

Pacific Journal of Mathematics

**RÉSOLUBILITÉ SEMI-GLOBALE DES OPÉRATEURS
DIFFÉRENTIELS INVARIANTS SUR LES GROUPES DE
DÉPLACEMENTS**

KAHAR EL-HUSSEIN

RESOLUBILITE SEMI-GLOBALE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS INVARIANTS SUR LES GROUPES DE DEPLACEMENTS

KAHAR EL HUSSEIN

We study the existence of global fundamental solution of certain invariant linear differential operators on the semi-direct product $G = V \rtimes K$ where V is a real vector space of finite dimension and K a connected compact Lie group which acts on V as a linear group.

Using the scalar Fourier transform on G and the A. Cerezo and F. Rouvière's method ("Solution élémentaire d'un opérateur différentiel invariant sur un groupe de Lie compact", Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 4, séri t; 1969, pp. 561-581). We prove that a *left invariant* differential operator P on G and *right invariant* by K admits a fundamental solution on G if and only if its partial Fourier coefficients satisfy a condition of slow growth. Hence we deduce an explicit necessary and sufficient condition for the existence of a fundamental solution for a bi-invariant differential operator P on the Cartan's motion group.

1. Introduction. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, K un groupe de Lie compact connexe qui opère linéairement et continument dans V et $G = V \rtimes K$ le groupe des déplacements produit semi-direct de V par K , relativement à l'opération donnée de K dans V .

Soit P un opérateur différentiel *invariant* sur G . Alors P est dit semi-globalement résoluble si pour toute fonction $f \in C^\infty$, et à support compact dans G , il existe une fonction $g \in C^\infty$ sur G , tel que $Pf = g$. Le but de ce travail est l'étude de la résolubilité semi-globale des opérateurs différentiels invariants à *gauche* sur G et à *droite* par K . Pour cela on utilise des résultats d'analyse harmoniques sur G ([8]) et ([3]), et le fait que P est invariant à *droite* par le sous-groupe compact maximal K . Ceci ramène le problème à un problème équivalent sur un groupe de Lie noté \tilde{G} , qui le produit *direct* de V par K . Il se trouve dans ce cas que la condition de A. Cerezo et F. Rouvière ([2]) est une condition nécessaire et suffisante, pour qu'un opérateur différentiel invariant à *gauche* sur G et à *droite* par K admette une solution élémentaire sur G . On obtient alors le théorème suivant:

THÉORÈME. Soit G le groupe des déplacements et soit P un opérateur différentiel invariant à *gauche* sur G et à *droite* par K . Alors P

admet une solution élémentaire si et seulement si les coefficients de Fourier de P vérifient la condition de A. Cerezo et F. Rouviere (voir Théorème 6.5.).

Si G est le groupe des déplacements de Cartan, alors on déduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différentiel P bi-invariant sur G ait une solution élémentaire sur G (voir Théorème 7.3).

1.1. *Notations et rappels.* Soit X une variété C^∞ . On note $C^\infty(X)$, $D(X)$, $D'(X)$ et $\mathcal{E}'(X)$, respectivement les espaces des fonctions C^∞ , C^∞ à support compact, distributions, et distributions à support compact dans X . Soient G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Tout élément X de \mathfrak{g} peut être considéré comme un champ des vecteurs invariants à droite sur G , tel que pour tout $f \in C^\infty(G)$, on a:

$$(Xf)(x) = \left(\frac{d}{dt} \right)_0 f(\exp(-tXx)), \quad x \in G.$$

Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre complexifiée de \mathfrak{g} . On note u l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, alors u peut être considérée comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à droite sur G . Soit $\langle \rangle$ le dualité entre $D'(G)$ et $D(G)$. Si P est un opérateur différentiel invariants sur G , la transposée tP de P est définie par:

$$\langle {}^tPE, f \rangle = \langle E, Pf \rangle$$

pour tout f dans $D(G)$ et E dans $D'(G)$.

Si K est un groupe de Lie compact et si γ dans \hat{K} . On note E_γ l'espace de γ , d_γ sa dimension, χ_σ son caractère, et $\text{End}(E_\gamma)$ l'espace de tous les endomorphismes de E_γ .

Soit f dans $D(K)$, sa transformée de Fourier \hat{f} est définie par:

$$(1.1) \quad \hat{f}(\gamma) = \int_K f(x)\gamma(x^{-1}) dx, \quad \forall \gamma \in \hat{K}$$

(où dx est la mesure de Haar normalisée de K). Si $f \in C^\infty(K)$, alors on a une formule d'inversion de Fourier!

$$(1.2) \quad f(x) = \sum_{\gamma \in \hat{K}} d_\gamma \text{tr}(\hat{f}(\gamma)\gamma(x))$$

où tr signifie trace; La convergence de la série (1.2) étant uniforme sur K (voir [1]).

Si P est un opérateur différentiel invariant à droite sur K , on définit les coefficients de Fourier $P(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, de P de la façon suivante: $P(\gamma)$ est l'endomorphisme de E_γ tel que, pour tout $x \in K$,

$$(1.3) \quad (P_\gamma)(x) = P(\gamma) \cdot \gamma(x).$$

Dans cette égalité $P(\gamma)$ désigne l'endomorphisme obtenue en appliquant l'opérateur P à la fonction γ (au point x) et $P(\gamma) \cdot \gamma(x)$ est le produit des deux endomorphismes de $\gamma(x)$ et $P(\gamma)$ de E_γ .

