Pacific Journal of Mathematics

SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES COMPLÈTES DES CORPS CUBIQUES

BERNADETTE DESHOMMES

Vol. 139, No. 1 May 1989

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 139, No. 1, 1989

SUR LES ZEROS DES FONCTIONS SYMETRIQUES COMPLETES DES CORPS CUBIQUES

BERNADETTE DESHOMMES

Let $\mathscr{K}$ be a real cubic field of negative discriminant, defined by the relation $\omega^3 = \varepsilon\,\mathrm{Norm}_{\mathscr{K}/\mathbf{Q}}(\omega)$, where ω is an integer of $\mathscr{K}$ and the unit ε is not a cube. The complete symmetric function with weight n of the roots of the minimal polynomial of ω satisfies a cubic linear recurrence relation. We show that the zeros of this sequence are connected to the binomial units of $\mathscr{K}$ and further, that the number of zeros is between two and four, except in two cases, when there are five or six zeros (the sequence of Berstel and Mignotte). As an illustration, a table of zeros is obtained for fields $\mathscr{K}$ of discriminant superior to -400.

Soit $\mathscr{K}$ un corps cubique réel de discriminant négatif, défini par la relation $\omega^3 = \varepsilon\,\mathrm{Norm}_{\mathscr{K}/\mathbf{Q}}(\omega)$, où ω est un entier de $\mathscr{K}$ et l'unité ε n'est pas un cube. La fonction symétrique complète de poids n, des racines du polynôme minimal de ω, vérifie une relation de récurrence linéaire cubique. Nous montrons que les zéros de cette suite sont reliés aux unités binomiales de $\mathscr{K}$ et aussi, que le nombre de zéros est compris entre deux et quatre, sauf dans deux cas, où il y a cinq ou six zéros (suite de Berstel et Mignotte). A titre d'illustration, une table de zéros est calculée pour les corps $\mathscr{K}$ de discriminant supérieur à -400.

1. Introduction. Soient $f(z) = z^3 - Sz^2 - Qz - N$, $N \neq 0$, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et (u_n) une solution dans $\mathbb{Z}$, non triviale, de la récurrence

$$\text{(R)} \qquad u_{n+3} = Su_{n+2} + Qu_{n+1} + Nu_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(H) *Nous supposons que le rapport de deux quelconques des racines du polynôme f n'est pas une racine de l'unité.* D'après un théorème de Mahler **[19]** la suite (u_n) est dans ce cas non dégénérée, elle possède un nombre fini de zéros (i.e. le nombre de n tels que $u_n = 0$ est fini).

Ward (1959) **[30]** est l'auteur d'une conjecture limitant ce nombre à cinq, lorsque le polynôme f a des racines complexes et $N \neq \pm 1$. La suite de Berstel et Mignotte (1973) **[3, 20]** montre que cette limite est au moins six et d'après Kubota **[15**, p. 99]: "It can be shown that non degenerate rational integer cubic recurrences can have no more than six zeros". Le cas où $f(z) = (z-a)(z^2 - Lz + M)$ a été résolu par les travaux de Kubota (1977) [**15**], précisés par Beukers (1980) [**4**]. Dans le cas où le polynôme f est irréductible, des résultats partiels sont dus à Picon (1974) [**22**]. Sous ces hypothèses, la relation $u_n = 0$ implique l'équation

$$\text{(E)} \qquad v_n = \lambda\alpha^n + \bar{\lambda}\bar{\alpha}^n = 1,$$

où $\bar{\lambda}$ et $\bar{\alpha}$ désignent les nombres complexes conjugués de λ et α (cf. (1.2)). Il s'agit alors d'estimer la multiplicité d'une récurrence binaire de nombres algébriques (i.e. le nombre maximum de termes de la suite prenant une valeur donnée). Les résultats généraux de Lewis et Turk (1985) [**17**], de Beukers et Tijdeman (1984) [**5**] fournissent respectivement: une borne effective (non calculée) pour la taille des solutions de l'équation $v_m = v_n$; une borne absolue lorsque f est irréductible et par ailleurs, Beukers annonce le nombre maximum de sept zéros (non publié).

Une question reliée est l'existence d'un algorithme déterminant l'ensemble des zéros d'une récurrence linéaire d'ordre k, $k \geq 3$. Si la multiplicité de la suite est infinie la question est résolue par le résultat suivant (voir [**8**]).

THÉORÈME *de Lech-Mahler-Skolem. Soient* **K** *un corps de caractéristique nulle,* $c \in \mathbf{K}$, (u_n) *une suite dans* **K** *vérifiant une relation de récurrence; alors ou bien* $u_n = c$ *pour un nombre fini de* n, *ou bien* $u_n = c$ *pour tous les* n *de certaines progressions arithmétiques.*

La question est ouverte si la suite a un nombre fini de zéros. Vereshchagin [**27**] donne la borne supérieure la plus récente de ce nombre, lorsque **K** est un corps de nombres; la formule de Barsky et Robba [**24**] est cependant plus générale. Le théorème de Strassmann permet de calculer les zéros dans certains cas particuliers (voir [**8**, **9**]). L'application pragmatique des méthodes locales aux récurrences linéaires est exposée dans le livre de Cassels [**8**]. Cerlienco, Mignotte et Piras [**9**] traitent dans un article synthétique des propriétés, des méthodes spécifiques et du vaste champ d'application des récurrences linéaires. Van der Poorten [**23a**, **23b**] analyse en expert les principaux problèmes ouverts et les progrès réalisés.

L'étude des propriétés de la suite de Berstel et Mignotte [**20**] se trouve à l'origine de ce travail. Cette suite vérifie la relation

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n \qquad (u_0 = u_1 = 0,\ u_2 = 1).$$

Le corps cubique $\mathscr{K}$, engendré par la racine réelle du polynôme caractéristique de la récurrence, est défini par l'unité fondamentale

$\varepsilon = \omega^3/4 = \omega^2/2 - \omega + 1$. Les six zéros de cette suite 0, 1, 4, 6, 13, 52 sont déterminés par les quatre unités binomiales, resp. deux, solutions des équations de Thue de degré trois: $\mathrm{Norm}_{\mathscr{K}/\mathbb{Q}}(x\varepsilon+y) = 1$, resp. $\mathrm{Norm}_{\mathscr{K}/\mathbb{Q}}(x\varepsilon^2 + y) = 1$ (cf. (3.5.2)).

Nous décrivons d'une façon analogue (cf. Proposition (3.2)) les zéros des fonctions symétriques complètes (cf. Définition (1.3)) reliées aux corps $\mathscr{K}$ (cf. §2). Ces corps cubiques, réels et de discriminant négatif, sont définis par la relation $\varepsilon = \omega^3/\mathrm{Norm}_{\mathscr{K}/\mathbb{Q}}(\omega)$ où l'unité ε n'est pas un cube, d'après (H). Nagell **[21]**, Delaunay et Faddeev **[10**, §71–73] ont déterminé ces unités, lorsque ω est un entier de trace nulle. Ward (1934) **[28]** utilise le théorème principal de Nagell et de Delaunay [**10**, p. 402] pour majorer le nombre de zéros d'une récurrence cubique entière (R), dans le cas particulier où $N = \pm 1$. Ce théorème appliqué à deux équations de Thue, comme dans l'exemple qui vient d'être mentionné, donne généralement plus d'unités binomiales que la suite correspondante n'a de zéros. Nous limitons dans un premier temps à cinq, le nombre de zéros des fonctions symétriques complètes reliées aux corps $\mathscr{K}$ (cf. Proposition (3.6)), à l'exception de deux cas particuliers (cf. (3.5)), la réduction du nombre de zéros à quatre est réalisée dans le paragraphe 4. Nous déterminons les zéros de ces fonctions au moyen de l'algorithme de Delaunay [**10**, p. 386], en utilisant des critères d'arrêt de cet algorithme établis par Gordon et Mohanty **[13]**. Une bibliographie plus importante figure dans l'exposé de Deshommes [Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1986/87].

Notations et définitions. La série génératrice d'une suite (u_n) solution de (R) est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$(1.1) \qquad \sum_{0 \le n} u_n T^n = \frac{P(T)}{(1-\omega T)(1-\omega' T)(1-\omega'' T)},$$

$P(T) = (u_2 - Su_1 - Qu_0)T^2 + (u_1 - Su_0)T + u_0$ et ω', ω'', ω désignent les racines de f. La décomposition en éléments simples de cette fraction conduit à l'expression

$$(1.2) \qquad u_n = A\omega^n + B(\omega')^n + C(\omega'')^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

où $A = g(\omega)/f'(\omega)$, $g(z) = P(1/z)z^2$ et B, C ont des expressions analogues. L'équation $u_n = 0$ se transforme en l'équation (E) via (1.2). Les suites (U_n), (V_n) et (W_n) désignent les solutions de (R) avec les conditions initiales respectives $(u_0, u_1, u_2) = (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$. Nous avons la relation

$$u_{n+r} = u_{r+2}U_n + u_{r+1}V_n + u_r W_n \qquad (n, r \in \mathbb{N}).$$

(1.3) DÉFINITION. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $U_{n+2} = \sum_{i+j+k=n} \omega^i(\omega')^j(\omega'')^k$ la fonction symétrique complète de poids n des racines du polynôme minimal f de ω.

Cette expression se déduit du produit des séries géométriques figurant dans la second membre de (1.1) lorsque la suite (U_n) est dans le premier membre. Ward **[29]** appelle cette fonction une somme de produits homogènes, la suite (U_{n+2}) est à l'ordre trois ce que la fonction de Lucas de la première sorte est à l'ordre deux. L'expression de U_{n+2} en termes des fonctions symétriques élémentaires est classique. Posons: $e_0 = 1$, $e_1 = S$, $e_2 = -Q$, $e_3 = N$ et $e_i = 0$ pour $i \geq 4$, la fonction U_{n+2} est égale au déterminant de $(e_{1-i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ (voir Lascoux **[16]** et Macdonald **[18]**). Il s'en déduit une formule combinatoire

$$U_{n+2} = \sum_{i+2j+3k=n} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} S^i Q^j N^k. \tag{1.4}$$

Bell **[2]** donne l'expression suivante de ω^n (resp. $(\omega')^n$, $(\omega'')^n$)

$$\omega^n = U_n\omega^2 + V_n\omega + W_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.5}$$

Supposons le polynôme f irréductible. Lorsque $U_n = 0$, la norme des deux membres de (1.5) détermine une équation de Thue de degré trois

$$N^n = \mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(x\omega + y) = Nx^3 - Qyx^2 + Sxy^2 + y^3.$$

Les méthodes de résolution en S-unité de Evertse, Györy, Stewart et Tijdeman **[12]** ou de résolution p-adique de Bombieri et Schmidt **[6]** font espérer un progrès dans la conjecture des six zéros, via les équations de Thue.

2. Détermination des corps $\mathscr{K}$.

(2.1) Soient $\mathscr{K}$ un corps cubique réel de discriminant négatif, $\mathscr{O}_{\mathscr{K}}$ l'ordre maximum et ε_0 l'unité fondamentale. Cette unité est positive ou de norme égale à 1 et directe $0 < \varepsilon_0 < 1$. Chaque unité de $\mathscr{K}$ est de la forme $\pm\varepsilon_0^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Nous considérons la relation

$$\omega^3 = \varepsilon\,\mathrm{Norm}(\omega). \tag{2.1.1}$$

où ε et ω sont des entiers primitifs de $\mathscr{K}$. L'entier rationnel $N = \mathrm{Norm}(\omega)$ désigne $\mathrm{Norm}_{\mathscr{K}/\mathbb{Q}}(\omega) = \omega'\omega''\omega$, N est différent de ± 1. Dans le paragraphe (2.2) N est fixé et dans (2.3) l'unité ε est fixée.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que N est un entier positif et sans facteurs cubiques: $N = a^2b$, où les entiers a et b sont *positifs, sans facteurs carrés et premiers entre eux, avec* $ab \geq 2$. *Posons* $\alpha = ab/\omega$ *et* $\overline{N} = ab^2$. *Les relations* $\omega^3 = N\varepsilon$ *et* $\alpha^3 = \overline{N}\varepsilon^{-1}$ *étant équivalentes, nous pouvons supposer que l'unité* ε *est directe* ($\varepsilon = \varepsilon_0^k$ *pour un certain entier positif* k).

