PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 180, No. 1, 1997

EXTENSIONS GALOISIENNES D'ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES

A. Fahim

We define the notion of a Galois extension of a differential field; we work with differential algebras which are more easy than differential fields. This definition is geometric and does not use Weil's theorem found in Kolchin & Lang. We give the construction of the Picard-Vessiot extension associated to a differential equation; this construction is similar to the notion of a G-structure due to Bernard.

Introduction.

La théorie de Galois différentielle, dûe à Picard et Vessiot, a été développée par Kolchin [**6**, **7**] dans un cadre algébrique. Elle étudie les équations différentielles en utilisant les corps différentiels et les groupes algébriques de la même façon que la théorie des équations algébriques utilise les corps et les groupes.

La théorie de Picard et Vessiot forme une classe de la théorie de Galois différentielle; étant donné un corps différentiel (ordinaire) K de corps de constantes algébriquement clôs, une extension différentielle de K est de Picard-Vessiot si elle est engendrée par un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans K et si elle possède les mêmes constantes que K. Le théorème fondamental de Galois pour une extension de Picard-Vessiot L sur K est le suivant:

a) Le groupe de Galois G c'est-à-dire le groupe des automorphismes différentiels de L sur K est un groupe algébrique affine défini sur le corps des constantes de dimension égale au degré de transcendance de L sur K.

b) $L^G = K$

c) Il y a une correspondance bijective naturelle entre les extensions différentielles intermédiaires et les sous groupes algébriques du groupe de Galois.

Kolchin [**6**, **7**] définit une notion générale d'extension fortement normale sur un corps différentiel; une telle extension possède un groupe G qui est un groupe algébrique sur les constantes et qui opère sur L de sorte que $L^G = K$; lorsque le groupe G est affine alors Kolchin montre que l'extension est de Picard-Vessiot.

Kolchin et Lang [8], et plus tard, B. Birula [2] interprètent une extension fortement normale L sur K comme un espace homogène principal sur le groupe de Galois; La démonstration de ce résultat utilise le théorème de Weil sur les lois normales.

Considérons l'exemple des extensions P.V. normales (analogue aux extensions galoisiennes dans le cas classique); une extension L sur K est P.V. normale si elle vérifie les conditions suivantes:

i) L est une extension de type fini (au sens classique) ii) $C(L) = C(K)$ et $C(K)$ est algébriquement clôs iii) L est le corps de fractions de l'anneau $PV(L/K)$ des éléments de Picard-Vessiot de L sur K iv) Pour tout $f \in PV(L/K)$, l'idéal $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} f$ est complètement résoluble dans L i.e. $\dim \mathrm{Sol}(I_f, L) = \dim_K \mathcal{D}_k/I_f$.

Soit L une extension de P.V. sur K alors (Kolchin-Lang) le groupe de Galois est un groupe algébrique affine défini sur les constantes et $PV(L/K)$ est l'anneau d'un espace homogène principal de groupe structural G; R.Bkouche a montré [1] que ce résultat n'utilise pas le théorème de Weil.

Cela montre que le cadre de la théorie de Galois des équations différentielles linéaires est la catégorie des algèbres différentielles et non celle des corps différentiels.

On montre que la notion de normalité forte est la définition géométrique de la théorie de galois classique ([4]): Un revêtement d'espaces topologiques est galoisien si le revêtement $Y \times_X Y \xrightarrow{p_1} Y$ est trivial. En considérant l'analogie suivante

revêtement $\longleftrightarrow$ algèbre différentielle

produit fibré $\longleftrightarrow$ produit tensoriel

On dira qu'un morphisme d'algèbres différentielles $A \to B$ est trivial si le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} C(A) & \longrightarrow & C(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

est un push out i.e. si le morphisme canonique $A \otimes_{C(A)} C(B) \to B$ est un isomorphisme (c'est la notion analogue à celle d'un revêtement trivial). On dira qu'un morphisme différentiel est galoisien si B est une algèbre de type fini sur A possédant les mêmes constantes que A et si le morphisme différentiel $B \xrightarrow{p_1} B \otimes_A B$ est trivial; on a donc un isomorphisme canonique $B \otimes_{C(B)} C(B \otimes_A B) \to B \otimes_A B$.

Groupe algébrique défini par la structure galoisienne: Soit B une extension galoisienne d'une algèbre différentielle simple et noethérienne de corps de

[1]Communication orale de R.Bkouche de l'Université de Lille 1.

constantes algébriquement clôs k, alors il existe un groupe algébrique affine G défini sur k isomorphe au groupe de galois de B sur A et tel que $k[G] = C(B \otimes_A B)$.

La construction Joyal d'une extension minimale d'une algèbre différentielle simple et noethérienne de corps de constantes algébriquement clôs est un modèle générique d'extension galoisienne; cette construction est géométrique: en effet l'algèbre $A[Y_{ij}, 1/Y]$ où Y est le déterminant de la matrice (Y_{ij}) s'interprète comme l'anneau du fibré de repères algébriques P de groupe structural $GL(n,k)$ sur la variété d'anneau A. P étant muni de la connexion induite par celle de M; soit $\mathfrak{m}$ un idéal différentiel maximal alors $A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}$ s'interprète comme un sous fibré principal de groupe structural le groupe de Galois. C'est en fait une variété intégrale maximale pour les champs de vecteurs horizontaux de la connexion i.e. une feuille d'holonomie. L'ensemble $\mathcal{I}$ des idéaux différentiels maximaux s'interprète donc comme un feuilletage associé à l'holonomie. Comme $GL(n,k)$ opère de façon évidente sur $\mathcal{I}$, on montre que $Gl(n,k)$ opère transitivement cela en conformité avec les G-structures dans la présentation de Bernard [1].

On montre enfin que sur un corps différentiel K de corps de constantes algébriquement clôs les trois notions sont équivalentes:

a) Extension de Joyal

b) Extension galoisienne

c) extension P.V. normale.