Pour tout f dans $D(K)$ et γ dans \hat{K} , on a:

$$(1.4) \quad \widehat{P}f(\gamma) = \hat{f}(\gamma) \cdot P(\gamma),$$

$$(1.5) \quad ({}^tP)(\gamma) = {}^tP(\check{\gamma}),$$

où $\check{\gamma}$ est la représentation *contragradiante* de γ . Si V est un espace vectoriel réel de dimension n , on choisit une base hilbertienne (v_1, \dots, v_n) de V , et on identifie V à \mathbb{R}^n . Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un multi-indices, on note Q_v^α l'opérateur différentiel sur V , tel que:

$$Q_v^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial v_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial v_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Si $P(v)$ est un polynôme de n variables $(v = (v_1, \dots, v_n))$ sur V à valeur complexe, on note encore $P(v)$ l'opérateur différentiel (à coefficients constants) sur V , en remplaçant chaque variable v_j ($1 \leq j \leq n$) par l'opérateur différentiel $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial v_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

2. Représentations de groupes de déplacements.

2.1. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, K un groupe de Lie compact connexe et $\rho: K \rightarrow GL(V)$ un représentation linéaire continue de K dans V et $G = V \rtimes_\rho K$ le groupe des déplacements produit semi-direct de V par K , relativement à ρ . On munit V d'un produit scalaire K -invariant, noté (1), et le complexifié $V_C = V \times \mathbb{C}$ de V du produit scalaire Hermitien qui prolonge (1), et qui sera noté de la même manière. Le groupe K opère naturellement dans V_C ; si x est dans K et ζ dans V_C , on écrira $x \cdot \zeta$ au lieu de $\rho(x)\zeta$.

2.2. Soient ζ dans V_C et K_ζ le stabilisateur de ζ dans K . Soient H un sous-groupe fermé de K_ζ et σ une représentation unitaire irréductible de H , dans un espace E_σ (Hilbertien, de dimension fini). Ala donnée (ζ, σ) ; il est possible d'associer une représentation linéaire continue (en général non unitaire) de G dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_σ , qui n'est autre que celui des "fonctions" $\phi: K \rightarrow E_\sigma$ telles

que $\phi(xy) = \sigma(y^{-1})\phi(x)$ pour tous x dans K et y dans H , et:

$$(1.1) \quad \int_K \|\phi(x)\|^2 dx < +\infty$$

où dx désigne la mesure de Haar normalisée de K et $\|\phi(x)\|$ la norme de $\phi(x)$, calculée dans E_σ . Le produit scalaire dans \mathcal{H}_σ est défini par:

$$(\phi|\psi) = \int_K (\phi(x)|\psi(x)) dx$$

où le produit scalaire figurant dans l'intégrale est celui de E_σ . L'opération de G dans \mathcal{H}_σ est décrite de la manière suivante: à chaque (v, x) dans G , est associé l'opérateur $\pi_{\zeta, \sigma}$ tel que:

$$(\pi_{\zeta, \sigma}(v, x)\phi)(y) = e^{i(y \cdot \zeta|v)} \phi(x^{-1}y) \quad (\phi \in \mathcal{H}_\sigma).$$

On notera que la restriction à K de cette représentation n'est autre que la représentation induite (unitaire) $\text{Ind}_{H \uparrow K} \sigma$. Deux cas particuliers de cette construction vont jouer un rôle privilégié.

2.3. On prend pour H le sous-groupe trivial de K_ζ , à savoir $H = \{1\}$, et pour σ la représentation triviale de dimension 1. Dans ce cas, l'espace \mathcal{H}_σ n'est autre que l'espace \mathcal{H} des fonctions de carré intégrable sur K , et on notera π_ζ la représentation construite ci-dessus, π_ζ étant l'homomorphisme de G dans le groupe linéaire de \mathcal{H} . Précisément:

$$(\pi_\zeta(v, x) \cdot \phi)(y) = e^{i(y \cdot \zeta|v)} \phi(x^{-1}y) \quad (\phi \in \mathcal{H}).$$

2.4. On prend $H = K_\zeta$ et σ variable dans \hat{K}_ζ , et $\pi_{\zeta, \sigma}$ la représentation associée à (ζ, σ) . Alors on a:

PROPOSITION. Pour tout σ dans \hat{K} :

$$\pi_{\zeta, \sigma} = \sum_{\sigma \in \hat{K}_\zeta} d_\sigma \pi_{\zeta, \sigma}.$$

Pour la démonstration de cette proposition (voir [3], II, 19).

2.6. Rappelons ici que si $\zeta = \xi \in V$ est réel, alors les représentations $\pi_{\xi, \sigma}$ sont toutes irréductibles et toute représentation unitaire irréductible de G est équivalente à l'une de $\pi_{\xi, \sigma}$ (voir [9], Ch. I).

3. La transformation de Fourier sur les groupes de déplacements.

3.1. Soit f dans $\mathcal{D}(G)$, on peut définir un opérateur $\pi_\zeta(f)$, pour chaque ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, de la manière habituelle:

$$(3.1) \quad \pi_\zeta(f) = \int_G f(v, y) \pi_\zeta(v, y) dv dy$$

(où dv est une mesure de Haar du groupe vectoriel V .) L'opérateur $\pi_\zeta(f): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est en fait défini par un noyau $F_f(\zeta)$ qui appartient à $C^\infty(K \times K)$. Précisément:

$$(3.2) \quad F_f(\zeta)(x, y) = \int_V e^{i(\zeta|v)} f(x \cdot v, xy^{-1}) dv.$$

A chaque f dans $\mathcal{D}(G)$. on peut ainsi associer une fonction $F_f: V_{\mathbb{C}} \times k \times k \rightarrow \mathbb{C}$, telle que:

$$F_f(\zeta)(x, y) = F_f(\zeta, x, y)$$

et une fonction $\tilde{f}: V \times K \times K \rightarrow \mathbb{C}$, telle que:

$$(3.4) \quad \tilde{f}(v; x, y) = f(x \cdot v, xy^{-1})$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, v dans V , et (x, y) dans $K \times K$. A la suite de Kumahara ([6]), on appellera la fonction F_f la transformée de Fourier scalaire de f , où la transformée de Fourier additive de la fonction \tilde{f} . En sens inverse des théorèmes de type Paley-Wiener dûs à Kumahara ([8]) et ([2, a]) permettent de caractériser l'image de $\mathcal{D}(G)$ par la transformée de Fourier scalaire où opérateur.