Dans la relation (2.1.1) fixons l'entier positif $N = \mathrm{Norm}(\omega)$. Si k est de la forme $3l$, $3l+1$ ou $31+2$ alors $\omega = \varepsilon_0^l \rho$, avec $\rho^3 = N$, $N\varepsilon_0$ ou $N\varepsilon_0^2$ respectivement. Les entiers ω et ρ sont associés. Dans le cas particulier où l'entier ω est de trace nulle, Delaunay et Faddeev ont obtenu les résultats suivants:

(1) Si l'unité ε est un cube alors

$$\omega = x\sqrt[3]{N} + y\sqrt[3]{\overline{N}} \quad \text{et} \quad x^3 + N(y/a)^3 = 1.$$

Lorsque $x_0 + y_0\sqrt[3]{N}$ est l'unité fondamentale directe et positive de l'ordre $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{N}]$, cette équation admet deux solutions: $x = 1$, $y = 0$ ou $x = x_0$, $y = ay_0$ (voir [**10**, p. 351] [**21**, p. 43]).

(2) Si l'unité ε n'est pas un cube alors il existe au plus une unité de la forme ω^3/N, sauf dans deux cas:

(i) $\varepsilon_0 = \rho^3/2 = -\rho + 1$, $\varepsilon_0^{13} = \omega^3/2$,

(ii) $\varepsilon_0 = \rho^3/4 = -\rho + 1$, $\varepsilon_0^8 = \omega^3/2$.

Cette unité, quand elle existe, est alors de la forme $\varepsilon_0^{4^t}$ ou $\varepsilon_0^{2.4^t}$ à un nombre fini d'exceptions près et elle est obtenue en un nombre fini détapes $t \leq (4d+8)/3$, d'étant le nombre de diviseurs premiers de N ([**10**, p. 367]). Pour des travaux plus récents en relation avec ces corps, voir Scarowsky [**25**].

Nous supposons désormais que l'unité ε *n'est pas un cube et dans le paragraphe* (2.3) *que l'entier* ω *n'est pas de trace nulle.*

(2.2) Soient q et s des entiers rationnels non nuls simultanément, posons:

$$\Delta = (s - aq^2)(q + bs^2) - qs \quad \text{et} \quad D = 4ab\Delta + 3(3 + abqs)^2.$$

(2.2.1) Proposition. *Si* ε *et* ω *vérifient les conditions* (2.1) *avec* $N = a^2b$ *fixé alors il existe des entiers rationnels* q *et* s *tels que*:

(i) ω *est défini par* $\omega^3 = abs\omega^2 + a^2bq\omega + a^2b$.

(ii) *L'ordre* $\mathscr{O} = \mathbb{Z}[1, \omega, \alpha]$ *a pour discriminant* $-(ab)^2D$, a (*resp.* Δ) *est l'indice de l'ordre* $\mathbb{Z}[\omega]$ (*resp.* $\mathbb{Z}[\varepsilon]$) *dans l'ordre* $\mathscr{O}$.

(iii) *L'expression de* ε *comme fraction linéaire de* ω *est la suivante*

$$\varepsilon = \frac{\omega(s - aq^2) - aq}{\omega s - a(q + bs^2)}.$$

Démonstration. Posons $\omega^3 = S\omega^2 + Q\omega + N$ et $\varepsilon^3 = S_1\varepsilon^2 + Q_1\varepsilon + 1$. La relation (2.1.1) se traduit par

$$NS_1 = 3(N + QS) + S^3 \quad \text{et} \quad N^2Q_1 = -3N(N + QS) + Q^3,$$

où $N = a^2b$ et a, b vérifient les conditions (2.1). Nous en déduisons les congruences $S \equiv 0 \pmod{ab}$ et $Q \equiv 0 \pmod{a^2b}$.

Soit $\mathscr{O}$ l'ordre $\mathbb{Z}[1, \omega, \alpha]$ où $\alpha = ab/\omega$. Désignons par $f_\omega = (a^2b, -a^2bq, abs, 1)$ la forme cubique binaire définie par ω. Les propriétés des déterminants et la formule du discriminant entraînent les égalités suivantes

$$\operatorname{Disc}(f_\omega) = |1, \omega, \omega^2|^2 = a^2|1, \omega, \alpha|^2 = a^2 \operatorname{Disc}(\mathscr{O}).$$

L'écriture de ε sous la form $\varepsilon = (1 + abqs) + (q + bs^2)\omega + s\alpha$ montre que ε appartient à $\mathscr{O}$. L'indice Δ de ε dans l'ordre $\mathscr{O}$ est défini par les égalités $\operatorname{Disc}(\varepsilon) = |1, \varepsilon, \varepsilon^2|^2 = \Delta^2 \operatorname{Disc}(\mathscr{O})$, avec Δ de la forme indiquée. □

Corollaire. *L'indice de $\mathscr{O}$ dans l'ordre maximum est premier avec ab.*

Démonstration. Posons $\lambda^2 = \operatorname{Disc}(\mathscr{O})/\operatorname{Disc}(\mathscr{O}_{\mathscr{K}})$, λ est l'indice de $\mathscr{O}$ dans l'ordre maximum. Soit π un diviseur premier de b, pour $b \neq 1$. Nous avons: pour $\pi = 3$, 3^3 (resp. 3^4, 3^5) $\|\operatorname{Disc}(\mathscr{O})$ suivant que $3 \nmid q$ (resp. $3|q$ et $3 \nmid s$, $3|q$ et $3|s$) et pour $\pi \neq 3$, $\pi^2\|\operatorname{Disc}(\mathscr{O})$, d'après les formules de la Proposition (2.2.1).

Supposons qu'il existe un ordre $\mathscr{O}_1$ contenant $\mathbb{Z}[\omega]$, avec $\operatorname{Disc}(\omega) = \pi^2 \operatorname{Disc}(\mathscr{O}_1)$. D'après [**10**, p. 111], une base de $\mathscr{O}_1$ serait de la forme

$$\{1, \omega - t, (\omega^2 + (t - abs)\omega + (t^2 - abst - a^2bq))/\pi\},$$

où t vérifie les congruences: $f(t) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$ et $f'(t) \equiv 0 \pmod{\pi}$ avec $-\pi/2 < t \leq \pi/2$, f désigne le polynôme minimal de ω. Comme f est un polynôme d'Eisenstein relatif à π, nous obtenons une contradiction. Si $b = 1$ alors $a \neq 1$ d'après (2.1), dans ce cas on échange b et a, ω et α. □

Le lemme suivant fournit sous certaines conditions, une unité binomiale non triviale $\gamma > 1$ (ou $\delta > 1$) solution de l'équation $\operatorname{Norm}(x\varepsilon + y) = 1$. Ce résultat est utilisé dans la suite pour démontrer la Proposition Principale (3.6).

(2.2.2) LEMME. *Sous les hypothèses et avec les notations de* (2.2.1):

(i) *Si* $q = 0$ *alors* $s = -1$, $ab = 2$ *ou* $b = 1$ *et* $a \in \{3, 5, 6\}$; *sinon* $q < 0$ *et* $s < aq^2$.

(ii) *Si* $s \neq 0$ *et* $\Delta = \pm a$ *alors* $\gamma = (s/a)\varepsilon + q^2 - s/a$ *est une unité inverse positive.*

(iii) *Si* $q \neq 0$, $q \neq -bs^2$ *et* $\Delta = \pm b$ *alors* $\delta = (s^2 + q/b)\varepsilon - q/b$ *est une unité inverse positive.*

Démonstration. (i) Par hypothèse, le discriminant de $\mathscr{K}$ est négatif et l'unité ε directe et positive, ce qui entraîne $D > 0$ et $S_1 + Q_1 < 0$ avec $S_1 + Q_1 = ab(bs^3 + aq^3)$ ou $S_1 + Q_1 = ab(s(bs^2 + q) + q(aq^2 - s))$. Si $q = 0$ alors $s < 0$ et $D = 27 + 4ab^2s^3$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que q est non nul, si $q > 0$ alors $s < 0$. Posons $t = -abqs$, d'après (2.1) nous avons: $ab \geq 2$, $aq^3 - bs^3 \geq 3$ et $t \geq 2$. La condition $D > 0$ implique

$$0 > t^2 + 18t - 27 + 4ab(aq^3 - bs^3) \geq t^2 + 18t - 3,$$

ce qui est impossible pour $t \geq 2$. Ainsi $q < 0$.

Supposons que $s \geq aq^2$. La condition $S_1 + Q_1 < 0$ implique $s(bs^2 + q) < q(s - aq^2)$ avec $q < 0$ et $s > 0$. Nous en déduisons que $bs^2 < -q$ et $ab^2s^4 < aq^2 \leq s$. L'inégalité $ab^2s^3 < 1$ est en contradiction avec $ab \geq 2$. Ainsi $s < aq^2$.

(ii) Soit $\gamma = (s/a)\varepsilon + q^2 - s/a$ et $\operatorname{Norm}(\gamma) = f_\varepsilon(s/a, q^2 - s/a) = (\Delta/a)^2$. Supposons que $\Delta = \pm a$ et $s \neq 0$. Par définition de Δ nous avons: $s \equiv 0 \pmod a$ et $q \neq 0$ d'après (2.1). L'entier $q^2 - s/a$ est positif et non nul d'après (i). Montrons que l'unité positive γ de $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ vérifie $\gamma > 1$. Par hypothèse, l'unité ε est directe, la condition $0 < \varepsilon < 1$ entraîne que $(s/a)\varepsilon > 0$ pour $s > 0$ ou $(s/a)(\varepsilon - 1) > 0$ pour $s < 0$; par conséquent, $(s/a)\varepsilon + q^2 - s/a > 1$ pour $s > 0$ ou $(s/a)(\varepsilon - 1) + q^2 > 1$ pour $s < 0$. La démonstration de (iii) est analogue. □

(2.3) Il existe, dans l'ordre maximum $\mathscr{O}_{\mathscr{K}}$, au plus $\tau(N)^3$ classes d'entiers non associés de norme $\pm N$, où $\tau(N)$ est le nombre de diviseurs premiers de N [7, pp. 100 et 244]. D'après (2.1), parmi les associés d'un entier ρ tel que $\rho^3 = N\varepsilon_0$ ou $\rho^3 = N\varepsilon_0^2$, il existe au plus un entier de trace nulle, avec deux exceptions. Nous fixons maintenant l'unité ε dans la relation (2.1.1).

(2.3.1) THÉORÈME. *Soient* $\mathscr{K}$ *un corps cubique et* ε *une unité vérifiant les conditions de* (2.1). *Le nombre des entiers* ω *de* $\mathscr{K}$ *tels que* $\omega^3 = \varepsilon \operatorname{Norm}(\omega)$ *est au plus égal à un lorsque* $\mathscr{K}$ *n'est pas un corps cubique* *pur. Ce nombre est égal à zéro ou à trois lorsque $\mathscr{K}$ est un corps cubique pur* (*voir table* (4.5)).

Démonstration. Soient ω et θ deux entiers de $\mathscr{K}$ vérifiant la relation (2.1.1)

$$\theta^3 = \varepsilon N', \quad N' = (a')^2 b', \quad \overline{N'} = a'(b')^2,$$
$$\theta\beta = a'b' \quad \text{et} \quad (\beta\omega)^3 = N\overline{N'}.$$

D'après (2.1), $N\overline{N'}$ est un cube uniquement si $a = a'$ et $b = b'$, dans ce cas $\omega = \theta$, le corps $\mathscr{K}$ étant réel. Si $N \neq N'$, le corps $\mathscr{K}$ est cubique pur, de la forme

$$\mathscr{K} = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{N\overline{N'}}\right) \quad \text{avec} \quad \operatorname{Disc}(\mathscr{K}) = -3d^2.$$

D'après la Proposition (2.2.1), les entiers rationnels a, b, q, s déterminent ω et $z = abqs$ vérifie l'équation

$$z^3 + 9z^2 - 3(S_1 - Q_1 - 6)z - (S_1 - 3)(Q_1 + 3) = 0, \tag{2.3.2}$$

dont le discriminant est égal à $-27\operatorname{Disc}(\varepsilon)$. Ce discriminant est un carré uniquement lorsque le corps $\mathscr{K}$ est cubique pur. L'équation (2.3.2) possède alors zéro ou trois racines dans $\mathbb{Z}$. Soit $z = abqs = a'b'q's'$, z s'annule lorsque $qs = 0$ avec $s \neq 0$ (voir (2.1)).