Il n'en est pas de même lorsque la base est une algèbre différentielle, un contre exemple est donné.

1. Algèbres différentielles.

§1. Définitions.

Définition 1.1. On appelle algèbre différentielle la donnée d'un anneau commutatif A muni d'un sous A-module T_A de $\mathrm{Der}(A,A)$ qui vérifient les conditions suivantes:

(i) A contient Q

(ii) T_A est de type fini et stable pour le crochet de Lie $[\ ,\ ]$

Définition 1.2. Soit (A, T_A) une algèbre différentielle; on appelle idéal différentiel de (A, T_A) un idéal de A qui est stable pour toute dérivation dans T_A.

Définition 1.3. Une algèbre différentielle (A, T_A) est dite simple si elle ne possède pas d'idéaux différentiels autres que 0 et A.

Remarque 1.4. Soit (A, T_A) une algèbre différentielle; soit S une partie multiplicative de A alors $S^{-1}A$ est une algèbre différentielle pour la structure définie par $T_{S^{-1}A} = S^{-1}A \otimes_A T_A$; si (A, T_A) est simple il en est de même de $(S^{-1}A, T_{S^{-1}A})$.

Définition 1.5. Constantes: soit (A, T_A) une algèbre différentielle; l'anneau des constantes $C(A, T_A)$ est formé de $f \in A$ tels que $\partial f = 0$ pour tout $\partial \in T_A$.

Définition 1.6. Opérateurs différentiels: Soit (A, T_A) une algèbre différentielle; on note $\mathcal{D}_A$ l'anneau des opérateurs différentiels sur A c'est-à-dire l'algèbre engendrée par A et T_A; on définit sur $\mathcal{D}_A$ une structure d'algèbre filtrée de la façon suivante: on pose $\mathcal{D}_{A,0} = A$, $\mathcal{D}_1 = A + T_A$ et pour tout $p \geq 2$, $\mathcal{D}_{A,p} = \mathcal{D}_{A,1}\mathcal{D}_{A,p-1} = \mathcal{D}_{A,p-1}\mathcal{D}_{A,1}$ on a donc $\mathcal{D}_A = U_{p\geq 0}\mathcal{D}_{A,p}$; $\mathcal{D}_{A,p-1} \subset \mathcal{D}_{A,p}$; $\mathcal{D}_{A,p}\mathcal{D}_{A,q} \subset \mathcal{D}_{A,p+q}$. Soit $p \in N$, on dit qu'un opérateur différentiel D est d'ordre p si $D \in \mathcal{D}_{A,p} \setminus \mathcal{D}_{A,p-1}$, on convient que $\mathcal{D}_{A,-1} = 0$.

Remarque 1.7. Une algèbre différentielle (A, T_A) est simple si et seulement si pour tout $f \in A$, $f \neq 0$, il existe $D \in \mathcal{D}_A$ tel que $Df = 1$.

Proposition 1.8. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple, alors*
(1) *$C(A, T_A)$ est un corps*
(2) *A est intègre*
(3) *Si K est le corps de fractions de A alors $C(K) = C(A, T_A)$.*

§2. Structure d'une algèbre différentielle simple.

Lemme 2.1. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle; soit $u_1, \cdots, u_n$ un système de générateurs du A-module T_A; Soient $p \in N^*$ $u, \partial_1, \cdots, \partial_p \in T_A$ et $a \in A$ alors*

$$[\partial_1, [\partial_2, \cdots, [\partial_p, au], \cdots]] = (\partial_1 \cdots \partial_p a)u + \sum_{i=1}^{r}((D_i a)u_i),$$

où $D_i \in \mathcal{D}_{A,p-1}$.

Proposition 2.2. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple, si A est local alors T_A est un A-module libre.*

Preuve. Soit P l'idéal maximal de A et soit $u_1, \cdots, u_r$ un système minimal de générateurs de T_A. On note $\bar{u}_i$ la classe de u_i modulo P et $\bar{a}$ la classe modulo P d'un élément $a \in A$; d'après le lemme de Nakayama les $\bar{u}_i$ forment une base de T_A/PT_A sur A/P; on va prouver que les u_i sont en fait libres sur A; Etant donnée une relation $\sum_{i=1}^r a_i u_i = 0, \quad a_i \in A$; On en déduit:
- $\sum_{i=1}^r \bar{a}_i \bar{u}_i = 0$ et donc $a_i \in P \quad i = 1, \cdots, r$
- pour tout $\partial \in T_A \quad 0 = [\partial, \sum_{i=1}^r a_i u_i] = \sum_{i=1}^r (\partial a_i)u_i + \sum_{i=1}^r a_i[\partial, u_i]$ d'où $\sum_{i=1}^r \overline{\partial a_i u_i} + \sum_{i=1}^r \bar{a}_i\overline{[\partial, u_i]} = 0$ ou encore $\sum_{i=1}^r \overline{\partial a_i}\bar{u}_i = 0$ et donc $\partial a_i \in P, \quad i = 1, \cdots, r$.

Plus généralement on va prouver que pour tout $D \in \mathcal{D}_A$, $Da_i \in P$, $1 \leq i \leq r$; comme (A, T_A) est simple on aura alors $a_i = 0$, $1 \leq i \leq r$; On procède par récurrence sur l'ordre p de l'opérateur D; d'après ce qui précède l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $p = 1$; supposons qu'elle soit vérifiée pour tout entier $q \leq p$ avec $p \geq 2$; soient $\partial_1, \cdots, \partial_p \in T_A$ on a $\sum_{i=1}^r [\partial_1, [\partial_2, \cdots, [\partial_p, a_i u_i], \cdots]] = 0$ et il résulte du Lemme 2.1 que $[\partial_1, [\partial_2, \cdots, [\partial_p, a_i u_i], \cdots,]] = (\partial_1 \cdots \partial_p a_i) u_i + \sum_{j=1}^r (D_{ij} a_i) u_j$ où $D_{ij} \in \mathcal{D}_{A,p-1}$; On a donc $0 = \sum_{i=1}^r [\partial_1, [\partial_2, \cdots, [\partial_p, a_i u_i], \cdots,]] = \sum_{i=1}^r (\partial_1 \cdots \partial_p a_i) u_i + \sum_{i,j=1}^r (D_{ij} a_j) u_i$ et l'hypothèse de récurrence implique que $\sum_{i=1}^r (\overline{\partial_1 \cdots \partial_p} a_i) \bar{u}_i = 0$ c'est-à-dire $\partial_1 \cdots \partial_p a_i \in P$. D'autrepart, comme le A-module $\mathcal{D}_{A,p-1}$ est engendré par les opérateurs de la forme $\partial_1 \cdots \partial_p$ on obtient $Da_i \in P$ pour tout $\mathcal{D}_{A,p}$ d'où la proposition. □

