Pacific Journal of Mathematics

UN EXEMPLE D'OUVERT BORNÉ DE $\mathbb{C}^3$ "TAUT" MAIS NON HYPERBOLIQUE COMPLET

JEAN-PIERRE ROSAY

Vol. 98, No. 1 March 1982

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 98, No. 1, 1982

UN EXEMPLE D'OUVERT BORNE DE C^3 "TAUT" MAIS NON HYPERBOLIQUE COMPLET

JEAN-PIERRE ROSAY

On note Δ le disque unité de C.

Rappelons les définitions. Une variété analytique complexe M est dite *"taut"* si pour toute suite d'applications holomorphes φ_i de Δ dans M:

— ou bien la suite (φ_i) est "compactement divergente" ce qui signifie que pour tout compact $K \subset \Delta$ et tout compact $K' \subset M$ $\varphi_i(K) \cap K' = \emptyset$ pour tout i assez grand.

— ou bien il existe une sous suite de la suite φ_i convergente uniformément sur tout compact de Δ vers une application holomorphe de Δ dans M.

Pour un ouvert Ω borné de C^n le fait d'être "taut" signifie que si φ_i est une suite d'applications de Δ dans Ω convergent uniformément sur tout compact vers une application φ: φ est à valeurs dans Ω ou bien φ est à valeurs dans la frontière de Ω. Il est nécessaire que Ω soit d'holomorphie [6], et suffisant que de plus la frontière de Ω soit de classe C^1 [3].

La définition donnée ci-dessus n'est pas la définition originelle donnée par Wu cf. [6] ou [4] p. 129 (au lieu de Δ on considère toute variété analytique) mais lui est équivalente cf. [1].

Une variété analytique complexe M est dite hyperbolique complète si et seulement si la pseudo distance de Kobayashi est une distance (i.e., sépare les points) et si pour tout $x \in M$ et $\rho > 0$ la boule fermée de centre x et rayon ρ, pour la distance de Kobayashi, est compacte cf [4] page 57 (intuitivement: la frontière de M est à distance infinie).

Il est clair, à partir de la définition adoptée, et de la propriété de décroissance de la distance de Kobayashi, que toute variété hyperbolique complète est "taut".

Voir également [4] page 130 et les références qui y sont données, et [5]. Nous allons donner un exemple d'ouvert borné de C^3 "taut" mais non hyperbolique complet, en réponse au problème 1 de [4] page 131.

1. Construction de l'exemple. Par B on désigne la boule unité de C^3 et par $\bar{B}$ sa fermeture. Pour tout $n \in N^*$, soit V_n l'ensemble des $(z, v, w) \in C^3$ vérifiant

$$v = z^2 - \left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right) \qquad w = \frac{1}{n}\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right).$$

Et soit V l'ensemble des $(z, o, o) \in C^3$.

Pour tout $n \in N^*$ on prend ψ_n une fonction plurisousharmonique sur la boule de rayon 2 dans C^3, qui hors de V_n ne prenne pas la valeur $-\infty$ et soit continue, et qui vérifie:

$$\begin{cases} \psi_n \text{ est identiquement } -\infty \text{ sur } V_n \\ \psi_n \text{ est constante sur } V \\ \psi_n < 0 . \end{cases}$$

On peut par exemple prendre $\psi_n = \mathrm{Max}(\mathrm{Log}\,|f|, \mathrm{Log}\,|g|) - A$ où f et g sont deux fonctions holomorphes constantes sur V telles que $f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\}) = V_n$, et A une constante assez grande. Un choix explicite possible pour f et g est le suivant:

$$f(z, v, w) = \alpha(z)\left[v - \frac{(2n+1)z - 1}{n(n+1)}\right] + \beta\left[w - \frac{1}{n}\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

avec $\beta = n(2n+1)^2$ et

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= -\frac{1 - (2n+1)^2\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{(2n+1)z - 1}{n(n+1)}} \\ &= (2n^3 + 3n^2 + n)z - (3n^2 + 3n + 1) \end{aligned}$$

et

$$g(z) = \frac{f(z, v, w) + \dfrac{1}{10}\left[v - \dfrac{(2n+1)z - 1}{n(n-1)}\right]}{1 + \dfrac{1}{10}\left[v - \dfrac{(2n+1)z - 1}{n(n+1)}\right]} .$$

Soit $\psi = \sum \alpha_n \psi_n$; la suite α_n étant une suite de nombres > 0 suffisamment petits pour que:

$$\begin{cases} \psi(o) > -\infty \\ (\,*\,) \quad \text{La suite } h_N = \sum\limits_{N}^{+\infty} \alpha_n \psi_n \text{ tend uniformément vers 0 hors} \\ \qquad\quad \text{de tout voisinage de } V, \text{ au voisinage de } \bar{B} . \end{cases}$$

ψ est une fonction plurisousharmonique, car limite décroissante d'une suite de fonctions plurisousharmoniques. Soient enfin la fonction plurisousharmonique

$$\rho(z, v, w) = \mathrm{Max}\,[(\psi(z, v, w) - \psi(o)) , \quad (|z|^2 + |v|^2 + |w|^2 - 1)] ,$$

définie au voisinage de $\bar{B}$, sur et Ω l'ouvert défini par la condition $\rho < 0$. Le fait important est que la frontière de Ω $\rho \equiv 0$. En effet grâce à la condition (*) ρ est continue hors de V, et sur V cela résulte du fait que ψ est constante, donc égale à $\psi(0)$.