Dans le cas où $q = 0$, nous obtenons $\mathscr{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ d'après (2.2.2), les solutions de l'équation $\omega^3 = N\varepsilon_0$ sont:

$$\omega^3 = -6\omega^2 + 36, \ \omega^3 = 3\omega^2 - 9\omega + 9 \text{ ou } \omega^3 = 6\omega^2 - 18\omega + 18.$$

Dans le cas où $qq' \neq 0$, d'après (2.2.1) nous avons $Nq^3 = Q_1 + 3(1+z) = N'q'^3$, puis $N\overline{N'}q^3 = (a'b'q')^3$, ce qui est impossible pour $N \neq N'$. Chaque solution de l'équation (2.3.2) caractérise un seul entier ω.

Les coefficients S_1 et Q_1 étant donnés ainsi que l'indice Δ_0 de $\varepsilon = \varepsilon_0$ dans l'ordre maximum $\mathscr{O}_{\mathscr{K}}$, nous déterminons a, b, q, s de la façon suivante:

(1) $z_1 = abqs$ d'après (2.3.2); $\operatorname{sgn}(z_1) = \operatorname{sgn}(-s)$; $q < 0$.

(2) $z_2 = ab\Delta = S_1 - Q_1 + 3 - (z_1+3)^2$; $\operatorname{sgn}(z_2) = \operatorname{sgn}(\Delta)$. Nous pouvons aussi utiliser la relation $(ab\Delta)^2(ab\Delta + 3(S_1 - Q_1 + 3)) = -\operatorname{Disc}(\varepsilon)$.

(3) Δ divise Δ_0, ab divise $(S_1 + Q_1)$ et $z_2 = ab\Delta$ où a et b vérifient les conditions (2.1); nous en déduisons par essais successifs: Δ, $z_3 = ab$ et qs.

(4) $bs^3 = (S_1 - 3 - 3z_1)/z_3$; $aq^3 = (Q_1 + 3 + 3z_1)/z_3$ avec $(a,b) = 1$. Le lemme (2.3.3) permet de réduire le nombre des essais. □

(2.3.3) LEMME. *Soit π un diviseur premier de l'indice Δ de ε dans l'ordre $\mathscr{O}$,*

$$\pi|(q,s) \text{ si et seulement si } \pi^3|\Delta.$$

Démonstration. D'après [**10**, p. 111], si $\Delta = \pi^3\Delta_1$ alors il existe un ordre $\mathscr{O}_1$ contenant 1 et ε, d'indice Δ_1 dans l'ordre $\mathscr{O}$ et admettant pour base d'entiers

$$\{1, (\varepsilon - t)/\pi, (\varepsilon^2 + (t - S_1)\varepsilon + (t^2 - S_1 t - Q_1))/\pi^2\},$$

où t, $-\pi/2 < t \leq \pi/2$, vérifie les congruences: $g(t) \equiv 0 \pmod{\pi^3}$, $g'(t) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$, $g''(t)/2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, g désigne le polynôme minimal de ε. D'après la Proposition (2.2.1), la relation $\varepsilon = (1 + abqs) + (q + bs^2)\omega + s\alpha$ entraîne que π divise $t-1$, s et q. L'expression de $\Delta = bs^3 - aq^3 - ab(qs)^2$ donne la réciproque. □

3. Nombre maximum de zéros des fonctions symétriques complètes reliées aux corps $\mathscr{K}$.

(3.1) *Hypothèses.* Le corps cubique $\mathscr{K}$ et l'unité ε étant donnés, soit ω un entier de $\mathscr{K}$ vérifiant les conditions de (2.1): $\omega^3 = N\varepsilon$ avec $N = a^2b$. La suite (U_n) est la fonction symétrique complète des racines du polynôme minimal de ω (voir Définition (1.3)).

Pour décrire les zéros de la suite (U_n) nous définissons pour $m \geq 0$, les suites: $aU_{3m} = X_m N^m$, $U_{3m+1} = Y_m N^m$ et $U_{3m+2} = Z_m N^m$. Elles vérifient la formule (1.4) qui prend la forme

$$(3.1.1) \qquad \sum_{i+2j+3k=3m+r-2} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} s^i q^j b^{i+j+k-m} a^{m-1-k+[r/2]},$$

où $r = 0, 1, 2$ et $[r/2]$ désigne la partie entière de $r/2$.

Soit (U'_n) la suite correspondant à α avec $\alpha^3 = \overline{N}\varepsilon^{-1}$ et $\overline{N} = ab^2$; pour $m \geq 0$ nous définissons de même les suites X'_m, Y'_m, Z'_m. Elles vérifient la formule déduite de (3.1.1) en échangeant a et b, s et $-q$. Les suites U_{n+2} et U'_{n+2} sont les fonctions symétriques complètes de poids n correspondant à ω et α. Nous avons

$$N\sqrt[3]{(N\overline{N})^n}\,U_{-n-1} = U'_{n+2} = \sqrt[3]{(N\overline{N})^n} \sum_{i+j+k=n} \omega^{-i}(\omega')^{-j}(\omega'')^{-k},$$

la définition (1.3) s'étend aux entiers rationnels.

DÉFINITION. Pour $n \geq 0$, NU_{-n-1} est la fonction symétrique complète de poids $-n$ correspondant à l'entier ω de norme N.

(3.2) Proposition. *Sous l'hypothèse* (3.1), *les zéros de la suite* (U_n) *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *sont déterminés par les unités binomiales de l'ordre* $\mathbb{Z}[\omega]$ *si* $n = 3m$, *de l'ordre* $\mathbb{Z}[\alpha]$ *si* $n = 3m+1$, *et* $U_n \neq 0$ *si* $n = 3m+2$.

Démonstration. Soit ε l'unité directe telle que $\omega^3 = a^2 b\varepsilon$, d'après la formule (1.5) pour $m \geq 0$ nous avons:

(3.2.1)
$$\begin{aligned}\varepsilon^m &= (a^{-1}X_m)\omega^2 + (Y_m - bsX_m)\omega \\ &\quad + (Z_m - absY_m - abqX_m), \\ \varepsilon^{-m} &= (a^{-1}Y'_m)\omega^2 + (X'_m - bsY'_m)\omega + Z'_m;\end{aligned}$$

et par la relation $\alpha\omega = ab$,

(3.2.2)
$$\varepsilon^m = (b^{-1}Y_m)\alpha^2 + (X_m + aqY_m)\alpha + Z_m,$$
$$\varepsilon^{-m} = (b^{-1}X'_m)\alpha^2 + (Y'_m + aqX'_m)\alpha + (Z'_m + abqY'_m + absX'_m).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m$ sont exactement les zéros de la suite (X_m) si $m \geq 0$, les zéros de la suite (Y'_{-m}) si $m \leq 0$, l'unité ε^m étant de la forme $x\omega + y$. Le résultat est analogue pour les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m+1$, l'unité ε^m étant de la forme $x\alpha + y$. Pour $m \geq 0$, nous déduisons de la formule (3.1.1) les congruences: $Z_m \equiv 1$, $Z'_m \equiv 1 \pmod{ab}$. Ainsi $U_{3m+2} \neq 0$ pour $m \in \mathbb{Z}$. □

(3.3) Soient ρ un entier d'un corps cubique de discriminant négatif et ε l'unité fondamentale de l'ordre $\mathbb{Z}[\rho]$, $0 < \varepsilon < 1$. Toute solution de l'équation $f_\rho(x, y) = \mathrm{Norm}(x\rho + y) = 1$ est une unité binomiale en ρ de la forme $\varepsilon^k = x\rho + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et réciproquement. Les théorèmes de Delaunay et de Nagell [**10**, p. 402], [**21**, p. 52] limitent le nombre de ces unités binomiales. Une table d'unités binomiales [**10**, p. 417] a été obtenue pour les ordres cubiques de discriminant négatif supérieur à -300 (voir aussi les tables d'unités de Angell [**1**] et de Smadja [**26**]).

(3.3.1) Soient $\varepsilon^k = B\rho + D$ une unité binomiale en ρ, $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D\end{smallmatrix}\right)$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ avec $AD - BC = \pm 1$ et $\theta = (A\rho + C)/(B\rho + D)$. Les ordres $\mathbb{Z}[\rho]$ et $\mathbb{Z}[\theta]$ sont égaux, en d'autres termes les formes cubiques binaires f_ρ et f_θ sont équivalentes,

$$f_\rho(x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = f_\theta(x', y') \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}.$$

(3.3.2) *L'algorithme de rehaussement de Delaunay* [**10**, p. 386] [**21**, p. 48].

Les unités binomiales d'un ordre cubique $\mathbb{Z}[\rho]$ de discriminant négatif sont déterminées par l'algorithme suivant. Soit ε l'unité fondamentale, directe et positive de l'ordre $\mathbb{Z}[\rho]$, $\varepsilon = a\rho^2 + b\rho + c$. Il s'agit de trouver les exposants entiers rationnels n tels que

$$(*) \qquad \varepsilon^n = x\rho + y.$$

On peut supposer que $n \in \mathbb{N}$ d'après (3.3.1). Ces unités binomiales vérifient les égalités suivantes:

$$\varepsilon'^n - \varepsilon''^n = x(\rho' - \rho'') \quad \text{et} \quad x = (-a\rho + b + as)(\varepsilon'^n - \varepsilon''^n)/(\varepsilon' - \varepsilon''),$$

où s désigne la trace de ρ. Soit $K\delta^2 = \mathrm{Norm}(-a\rho + b + as)$ avec $\delta = (a, b)$, alors K divise x et les solutions de l'équation $(*)$ appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[K\rho]$. Posons $x = Kx_1$ et $\rho_1 = K\rho$. Après avoir calculé l'unité $\varepsilon_1 = \varepsilon^\nu$ où ν est le plus petit exposant entier positif tel que $\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\rho_1]$, le processus se répète alors dans l'ordre $\mathbb{Z}[\rho_1]$. L'équation $(*)$ s'écrit alors sous la forme $\varepsilon_1^{n/\nu} = x_1\rho_1 + y$.

Si $K \neq \pm 1$ et si l'équation $(*)$ admet une solution non triviale ($x \neq 0$) alors l'algorithme s'arrête après épuisement des diviseurs de x. Il y a une seule solution non triviale d'après [**10**, p. 385].

Si $K = \pm 1$ alors les ordres $\mathbb{Z}[\rho]$ et $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ sont égaux et l'algorithme ne peut pas commencer. Les équations déduites de l'équation $(*)$ suivant la parité de n sont traitées suivant le même principe. Il y a au plus deux solutions avec $x \neq 0$ sauf dans trois cas, lorsque $\mathrm{Disc}(\rho)$ est égal à -23, -31 ou -44 ([**10**, p. 398]).

Soit $\eta = \varepsilon^{-1}$ l'unité inverse de ε, $\eta \in \mathbb{Z}[\rho]$. Nous remarquons que les unités binomiales $\eta^n = X\rho + Y$ avec $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[K\rho]$ où K est la constante précédente. En effet, les égalités: $\eta'^n - \eta''^n = X(\rho' - \rho'')$ et $X = (-a\rho + b + as)\varepsilon(\eta'^n - \eta''^n)/(\eta'' - \eta')$ montrent que $K = \mathrm{Norm}(-a\rho + b + as)\delta^{-2}$ divise X.

Si l'équation $(*)$ admet la seule solution triviale alors l'algorithme se poursuit indéfiniment et ne peut être utilisé sans critères d'arrêt. Hemer [**14**], Gordon et Mohanty [**13**] ont étendu le champ d'application du critère suivant de Delaunay [**10**, p. 410]:

Soit γ une unité de $\mathbb{Z}[\rho]$ qui admet un nombre premier π impair comme "diviseur", c'est-à-dire, $\gamma = A\pi^{2m}\rho^2 + B\pi^m\rho + C$ avec $m \geq 0$, $\pi | A$ et $\pi | B$. Si $\pi \| A$ alors l'équation $\gamma^n = x\rho + y$ n'a pas de solution avec $n > 0$.