Corollaire 2.3. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple; on suppose vérifiée l'une des conditions suivantes:*

(i) *A est noethérien*

(ii) *T_A est de présentation finie.*

Alors T_A est projectif de rang fini.

§3. Algèbres différentielles régulières.

Soit (A, T_A) une algèbre différentielle; soient $\Omega_{A/Z}$ le A-module des différentielles de Kähler, T_{A^+} l'orthogonal de T_A dans la dualité canonique $\langle \Omega_{A/Z}, \mathrm{Der}(A, A) \rangle$ et $\Omega_A = \Omega_{A/Z/T_A^+}$.

Définition 3.1. On dit que (A, T_A) est régulière si:

(i) Ω_A est un A-module projectif de rang fini

(ii) l'homomorphisme canonique (injectif) $\Omega_A \to \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A)$ est un isomorphisme.

Etant donnée une algèbre différentielle simple (A, T_A), on montrera sous la condition "A noethérien" (resp. "T_A de présentation finie"), que (A, T_A) est régulière; on définit auparavant le complexe de De Rham:

Soit (A, T_A) une algèbre différentielle, on note $\mathrm{Alt}^\bullet(T_A, A) = \oplus_{p \geq 0} \mathrm{Alt}^p(T_A, A)$ l'algèbre graduée des p formes alternées sur T_A; On définit sur $\mathrm{Alt}^\bullet(T_A, A)$ une structure de complexe de la façon suivante: Si α est une p-forme alternée la différentielle $d\alpha$ est le $(p+1)$-forme alternée définie par:

$$\begin{aligned} &d\alpha(\partial_1, \cdots, \partial_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \partial_i \alpha \left(\partial_1, \cdots, \hat{\partial}_i, \cdots, \partial_{p+1} \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \alpha \left([\partial_i, \partial_j], \partial_1, \cdots, \hat{\partial}_i, \cdots, \hat{\partial}_j, \cdots, \partial_{p+1} \right) \end{aligned}$$

(les termes chapeautés étant omis). On vérifie alors que $d \circ d = 0$.

Soit $(\wedge^{\cdot}\Omega_{A/Z}, d')$ le complexe de De Rham absolu sur A; l'homomorphisme canonique $\varepsilon^1 : \Omega_{A/Z} \to \mathrm{Hom}_A(T_A, A)$ étant compatible avec d' et d se prolonge en un homomorphisme de complexes $\varepsilon^{\bullet} : (\wedge^{\bullet}\Omega_{A/Z}, d') \to (\mathrm{Alt}^{\bullet}(T_A, A), d)$.

Le produit intérieur d'une dérivation $\partial \in T_A$ et d'une p forme alternée $\alpha \in \mathrm{Alt}^p(T_A, A)$ est la $(p+1)$ forme alternée définie par

$$i_\partial\alpha(\partial_1, \cdots, \partial_{p-1}) = \alpha(\partial, \partial_1, \cdots, \partial_{p-1}).$$

Soit i' le produit intérieur canonique dans $\wedge^{\cdot}\Omega_{1/Z}$, alors ε est compatible avec i' et i autrement dit $\varepsilon i'_\partial = i_\partial \varepsilon$ pour tout $\partial \in T_A$.

Soit $\partial \in T_A$, la dérivée de Lie suivant ∂ d'une p- forme alternée $\alpha \in \mathrm{Alt}^p(T_A, A)$ est la p-forme alternée $\theta_\partial\alpha = di_\partial\alpha + i_\partial d\alpha$.

Soit θ' la dérivée de Lie dans $\wedge^{\cdot}\Omega_{A/Z}$ ($\theta'_\partial = d'i'_\partial + i'_\partial d'$ pour tout $\partial \in \mathrm{Der}(A, A)$); il résulte de ce qui précède que ε est compatible avec θ' et $\theta : \varepsilon\theta'_\partial = \theta_\partial\varepsilon$ pour tout $\partial \in T_A$.

Soit $(\wedge^{\cdot}\Omega_A, \bar{d}')$ le complexe induit par l'homomorphisme canonique de $\Omega_{A/Z}$ sur $\Omega_A = \Omega_{A/Z}/T_A^+$, le noyau de ε contient l'idéal différentiel engendré par T_A^+; on a donc une factorisation $\bar{\varepsilon}^{\cdot} : (\wedge^{\cdot}\Omega_A, \bar{d}') \to (\mathrm{Alt}^{\cdot}(T_A, A), d)$; $\bar{\varepsilon}^1$ n'est autre que l'injection canonique de Ω_A dans $\mathrm{Hom}_A(T_A, A)$; *$\bar{\varepsilon}$ est donc un isomorphisme lorsque (A, T_A) est régulière.*

Proposition 3.2. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple; on suppose vérifiée l'une des conditions suivantes:*
(i) *A est noethérien*
(ii) *T_A est de présentation finie*
alors (A, T_A) est régulière.