3.2. La transformée de Fourier opérateur $\pi_\zeta(f)$ de f est K -invariant au sens suivant:

$$(3.5) \quad \pi_{k, \zeta}(f) = \tau_k \pi_\zeta(f) \tau_k^{-1} \quad (\forall k \in K, \forall \zeta \in V_{\mathbb{C}}),$$

où τ est la représentation régulière droite de K , (voir [8], p. 28). Alors la fonction F_f est k -invariante au sens suivant:

$$(3.6) \quad F_f(k \cdot \zeta; x, y) = F_f(\zeta; xk, yk)$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, et (x, y, k) dans $K \times K \times K$, et la fonction \tilde{f} est aussi K -invariante au sens (3.6).

4. Soient f l'algèbre de Lie de K , et (X_1, \dots, X_m) une base de f , telle que l'opérateur $\Delta = \sum_{i=1}^m X_i^2$ soit b -invariant sur K , une telle base existe ([1], p. 564). Pour $l \in \mathbb{N}$, on pose:

$$(4.1) \quad D^l = (1 - \Delta)^l.$$

Alors la famille de semi-normes $\{\gamma_l, l \in \mathbb{N}\}$ telle que:

$$\gamma_l(f) = \left(\int_K |D^l f(y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad f \in C^\infty(K)$$

définit sur $C^\infty(K)$, la même topologie que les semi-normes $\|X^\alpha f\|_2$, c'est-à-dire sa topologie habituelle d'espace de Fréchet (voir [1], pp. 565), et:

$$\|X^\alpha f\|_2 = \left(\int_k |X^\alpha f(y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m.$$

4.1. Soit $\mathcal{S}(V)$ l'espace des fonctions C^∞ , et à décroissance rapide sur V . On note $\mathcal{S}(G)$ l'espace complété de l'espace $\mathcal{S}(V) \otimes C^\infty(V)$ produit tensoriel de $\mathcal{S}(V)$ par $C^\infty(K)$, dont la topologie est définie par la famille de semi-normes $\{\partial_{\alpha, \beta}^l, l \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ telle que:

$$\partial_{\alpha, \beta}^l(f) = \sup_{|\alpha| \leq p(v, y) \in V \times K} \sup (1 + |v|^2)^\beta \|Q_v^\alpha D^l f(v, y)\|_2$$

où $\|\cdot\|$ signifie la norme sur V associée à (\cdot) . Pour l'espace $\mathcal{S}(G)$ (voir aussi [11], Chapitre 45).

L'espace $\mathcal{S}(G)$ est un espace de Fréchet (voir [8], Lemme 2 et Proposition 1), et ce qu'on appelle l'espace des fonction C^∞ , et à *décroissance rapide sur G* , ou *l'espace des Schwartz* de G .

De même on définit l'espace de Schwartz de $V \times K \times K$, qu'on notera $\mathcal{S}(V \times K \times K)$.

4.2. Soit $\mathcal{S}_K(V \times k \times K)$ l'ensemble des fonctions $F(v; x, y)$ sur $V \times K \times K$, K -invariantes au sens (3.6) et telles que:

- (i) $F(v; x, y)$ est C^∞ sur $V \times K \times K$;
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta}^l$ telle que:

$$(1 + |v|^2)^\beta \|(Q_v^\alpha D_y^l F)(v; x, y)\|_2 \leq C_{\alpha, \beta}^l$$

où D_y est l'opérateur différentiel $(1 - \Delta)$ agissant sur la variable y . On munit $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$ par la topologie définie par la famille des semi-normes:

$$\gamma_{\alpha, \beta}^l(F) = \sup_{|\alpha| \leq p(v, x, y) \in V \times K \times K} \sup (1 + |v|^2)^\beta \|Q_v^\alpha D_y^l F(v; x, y)\|_2$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \beta \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$ est un espace de Fréchet (voir [8], Proposition 2). De même on définit les espaces $D_K(V \times K \times K)$ et de $C_K^\infty(V \times K \times K)$ respectivement,

alors on a :

4.3. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont vérifiées:*

- (i) $\sim: C^\infty(G) \rightarrow C_K^\infty(V \times K \times K)$ est un isomorphisme Topologique.
- (ii) $\sim: D^\infty(G) \rightarrow D_K^\infty(V \times K \times K)$ est un isomorphisme Topologique.
- (iii) $\sim: \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}_K(V \times K \times K)$ est un isomorphisme Topologique.

où \sim est l'application de $C^\infty(G)$ dans $C^\infty(V \times K \times K)$ définie par :

$$\sim(f) = \tilde{f}$$

la démonstration de cette proposition est identique à celle donnée dans ([8], Lemme 3).

4.4. COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\sim: D'(G) \rightarrow D'_K(V \times K \times K)$ est un isomorphisme Topologique.
- (ii) $\sim: \varepsilon'(G) \rightarrow \varepsilon'_K(V \times K \times K)$ est un isomorphisme Topologique.
- (iii) $\sim: \mathcal{S}'(G) \rightarrow \mathcal{S}'_K(V \times K \times K)$ est un isomorphisme Topologique.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3.

4.5. LEMME (Kumahar [6]). *La transformée de Fourier scalaire F est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(G)$ sur $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$, pour les structures d'espaces vectoriels topologiques l'isomorphisme réciproque noté par F^{-1} ; autrement dit, pour toutes fonctions f dans $\mathcal{S}(G)$ on a :*

$$(4.2) \quad F_{F_j}^{-1} = f.$$

Démonstration. Soit \mathcal{F} la transformée de Fourier vectorielle sur V . Alors on a :

$$(4.3) \quad F = \mathcal{F} \circ \sim$$

mais comme \mathcal{F} est un isoimorphisme topologique de $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$ sur $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$, d'après la Proposition 2.7 on voit que F est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(G)$ sur $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$.

