty^2\cdot Tx] \\
+\dfrac{\mu^3}{6}[Ty^3+2(Ty)^3-3Ty^2\cdot Ty]+v
\end{array}\right.
$$

où v contient seulement des termes de degré $\geqq 4$ en λ et μ. Si on pose u égal aux termes de degré $\geqq 2$ dans (2) il est facile de voir que $\sigma_2(u), \sigma_3(u), \cdots$ sont de degrés $\geqq 4$ en λ, μ. Aussi en prenant les coefficients de λ et μ on obtient déjà que $\alpha=\beta=0$. D'où en identifiant à 0 les coefficients de $\lambda\mu$ et $\lambda^2\mu$ on obtient:

$$
(3)\qquad TrTxy = TrTxTy = TrTyTx\ .
$$

$$
(4)\qquad Tr[Tx^2y+(Tx)^2Ty+Ty(Tx)^2-Tx^2\cdot Ty-2Txy\cdot Tx]=0\ .
$$

D'après (3): $TrTx^2\cdot Ty = TrTx^2y$ et $TrTxy\cdot Tx = TrTx\cdot Txy = TrTx^2y$, donc on obtient:

$$
(5)\qquad Tr(Tx)^2Ty = TrTx^2y
$$

qui avec (1) donne:

$$
(6)\qquad \begin{aligned} Tr(Tx^2-(Tx)^2)Ty &= TrTx^2\cdot Ty - Tr(Tx)^2Ty \\ &= TrTx^2y - TrTx^2y = 0\ . \end{aligned}
$$

Comme T est surjective et que toute forme linéaire sur $M_n(C)$ est de la forme $x \to Trxa$ pour une matrice convenable $a=Ty$ alors on obtient $Tx^2=(Tx)^2$. Il suffit d'appliquer le Lemme 2 pour terminer.

Sp x désigne le spectre de x .

LEMME 3. *Soient A et B deux algèbres de Banach complexes avec unité. Si T est une application linéaire de A dans B telle que* $\mathrm{Sp}\,Tx \subset \mathrm{Sp}\,x$ *quel que soit* $x\in A$, $Sx=(T1)^{-1}Tx$ *est une application linéaire de A dans B telle que* $S1=1$ *et* $\mathrm{Sp}\,Sx\subset\mathrm{Sp}\,x$. *Autrement dit lorsque* $\mathrm{Sp}\,Tx\subset\mathrm{Sp}\,x$ *on peut toujours supposer que* $T1=1$.

DÉMONSTRATION. Comme $\mathrm{Sp}\,T1\subset\mathrm{Sp}\,1=\{1\}$, on a $T1=1+u$ où $\rho(u)=0$. En particulier $1+u$ est inversible. Supposons que $\lambda\in \mathrm{Sp}(1+u)^{-1}Tx$, alors $-1\in\mathrm{Sp}(1+u)^{-1}Ty$, où $y=-x/\lambda$. Ainsi $(1+u)[1+(1+u)^{-1}Ty]=1+u+Ty$ est non inversible, donc comme

$\mathrm{Sp}(1 + u + Ty) = \mathrm{Sp}T(1 + y) \subset \mathrm{Sp}(1 + y)$, $1 + y$ est non inversible, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}x$. Ainsi $\mathrm{Sp}Sx \subset \mathrm{Sp}\, x$.

COROLLAIRE 1. *Si T est une application linéaire de A sur $M_n(C)$ telle que* $\mathrm{Sp}\, Tx \subset \mathrm{Sp}\, x$, *pour tout x, alors $Tx = (T1)Sx$, où S est un morphisme ou un antimorphisme.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le Lemme 3 et le Théorème 1.

COROLLAIRE 2 (*Marcus-Purves*). *Si T est une application linéaire de $M_n(C)$ sur $M_n(C)$ qui conserve le déterminant, alors $Tx = (T1)Sx$ où Sx est de la forme uxu^{-1} ou $u^t xu^{-1}$, pour $u \in M_n(C)$ convenable.*

DÉMONSTRATION. D'après les remarques du début concernant le théorème de Noether-Skolem il suffit de vérifier que $\mathrm{Sp}\, Sx = \mathrm{Sp}\, x$, pour tout x. Mais $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$ équivaut à $\det(x - \lambda 1) = 0$ donc à $\det(Tx - \lambda T1) = 0$ soit $\det T1 \cdot \det((T1)^{-1}Tx - \lambda) = 0$ qui, comme $\det T1 = 1$, équivaut à $\det(Sx - \lambda) = 0$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, Sx$.