Preuve. La condition i) (resp ii)) implique que T_A est projectif de rang fini (Cor. 2.3). Soit N le conoyau de l'injection $\Omega_A \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(T_A, A)$; on va montrer que $N = 0$; la suite exacte canonique $0 \to \Omega_A \to \mathrm{Hom}_A(T_A, A) \to N \to 0$ entraîne par dualité la suite exacte: $0 \to \mathrm{Hom}_A(N, A) \to T_A \overset{\mathrm{can}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A)$; comme l'homomorphisme canonique $T_A \to \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A)$ est injectif on a $\mathrm{Hom}_A(N, A) = 0$; Soit K le corps de fractions de A, on a $K \otimes_A N = 0$; en effet supposons au contraire $K \otimes_A N \neq 0$, il existe alors une K forme linéaire non nulle $u : K \otimes_A N \to K$; soit (n_i) un système fini de générateurs du A-module N et soit $a \in A$, $a \neq 0$, tel que les images des n_i par l'homomorphisme $v : N \overset{\mathrm{can}}{\to} K \otimes_A N \overset{\mathrm{au}}{\to} K$ appartiennent à A; v est donc une A forme linéaire non nulle sur N ce qui contredit l'hypothèse "$\mathrm{Hom}_A(N, A) = 0$". Il s'en suite que N est un A-module de torsion (et de type fini); il possède donc un annulateur non nul I; on va montrer que I est un idéal différentiel de (A, T_A) ce qui impliquera que $I = A$ autrement dit $N = 0$.

Rappelons que l'homomorphisme canonique $\varepsilon^{\cdot} : \wedge^{\cdot}\Omega_{A/Z} \to \mathrm{Alt}^{\cdot}(T_A, A)$ se factorise par $\bar{\varepsilon}^{\cdot} : \wedge^{\cdot}\Omega_A \to \mathrm{Alt}^{\cdot}(T_A, A)$; $\bar{\varepsilon}^1$ étant l'injection canonique de Ω_A dans $\mathrm{Hom}_A(T_A, A)$; d'autrepart $\varepsilon^{\cdot}$ est compatible avec les dérivées de Lie dans $\wedge^{\cdot}\Omega_{A/Z}$ et $\mathrm{Alt}^{\cdot}(T_A, A)$ de sorte que Ω_A est stable pour la dérivée de Lie θ_∂ suivant toute dérivation ∂ de T_A. Soient $f \in I$ et $\partial \in T_A$ alors pour tout $u \in \mathrm{Hom}_A(T_A, A)$ on a $(\partial f)(u) = \theta_\partial(fu) - f\theta_\partial u \in \Omega_A$ autrement dit $\partial f \in I$; I est donc un idéal différentiel de (A, T_A); d'où la proposition. □

Proposition 3.3. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle régulière, on suppose que A est local, alors Ω_A possède une base formée de différentielles exactes.*

§4. Opérateurs différentiels sur une algèbre régulière.

Soient (A, T_A) une algèbre différentielle et $\mathrm{gr}\mathcal{D}_A$ la graduation définie par la filtration canonique $(\mathcal{D}_{A,p})_{p \geq 0}$; on a pour tout $p, q \in N$, $[\mathcal{D}_{A,p}, \mathcal{D}_{A,q}] \subset \mathcal{D}_{A,p+q}$ ce qui implique que $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_A$ est une algèbre commutative; on note pour tout $p \in N$ σ_p l'homomorphisme canonique de $\mathcal{D}_{A,p}$ sur $\mathrm{gr}^p\,\mathcal{D}_A$; σ_1 induit un isomorphisme de T_A sur $\mathrm{gr}^1\,\mathcal{D}_A$ qui se prolonge en un homomorphisme gradué $\varphi : \mathrm{Sym}_A\, T_A \to \mathrm{gr}\,\mathcal{D}_A$.

Proposition 4.1. *On suppose que (A, T_A) est régulière et A local alors:*

(1) *Pour tout $p \in N$ $\mathcal{D}_{A,p}$ est un A-module libre*

(2) *l'homomorphisme φ est un isomorphisme.*

Corollaire 4.2. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle régulière alors:*

(1) *Pour tout $p \in N$ $\mathcal{D}_{A,p}$ est un A-module projectif de rang fini*

(2) *l'homomrophisme canonique $\varphi : \mathrm{Sym}_A\, T_A \to gr\mathcal{D}_A$ est un isomorphisme.*

§5. Modules sur une algèbre différentielle simple.

Si (A, T_A) est une algèbre différentielle et M un $\mathcal{D}_A$-module, on note $C(M)$ l'ensemble des $m \in M$ tels que $\partial m = 0$ pour tout $\partial \in T_A$

Proposition 5.1. *Soient (A, T_A) une algèbre différentielle simple et M un $\mathcal{D}_A$-module alors l'homomorphisme canonique $\varphi_M : A \otimes_{C(A)} C(M) \to M$ est injectif.*

Preuve. Soit $k = C(A)$; φ_M étant $\mathcal{D}_A$ linéaire, son noyau N est un sous $\mathcal{D}_A$-module de $A \otimes_k C(M)$; on va montrer que $N = 0$; Remarquons d'abord que tout élément dans N de "longueur" 1 est nul; en effet si $a \otimes m \in N$ on a par hypothèse $\varphi_M(a \otimes m) = a \cdot m = 0$; si l'on suppose $a \neq 0$ il existe alors $D \in \mathcal{D}_A$ tel que $Da = 1$; on a par conséquent $0 = D(am) = (Da)m = m$.