Soient π un nombre premier impair apparu à une certaine étape de l'algorithme (à la première étape par exemple, $\pi | K$) et μ la plus petite puissance de ε telle que ε^μ admette π comme "diviseur". Si le critère précédent est vérifié par π et ε^{μ} (π est appelé un "diviseur" de ε de la première sorte) alors l'équation $(*)$ n'a pas de solution avec $n > 0$. Le résultat de Hemer [voir **13**, p. 409] s'applique dans le cas où $\rho = \varepsilon$. L'efficacité de ce critère vient des déterminants "Δ" et "∇" utilisés par Delaunay et Faddeev [**10**, p. 411] pour calculer modulo π^2 le coefficient de ρ^2 dans ε^{μ}, lorsque π ne divise pas le discriminant de ρ. Il suffit de calculer $\varepsilon^{\pi-1}$ ou $\varepsilon^{(\pi-1)(\pi+1)}$ modulo π^2, d'après le petit théorème de Fermat dans le corps $\mathscr{K}$.

Nous expliquons maintenant l'origine π-adique de ces déterminants. Lorsque l'idéal $\pi\mathscr{O}_{\mathscr{K}}$ est décomposé, choisissons un plongement de $\mathscr{K}$ dans $\mathbb{Q}_{\pi}$ le corps des nombres π-adiques [**7**, **8**]. Le polynôme minimal f de ρ a trois racines distinctes dans $\mathbb{Z}_{\pi}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_{\pi}$. Posons: pour $j \in \{1, 2, 3\}$, $\varepsilon_j = a\rho_j^2 + b\rho_j + c$, avec $f(\rho_j) = 0$ et "Δ"$\equiv |(\varepsilon_j^{\pi-1} - 1)/\pi, \rho_j, 1|_{1\leq j\leq 3} \pmod{\pi\mathbb{Z}_{\pi}}$.

Le calcul de $\varepsilon_j^{\pi-1}$ modulo $\pi^2\mathbb{Z}_{\pi}$, via la formule de Taylor appliquée à l'ordre deux au polynôme f, donne l'expression suivante:

$$\text{“}\Delta\text{”} = |(e_j^{\pi-1} - 1)/\pi + (2ax_j + b)\psi(x_j)/(e_j f'(x_j)), x_j, 1|_{1\leq j\leq 3}$$

où $f(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) + \pi\psi(X)$ et $\rho_j \equiv x_j$, $\varepsilon_j = e_j \pmod{\pi\mathbb{Z}_{\pi}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Lorsque l'idéal $\pi\mathscr{O}_{\mathscr{K}}$ a un diviseur premier de degré 2, l'expression de "∇" est analogue. L'énoncé du critère d'arrêt de l'algorithme devient alors:

Si "Δ"$\not\equiv 0 \pmod{\pi}$, *resp.* "∇"$\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ *alors π est un "diviseur" de ε de la première sorte.*

Les méthodes π-adiques, en particulier le théorème de Strassmann [voir **8**, p. 62], permettent d'étendre les critères d'arrêt de Gordon et Mohanty (Deshommes [**11**]). Cette interprétation ne donne pas, semble-t-il, de réponse à une question essentielle: Peut-on mettre en oeuvre ces critères d'arrêt à une certaine étape de l'algorithme lorsque l'équation $(*)$ admet la seule solution triviale? Dans les conditions du paragraphe 4 la réponse est positive.

(3.3.3) THÉORÈME *de Nagell* [voir **10**, p. 398]. *Parmi les puissances entières positives de l'unité fondamentale directe positive de l'ordre* $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ *avec* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) < -44$, *il existe en dehors des unités triviales* 1, ε, *au plus une unité binomiale en* ε.

La démonstration de Nagell fait appel à des arguments géométriques, pour une démonstration π-adique se reporter à [**11**].

(3.4) THÉORÈME. *Soit* (U_n) *une suite vérifiant l'hypothèse* (3.1). *Le nombre de zéros de la suite* (U_n) *est compris entre deux et quatre, sauf dans deux cas où ce nombre est égal à cinq ou à six. Le nombre maximum de six zéros est obtenu par la suite de Berstel et Mignotte* (*voir table* (4.5)).

Démonstration. Un zéro de la suite (U_n) est un entier rationnel n tel que $U_n = 0$. D'après (3.2), l'unité ε^k avec $k = (n-1)/3$, resp. $k = n/3$, est solution de l'équation $f_\alpha(x,y) = 1$, resp. $f_\omega(x,y) = 1$. D'après les théorèmes de Delaunay et de Nagell, on distingue trois cas.

(1) Disc(ω) et Disc(α) sont strictement inférieurs à -44. Chacune de ces équations possède au plus trois solutions et au moins une ($U_0 = 0, U_1 = 0$). La Proposition (3.6) limite dans ce cas le nombre de solutions à cinq. En dehors du cas (i) de la Proposition (3.5.3) où il y a cinq solutions, la réduction du nombre de solutions à quatre est réalisée au paragraphe 4.

(2) Disc(ω) ou Disc(α) est égal à -44. Le nombre de six solutions est atteint dans le cas (iii) de la Proposition (3.5.2).

(3) Disc(ω) ou Disc(α) est égal à -23 ou -31. D'après la Proposition (2.2.1), $(ab)^2$ divise Disc(ω) et Disc(α) avec $ab \geq 2$, on obtient une contradiction. □

(3.5) Les corps $\mathscr{K}$ de discriminants -44 ou -76 ont la propriété remarquable suivante: $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\mathbb{Z}[\varepsilon^2] = \mathbb{Z}[\omega]$ où $\varepsilon = \varepsilon_0$ est l'unité fondamentale de $\mathscr{O}_\mathscr{K}$.

(3.5.1) PROPOSITION. *Sous l'hypothèse* (3.1), *si* k *est le plus petit entier positif tel que* $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\omega]$ *alors* $k = 1$ *ou* $k = 2$. *Pour* $k = 2$, *il y a deux entiers* ω *vérifiant cette condition, les suites correspondantes ont cinq ou six zéros.*

Démonstration. D'après la Proposition (2.2.1), $\varepsilon = \omega^3/(a^2b) = (s/a)\omega^2 + q\omega + 1$ et si $s \equiv 0 \pmod{a}$ alors $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\omega]$. Le cas où $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\omega]$ étant traité par la suite, nous pouvons supposer que: $k \geq 2$, $s \not\equiv 0 \pmod{a}$ et $a \geq 2$. La condition $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\omega]$ implique $\mathrm{Disc}(\varepsilon^k) = \mathrm{Disc}(\omega)$, ce qui se traduit par

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Norm}(Y_k - X_k\omega/a) = f_\omega(-X_k/a, Y_k) = \pm 1.$$

Nous déduisons de la formula (3.1.1) les congruences suivantes

$$X_k \equiv ks \pmod{a} \quad \text{et} \quad Y_k \equiv kq + k(k+1)bs^2/2 \pmod{a}.$$

Comme l'hypothèse $\varepsilon^k \in \mathbb{Z}[\omega]$ implique $X_k \equiv 0 \pmod a$, nous avons $ks \equiv 0 \pmod a$. Posons: $d = (s, a)$, $a = da'$, $s = ds'$ avec $(s', a') = (d, a') = 1$. Le plus petit entier positif tel que $\varepsilon^k \in \mathbb{Z}[\omega]$ est alors $k = a'$. Pour $a' > 2$, la formule (†) est en contradiction avec la congruence $f_\omega(-X_{a'}/a, Y_{a'}) \equiv 0 \pmod{a'^2}$, ainsi $a' = 2$.

Pour déterminer les unités ε vérifiant les conditions $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon^2 \in \mathbb{Z}[\omega]$ et $\mathrm{Disc}(\varepsilon^2) = \mathrm{Disc}(\omega)$, nous disposons des formules du paragraphe (2.2)

$$\mathrm{Disc}(\omega) = (2/\Delta')^2\,\mathrm{Disc}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \mathrm{Disc}(\varepsilon^2) = f_\varepsilon(-1, S_1)^2\,\mathrm{Disc}(\varepsilon),$$

en posant $\Delta = d\Delta'$. La condition (†) pour $k = 2$ est de la forme $\Delta' f_\varepsilon(-1, S_1) = \pm 2$ où $f_\varepsilon(-1, S_1) = -(S_1Q_1 + 1)$. Nous obtenons deux solutions:

$S_1 = Q_1 = -1$: $\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$, $\mathrm{Disc}(\varepsilon) = -44$, voir (3.5.2.iii).
$S_1 = 1$ et $Q_1 = -3$: $\varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$, $\mathrm{Disc}(\varepsilon) = -76$, voir (3.5.3.i). □

COROLLAIRE. *Sous l'hypothèse* (3.1), *si k est le plus petit entier positif tel que $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\alpha]$ alors $k = 1$.*

(3.5.2) PROPOSITION. *Sous l'hypothèse* (3.1), *il y a exactement cinq entiers ω tels que* $\mathrm{Disc}(\omega)$ *ou* $\mathrm{Disc}(\alpha)$ *soit égal à* -44. *Les suites correspondantes ont de deux à quatre zéros, sauf dans un cas où la suite a six zéros: $\omega^3 = 2\omega^2 - 4\omega + 4$ et $U_n = 0$ pour $n \in \{0, 1, 4, 6, 13, 52\}$, (U_n) est la suite de Berstel et Mignotte.*

Démonstration. L'ordre maximum du corps cubique $\mathscr{K}$ de discriminant -44 a une base de puissances $\mathscr{O}_{\mathscr{K}} = \mathbb{Z}[\varepsilon_0]$. L'unité ε_0 définie par $\varepsilon_0^3 = -\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0 + 1$ est l'unité fondamentale de $\mathscr{K}$. Il y a quatre unités binomiales en ε_0: 1, ε_0, $\varepsilon_0^4 = 2\varepsilon_0 - 1$, $\varepsilon_0^{17} = -103\varepsilon_0 + 56$ et deux unités binomiales triviales en ε_0^2, [**10**, table p. 417]. D'après (3.3.1), il y a quatre classes d'entiers de discriminant -44 définies par la formule

$$\theta = (A\varepsilon_0 + C)/(B\varepsilon_0 + D), \tag{†}$$

où $AD - BC = \pm 1$ et $B\varepsilon_0 + D = \varepsilon_0^k$ avec $k = \{0, 1, 4, 17\}$.

Si ω est un entier de $\mathscr{K}$ vérifiant l'hypothèse (3.1) et tel que $\mathrm{Disc}(\omega) = -44$ alors d'après (2.2), ω est défini par les entiers rationnels $a = 1$, $b = 2$, q, s. La formule (†) donne un système de trois équations et il y a deux solutions:

(i) $s = -1$, $q = 0$: $\omega = -1 + \varepsilon_0^{-1}$, $\alpha = -1 + \varepsilon_0^{-2}$, $\varepsilon = \varepsilon_0^2$.
(ii) $s = 2$, $q = -3$: $\omega = 1 - \varepsilon_0$, $\alpha = 1 + \varepsilon_0^{-2}$, $\varepsilon = \varepsilon_0^5$.

Cette méthode appliquée à α avec $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ et $\mathrm{Disc}(\alpha) = -44$, donne trois solutions. Nous échangeons a et b, s et $-q$, ainsi $a = 2$ et $b = 1$.

(iii) $s = 1, \quad q = -1: \omega = 1 + \varepsilon_0^2, \quad \alpha = 1 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0.$
(iv) $s = 2, \quad q = -2: \omega = 1 - \varepsilon_0^2, \quad \alpha = 1 + \varepsilon_0^{-1}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0^4.$
(v) $s = -3, q = -2: \omega = -3 + \varepsilon_0^{-2}, \alpha = (1 - \varepsilon_0)/(2\varepsilon_0 - 1), \varepsilon = \varepsilon_0^7.$

Chacune des unités ε_0^{2m+1}, resp. ε_0^{5m}, ε_0^m, ε_0^{4m+1}, ε_0^{7m+4} est une unité binomiale en ε_0 si respectivement,

(i) $m = 0, 8$ (ii) $m = 0$ (iii) $m = 0, 1, 4, 17$ (iv) $m = 0, 4$
(v) $m = 0$.