4. Démonstration du Théorème 2. Soit Π une représentation irréductible de B, de dimension finie, qui appartient à $\mathscr{F}$. D'après le théorème de densité de Jacobson $\Pi(B) = M_n(C)$, pour un certain n, donc d'après le théorème 1, $\Pi \circ T$ est un morphisme ou un antimorphisme, donc en particulier $\Pi(Tx^2 - (Tx)^2) = 0$. Comme $\mathscr{F}$ est séparante $Tx^2 = (Tx)^2$, donc T est un morphisme de Jordan. La suite de la démonstration se fait comme dans [14], Théorème 2.1. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des idéaux primitifs de B muni de la topologie de Jacobson. Si $\mathrm{Ker}\, \Pi \in \mathscr{P}$ alors $\Pi \circ T$ est un morphisme de Jordan et $\Pi(B)$ est primitif donc, d'après le Lemme 2, $\Pi \circ T$ est un morphisme ou un antimorphisme, aussi $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$, où $\mathscr{P}_1 = \{\mathrm{Ker}\, \Pi \mid \Pi \circ T$ soit un morphisme$\}$ et $\mathscr{P}_2 = \{\mathrm{Ker}\, \Pi \mid \Pi \circ T$ soit un antimorphisme$\}$. Si B est sans représentations irréductibles de dimension sur alors $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est vide. On pose $I = \bigcap_{P \in \mathscr{P}_1} P$, $J = \bigcap_{P \in \mathscr{P}_2} P$, ϕ égal au produit de T et du morphisme canonique de A sur A/I ainsi que ψ égal au produit de T est du morphisme canonique de A sur A/J. En se reportant à [14] on vérifie que toute la suite fonctionne bien.

REMARQUE 2. A. M. Sinclair a montré que la fin du théorème est fausse si B admet des représentations irréductibles de dimension 1. Maintenant il est évident qu'on peut obtenir une grande quantité de corollaires, en particulier de grosses généralisations du théorème de Marcus-Purves, en prenant $B = L^1(G)$, où G est compact ou produit d'un groupe compact et d'un groupe commutatif, $M_n(\mathfrak{A})$ pour $\mathfrak{A}$ commutative et sans radical, $l^1(S)$ pour S semi-groupe libre ayant un nombre fini de générateurs, etc.

REMARQUE 3. Un problème de la plus haute importance serait de savoir si le Théorème 2 reste vrai, sans supposer T surjective, avec comme conclusion que T est un morphisme de Jordan modulo le radical de la sous-algèbre fermée C engendrée par $T(A)$, ou bien plus faiblement que $\rho(Tx^2 - (Tx)^2) = 0$, pour tout $x \in A$. On peut aussi se poser la question de savoir si ce même théorème s'étend à une classe plus vaste d'alègbres de Banach, par exemple celles ayant une famille séparante de représentations irréductibles à spectre dénombrable (où le spectre varie localement analytiquement en dehors d'un fermé de capacité nulle, voir [4]).

RÉFÉRENCES

1. S. T. M. Ackermans, *A case of strong spectral continuity*, Indag. Math., **30** (1968), 455-459.

2. E. Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

3. B. Aupetit, *Caractérisation spectrale des algèbres de Banach commutatives*, Pacific J. Math., **63** (1976), 23-35.

4. ———, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.

5. F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.

6. A. Browder, *Introduction to Function Algebras*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

7. A. M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math., **19** (1967), 171-172.

8. I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Math. Mon. no 15, Math. Assoc. Amer. 1968.

9. ———, *Topics in Ring Theory*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1969.

10. J-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **29** (1968), 339-343.

11. I. Kaplansky, *Algebraic and analytic aspects of operator algebras*, Regional Conference Series in Math., Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

12. M. Marcus and R. Purves, *Linear transformations on algebras of matrices*, Canad. J. Math., **11** (1959), 383-396.

13. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

14. A. M. Sinclair, *Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **24** (1970), 209-214.

15. Z. Słodkowski, W. Wojtyński and J. Zemánek, *A note on quasi nilpotent elements of a Banach algebra*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astr. Phys., **25** (1977). 131-134.

16. W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals on complex Banach algebras*, Studia Math., **30** (1968), 83-85.

Received September 13, 1977 and in revised form May 10, 1979.

UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, CANADA

Printed in Japan by International Academic Printing Co., Ltd., Tokyo, Japan

Pacific Journal of Mathematics

Vol. 85, No. 1 September, 1979