4.6. DÉFINITION. On appelle transformée de Fourier scalaire de $\mathcal{S}'(G)$ dans $\mathcal{S}'_K(V \times K \times K)$ la transposée ${}^tF^{-1}$ de la transformée de Fourier scalaire F^{-1} de $\mathcal{S}_K(V \times K \times K)$ sur $\mathcal{S}(G)$.

On notera encore par F (au lieu de ${}^tF^{-1}$) cette transformée. Alors on a :

$$(4.4) \quad \langle F_T, \varphi \rangle = \langle T, F_\varphi^{-1} \rangle$$

pour tout T dans $\mathcal{S}'(G)$, et φ dans $\mathcal{S}'(V \times K \times K)$. Alors il en

résulte de ce qui précède la théorème suivant:

4.7. THÉORÈME. *La transformée de Fourier scalaire F est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'(G)$ sur $\mathcal{S}'_K(V \times K \times K)$.*

5. Opérateurs différentiels invariants sur G .

5.1. Soient \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , et $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ le complexifié de \mathfrak{g} . On note U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, qui peut être considérée comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G ; on note $U^\mathfrak{k}$ le centralisateur de \mathfrak{k} dans U . On fixe une base v_1, \dots, v_n de V qu'on pourra supposer orthonormée par rapport à (\cdot, \cdot) , et une base (X_1, \dots, X_m) de \mathfrak{k} telle que $\Delta = -\sum_{i=1}^m X_i^2$ soit bi-invariant. Tout élément P du U s'écrit (de manière unique) sous la forme:

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} v^\beta X^\alpha$$

où sous le forme:

$$(5.1) \quad P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} X^{\alpha}$$

où les α (respectivement β) sont multi-indices $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (resp. $= (\beta_1, \dots, \beta_n)$), $v^\beta = v_1^{\beta_1} \dots v_n^{\beta_n}$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}$, $a_{\alpha, \beta}$ sont des nombres complexes, et P_{α} sont des fonctions polynômes sur V à valeurs complexes.

5.2. Soit t réel et soit X dans \mathfrak{k} , identifié à l'élément $(0, X)$ de \mathfrak{g} . On a alors:

$$(5.2) \quad \tilde{f}(v; x, \exp -tXy) = \tilde{f}(xv, xy^{-1} \exp tX).$$

En dérivant par rapport à t , on trouve:

$$(5.3) \quad (R_X \tilde{f})(v; x, y) = (L_X f)^\sim(v; x, y)$$

où R_X et L_X sont les champs de vecteurs associés à X , le premier sur $V \times K \times K$, le deuxième sur $V \times K$:

$$(5.4) \quad (R_X \phi)(v; x, y) = \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \phi(v; x, \exp -tXy),$$

$$(\phi \in C^\infty(V \times K \times K)),$$

$$(5.5) \quad (L_X \phi)(v; y) = \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \phi(v; y \exp tX), \quad (\phi \in C^\infty(V \times K)).$$

On remarquera que les champs de vecteurs R_X et L_X peuvent être interprétés de la manière suivante: R_X est un champ de vecteurs

sur $V \times K \times K$ qui en fait n'opère pas sur les deux premières variables (v, x) mais seulement sur y ; c'est essentiellement le champ de vecteurs *invariant à droite* sur K associé à X , étendue de manière naturelle en un opérateur différentiel sur $(V \times K) \times K$. De même pour L_X , mais ici L_X est *invariant à gauche*, et c'est un champ *invariant à gauche* sur le groupe $G = V \times K$.

5.3. Soit t réel et soit w dans V , identifié à l'élément $(w, 0)$ dans g . On a alors:

$$(5.6) \quad \tilde{f}(v + ty^{-1}w; x, y) = f(xv + txy^{-1}w, xy^{-1}).$$

En dérivant par rapport à t , on trouve:

$$\tilde{w}\tilde{f}(v; x, y) = (wf)^\sim(v; x, y)$$

où $\tilde{w} = y^{-1}w$ et:

$$(5.7) \quad (\tilde{w}\phi)(v; x, y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v + ty^{-1}w; x, y),$$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} (w\phi)(v; y) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi((v, y)(tw, 0)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v + tyw, y) \end{aligned}$$

où comme dans 5.2, \tilde{w} et w peuvent être interprétés de la manière suivante: \tilde{w} est un champ de vecteurs sur $V \times K \times K$ qui opère seulement sur la *première variable* v comme dans la formule (5.7); c'est le champ de vecteurs sur V associé à w . De même pour w , mais ici w est *invariant à gauche*, et c'est un champ *invariant à gauche* sur le groupe G .

5.4. PROPOSITION. Soit $P = \sum_{\alpha} P_{\alpha}X^{\alpha}$ un opérateur différentiel *invariant à gauche* sur G . Alors il existe un opérateur différentiel linéaire \tilde{P} sur $V \times K \times K$, tel que:

$$\tilde{P}\tilde{f} = \tilde{P}f \quad \forall f \in C^{\infty}(G).$$

Démonstration. En fait si $P = \sum_{\alpha} P_{\alpha}X^{\alpha}$ est un opérateur différentiel *invariant à gauche* sur G ; le calcul précédent montre bien qu'il existe un opérateur différentiel noté $\tilde{P}(w, R)$ agissant sur la première et la troisième variables, tel que:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \tilde{P}(w, R)\tilde{f}(v; x, y) &= \sum_{\alpha} P_{\alpha}(y^{-1}w)R^{\alpha}\tilde{f}(v; x, y) \\ &= \tilde{P}f(v; x, y) \end{aligned}$$

où $R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \cdots R_m^{\alpha_m}$ chaque R_j n'autre que le champ de vecteurs R_{X_j} (invariant à droite sur K) et $P_\alpha(y^{-1}w)$ sont des polynômes de $(y^{-1}w)$.