La fonction ρ n'est pas une fonction plurisousharmonique bornée d'exhaustion mais la propriété signalée est suffisante pour établir facilement la propriété "taut" (cf [2] et en particulier §3.3 la remarque).

2. L'ouvert Ω est "taut". En effet, si φ est une application holomorphe de Δ, le disque unité de $\boldsymbol{C}$, dans $\boldsymbol{C}^3$ à valeurs dans $\bar{\Omega}$, la fermeture de Ω, et s'il existe $\zeta \in \Delta$ tel que $\varphi(\zeta) \notin \Omega$, il résulte du principe du maximum pour la fonction sousharmonique $\rho \circ \varphi$ que cette fonction est identiquement nulle et donc que $\varphi(\Delta) \subset \bar{\Omega} - \Omega$.

3. L'ouvert Ω n'est évidemment pas hyperbolique complet car le chemin γ dans Ω défini ci-dessous est de longueur de Kobayashi finie et a pour point limite $0 \notin \Omega$. On définit $\gamma\colon [0(1/2)] \to \Omega$ par:

$$\gamma(t) = \left(t, t^2 - \left(t - \frac{1}{n}\right)\left(t - \frac{1}{n+1}\right), \frac{1}{n}\left(t - \frac{1}{n}\right)\left(t - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

si $1/(n+1) \leqq t \leqq 1/n (n \in \boldsymbol{N}^*)$. Cette définition est bien cohérente et pour tout entier $n \geqq 2$ $\gamma(1/n) = (1/n, 1/n^2, 0)$; si $t \in [1/(n+1) 1/n]$ on a $\gamma(t) \in V_n$ et donc $\psi(\gamma(t)) = -\infty$ d'où $\gamma(t) \in \Omega$ puisqu'on vérifie aisément qu'on a $\gamma(t) \in B$. Le chemin γ est de longueur finie car, grâce à l'inclusion de $V_n \cap B$ dans Ω, on majore la longueur de $\gamma[1/(n+1) 1/n]$, au moins pour n assez grand, par $2(1/n - 1/(n+1))$.

REMARQUES. Améliorant la construction présentée, *N.* Sibony a donné un exemple d'ouvert borné de $\boldsymbol{C}^2$ non hyperbolique complet mais possédant une fonction d'exhaustion plurisousharmonique bornée, donc taut. J. Fornaess a aussi donné un exemple.

Je remercie vivement Th. Barth qui a corrigé un choix explicite incorrect des fonctions f et g.

REFERENCES

1. T. Barth, *Taut and tight complex manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **24** (1970), 429–431.

2. K. Diederich et J. E. Fornaess, *Pseudo convex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Inventiones Math., **39** (1977), 129–141.

3. N. Kerzman, *Taut manifolds and domains of holomorphy in C^n*, Notices Amer. Math. Soc., **16** (1969), 675–676.

4. S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, N. Y., M. Dekker, 1970.

5. H. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric. Several complex variables II*, Maryland, 1790, Lectures Notes 185.

6. H. WU, *Normal Families of holomorphic mappings*, Acta Math., **119** (1967), 193–233.

7. T. Barth, *Some counterexamples concerning intrinsic distances,* Proc. A.M.S., **66** (1977), 49-53.

Received July 9, 1980.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE ET CNRS LA 225
3, PLACE VICTOR HUGO
13331 MARSEILLE CEDEX 3
FRANCE

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typed form or offset-reproduced, (not dittoed), double spaced with large margins. Please do not use built up fractions in the text of the manuscript. However, you may use them in the displayed equations. Underline Greek letters in red, German in green, and script in blue. The first paragraph or two must be capable of being used separately as a synopsis of the entire paper. Please propose a heading for the odd numbered pages of less than 35 characters. Manuscripts, in triplicate, may be sent to any one of the editors. Please classify according to the scheme of Math. Reviews, Index to Vol. **39**. Supply name and address of author to whom proofs should be sent. All other communications should be addressed to the managing editor, or Elaine Barth, University of California, Los Angeles, California, 90024.

50 reprints to each author are provided free for each article, only if page charges have been substantially paid. Additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* is issued monthly as of January 1966. Regular subscription rate: $102.00 a year (6 Vols., 12 issues). Special rate: $51.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for numbers issued in the last three calendar years, and changes of address shoud be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924, U.S.A. Old back numbers obtainable from Kraus Periodicals Co., Route 100, Millwood, NY 10546.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION
Printed at Kokusai Bunken Insatsusha (International Academic Printing Co., Ltd.).
8-8, 3-chome, Takadanobaba, Shinjuku-ku, Tokyo 160, Japan.

Pacific Journal of Mathematics

Vol. 98, No. 1 March, 1982