Chacune des unités $(\varepsilon_0^2)^{m+1}$, resp. $(\varepsilon_0^2)^{1+5m/2}$, $(\varepsilon_0^2)^{m/2}$, $(\varepsilon_0^2)^{2m}$, $(\varepsilon_0^2)^{1+7m/2}$ est de même une unité binomiale en ε_0^2 si respectivement,

(i) $m = -1, 0$ (ii) $m = 0$ (iii) $m = 0, 2$ (iv) $m = 0$ (v) $m = 0$.

D'après la Proposition (3.2), les suites (U_n) correspondantes ont pour zéros:

(i) $n = -2, 0, 1, 24$ (ii) $n = 0, 1$ (iii) $n = 0, 1, 4, 6, 13, 52$
(iv) $n = 0, 1, 13$ (v) $n = 0, 1$. □

(3.5.3) PROPOSITION. *Sous l'hypothèse* (3.1), *il y a exactement trois entiers* ω *tels que* $\mathrm{Disc}(\omega)$ *ou* $\mathrm{Disc}(\alpha)$ *soit égal à* -76. *Les suites* (U_n) *correspondantes ont cinq, quatre ou deux zéros.*

Démonstration. L'ordre maximum du corps cubique $\mathcal{K}$ de discriminant -76 a une base de puissances $\mathcal{O}_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}[\varepsilon_0]$. L'unité ε_0 définie par $\varepsilon_0^3 = \varepsilon_0^2 - 3\varepsilon_0 + 1$ est l'unité fondamentale de $\mathcal{K}$. Il y a trois unités binomiales en ε_0: 1, ε_0 et $\varepsilon_0^8 = -36\varepsilon_0 + 13$, [**10**, table p. 417]. Nous vérifions par l'algorithme (3.3.2) qu'il y a deux unités binomiales triviales en ε_0^2. La méthode utilisée dans la preuve de la Proposition (3.5.2) donne les résultats suivants:

(i) $\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \omega = \varepsilon_0^2 + 1, \quad \alpha = \varepsilon_0^{-1} + 1.$
(ii) $\varepsilon = \varepsilon_0^2, \quad \omega = -\varepsilon_0 + 1, \quad \alpha = \varepsilon_0^2 + 3.$
(iii) $\varepsilon = \varepsilon_0^5, \quad \omega = -\varepsilon_0^{-1} + 3, \quad \alpha = \varepsilon_0^{-2} + 1.$

D'après la Proposition (3.2), les suites (U_n) correspondantes ont pour zéros:

(i) $n = -2, 0, 1, 6, 22$ (ii) $n = 0, 1, 4, 12$ (iii) $n = 0, 1$. □

(3.6) PROPOSITION PRINCIPALE. *Sous l'hypothèse* (3.1), *si le discriminant de l'ordre* $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ *est inférieur à* -44 *alors le nombre de zéros de la suite* (U_n) *correspondante est au plus égal à cinq.*

Démonstration. Nous supposons que la suite (U_n) a trois zéros du type $n = 3m$. D'après la Proposition (3.2), il y a trois unités binomiales de la forme $\varepsilon^m = x\omega + y$. Nous sommes dans le cas où l'algorithme (3.3.2) ne peut pas commencer, c'est-à-dire, lorsque $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\omega]$. D'après la Proposition (3.5.1) nous pouvons supposer que $k = 1$ et déduire de la Proposition (2.2.1) que $\Delta = \pm a$. Par définition de Δ, $q = -1$ si $s = 0$.

Si $\Delta = \pm a$ et $s \neq 0$ alors d'après le Lemme (2.2.2.ii), l'équation $f_\varepsilon(x, y) = 1$ a trois solutions 1, ε et γ qui se déduisent par (3.3.1) des unités binomiales: 1, ε_1 et $\varepsilon_1^\lambda = u\varepsilon_1 + v$ avec $\lambda \geq 3$, où ε_1 est l'unité fondamentale de l'ordre $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ et $0 < \varepsilon_1 < 1$, voir (3.3.3). Puisque $0 < \varepsilon < 1$ et $\gamma > 1$, il y a un seul choix, à savoir, $\gamma = \varepsilon_1^{-1}$ et $\varepsilon = \varepsilon_1^{\lambda-1}$. Après identification, puis substitution dans $\Delta = \pm a$, nous obtenons: $\varepsilon = u + v\gamma$, $s = \pm a$ et $q^3 \pm 1 = \pm a^2 b(1 \mp q^2)$. D'après la Proposition (2.2.1), l'entier ω est défini par $s = 1$, $q = -2$, $a = 1$, $b = 3$. Il y a trois unités binomiales en ε_1: 1, ε_1, $\varepsilon_1^3 = -3\varepsilon_1 + 1$ avec $\mathrm{Disc}(\varepsilon_1) = -135$. L'équation $f_\varepsilon(x, y) = 1$ admet trois solutions mais une seule unité binomiale en $\varepsilon = \varepsilon_1^2$ est solution. Nous vérifions par l'algorithme (3.3.2) que la suite (U_n) possède deux zéros $U_0 = U_1 = 0$.

Nous supposons maintenant que la suite (U_n) possède trois zéros du type $n = 3m + 1$. Nous montrons de même que $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\alpha]$ et d'après la Proposition (2.2.1) que $\Delta = \pm b$. Par définition de Δ, $s = \pm 1$ si $q = -bs^2$ et de même, $s = -1$ si $q = 0$.

Si $\Delta = \pm b$, $q \neq 0$ et $q \neq -bs^2$ alors d'après le Lemme (2.2.2.iii), nous obtenons: $\delta = \varepsilon_1^{-1}$ et $\varepsilon = \varepsilon_1^{\lambda-1}$, puis $\varepsilon = u + v\delta$, $s^2 + (q/b) = \pm 1$ et $s^3 \pm 1 = \pm ab^2(1 \mp s^2)^2$. Nous constatons qu'il n'y a pas de solution.

Vu les conditions (2.1) sur a et b, les égalités $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\omega]$ et $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\alpha]$ ne sont pas vérifiées simultanément. □

(3.6.1) COROLLAIRE. *Sous les hypothèses de la Proposition* (3.6), *l'une des conditions suivantes est nécessaire pour que la suite* (U_n) *possède cinq zéros*:

$$(q = -1 \text{ et } s = 0) \quad \text{ou} \quad (q = 0 \text{ et } s = -1) \quad \text{ou} \quad (q = -b \text{ et } s = \pm 1).$$

4. Réduction du nombre de zéros et table. *Les hypothèses, notations et définitions sont celles du paragraphe* (3.1). Nous établissons qu'une suite (U_n) possède de deux à quatre zéros, avec deux exceptions les suites à cinq ou six zéros étudiées dans §(3.5). Les zéros d'une suite (U_n) sont déterminés par des unités binomiales et en théorie ces unités sont obtenues au moyen de l'algorithme de Delaunay. Les critères d'arrêt évoqués dans §(3.3.2) nous permettent de conclure lorsque $q = -bs^2$ ou $qs = 0$. Nous traitons à la fin du paragraphe différents cas où l'algorithme ne commence pas. La table (4.5) donne une illustration de la méthode utilisée.

(4.1) Dans la recherche des unités binomiales de l'ordre $\mathbb{Z}[\omega]$ (ou de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$) nous allons appliquer l'un des critères d'arrêt de l'algorithme à l'unité ε^m, pour un certain entier positif m multiple d'un nombre premier déterminé. Cette démarche impose de connaître les valuations des coordonnées $a^{-1}X_m$ et $Y_m - bsX_m$ de l'unité ε^m dans la base $(\omega^2, \omega, 1)$. La somme suivante, déduite de la formule (3.1.1), représente $Y_m - mq - \binom{m+1}{2}bs^2$ pour $r = 1$ ou $X_m - ms$ pour $r = 0$

$$(4.1.1) \qquad \sum_{1 \le l \le m-1} a^l \sum_{\substack{i+2j=3l+1+r \\ k+l=m-1}} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} s^i q^j b^{i+j-(l+1)},$$

l'échange de a et b, s et $-q$ donne les expressions de Y'_m et de X'_m.

Le nombre premier π étant fixé, nous rappelons que pour tout entier rationnel R différent de zéro, $v_\pi(R)$ désigne la plus grande puissance de π divisant R. L'égalité $v_\pi(R!) = [R/\pi] + [R/\pi^2] + [R/\pi^3] + \cdots$ où $[\ ]$ est la partie entière, implique la majoration $v_\pi(R!) < R/(\pi - 1)$. La fonction v_π vérifie l'inégalité ultramétrique: $v_\pi(R_1 + R_2) \ge \mathrm{Min}(v_\pi(R_1), v_\pi(R_2))$ et il y a égalité lorsque $v_\pi(R_1) \ne v_\pi(R_2)$.

(4.1.2) LEMME. *Soit π un diviseur premier d'un entier positif m fixé, $\pi \ge 5$. Pour tous les entiers positifs ou nuls i, j, k, l tels que $i + 2j = 3l + 1 + r$, $k + l = m - 1$ et $l \ge 1$, avec $r = 0$ ou $r = 1$, nous avons les relations suivantes*:

(i) $v_\pi(\pi^l(i+j+k)!/(i!j!k!)) \ge 1 - r + v_\pi(m)$;
(ii) $v_\pi(\pi^{i+j-(l+1)}(i+j+k)!/(i!j!k!)) \ge r + v_\pi(m)$.

Démonstration. Dans les conditions de l'énoncé nous pouvons écrire $(i+j+k)!/(i!j!k!)$ sous la forme:

$$m \binom{m+2l+r-j}{2l+r-j} \binom{m-1}{l} l!(2l+r-j)!/(j!(3l+1+r-2j)!).$$

La valuation de cette expression est supérieure à

$$v_\pi(m) - (3l+1+r-j)/(\pi-1).$$

(i) Posons $E = \pi^l(i+j+k)!/(i!j!k!)$. Pour $\pi \geq 5$, la valuation de E est supérieure à $v_\pi(m) + 1 - (3l+1+r-j)/4$. Nous en déduisons que pour tous les entiers j, l tels que $j \geq 0$ et $l \geq 1$, $v_\pi(E) > v_\pi(m)$ pour $r = 0$ ou $v_\pi(E) > v_\pi(m) - 1/4$ pour $r = 1$.

(ii) Posons $F = \pi^{i+j-(l+1)}(i+j+k)!/(i!j!k!)$. Pour $\pi \geq 5$, la valuation de F est supérieure à $v_\pi(m) + (i+j-l-1) - (3l+1+r-j)/4$. Lorsque $i + 2j = 3l + 1 + r$, la plus petite valeur de $i + j$ est atteinte pour $i = 0$ ou $i = 1$ suivant que $l + r$ est impair ou pair, avec $l \geq 1$. Nous en déduisons que $v_\pi(F) > v_\pi(m) + (l + 3r - 5)/8$ si $l + r$ est impair, $v_\pi(F) > v_\pi(m) + (l+3r-2)/8$ si $l+r$ est pair. Nous obtenons ainsi, pour $r = 0$ $v_\pi(F) > v_\pi(m) - 1/2$ ou pour $r = 1$ $v_\pi(F) > v_\pi(m)$. □

(4.1.3) Proposition. *Soit ν le plus petit entier positif tel que $\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\omega]$. Si $\nu \notin \{1,2,3,6\}$ alors l'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\omega + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$, a une seule solution $k = 0$.*

Démonstration. L'expression de ε^ν est donnée par la formule (3.2.1):

$$\varepsilon^\nu = (a^{-1}X_\nu)\omega^2 + (Y_\nu - bsX_\nu)\omega + (Z_\nu - absY_\nu - abqX_\nu).$$

Pour $\nu > 2$, les ordres $\mathbb{Z}[\varepsilon^\nu]$ et $\mathbb{Z}[\omega]$ ne sont pas égaux d'après la Proposition (3.5.1). Nous utilisons l'algorithme (3.3.2) pour déterminer les unités binomiales vérifiant l'équation, notée $(*)$, $(\varepsilon^\nu)^k = x\omega + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces unités appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[p\omega]$ où p est un diviseur premier de la constante K apparue à la première étape de l'algorithme et définie par

$$K\delta^2 = \mathrm{Norm}(-a^{-1}X_\nu\omega + Y_\nu) \quad \text{avec } \delta = (a^{-1}X_\nu, Y_\nu - bsX_\nu).$$

Soit λ le plus petit entier positif tel que $\varepsilon^\lambda \in \mathbb{Z}[p\omega]$, λ est un multiple de ν et l'équation $(*)$ se met sous la forme $(\varepsilon^\lambda)^l = x\omega + y$ avec $l \in \mathbb{Z}$. Nous allons montrer que cette équation a une seule solution $l = 0$, lorsque $\nu \notin \{1,2,3,6\}$, en appliquant un critère d'arrêt de l'algorithme à l'unité ε^λ pour un choix convenable du nombre premier p.