5.5. COROLLAIRE. Soit P un opérateur différentiel invariant à gauche sur G . Alors il existe un opérateur différentiel noté F sur $V_C \times K \times K$ agissant seulement sur la troisième variable telle que:

$$(5.10) \quad F_P F_f = F_{P_f} \quad \forall f \in \mathcal{D}(G).$$

Démonstration. En effet, il suffit de remarquer que $F = \mathcal{F} \circ \sim$. Donc d'après la Proposition 5.4, on a:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} F_{P_f}(\zeta; x, y) &= \mathcal{F} \tilde{P} f(\zeta; x, y) \\ &= \mathcal{F}(\tilde{P}(w, R)\tilde{f})(\zeta; x, y) \\ &= \sum_{\alpha} \mathcal{F} P_{\alpha}(iy \cdot \zeta) R^{\alpha} F_f(\zeta; x, y) \end{aligned}$$

pour tout ζ dans V_C et (x, y) dans k , d'où le corollaire.

5.6. Si il n'y a pas de confusion l'opérateur F_P s'appelle la transformée de Fourier scalaire où la transformée de Fourier additive de \tilde{P} . Désormais on notera P la transformée de Fourier scalaire de P , alors on a:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} (F_P F_f)(\zeta; x, y) &= \sum_{\alpha} \mathcal{F} P_{\alpha}(iy \cdot \zeta) R^{\alpha} F_f(\zeta; x, y) \\ &= \mathcal{F} \tilde{P}(iy \cdot \zeta; R) \mathcal{F} \tilde{f}(\zeta; x, y) \\ &= P(iy \cdot \zeta, R) F_f(\zeta; x, y) \end{aligned}$$

où comme dans 5.6 $P(iy \cdot \zeta, R)$ est l'opérateur différentiel sur $V_C \times K \times K$ agissant seulement sur la troisième variable et qu'il a la forme:

$$(5.13) \quad P(iy \cdot \zeta, R) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(iy \cdot \zeta) R^{\alpha}.$$

$P_{\alpha}(iy \cdot \zeta)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $y \mapsto P_{\alpha}(y \cdot \zeta)$.

6. Solution élémentaire d'un élément $P \in u^{\mathfrak{k}}$.

6.1. On considère le groupe de Lie $B = V \times K \times K$ produit direct de trois groupes V , K , et K . On rappelle que le produit de deux éléments de B est donné par la formule:

$$(6.1) \quad (v; x, y), (v'; x', y') = (v + v', xx', yy').$$

Soit $\tilde{G} = V \times K$ le groupe de Lie produit direct de V par K , qu'on pourra identifier au sous-groupe fermé $V \times \{1\} \times K$ de B .

6.2. THÉORÈME. Soient G le groupe de déplacements, et $P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} X^{\alpha}$ un opérateur différentiel invariant à gauche sur G et à droite par K . Alors il exist un unique opérateur différentiel noté Q invariant à gauche sur \tilde{G} tel que:

$$(6.2) \quad \tilde{P}\tilde{f}(v; 1, y) = (Q\tilde{f})(v; 1, y), \quad \forall f \in C^{\infty}(G),$$

avec:

$$(6.3) \quad Q = \sum_{\alpha} P_{\alpha} L^{\alpha},$$

où $L^{\alpha} = L_1^{\alpha_1} \cdots L_m^{\alpha_m}$, chaque L_j n'autre que le champ des vecteurs L_{X_j} (invariant à gauche sur K) associé à X_j ($1 \leq j \leq m$).

Démonstration. Soit ν la représentation régulière gauche de K . Alors pour tout f dans $\mathcal{D}(G)$, on a:

$$(6.4) \quad F_{P(f \circ \tau_k)}(\xi; x, y) = F_{\tau_k \circ (Pf)}(\xi; x, y)$$

pour tout ξ dans V et (x, y, k) dans $K \times K \times K$. En faisant le calcul de la première et de la seconde membre de l'équation (6.4), on trouve:

$$F_{P(f \circ \tau_k)}(\xi; x, y) = P(y \cdot \xi, R)F_f(\xi; x, k^{-1}y)$$

et:

$$F_{\tau_k \circ (Pf)}(\xi; x, y) = P(k^{-1}y\xi, R)F_f(\xi; x, k^{-1}y).$$

Donc, on a:

$$P(y \cdot \xi, R)F_f(\xi; x, k^{-1}y) = P(k^{-1}y\xi, R)F_f(\xi; x, k^{-1}y)$$

ou encore:

$$P(y \cdot \xi, R)(F_f \circ \nu_k)(\xi; x, y) = \nu_k \circ P(y \cdot \xi, R)F_f(\xi; x, y)$$

pour tout ξ dans V et (x, y, k) dans $K \times K \times K$. On en déduit de l'équation (6.5) que l'opérateur $P(y \cdot \xi, R)$ est un opérateur invariant à gauche sur K dont les coefficients sont des fonctions polynômes sur V , on a donc:

$$(6.6) \quad P(y \cdot \xi, R) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\xi)L^{\alpha}$$

où $L^{\alpha} = L_1^{\alpha_1} \cdots L_m^{\alpha_m}$ chaque L_j n'est autre que le champ des vecteurs invariant à gauche sur K associé à X_j . Soit $P_{\alpha}(w)$ l'unique opérateur différentiel (à coefficients constantes) sur V qui correspond naturellement au polynome $P_{\alpha}(\xi)$. Alors l'opérateur

$$Q = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(w)L^{\alpha}$$

est un opérateur différentiel invariant à gauche sur \tilde{G} .