Supposons à présent $N \neq 0$ et soit ℓ le plus petit entier tel qu'il existe un élément non nul $n = \Sigma_{i=1}^{\ell} a_i \otimes m_i$ qui appartienne à N; on a d'après la remarque précédente $\ell \geq 2$, $m_1, \cdots, m_\ell$ sont libres sur k et pour chaque $1 \leq i \leq \ell$ $a_i \neq 0$; Comme (A, T_A) est simple il existe donc $D \in \mathcal{D}_A$ tel que $Da_1 = 1$; soit $n' = Dn = 1 \otimes m_1 + Da_2 \otimes m_2 + \cdots + Da_\ell \otimes m_\ell$; on a $n' \in N$ et pour tout $\partial \in T_A$ $\partial n' = \partial Da_2 \otimes m_2 + \cdots + \partial Da_\ell \otimes m_\ell \in N$; l'hypothèse "$\ell$ minimal" implique alors que $\Sigma_{i=2}^{\ell} \partial Da_i \otimes m_i = 0$; comme les m_i sont libres sur k on a $\partial Da_i = 0$, $2 \leq i \leq \ell$ c'est-à-dire $\lambda_i = Da_i \in k$; on a ainsi $n' = 1 \otimes m_1 + \lambda_2 \otimes m_2 + \cdots + \lambda_\ell \otimes m_\ell \in N$ et $m_1 + \Sigma_{i=2}^{\ell} \lambda_i m_i = 0$; ceci contredit la liberté des m_i; on a donc $N = 0$ d'où la proposition. □

Soient (A, T_A) une algèbre différentielle simple et $k = C(A)$.

Définition 5.2. Un $\mathcal{D}_A$-module M est dit trivial si l'homomorphisme canonique φ_M est un isomorphisme. (D'après la proposition précédente il suffit pour cela que φ_M soit surjectif.)

Proposition 5.3.
(1) *Tout module quotient d'un $\mathcal{D}_A$-module trivial est trivial.*
(2) *Tout sous module d'un $\mathcal{D}_A$-module trivial est trivial.*

Lemme 5.4. *Soient (A, T_A) une algèbre différentielle, M un $\mathcal{D}_A$-module qui est de type fini sur A ; soit $m_1, \cdots m_n$ un système de générateurs de M sur A ; Soient $p \in N^*$ $\partial_1, \cdots, \partial_p \in T_A$ $a \in A$ et $m \in M$ alors $\partial_1 \cdots \partial_p(am) = (\partial_1 \cdots \partial_p(a))m + \Sigma_{i=1}^{n}(D_i a)m_i$ où $D_i \in \mathcal{D}_{A,p-1}$.*

Proposition 5.5 [3]. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple on suppose que; A est local; soit M un $\mathcal{D}_A$-module qui est de type fini sur; A, alors M est un A module libre.*

Preuve. Soient P l'idéal maximal de A et $m_1, \cdots, m_n$ un système minimal de géné-rateurs de M sur A; Notons $\bar{m}_i$ la classe de m_i modulo P et $\bar{a}$ la classe modulo P d'un élément $a \in A$; D'après le lemme de Nakayama les $\bar{m}_i$ forment une base de M/PM sur A/P; on va en déduire que les m_i sont libres sur A: en effet supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = 0$ avec $a_i \in A$; on a donc:
• $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{m}_i = 0$ autrement dit $a_i \in P$, $1 \leq i \leq n$
• pour tout $\partial \in T_A$ $0 = \partial \left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial a_i, m_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \partial m_i$ d'où $\sum_{i=1}^{n} \overline{\partial a_i} \overline{m_i} = 0$ autrement dit $\partial a_i \in P \quad 1 \leq i \leq n$.

De façon plus générale, on va prouver que pour tout $D \in \mathcal{D}_A$ $Da_i \in P$ $1 \leq i \leq n$; la simplicité de (A, T_A) impliquera alors que $a_i = 0$ $1 \leq i \leq n$; on procède par induction sur l'ordre p de l'opérateur D. On vient de voir que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $p = 1$; supposons la vérifiée pour tout entier $q < p$ avec $p \geq 2$; Soient $\partial_1, \cdots, \partial_p \in T_A$ on a alors $0 = \partial_1 \cdots \partial_p \left(\sum_{i=1}^n a_i m_i\right) = \sum_{i=1}^n \partial_1 \cdots \partial_p(a_i m_i)$ et d'après le lemme précédent il existe $D_{ij} \in \mathcal{D}_{A,p-1}$ tels que $\partial_1 \cdots \partial_p(a_i m_i) = \sum_{j=1}^n (D_{ij}(a_i)) m_j$; on a donc $0 = \sum_i (\partial_1, \cdots, \partial_p a_i) m_i + \sum_{i,j} (D_{ij} a_j) m_j$; on a par conséquent d'après l'hypothèse de récurrence $\sum_i \overline{(\partial_1 \cdots \partial_p a_i)} \bar{m}_i = 0$ autrement dit $\partial_1 \cdots \partial_p a_i \in P \quad 1 \leq i \leq n$; ceci montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'ordre p. □

Corollaire 5.6. *Soient (A, T_A) une algèbre différentielle simple et M un $\mathcal{D}_A$ module qui est de type fini sur A; on suppose vérifiée l'une des conditions suivantes:*

(i) *A est noethérien*

(ii) *M est de présentation finie sur A*

alors M est un A module projectif de rang fini.

§6. Morphismes d'algèbres différentielles.

Définition 6.1. Un morphisme d'algèbres différentielles $(\varphi, \varphi') : (A, T_A) \to (B, T_B)$ est la donnée:

(a) d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$

(b) d'un homomorphisme A linéaire $\varphi' : T_A \to T_B$ (T_B est ici le A-module obtenu par restriction des scalaires)

qui vérifient les conditions suivantes

(i) Pour tout $\partial \in T_A$ $\varphi'(\partial) \cdot \varphi = \varphi \cdot \partial$

(ii) Pour tout $\partial_1, \partial_2 \in T_A$ $\varphi'([\partial_1, \partial_2]) = [\varphi'(\partial_1), \varphi'(\partial_2)]$

(iii) $\varphi(C(A, T_A)) \subset C(B, T_B)$.