D'après la Proposition (2.2.1), $\varepsilon = (s/a)\omega^2 + q\omega + 1$. L'hypothèse $\varepsilon \notin \mathbb{Z}[\omega]$ implique $(s/a) \notin \mathbb{Z}$ et $(a/d) > 1$, en appelant d le *pgcd* de s et de a. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon^m \in \mathbb{Z}[\omega]$, nous déduisons des formules (3.2.1) pour ε^m et (4.1.1) pour X_m et Y'_m que $ms \equiv 0 \pmod a$, $m \equiv 0 \pmod{a/d}$ prouvant ainsi que $\nu = a/d$. Soient π un diviseur premier de ν et μ un entier positif tel que $\varepsilon^\mu \in \mathbb{Z}[\omega]$, d'après ce qui précède $\mu \equiv 0 \pmod{\nu}$ et par hypothèse, $\pi \geq 5$. Posons $v = v_\pi(\mu)$ et appliquons l'inégalité ultramétrique et le Lemme (4.1.2.i) aux coordonnées $a^{-1}X_\mu$ et $Y_\mu - bsX_\mu$ de ε^μ données par (4.1.1). Nous obtenons les relations suivantes:

$$v_\pi(a^{-1}X_\mu) = v_\pi(a^{-1}\mu s) = v - 1, \quad v_\pi(Y_\mu) \geq v, \quad v_\pi(Y_\mu - bsX_\mu) \geq v,$$

et nous pouvons écrire ε^μ sous la forme $\varepsilon^\mu = \pi^{v-1}A_\mu\omega^2 + \pi^v B_\mu\omega + C_\mu$ avec $(A_\mu, \pi) = 1$. En particulier, $\varepsilon^\mu \in \mathbb{Z}[\pi\omega]$ dès que $v \geq 3$. Pour $\mu = \nu$ nous avons: $v = 1$, $\pi \nmid \delta$ et, par définition de K, $K\delta^2 = -a^2bA_\nu^3 + \pi a^2bqA_\nu^2B_\nu - \pi^2absA_\nu B_\nu^2 + \pi^3B_\nu^3$, avec $\pi \| a$ et $\pi \nmid b$ d'après (2.1), donc $\pi^2 \| K$. Nous choisissons $p = \pi$ et $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi^2\nu}$ dans ce cas. Lorsque $v \geq 2$, nous déduisons d'un critère de Gordon et Mohanty [**13**, p. 399] que pour $l \in \mathbb{Z}$, l'équation $(\varepsilon^\mu)^l = x\omega + y$ a une seule solution $l = 0$. La conclusion subsiste a fortiori lorsque $\mu = \lambda$. □

La démonstration est similaire pour l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$: dans ce cas $\nu = b/d$ où d est le *pgcd* de q et de b, π est un diviseur premier de ν avec $\pi \geq 5$ par hypothèse et nous appliquons le Lemme (4.1.2.ii) aux coordonnées $b^{-1}Y_\mu$ et $X_\mu + aqY_\mu$ de l'unité ε^μ lorsque $\varepsilon^\mu \in \mathbb{Z}[\alpha]$, c'est-à-dire pour $\mu \equiv 0 \pmod{\nu}$.

(4.1.4) Corollaire. *Soit ν le plus petit entier positif tel que $\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Si $\nu \notin \{1,2,3,6\}$ alors l'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\alpha + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$, a une seule solution $k = 0$.*

(4.2) *Nous étudions maintenant le cas où $\nu \in \{1,2,3,6\}$ en ajoutant les hypothèses* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) < -44$, $q = -bs^2$ *ou* $qs = 0$.

(4.2.1) La matrice $\mathscr{M}(\varepsilon, \omega)$, représentant la multiplication par l'unité ε dans la base $(\omega^2, \omega, 1)$ du corps $\mathscr{K}$, est utilisée pour calculer les coordonnées de l'unité ε^ν dans l'ordre $\mathbb{Z}[\omega]$. La matrice $\mathscr{M}(\varepsilon, \alpha)$, relative à la base $(\alpha^2, \alpha, 1)$ du corps $\mathscr{K}$, vérifie la relation $\mathscr{M}(\varepsilon,\alpha) = (ab)^{-2}\mathscr{D}\mathscr{M}(\varepsilon,\omega)\mathscr{D}$, où les matrices $\mathscr{M}(\varepsilon,\omega)$ et $\mathscr{D}$ sont définies respectivement par

$$\begin{pmatrix} abs(bs^2+q) + abqs + 1 & bs^2 + q & s/a \\ a^2bq(bs^2+q) + abs & abqs + 1 & q \\ a^2b(bs^2+q) & abs & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & ab & 0 \\ (ab)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $q = -bs^2$, d'après (2.2.1) l'unité ε est de la forme $(s/a)\omega^2 - bs^2\omega + 1$ (resp. $s\alpha + 1 - ab^2s^3$). Le plus petit entier positif ν tel que

$\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\omega]$ est égal à a/d où d est le $pgcd$ de s et de a. La formule (4.1.1) se simplifie et l'expression de $Y_m - \binom{m}{2}bs^2$ pour $r = 1$ ou celle de $X_m - ms$ pour $r = 0$ est donnée par la formule

$$s(bs)^r \sum_{1\le l\le m-1} (ab^2s^3)^l \sum_{\substack{i+2j=3l+1+r \\ k+l=m-1}} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}(-1)^j.$$

De même dans le cas où $s = 0$ l'unité ε est de la forme $(q/b)\alpha^2 + aq^2\alpha + 1$ (resp. $q\omega + 1$). Le plus petit entier positif ν tel que $\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\alpha]$ est égal à b/d où d est le $pgcd$ de q et de b. L'expression de Y_m pour $r = 1$ ou celle de X_m pour $r = 0$ est donnée par la formule

$$q(aq)^{1-r} \sum_{0\le l\le (m-2+r)/2} (a^2bq^3)^l \binom{m+l}{3l+2-r}.$$

Les formules sont analogues dans le cas où $q = 0$.

(4.2.2) PROPOSITION. *Nous supposons que* $q = -bs^2$ *et* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) < -44$. *Soit* ν *le plus petit entier positif tel que* $\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\omega]$. *Si* $\nu \in \{1, 2, 3, 6\}$ *alors l'équation* $(\varepsilon^\nu)^k = x\omega + y$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$, *a une seule solution* $k = 0$, *sauf dans deux cas où il y a une solution supplémentaire:* $k = 4$ *pour* $\nu = 1$ *et* $\omega^3 = 2(\omega - 1)^2$ *ou* $k = 1$ *pour* $\nu = 3$ *et* $\omega^3 = 3\omega^2 - 9\omega + 9$.

Démonstration. Pour $\nu \in \{1, 2, 3, 6\}$, nous déterminons les coordonnées de l'unité ε^ν dans l'ordre $\mathbb{Z}[\omega]$ et la constante K_ν définie par $\delta_\nu^2 K_\nu = \mathrm{Norm}(-a^{-1}X_\nu\omega + Y_\nu)$ avec $\delta_\nu = (a^{-1}X_\nu, Y_\nu - bsX_\nu)$, au moyen des formules de la section (4.2.1). Nous en déduisons les résultats suivants: $K_\nu \equiv 0 \pmod{bd^2s'}$, en posant $s = ds'$, avec $(\nu, bds') = 1$ d'après (2.1); $|K_\nu| = 1$ uniquement si $\mathrm{Disc}(\varepsilon) = -44$, ce qui est exclu par hypothèse; K_3 et K_6 sont des multiples de 3, K_2 est impair et $K_1 = -a^2bs'$. Nous utilisons l'algorithme (3.3.2) pour résoudre l'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\omega + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette équation a une seule solution $k = 0$, s'il existe un nombre premier π divisant K_ν et un entier positif μ multiple de ν tels que l'unité ε^μ admette π comme "diviseur" et vérifie l'un des critères de Gordon et Mohanty [**13**, p. 399].

Dans chacun des cas suivants nous indiquons les valeurs de π et de ε^μ réalisant ces conditions.

(1) $|bd^2s'| > 2$. Soit π un diviseur premier de bds'. Lorsque $\pi \ge 3$, ε^ν convient si $\pi | s'$, $\varepsilon^{\nu\pi}$ sinon d'après (4.2.1). Si 2 est le seul diviseur

premier de bds' alors $\nu = 3$ ou $\nu = 1$, nous prenons $\pi = 2$ et ε^ν si $4|s'$, $\varepsilon^{2\nu}$ si $2\|s'$ ou $\varepsilon^{4\nu}$ si $2 \nmid s'$.

(2) $|bd^2s'| = 2$. Si $|s'| = 2$ alors $a = 3$, $b = 1$, $|s| = 2$ et $q = -4$, $\pi = 2$ et ε^6 conviennent. Si $|s'| = 1$ alors $a = 3$ ou $a = 1$, $b = 2$, $|s| = 1$ et $q = -2$, nous choisissons: $\pi = 2$ et ε^{12} lorsque $a = 3$ et $s = 1$, $\pi = 3$ et ε^9 lorsque $a = 3$ et $s = -1$. Pour $a = 1$ et $s = -1$, nous appliquons [**10**, p. 411]: "Δ"$\not\equiv 0 \pmod{17}$. Enfin dans le cas où $a = 1$ et $s = 1$, nous avons $\varepsilon^4 = 36\omega - 23$ et l'équation $(\varepsilon^4)^l = x\omega + y$ a exactement deux solutions $l = 0$ ou $l = 1$, d'après [**13**, p. 405] et [**10**, p. 385].

(3) $|bd^2s'| = 1$. Nous avons $a = \nu$ avec $\nu \neq 1$, $b = 1$, $|s| = 1$ et $q = -1$. Nous choisissons: $\pi = 19$ et ε^6 pour $a = 6$ et $s = 1$, $\pi = 37$ et ε^6 pour $a = 6$ et $s = -1$. Lorsque $a = 3$ et $s = -1$, nous prenons $\pi = 3$ et ε^9. Pour $a = 3$ et $s = 1$, nous avons $\varepsilon^3 = -3\omega + 4$ et l'équation $(\varepsilon^3)^k = x\omega + y$ a exactement deux solutions $k = 0$ ou $k = 1$ (voir cas (2)). Le cas où $a = 2$ et $s = 1$ est exclu par l'hypothèse $\mathrm{Disc}(\varepsilon) < -44$ (voir (3.5)). Enfin, le choix de $\pi = 3$ et ε^4 convient lorsque $a = 2$ et $s = -1$. □

(4.2.3) Corollaire. *Nous supposons que $s = 0$. Soit ν le plus petit entier positif tel que $\varepsilon^\nu \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Si $\nu \in \{1, 2, 3, 6\}$ alors l'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\alpha + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$, a une seule solution $k = 0$, sauf dans un cas où il y a une solution supplémentaire: $k = 1$ pour $\nu = 3$ et $\alpha^3 = 3\alpha^2 + 9$.*

Démonstration. De façon similaire lorsque $s = 0$, nous obtenons $K_\nu \equiv 0 \pmod{ad^2q'}$ en posant $q = dq'$, avec $(\nu, adq') = 1$ et $|K_\nu| \neq 1$. L'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\alpha + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$, a une seule solution $k = 0$, s'il existe un nombre premier π divisant K_ν et un entier positif μ multiple de ν tels que l'unité ε^μ admette π comme "diviseur" et vérifie l'un des critères de Gordon et Mohanty. Ces conditions sont réalisées dans chacun des cas suivants:

(1) $-ad^2q' > 2$. Se reporter au cas (1) de (4.2.2).