6.2'. Le passage de P à Q et vice-versa, est donné par les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{S}'(G) & \xrightarrow{P} & \mathcal{S}'(G) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{S}'(B) & \xrightarrow{\tilde{P}} & \mathcal{S}'(B) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{S}'_k(B) & \xrightarrow{F_k} & \mathcal{S}'_k(B) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{S}'(\tilde{G}) & \xrightarrow{Q} & \mathcal{S}'(\tilde{G}) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{S}(\tilde{G}) & \xrightarrow{Q} & \mathcal{S}(\tilde{G}) & &
 \end{array}$$

6.3. *Remarques.* Le Théorème 6.2 dit en définitif que pour P dans $u^{\mathfrak{k}}$ il est possible d'associer un opérateur différentiel Q invariant à gauche sur \tilde{G} tel que:

$$(6.7') \quad Q\tilde{f} = \tilde{P}f \quad \forall f \in C^\infty(G)$$

car si $P \in u^{\mathfrak{k}}$, on a:

$$\overline{(\tau_k \circ Pf)}(v; x, y) = \overline{P(f \circ \tau_k)}(v; x, y)$$

pour tout (v, x, y) dans $V \times K \times K$, et f dans $C^\infty(G)$. Alors par un simple calcul, on montre qu'il existe un opérateur différentiel invariant à gauche sur \tilde{G} , tel que (6.7)' soit vérifié.

6.4. Soit $A(\xi) \in \text{End}(E_\gamma)$, dont les coefficients dans une base orthonormale de E_γ sont des polynômes $a_{ij}(\xi)$. On note $\tilde{A}(\xi)$ la matrice de coefficients $a_{ij}(\xi)$ dans cette base, où:

$$\tilde{a}_{ij}(\xi) = \left(\sum |a_{ij}(\xi)^{(\alpha)}|^2 \right)^{1/2}$$

et:

$$a_{ij}(\xi)^{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha a_{ij}(\xi)}{(\partial \xi)^\alpha}, \quad \alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormale choisie, et on a:

$$\|\tilde{A}(\xi)\|^2 = \sum_{\beta} \|A(\xi)^{(\beta)}\|^2.$$

On peut maintenant énoncer ce qui suit:

6.5. **THÉORÈME.** Soient G le groupe des déplacements, P un opérateur différentiel invariant à gauche sur G et à droite par K . Alors les

conditions suivantes sont équivalentes:

(i) P admet une solution élémentaire sur G .

(ii) il existe une constante $C > 0$, et un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout γ dans \hat{K} , la fonction (de ζ) $\det P(\zeta, \gamma)$ ne soit pas identiquement nulle sur V_C et:

$$\left\| \frac{({}^\omega P(0, \gamma))^\sim}{(\det P(0, \gamma))^\sim} \right\| \leq C d_l(\gamma)$$

où les $P(\zeta, \gamma)$ sont les coefficients de Fourier de P , $d_l(\gamma)$ les coefficients de Fourier de D^l , et ${}^\omega P(0, \gamma)$ est la comatrice de $P(0, \gamma)$.

Démonstration. Soit $E \in \mathcal{D}'_k(V \times K \times K)$, tel que:

$$P\tilde{E}(v, y) = \delta_G(v, y)$$

où δ_G est la mesure de Dirac à l'élément neutre de G et $\tilde{E}(v, y)$ est la distribution sur G , telle que:

$$(6.8) \quad \langle \tilde{E}(v, y), f(v, y) \rangle = \langle E(v; x, y), f(xv, xy^{-1}) \rangle$$

pour tout f dans $\mathcal{D}(G)$. D'après le Théorème 6.2, on a:

$$\begin{aligned} (\tilde{P}E)(v; 1, y) &= (QE)(v; 1, y) \\ &= \tilde{\delta}_G(v; 1, y) = \delta_{\tilde{G}}(v; y) \end{aligned}$$

pour tout (v, y) dans $V \times K$. Donc dire que $\tilde{E} \in \mathcal{D}'(G)$ est une solution élémentaire de P sur G équivaut à dire que $E|_{\tilde{G}}$ la restriction de E à \tilde{G} est une solution élémentaire de Q sur \tilde{G} . Ceci montre à la fois que (i) implique (ii) et (ii) implique (i) (voir [1], Théorème III), d'où le *théorème*.

7. Le cas particulier des groupes de déplacements de Cartan.

7.1. Soit G_0 un groupe de Lie semi-simple connexe réel de centre fini; \mathfrak{g}_0 son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 . Soit K le sous-groupe compact maximal de G_0 correspondant à \mathfrak{k} . En prenant pour V l'espace vectoriel sous-jacent à \mathfrak{p} , muni de l'action adjoint de K . On construit le groupe des déplacements de Cartan $G = V \times_{\text{Ad}} K$ produit semi-directe de V par K . Notons \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan de \mathfrak{p} et $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ son complexifié, sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$.

Soient M le centralisateur de \mathfrak{a} dans K , et \mathfrak{M} son algèbre de Lie. On choisit une base (X_1, \dots, X_n) de \mathfrak{M} , telle que l'opérateur

$D_M^l = (1 - \sum_{i=1}^n X_i^n)^l$ ($l \in \mathbb{N}$) soit bi-invariant sur M . On note $d_l(\sigma)$ les coefficients de Fourier de D^l . On aura à faire intervenir le groupe réductif connexe complexe K_C , qui est le complexifié (universel) de K ; par construction, ce groupe K_C est un sous-groupe du groupe linéaire de \mathfrak{p}_C ; il opère donc naturellement dans \mathfrak{p}_C .

Reprons maintenant dans cette situation les objets, $P(\zeta, \gamma)$, avec γ dans \hat{K} et ζ dans \mathfrak{p}_C . La fonction (de ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ étant K -invariante, elle est aussi K_C -invariant par prolongement analytique (car $\pi_\zeta(p)$ est K -invariant au sens (3.5)).