On s'intéresse aux morphismes $(\varphi, \varphi') : (A, T_A) \to (B, T_A)$ pour lesquels T_B est engendré par $\varphi'(T_A)$: on dit alors que (B, T_B) est une algèbre différentielle sur (A, T_A); Dans ce cas iii) résulte de i); mais iii) est généralement nécessaire pour éviter les pathologies du type suivant: l'injection

$$\left(Q[X_1, X_2]; \frac{\partial}{\partial X_1}\right) \hookrightarrow \left(Q[X_1, X_2, X_3];\ \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{\partial}{X_2} \frac{\partial}{X_3}\right)$$

vérifie i) et ii) mais

$$X_2 \in C\left(Q[X_1, X_2]; \frac{\partial}{\partial X_1}\right) \qquad \text{et}$$
$$X_2 \notin C\left(Q[X_1, X_2, X_3]; \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3}\right).$$

Remarque 6.2. La localisation et le quotient par un idéal différentiel sont des opérations compatibles avec la structure différentielle.

Soient $(\varphi, \varphi') : (A, T_A) \to (B, T_B)$ un morphisme d'algèbres différentielles; si T_B est engendré par $\varphi'(T_A)$ on a alors une factorisation canonique

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_A \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d_\varphi} \\ B & \xrightarrow{d} & \Omega_B \end{array} .$$

Proposition 6.3. *Avec les notations ci-dessus et les hypothèses suivantes:*

(i) (A, T_A) *est régulière*

(ii) $T_B = B\varphi'(T_A)$.

Les homomorphismes $(1, \varphi') : B \otimes_A T_A \to T_B$ *et* $(1, d_\varphi) : B \otimes_A \Omega_A \to \Omega_B$ *sont des isomorphismes.*

Définition 6.4. Soient (A, T_A) une algèbre différentielle régulière et $(A', T_{A'})$ une algèbre différentielle sur (A, T_A) (on a donc $T_{A'} \simeq A' \otimes_A T_A$); Soient (B_1, T_{B_1}) et (B_2, T_{B_2}) deux algèbres différentielles sur $(A', T_{A'})$ définies par des homomorphismes (φ_1, φ_1') et (φ_2, φ_2'); Soit φ' l'homomorphisme A-linéaire de $T_{A'}$ dans $\mathrm{Der}(B_1 \otimes_{A'} B_2; B_1 \otimes_{A'} B_2)$ défini par $\varphi'(\partial)(f_1 \otimes f_2) = \varphi_1'(\partial)f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes \varphi_2'(\partial)f_2; f_1 \in B_1\ f_2 \in B_2$; Soit $T = (B_1 \otimes_{A'} B_2)\varphi'(T_A)$ alors le couple $(B_1 \otimes_{A'} B_2; T)$ est le produit tensoriel de (B_1, T_{B_1}) et (B_2, T_{B_2}) sur $(A', T_{A'})$ (dans la catégorie des algèbres différentielles sur $(A', T_{A'})$).

Définition 6.5. Soient (A, T_A) une algèbre différentielle régulière et $(A', T_{A'})$ une algèbre différentielle sur (A, T_A). Si R est une $C(A')$-algèbre on munit $A' \otimes_{C(A')} R$ de la structure différentielle définie par $\partial(a \otimes r) = (\partial a) \otimes r;\ \partial \in T_A,\ a \in A',\ r \in R$.

On dit qu'une algèbre différentielle (B, T_B) sur $(A', T_{A'})$ est triviale si le morphisme canonique $A' \otimes_{C(A')} C(B) \to B$ est un isomorphisme.

Remarque 6.6. Il résulte de (Prop. I.5.1) que lorsque $(A', T_{A'})$ est simple le morphisme ci-dessus est injectif.

§7. Dualité de Spencer et idéaux de Picard-Vessiot.

Définition 7.1. Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple , si $D \in \mathcal{D}_A$ on note $D^{\#}$ l'application A-linéaire $A \otimes_{C(A)} A \to A$ définie par $D^{\#}(f \otimes h) = fDh$. Ceci définit une dualité de A modules (à gauche) $\langle \mathcal{D}_A; A \otimes_{C(A)} A \rangle$: $\langle D, f \otimes h \rangle = D^{\#}(f \otimes h)$.

On munit $A \otimes_{C(A)} A$ de sa structure de $\mathcal{D}_A$ module trivial (i.e. $\tilde{D}(f \otimes h) = Df \otimes h$).

Remarquons que $A \otimes_{C(A)} A$ est aussi une A algèbre différentielle qui n'est pas un produit tensoriel d'algèbres différentielles.

Dans ces conditions la dualité est compatible avec les structures différentielles c'est-à-dire

$$\left\langle D, \tilde{\partial}(f\otimes h)\right\rangle = \partial\langle D, f\otimes h\rangle + \langle \partial D, f\otimes h\rangle \quad D\in\mathcal{D}_A, \partial\in T_A, f,h\in A$$

Proposition 7.2. *$\langle \mathcal{D}_A, A\otimes_{C(A)} A\rangle$ est une bonne dualité autrement dit les homomorphismes canoniques $\mathcal{D}_A \to \mathrm{Hom}_A(A\otimes_{C(A)} A, A)$ et $A\otimes_{C(A)} A \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A, A)$ sont injectifs.*

Définition 7.3. On dit qu'un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_A$ est de Picard-Vessiot (ou P.V.) si $\mathcal{D}_A/I$ est un A-module de présentation finie, c'est alors un A-module projectif de rang fini.

Définition 7.4. Soit B une A-algèbre différentielle. Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ on dit que I est complètement résoluble dans B si: $B\otimes_A \mathcal{D}_A/I$ est un $\mathcal{D}_B$ module trivial.

Remarque 7.5. Soient B une A-algèbre différentielle et I un idéal (à gauche) de $\mathcal{D}_A$; on note $\mathrm{Sol}(I,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_A}(\mathcal{D}_A/I; B) = C(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A/I; B))$; on a donc un homomorphisme canonique $B\otimes_{C(B)} \mathrm{Sol}(I;B) \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A/I; B)$; Si I est de P.V. alors I est complètement résoluble dans B si et seulement si $B\otimes_{C(B)}\mathrm{Sol}(I;B) \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A/I;B)$ est un isomorphisme.