(2) $-ad^2q' = 2$. Si $q' = -2$ alors $a = 1$, $b = 3$ et $q = -2$, $\pi = 2$ et ε^6 conviennent. Si $q' = -1$ alors $b = 3$ ou $b = 1$, $a = 2$ et $q = -1$, nous choisissons: $\pi = 3$ et ε^3 pour $b = 3$, $\pi = 5$ et ε^8 pour $b = 1$.

(3) $-ad^2q' = 1$. Nous avons $a = 1$, $q = -1$ et $b = \nu$ avec $\nu \neq 1$. Nous choisissons: $\pi = 13$ et ε^{12} lorsque $b = 6$, $\pi = 7$ et ε^{14} lorsque $b = 2$. Enfin dans le cas où $b = 3$, nous avons $\varepsilon^3 = 3\alpha - 11$ et l'équation $(\varepsilon^3)^k = x\alpha + y$ a exactement deux solutions $k = 0$ et $k = 1$, pour les raisons évoquées dans le cas (2) de (4.2.2). □

(4.3) *Les conditions* (3.6.1), *qui sont nécessaires pour qu'une suite* (U_n) *ait cinq zéros, sont comprises dans les hypothèses* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) < -44$ *et* $q = -bs^2$ *ou* $qs = 0$.

(4.3.1) THÉORÈME. *Soit une suite* (U_n) *vérifiant l'hypothèse* (3.1), *nous supposons que* $q = -bs^2$ *et* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) < -44$. *Dans ces conditions, la suite* (U_n) *possède trois zéros* $n = 0, 1, 4$ *et dans deux cas seulement, la suite admet un zéro supplémentaire:* $n = 12$ *si* $\omega^3 = 2(\omega-1)^2$, $n = 9$ *si* $\omega^3 = 3\omega^2 - 9\omega + 9$.

Démonstration. Les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m + 1$ sont déterminés par les unités binomiales $\varepsilon^m = x\alpha + y$ d'après (3.2), avec $\varepsilon = s\alpha + 1 - ab^2s^3$ d'après (4.2.1). Ces unités sont directes, c'est-à-dire $m \in \mathbb{N}$, d'après [**13**, p. 405]. Il y a deux unités binomiales triviales pour $m = 0$ ou $m = 1$, nous allons montrer que ce sont les seules. Nous distinguons trois cas.

(1) $|s| > 1$. Nous appliquons [**10**, p. 385].

(2) $|s| = 1$ et $b > 1$. Soit π un diviseur premier de b. La définition de α, $\alpha^3 = a^2b(s^2\alpha^2 - s\alpha + 1)$, implique $\alpha^3 \equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Nous appliquons [**13**, p. 403].

(3) $|s| = 1$ et $b = 1$. D'après (3.2.1), nous cherchons les solutions $m \in \mathbb{N}$ de l'équation $Y_m = 0$, l'expression de Y_m étant donnée dans la section (4.2.1). Soit π un diviseur premier de a, π divise $\binom{m}{2}$ lorsque $Y_m = 0$. Appliquons l'inégalité ultramétrique et le Lemme (4.3.3.i) à Y_m. Pour $\pi \geq 7$, la relation $v_\pi(Y_m) = v_\pi\left(\binom{m}{2}\right)$ implique $\binom{m}{2} = 0$, donc $m = 0$ ou $m = 1$. Si tout diviseur premier de a est inférieur à 7 alors $a \in \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Pour $\pi = 5$, nous déduisons de la congruence

$$Y_m \equiv (1 + 2as(m+1)(m-2)(m-13)/(5!))m(m-1)/2 \pmod{5^{v+1}},$$

où $v = v_5\left(\binom{m}{2}\right)$, que pour $m > 1$, $Y_m \neq 0$ lorsque $a \neq 10$ et $a \neq 15$. Les cas particuliers $s = \pm 1$, $b = 1$, $q = -1$ et $a \in \{2, 3, 6, 10, 15\}$ sont traités dans la section (4.4.3).

Les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m$ sont déterminés par les unités binomiales $\varepsilon^m = x\omega + y$ d'après (3.2) et $\varepsilon = (s/a)\omega^2 - bs^2\omega + 1$ d'après (4.2.1). Dans la preuve de (4.1.3) nous avons établi que $m = \nu k$ où $\nu = a/d$ et d est le *pgcd* de s et de a. L'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\omega + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est résolue dans les Propositions (4.1.3) et (4.2.2). □

(4.3.2) THÉORÈME. *Soit* (U_n) *une suite vérifiant l'hypothèse* (3.1). *Si l'entier* ω *a une trace nulle alors la suite* (U_n) *possède trois zéros* $n =$

$0, 1, 3$ *et dans deux cas seulement la suite admet un zéro supplémentaire*

$$n = 10 \quad si\ \omega^3 = -3\omega + 3 \quad ou \quad n = 12 \quad si\ \omega^3 = -6\omega + 6.$$

Les cinq entiers ω *tels que l'entier* α *ait une trace nulle sont définis par* (i) $\omega^3 = -2\omega^2 + 2$, (ii) $\omega^3 = -2\omega^2 + 4$, (iii) $\omega^3 = -3\omega^2 + 9$, (iv) $\omega^3 = -5\omega^2 + 25$, (v) $\omega^3 = -6\omega^2 + 36$. *Les suites* (U_n) *correspondantes ont trois zéros* $n = -2, 0, 1$ *et les zéros supplémentaires* (i) $n = 24$, (ii) $n = 6$ *ou* 22, (iii) $n = 7$.

Démonstration. Nous supposons que l'entier ω a une trace nulle: $s = 0$.

Les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m + 1$ sont déterminés par les unités binomiales $\varepsilon^m = x\alpha + y$ avec $\varepsilon = (q/b)\alpha^2 + aq^2\alpha + 1$, d'après (3.2) et (4.2.1). Dans la preuve de (4.1.4) nous avons établi que $m = \nu k$ où $\nu = b/d$ et d est le $pgcd$ de q et de b. L'équation $(\varepsilon^\nu)^k = x\alpha + y$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est résolue dans les Corollaires (4.1.4) et (4.2.3).

Les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m$ sont déterminés par les unités binomiales $\varepsilon^m = x\omega + y$, avec $\varepsilon = q\omega + 1$, d'après (3.2) et (4.2.1). Nous reprenons les arguments utilisés dans la preuve du Théorème (4.3.1) dans le cas où $n = 3m+1$, $-q$ joue le rôle de $|s|$ dans la discussion, a et b sont échangés et le Lemme (4.3.3.ii) s'applique à X_m. Les cas particuliers $s = 0$, $q = -1$, $a = 1$ et $b \in \{2, 3, 6, 10, 15\}$ sont traités dans la section (4.4.2). Nous montrons ainsi qu'il y a seulement deux unités binomiales triviales pour $m = 0$ ou $m = 1$, à l'exception de $\varepsilon^4 = 26\omega - 23$, lorsque $\omega^3 = -6\omega + 6$.

Nous supposons maintenant que l'entier α a une trace nulle. Il y a cinq entiers de cette sorte définis par $s = -1$, $q = 0$, $ab = 2$ ou $b = 1$ et $a \in \{3, 5, 6\}$, d'après le Lemme (2.2.2.i). Les deux cas correspondant à $ab = 2$ sont traités dans la section (3.5) et les trois autres cas dans la section (4.4.1). □

(4.3.3) LEMME. *Soient* $m \in \mathbb{N}$ *et* π *un diviseur premier de* $\binom{m}{2}$, *avec* $\pi \geq 5$.

(i) *Pour tous les entiers positifs ou nuls* i, j, k, l *tels que* $i+2j = 3l+2$ *et* $k + l = m - 1$ *avec* $l \geq 1$ *lorsque* $\pi \geq 7$ *ou bien* $l \geq 2$ *lorsque* $\pi = 5$, *nous avons* $v_\pi(\pi^l(i + j + k)!/(i!j!k!)) > v_\pi(\binom{m}{2})$.

(ii) *Pour tout entier* l *tel que* $l \geq 1$ *lorsque* $\pi \geq 7$ *ou* $l \geq 2$ *lorsque* $\pi = 5$, *nous avons* $v_\pi(\pi^l\binom{m+l}{3l+2}) > v_\pi(\binom{m}{2})$.

Démonstration. Par hypothèse $\pi | m$ ou $\pi | (m-1)$. Lorsque m est un multiple de π, nous déduisons les résultats de la preuve du Lemme

(4.1.2) dans le cas (i) avec $r = 1$, dans le cas (ii) avec $i = r = 0$ et en remplaçant l par $2l + 1$. Maintenant nous supposons que $m - 1$ est un multiple de π.

(i) Posons $E = \pi^l (i + j + k)!/(i!j!k!)$, nous pouvons écrire E sous la forme

$$\pi^l (m-1) \binom{m+2l+1-j}{2l+2-j} \binom{m-2}{l-1} \frac{(l-1)!(2l+2-j)!}{(j!(3l+2-2j)!)}.$$

La valuation de E est alors supérieure à $v_\pi(m-1)+l-(3l+2-j)/(\pi-1)$ et aussi pour tout $j \geq 0$, à $v_\pi(m-1)+l-(3l+2)/(\pi-1)$. Lorsque $\pi \geq 7$, nous en déduisons que pour tout $l \geq 1$, $v_\pi(E) > v_\pi(m-1) + \frac{1}{6}$. Dans le cas où $\pi = 5$, nous obtenons pour tout $l \geq 2$, $v_5(E) > v_5(m-1)$.

(ii) Posons $F = \pi^l \binom{m+l}{3l+2}$, avec

$$F = \pi^l (m-1) \binom{m+l}{l+1} \binom{m-2}{2l} \frac{(l+1)!(2l)!}{((3l+2)!)}.$$

La valuation de cette expression est supérieure à $v_\pi(m-1) + l - (3l+2)/(\pi - 1)$, nous déduisons les résultats du cas (i). □

(4.4) *Les cas particuliers.* Rappelons que d'après la Proposition (3.2), les zéros de la suite (U_n) du type $n = 3m$, resp. du type $n = 3m + 1$, avec $m \in \mathbb{Z}$, sont déterminés par les unités binomiales $\varepsilon^m = x\omega + y$, resp. $\varepsilon^m = x\alpha + y$.

(4.4.1) *Les trois entiers α de trace nulle sont définis d'après* (4.3.2), *par $q = 0$, $s = -1$, $b = 1$ et $a \in \{3, 5, 6\}$. Nous avons $\varepsilon^3 = (3-a)\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$,* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) = -(27-4a)a^2$.

L'équation $\varepsilon^m = x\omega + y$ avec $\varepsilon = -(\omega^2/a) + 1$, a une seule solution $m = 0$: l'algorithme (3.3.2) commencé avec ε^a et $\mathbb{Z}[\omega]$ s'arrête en appliquant l'un des critères [**13**, p. 399], à ε^9 avec $\pi = 3$ pour $a = 3$, à ε^{15} avec $\pi = 19$ pour $a = 5$ ou à ε^6 avec $\pi = 3$ pour $a = 6$.

L'équation $\varepsilon^m = x\alpha + y$ se met sous la forme $\varepsilon^{m+1} = (y-x)\varepsilon + x$, via la relation $\varepsilon^{-1} = \alpha + 1$, D'après la table [**10**, p. 417], $m \in \{-1, 0, 2\}$ lorsque $a = 3$, $m \in \{-1, 0\}$ lorsque $a = 5$ ou $a = 6$.

(4.4.2) *Les cinq entiers ω de trace nulle sont définis d'après* (4.3.2), *par $s = 0$, $q = -1$, $a = 1$ et $b \in \{2, 3, 6, 10, 15\}$. Nous avons aussi $\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - (3+b)\varepsilon + 1$ et* $\mathrm{Disc}(\varepsilon) = -b^2(27+4b)$.