7.2. LEMME. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *pour tout γ dans \hat{K} , la fonction polynome (de ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur \mathfrak{p}_a .*

(ii) *pour tout γ dans \hat{K} , la fonction polynome (de ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur \mathfrak{a}_C .*

Démonstration. Supposons dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans \mathfrak{a}_C . Du fait de l'invariance sous K remarqué plus haut, il vient que dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $K_C \cdot \mathfrak{a}_C$ (réunion des K_0 -orbits rencontrant \mathfrak{a}_C). Or ce dernier ensemble est Zariski dense dans \mathfrak{p}_C ([6]). Donc dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans \mathfrak{p}_C . Ainsi (ii) implique (i), l'implication inverse étant triviale.

7.3. THÉORÈME. *Soit G le groupe des déplacement de Cartan, et soit P un opérateur différentiel bi-invariant sur G . Alors P admet une solution élémentaire sur G si et seulement si P vérifié la condition de A. Cerezo et F. Rouviere i.e. pour tout σ dans \widehat{M} , il existe une constante $C > 0$, et un entier $l \in \mathbb{N}$, telle, que:*

$$\|P(0, \sigma)^\sim\|^{-1} \leq C d_l(\sigma).$$

Démonstration. D'après le Théorème -6.2 pour tout f dans $\mathcal{D}(G)$ on a:

$$\begin{aligned} F_{P_f}(\zeta; x, y) &= F_P(y \cdot \zeta, R) F_f(\zeta; x, y) \\ &= \mathcal{F} \tilde{P}(y, \zeta, R) \mathcal{F} \tilde{f}(\zeta; x, y) \\ &= P(\zeta, L) \mathcal{F} \tilde{f}(\zeta; x, y) \end{aligned}$$

pour tout ζ dans V_C , et (x, y) dans K ; où $P(\zeta, L)$ comme dans (6.6) est un opérateur différentiel invariant à gauche sur K dont les coefficients sont des fonctions polynomes sur V_C . Si λ dans \mathfrak{a}_C , alors

d'après ([4] Lemme 4.2 et 3.9), on a pour tout f dans $\mathcal{D}(G)$:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} P(\lambda, \sigma)(\mathcal{F}\tilde{f}_\sigma)(\lambda; x, y) &= P(\lambda, \sigma)(\mathcal{F}\tilde{f})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y) \\ &= \mathcal{F}(\widetilde{P}f)_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y). \end{aligned}$$

Pour tout (λ, x, y) dans $a \times K \times K$ (voir [4] p. 13).

On rappelle que $P(\lambda, \sigma)$ est une fonction polynome sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ pour tout σ dans \widehat{M} , et :

$$(7.2) \quad (\mathcal{F}\tilde{f}_\sigma)(\lambda; x, y) = \int_M \mathcal{F}\tilde{f}(\lambda, x, yz^{-1})x_\sigma(3) dz,$$

$$(7.3) \quad (\mathcal{F}\tilde{f})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y) = \int_M \mathcal{F}\tilde{f}(\lambda; xz, y)x_\sigma(z) dz.$$

(où dz est la mesure de Haar normalisée de M). Appliquons maintenant la transformée de Fourier partielle sur K , relativement à la variable y , à l'équation (7.1); on trouve :

$$(7.4) \quad P(\lambda, \gamma)(\widetilde{\mathcal{F}\tilde{f}})_{\check{\sigma}}(\lambda, x, \gamma) = P(\lambda, \sigma)(\widetilde{\mathcal{F}\tilde{f}})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, \gamma)$$

pour tout γ dans \widehat{K} , σ dans \widehat{M} , et (λ, x) dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \times K$. Alors on a une relation entre les $P(\lambda, \gamma)$ et les scalaires $P(\lambda, \sigma)$:

$$P(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} P(\lambda, \sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda, \sigma) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que $P(\lambda, \gamma)$ est une matrice digonalisée dont les valeurs propres sont les $P(\lambda, \sigma)$. Donc on a :

$$(7.5) \quad \det P(\zeta, \gamma) = P(\zeta, \sigma)^{d_\sigma}, \quad \zeta \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}.$$

Alors on en déduit la suivant :

“La fonction (de ζ) $\det P(\zeta; \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur $V_{-\mathbb{C}}$ pour tout γ dans \widehat{K} si et seulement si la fonction (de ζ), $P(\zeta, \sigma)$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ pour tout σ dans \widehat{M} ”. D'où le théorème.

7.3. EXEMPLE. Soient $K = \text{SO}(2, \mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^2$, et $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \text{SO}(2)$ le produit semi-direct de \mathbb{R}^2 par $\text{SO}(2)$, relativement à l'action naturelle de $\text{SO}(2)$ dans \mathbb{R}^2 ; autrement dit, G est le groupe des déplacements du plan; il est résoluble mais non simplement connexe et c'est le groupe des déplacements de Cartan associé $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Notons (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , et $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{k} de K). On posera :

$$v_1 = (e_1, 0), \quad v_2 = (e_2, 0), \quad Y = (0, X)$$

de sorte que (v_1, v_2, Y) est une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . D'après ([2], Lemme II), l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G , et invariant à droite par K , est engendrée par les deux "opérateurs":

$$P_1 = v_1^2 + v_2^2, \quad P_2 = Y$$

tandis que celle des opérateurs différentiels bi-invariants par G est engendrée par P_1 .