Proposition 7.6. *Soient B une A-algèbre différentielle simple et I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ alors $\dim_{C(B)} \mathrm{Sol}(I;B) < \infty$ et les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *I est complètement résoluble dans B*

(ii) *$\dim_{C(B)} \mathrm{Sol}(I;B) = \mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I$.*

On suppose dans la suite que A est noethérien de telle sorte que les notions “de présentation finie sur A” et “de type fini sur A” soient équivalentes.

Si R (resp. I) est un sous $\mathcal{D}_A$ module de $A\otimes_{C(A)} A$ (resp. $\mathcal{D}_A$), on notera R' (resp. I') l'orthogonal de R (resp. I) dans la dualité $\langle \mathcal{D}_A, A\otimes_{C(A)} A\rangle$; on notera aussi R'' et I'' au lieu de $(R')'$ et $(I')'$; on obtient ainsi des injections canoniques $\mathcal{D}_A/R' \to \mathrm{Hom}_A(R;A)$ et $I' \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A/I;A)$.

Remarques 7.7.

(1) Comme le $\mathcal{D}_A$ module $A\otimes_{C(A)}A$ est trivial, tout sous module de $A\otimes_{C(A)} A$ est aussi trivial c'est-à-dire de la forme $A\otimes_{C(A)} S$ où S est un sous $C(A)$-espace vectoriel de A.

(2) Si S est un sous $C(A)$-espace vectoriel de A, alors $(A\otimes_{C(A)} S)' = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$ de sorte que $(A\otimes_{C(A)} S)'$ est un idéal à gauche de $\mathcal{D}_A$.

Proposition 7.8. *Soit R un sous $\mathcal{D}_A$ module de $A\otimes_{C(A)} A$ qui est un A-module de type fini; alors*

(1) *$R = A\otimes_{C(A)} S$ où $\dim_{C(A)} S < \infty$.*

(2) *R' est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble (dans A) et $S = \mathrm{Sol}(R'; A)$*

(3) *R est linéairement fermé autrement dit $R'' = R$*

(4) *$\mathrm{rg}_A R = \mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A / R' = \dim_{C(A)} S$ et l'injection $R \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A/R'; A)$ est un isomorphisme.*

Proposition 7.9. *Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$; alors*

(1) *I' est un A-module libre de rang fini*

(2) *I'' est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble et $\mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I'' = \mathrm{rg}_A I'$*

(3) *les conditions suivantes sont équivalentes:*

   (i) $I'' = I$

   (ii) $\mathrm{rg}_A\, \mathcal{D}_A/I'' = \mathrm{rg}_A\, \mathcal{D}_A/I$.

Corollaire 7.10. *L'application $S \mapsto \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$ est une bijection de l'ensemble des sous $C(A)$-espaces vectoriels de A de dimension finie sur l'ensemble des idéaux de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résolubles.*

2. Extensions galoisiennes de type Joyal.

§1. La construction de Joyal[2] .

Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple. On peut poser le problème de Galois-Picard-Vessiot comme celui de la trivialisation d'un $\mathcal{D}_A$-module; De façon précise:

Théoréme 1.1. *Soit M un A module libre de rang fini muni d'une structure de $\mathcal{D}_A$-module; Si $C(A)$ est un corps algébriquement clôs alors il existe une algèbre différentielle (B, T_B) sur (A, T_A) "minimale" qui vérifie les propriétés suivantes*:

(1) *(B, T_B) est simple*

(2) *$C(B) \simeq C(A)$*

(3) *$B \otimes_A M$ est un $\mathcal{D}_B$-module trivial, autrement dit l'homomorphisme canonique $B \otimes_{C(B)} C(B \otimes_A M) \to B \otimes_A M$ est un isomorphisme.*

Remarque 1.2. (B, T_B) est minimale au sens que c'est la plus petite algèbre différentielle sur (A, T_A) qui vérifie 2) et 3).

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de M sur A; Alors la structure différentielle de M est définie par $\partial e_i = -\Sigma_j a_{ij}(\partial) e_j$ où $\partial \in T_A$ et $a_{ij}(\partial) \in A$; Les relations de commutations évidentes etant vérifiées. On munit l'algèbre des

[2] Communication orale de A.Joyal de l'Université de Montréal.

polynômes $A[Y_{ij}]$ de la structure différentielle suivante: $\partial Y_{ij} = \Sigma_r Y_{ir} a_{rj}(\partial)$ pour tout $\partial \in T_A$; Soient $Y = \det(Y_{ij})$, $\mathfrak{m}$ un idéal différentiel maximal de $A[Y_{ij}, 1/Y]$ et $B = A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}$; alors B est une algèbre différentielle simple; Notons que A s'identifie à un sous anneau de B; on va montrer que $C(B)$ est algébrique sur $C(A)$ de sorte que si $C(A)$ est un corps algébriquement clôs alors $C(B) \simeq C(A)$; Soient K le corps de fractions de A et J un idéal maximal de $B \otimes_A K$; comme $B \otimes_A K$ est une K algèbre de type fini, $B \otimes_A K/J$ est algébrique sur K (Nullstellensatz); D'autrepart l'homomorphisme composé $C(B) \hookrightarrow B \otimes_A K \to B \otimes_A K/J$ est injectif puisque $C(B)$ est un corps; tout élément de $C(B)$ est donc algébrique sur K; Or $C(B \otimes_A K)$ (et par suite $C(B)$) et K sont linéairement disjoints sur $C(K) = C(A)$ (Remarque I.6.6) par conséquent $C(B)$ est algébrique sur $C(A)$.

On supposera dans la suite que $k = C(A)$ est un corps algébriquement clôs.