Les unités binomiales $\varepsilon^m = x\omega + y$ sont de la forme $(\varepsilon^2)^{m/2} = -x\varepsilon + (x+y)$ si m est pair ou de la forme $(\varepsilon^2)^{(m-1)/2} = (x+y)\varepsilon^{-1} - x$

si m est impair, via la relation $\omega = 1 - \varepsilon$. D'après (3.3.2), ces unités appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[\pi\varepsilon]$ ou à l'ordre $\mathbb{Z}[\pi\varepsilon^{-1}]$ suivant la parité de m, π étant un diviseur premier de la constante K' définie par $K' = \operatorname{Norm}(3 - \varepsilon) = 8 + 3b$.

Dans le cas où $b = 6$, il y a trois unités binomiales pour $m = 0$, $m = 1$ ou $m = 4$ et ce sont les seules, d'après la Proposition (3.6).

Lorsque $b \neq 6$, nous obtenons deux unités binomiales triviales: pour $b = 2$, en appliquant le critère de Hemer [**14**] à ε^{14} avec $\pi = 7$; pour $b = 3$, d'après [**13**, pp. 403 et 405]; pour $b = 10$, en appliquant [**13**, p. 399] à ε^6 avec $\pi = 19$ si m est pair, à ε^{12} avec $\pi = 37$ si m est impair; pour $b = 15$, en appliquant le critère [**10**, p. 411] à ε^2 dans $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ puis dans $\mathbb{Z}[\varepsilon^{-1}]$, ce qui donne "$\nabla$"$\not\equiv 0 \pmod{53}$.

(4.4.3) *Les neuf entiers ω vérifiant les conditions $q = -bs^2$ et* $\operatorname{Disc}(\varepsilon) < -44$ *sont définis d'après* (4.3.1), *par $b = 1$, $q = -1$, $s = \pm 1$ et $a \in \{3, 6, 10, 15\}$ ou $s = -1$ et $a = 2$. Nous avons $\varepsilon^3 = (3 - 2as)\varepsilon^2 - (a^2 - 3as + 3)\varepsilon + 1$,* $\operatorname{Disc}(\varepsilon) = -(3a^2 - 14as + 27)a^2$.

L'équation $\varepsilon^m = x\alpha + y$ se met sous la forme $\varepsilon^m = u\varepsilon + v$, via la relation $\varepsilon = s\alpha + 1 - as$. D'après (3.3.2), ces unités binomiales appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[\pi\varepsilon]$ ou à l'ordre $\mathbb{Z}[\pi\varepsilon^{-1}]$ suivant la parité de m, π étant un diviseur premier de la constante K' définie par $K' = \operatorname{Norm}(S_1 - \varepsilon) = (1 - as)(2a^2 - 7as + 8)$. Nous obtenons deux unités binomiales triviales dans tous les cas considérés.

Lorsque $a = 3$, le résultat se déduit de [**13**, pp. 403 et 405].

Lorsque m est pair, nous appliquons [**13**, p. 399] à ε^4, le nombre premier π est égal respectivement à 5, 7, 11, 2 lorsque $s = -1$ et $a \in \{2, 6, 10, 15\}$ ou bien π est égal respectivement à 5, 3, 7 lorsque $s = 1$ et $a \in \{6, 10, 15\}$.

Lorsque m est impair, nous appliquons encore [**13**, p. 399] dans les quatre cas suivants: pour $a = 2$ et $s = -1$, à ε^8 avec $\pi = 5$; pour $a = 6$ et $s = 1$, à ε^6 avec $\pi = 19$; pour $a = 6$ et $s = -1$, à ε^{20} avec $\pi = 61$; pour $a = 10$ et $s = 1$, à ε^4 avec $\pi = 3$. Les trois cas restants relèvent des critères "Δ" ou "∇" [**10**, p. 411], nous obtenons pour $a = 15$ et $s = 1$, "∇"$\not\equiv 0 \pmod{353}$; pour $a = 15$ et $s = -1$, "∇"$\not\equiv 0 \pmod{563}$; enfin pour $a = 10$ et $s = -1$, "Δ"$\not\equiv 0 \pmod{139}$.

(4.5) *Table des zéros.* La table donne les zéros d'une suite (U_n) vérifiant l'hypothèse (3.1), avec les conditions initiales $U_0 = U_1 = 0$, $U_2 = 1$.

$$U_{n+3} = absU_{n+2} + a^2bqU_{n+1} + a^2bU_n.$$

L'unité $\varepsilon^3 = S_1\varepsilon^2 + Q_1\varepsilon + 1$ est désignée par $(S_1, Q_1, 1)$. Pour chaque ordre maximum considéré, ε est l'unité fondamentale ε_0, sauf dans le cas de l'ordre de discriminant -44 où l'unité ε représente ε_0, ε_0^2 ou ε_0^4 et pour les ordres de discriminant -76, -108, -204, ou -300 où ε représente ε_0 ou ε_0^2. Les suites correspondant à ε_0^2 et qui ont deux zéros ne sont pas mentionnées.

	a	b	s	q	Δ	$\varepsilon(S_1, Q_1, 1)$	ZEROS	#
	2	1	1	−1	1	(−1, −1, 1)	0, 1, 4, 6, 13, 52	6
−44	1	2	−1	0	−2	(−1, −3, 1)	−2, 0, 1, 24	4
	2	1	2	−2	−8	(−5, −11, 1)	0, 1, 13	3
−76	2	1	−1	0	−1	(1, −3, 1)	−2, 0, 1, 6, 22	5
	1	2	1	−2	2	(−5, −7, 1)	0, 1, 4, 12	4
	3	1	1	−1	1		0, 1, 4, 9	4
	3	2	1	−1	−1	(−3, −3, 1)	0, 1, 4	3
−108	6	1	−1	0	−1		−2, 0, 1	3
	1	3	−1	−1	−5		0, 1, 4	3
	2	3	0	−1	2	(3, −15, 1)	0, 1, 3	3
−135	3	1	−1	0	−1	(0, −3, 1)	−2, 0, 1, 7	4
−140	1	2	0	−1	1	(3, −5, 1)	0, 1, 3	3
−172	2	1	0	−1	2	(3, −7, 1)	0, 1, 3	3
−175	5	1	−1	0	−1	(−2, −3, 1)	−2, 0, 1	3
−200	5	1	1	−1	1	(−7, −13, 1)	0, 1, 4	3
−204	1	2	−1	−1	−3	(5, −11, 1)	0, 1	2
	2	1	0	−3	54	(3, −111, 1)	0, 1, 3	3
−216	3	1	−1	−1	−1	(9, −21, 1)	0, 1, 4	3
−268	2	1	−1	−1	−1	(7, −13, 1)	0, 1, 4	3
	1	5	−1	−1	−9		0, 1	2
	2	1	1	−2	9	(−7, −23, 1)	0, 1, 6	3
−300	5	2	1	−1	−3		0, 1	2
	2	5	0	−3	54	(3, −543, 1)	0, 1, 3	3
−324	1	3	1	−3	3	(−15, −57, 1)	0, 1, 4	3
−351	1	3	0	−1	1	(3, −6, 1)	0, 1, 3, 10	4
−364	1	2	0	−2	8	(3, −19, 1)	0, 1, 3	3

Compte-tenu des résultats de Lewis et Turk [**17**, pp. 30 et 32], on peut se demander si toutes les suites (U_n), à quatre zéros et vérifiant l'hypothèse (3.1), sont obtenues dans le paragraphe 4. Ceci est confirmé dans un travail récent [**11**], où les critères de Gordon et Mohanty sont étendus par des méthodes π-adiques. Dans [**23b**, §(5.3)], van der Poorten évoque la multiplicité des récurrences linéaires.

REMERCIEMENTS: Je tiens à remercier Monsieur Daniel Barsky pour ses conseils et encouragements pendant ce travail.

REFERENCES

[1] I. O. Angell, *A table of complex cubic fields*, Bull. London Math. Soc., **5** (1973), 37–38.

[2] E. T. Bell, *Notes on recurring series of the third order*, Tôhoku Math. J., **24** (1924), 168–184.

[3] J. Berstel et M. Mignotte, *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. Math. France, **104** (1976), 175–184.

[4] F. Beukers, *The multiplicity of binary recurrences*, Comp. Math., **40** (1980), 251–267.

[5] F. Beukers and R. Tijdeman, *On the multiplicities of binary complex recurrences*, Comp. Math., **51** (1984), 193–213.

[6] E. Bombieri and W. M. Schmidt, *On Thue's equation*, Invent. Math., **88** (1) (1987), 69–82.

[7] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch, *Théorie des Nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[8] J. W. S. Cassels, *Local fields*, London Math. Soc. Stud. Texts 3, Cambridge Univ. Press, 1986.

[9] L. Cerlienco, M. Mignotte et F. Piras, *Suites récurrentes linéaires Propriétés algébriques et arithmétiques*, L'Enseignement Mathématique, **33** (1987), 67–108.

[10] B. N. Delone and D. K. Faddeev, *The theory of irrationalities of the third degree*, Transl. Math. Mono., vol. 10, Amer. Math. Soc., 1964.

[11] B. Deshommes, *On semi-local binomial units in cubic fields*, J. Reine Angew. Math., to appear.

[12] J. H. Evertse, K. Györy, C. L. Stewart and R. Tijdeman, *On S-unit equations in two unknowns*, Invent. Math., **92** (1988), 461–477.

[13] B. Gordon and S. P. Mohanty, *On a theorem of Delaunay and some related results*, Pacific J. Math., **68** (2) (1977), 399–409.

[14] O. Hemer, *Notes on the Diophantine equation $y^2 - k = x^3$*, Arkiv för Mat., **3** (3) (1954), 67–77.

[15] K. K. Kubota, *On a conjecture of Morgan Ward* I, II, III, Acta Arith., **33** (1977), 11–28, 29–48, 99–109.

[16] A. Lascoux, *Suites récurrentes linéaires*, Advances in Applied Math., (1986), 1–8.

[17] D. J. Lewis and J. Turk, *Repetitiveness in binary recurrences*, J. Reine Angew. Math., **356** (1985), 19–48.

[18] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Mono., 1979.

[19] K. Mahler, *On the Taylor coefficients of rational functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **52** (1956), 39–48.

[20] M. Mignotte, *Suites récurrentes linéaires*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou 1973/74, Paris, Exp. G 14, 9 pp.

[21] T. Nagell, *L'analyse indéterminée de degré supérieur*, Mémorial Sc. Math., vol. 39, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[22] P. A. Picon, *Sur les termes nuls d'une suite récurrente cubique*, Rairo R-3 (1974), 47–61.

[23a] A. J. van der Poorten, *Some problems of recurrent interest*, Topics in classical number theory, vol. I, II (Budapest, 1981), 1265–1294, Coll. Math. Soc. János Bolyai, **34**, North Holland, Amsterdam-New York, 1984.

[23b] ———, *Some facts that should be better known, especially about rational functions*, Macquarie Math. Reports 1988, to appear in: R. A. Mollin ed., *Number Theory and Applications*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1989.

[24] P. Robba, *Zéros des suites récurrentes linéaires*, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, *n*° 13, 5 pp.

[25] M. Scarowsky, *On units of certain cubic fields and the diophantine equation* $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, Proc. Amer. Math. Soc., **91** (1984), 351–356.

[26] R. Smadja, *Calculs effectifs sur les idéaux des corps de nombres algébriques*, Marseille-Luminy (mars 1976).

[27] N. K. Vereshchagin, *Effective upper bounds for the number of zeros of a linear recursive sequence*, Vestnik Moskov. Univ. Mat., **41** (1) (1986), 33–38.

[28] M. Ward, *Notes on an arithmetical property of recurring series*, Math. Zeitschrift, **39** (1934), 211–214.

[29] ———, *The vanishing of the homogeneous product sum of the roots of a cubic*, Duke Math. J., **26** (1959), 553-562.

[30] ———, *Some Diophantine problems connected with linear recurrences*, Report Institute Th. Numbers, Univ. Colorado, Boulder (1959), 250–257.

Received July 1, 1987 and in revised form June 12, 1988.

15, RUE DE L'ANCIENNE COMÉDIE
75006 PARIS, FRANCE