Soit $P = \sum_{r,q} a_{r,q} P_1^r P_2^q$, les $a_{r,q}$ étant des nombres complexes. Alors, pour $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ dans \mathbb{C}^2 , l'opérateur $\pi_\zeta(P)$ est l'opérateur différentiel invariant à gauche sur $\text{SO}(2)$.

$$\pi_\zeta(P) = (\zeta, L) = \sum (-1)^2 a_{2,q} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^r L^q$$

où L est le champ de vecteurs sur $\text{SO}(2)$, associé à X (dans les coordonnées habituelles: $L = \partial/\partial\theta$). La condition (ii) du Théorème 7.3 s'exprime ici de la manière suivante:

Pour tout entier m , il existe r tel que:

$$\sum_q a_{r,q} (im)^q \neq 0$$

et il existe une constante $C > 0$ et un entier $l \in \mathbb{N}$ telle que:

$$\left(\sum_{0 \leq j \leq r} \sum_q |a_{j,q} (im)^q| \right)^{-1} \leq C(1 + m^2)^l.$$

REFERENCES

- [1] A. Cerezo et F. Rouviere, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel invariant sur un groupe de Lie compact*, Ann. Scient. EC. Norm. Sup. 4^e série, t. 2 (1969), 561-581.
- [2] F. D. Battesti, *Solvability of differential operators I. Direct and semi direct product of Lie group* (to appear).
- [3] K. El-Hussein, *Théorème de Paley-Wiener pour les groupes de déplacements*, Thèse de Doctorat de 3^e cycle, Poitiers, 1982.
- [4] ———, *P-convexité pour certains opérateurs différentiels sur les groupes des déplacements de Cartan*, preprint Poitiers n° 27 1987.
- [5] F. R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, Tome 1, Dunod, Paris, 1966.
- [6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Acad. Press 1984.
- [7] L. Hormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [8] K. Kumahar, *Fourier transform on the motion groups*, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976).

- [9] G. W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, University of Chicago Press, 1976.
- [10] F. Rouviere, *Invariant differential equations on certain semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **243** (1978).
- [11] F. Trèves, *Topological Vector Space Distribution and Kernels*, Academic Press, New-York, London, 1966.

Received July 30, 1988.

UNIVERSITÉ DE LATTAQUE
LATTAQUE, SYRIE

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

EDITORS

V. S. VARADARAJAN
(Managing Editor)
University of California
Los Angeles, CA 90024-1555-05

HERBERT CLEMENS
University of Utah
Salt Lake City, UT 84112

THOMAS ENRIGHT
University of California, San Diego
La Jolla, CA 92093

R. FINN
Stanford University
Stanford, CA 94305

HERMANN FLASCHKA
University of Arizona
Tucson, AZ 85721

VAUGHAN F. R. JONES
University of California
Berkeley, CA 94720

STEVEN KERCKHOFF
Stanford University
Stanford, CA 94305

C. C. MOORE
University of California
Berkeley, CA 94720

MARTIN SCHARLEMANN
University of California
Santa Barbara, CA 93106

HAROLD STARK
University of California, San Diego
La Jolla, CA 92093

ASSOCIATE EDITORS

R. ARENS

E. F. BECKENBACH
(1906-1982)

B. H. NEUMANN

F. WOLF
(1904-1989)

K. YOSHIDA

SUPPORTING INSTITUTIONS

UNIVERSITY OF ARIZONA
UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
MONTANA STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF NEVADA, RENO
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
OREGON STATE UNIVERSITY

UNIVERSITY OF OREGON
UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA
STANFORD UNIVERSITY
UNIVERSITY OF HAWAII
UNIVERSITY OF TOKYO
UNIVERSITY OF UTAH
WASHINGTON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF WASHINGTON

The Supporting Institutions listed above contribute to the cost of publication of this Journal, but they are not owners or publishers and have no responsibility for its content or policies.

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typed form or offset-reproduced (not dittoed), double spaced with large margins. Please do not use built up fractions in the text of the manuscript. However, you may use them in the displayed equations. Underline Greek letters in red, German in green, and script in blue. The first paragraph must be capable of being used separately as a synopsis of the entire paper. In particular it should contain no bibliographic references. Please propose a heading for the odd numbered pages of less than 35 characters. Manuscripts, in triplicate, may be sent to any one of the editors. Please classify according to the 1980 *Mathematics Subject Classification (1985 Revision)* scheme which can be found in the December index volumes of *Mathematical Reviews*. Supply name and address of author to whom proofs should be sent. All other communications should be addressed to the managing editor, or Elaine Barth, University of California, Los Angeles, California 90024-1555-05.

There are page-charges associated with articles appearing in the Pacific Journal of Mathematics. These charges are expected to be paid by the author's University, Government Agency or Company. If the author or authors do not have access to such Institutional support these charges are waived. Single authors will receive 50 free reprints; joint authors will receive a total of 100 free reprints. Additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* (ISSN 0030-8730) is published monthly. Regular subscription rate: \$190.00 a year (12 issues). Special rate: \$95.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for numbers issued in the last three calendar years, and changes of address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924, U.S.A. Old back numbers obtainable from Kraus Periodicals Co., Route 100, Millwood, NY 10546.

The Pacific Journal of Mathematics at P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924 (ISSN 0030-8730) is published monthly. Second-class postage paid at Carmel Valley, California 93924, and additional mailing offices. Postmaster: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION

Copyright © 1990 by Pacific Journal of Mathematics

George E. Andrews and David M. Jackson , An algebraically derived q -analogue of a character sum associated with a class of semiregular permutations	207
Fabio Bardelli and Andrea Del Centina , The moduli space of genus four double covers of elliptic curves is rational	219
Young Do Chai , An estimate of the volume of a compact set in terms of its integral of mean curvature	229
Salvador Comalada , Elliptic curves with trivial conductor over quadratic fields	237
Kahar El-Hussein , Résolubilité semi-globale des opérateurs différentiels invariants sur les groupes de déplacements	259
David M. Goldschmidt , Classical link invariants and the Burau representation	277
Liliana Janicka , Radon-Nikodým problem for the variation of a vector measure	293
Wacław Marzantowicz , An almost classification of compact Lie groups with Borsuk-Ulam properties	299
Akira Ohbuchi , On the projective normality of some varieties of degree 5 ..	313
Ken'ichi Ohshika , Minimal measured laminations in geometric 3-manifolds	327
Hal Leslie Smith , A discrete Lyapunov function for a class of linear differential equations	345
John Samuel Spielberg , Diagonal states on O_2	361
Thomas Vogel , A note on the sessile drop	383
Gerold Wagner , On means of distances on the surface of a sphere (lower bounds)	389