Proposition 1.3. *Soit $k[T_{ij}, 1/T]$ la bigèbre du groupe linéaire $GL(n, k)$ $(T = \det T_{ij})$; alors*

(1) $A[Y_{ij}, 1/Y]$ *est un comodule pour la coaction*

$$\mu_0 : A\,[Y_{ij}, 1/Y] \to A\,[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k\,[T_{ij}, 1/T]$$

définie par $\mu_0(Y_{ij}) = \Sigma_r Y_{ir} \otimes T_{rj}$

(2) *l'homomorphisme* $(i_1, \mu_0) : A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_A A[Y_{ij}, 1/Y] \to A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k[T_{ij}, 1/T]$ *est un isomorphisme; De plus μ_0 et i_1 sont des morphismes différentiels lorsqu'on munit $A \otimes_k k[T_{ij}, 1/T]$ de sa structure différentielle triviale; (i_1, μ_0) est donc un isomorphisme différentiel.*

Preuve. La proposition est immédiate; l'isomorphisme inverse de $(i_1, \mu_0)^{-1}$ est défini par $(i_1, \mu_0)^{-1}(Y_{ij} \otimes 1) = Y_{ij} \otimes 1$ et $(i_1, \mu_0)^{-1}(1 \otimes T_{ij}) = \Sigma_r Z_{ir} \otimes Y_{rj}$ où $((Z_{ij})$ est la matrice inverse de $(Y_{ij}))$. □

Remarque 1.4. Supposons que A soit l'anneau de coordonnées d'une variété algébrique affine X et lisse; Soit $T_A = \mathrm{Der}(A, A)$ alors $A[Y_{ij}, 1/Y]$ est l'anneau de coordonnées d'un espace homogène princial affine P sur X de groupe $GL(n, C)$; le A-module M définit un fibré vectoriel algébrique $\tilde{M}$ sur X dont le fibré algébrique principal associé est P; la structure de $\mathcal{D}_A$-module de M définit une loi de dérivation intégrable ∇ dans $\tilde{M}$; D'un point de vue analytique si l'on note "a" la correspondance G.A.G.A., P^a est le fibré des repères asocié au fibré vectoriel $\tilde{M}^a$; ∇ induit donc sur P^a une connexion intégrable ω. D'autrepart, soit $\mathfrak{m}$ un idéal différentiel maximal de $A[Y_{ij}, 1/Y]$, soient $B = A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}$ et G le stabilisateur de $\mathfrak{m}$ dans $GL(n, C)$; alors G opère sur B de façon compatible avec la structure différentielle; d'où une représentation ρ de G dans $\mathrm{Gal}(B/A)$ (groupe des automorphismes différentiels de B sur A); on montrera que ρ est un isomorphisme; B est alors l'anneau de coordonnées d'un sous-espace homogène principal P' de P de groupe G; P'^a est un sous fibré principal de P^a (autrement dit P'^a est une G-structure) qui est muni d'une connexion intégrable (celle induite par ω); Ceci rattache la théorie de Galois de Picard Vessiot à la théorie des G-structures dans la présentation de Bernard [1].

§2. Extensions galoisiennes et G-structures.

Définition 2.1. Une algèbre différentielle (B, T_B) sur (A, T_A) est dite galoisienne si elle vérifie les conditions suivantes:

(i) B est une A-algèbre de type fini

(ii) $C(B) \simeq C(A)$

(iii) le morphisme différentiel $i_1 : B \to B \otimes_A B$ est trivial ($B \otimes_A B$ étant muni de sa structure différentielle de produit tensoriel); autrement dit $(i_1, id) : B \otimes_{C(B)} C(B \otimes_A B) \to B \otimes_A B$ est un isomorphisme.

Remarque 2.2. Cette définition est la définition géométrique de la théorie de Galois [4].

Théoréme 2.3.

(1) *Soit $\mathfrak{m}$ un idéal différentiel maximal de $A[Y_{ij}, 1/Y]$ alors $B = A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}$ est une algèbre différentielle galoisienne.*

(2) *$C(B \otimes_A B)$ est une k-bigèbre munie d'une involution ; autrement dit $C(B \otimes_A B)$ est l'anneau de coordonnées d'un groupe algébrique affine G défini sur k.*

Preuve. 1) L'homomorphisme $\varphi = (i_1, id) : B \otimes_k C(B \otimes_A B) \to B \otimes_A B$ est injectif puisque (B, T_B) est simple; il suffit donc de prouver qu'il est surjectif; Soit χ l'homomrophisme canonique de $A[Y_{ij}, 1/Y]$ sur B; on considère l'homomorphisme composé α:

$$k[T_{ij}, 1/T] \hookrightarrow A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k[T_{ij}, 1/T] \xrightarrow[\sim]{(i_1,\mu_0)^{-1}} A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_A A[Y_{ij}, 1/Y] \xrightarrow{\chi\otimes\chi} B \otimes_A B$$

α est à valeurs dans $C(B \otimes_A B)$ et le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k[T_{ij}, 1/T] & \xrightarrow{(i_1,\mu_0)^{-1}} & A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_A A[Y_{ij}, 1/Y] \\ {\scriptstyle \alpha\otimes\chi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi\otimes\chi} \\ B \otimes_k C(B \otimes_A B) & \xrightarrow{\varphi} & B \otimes_A B \end{array}$$

Soit $y_{ij} = \chi(Y_{ij})$; l'algèbre $B \otimes_A B$ est engendrée sur A par $1 \otimes y_{ij}, y_{ij} \otimes 1$, $\frac{1}{y} \otimes 1$, $1 \otimes \frac{1}{y}$ (avec $y = \det y_{ij}$) et on a $y_{ij} \otimes 1 = \varphi(y_{ij} \otimes 1)$; $1 \otimes y_{ij} = \varphi(\Sigma_r y_{ir} \otimes \alpha(T_{rj}))$; ceci prouve que φ est surjectif.

2) On pose $R = C(B \otimes_A B)$ et inj l'injection de R dans $B \otimes_A B$; l'homomorphisme composé $R \otimes_k R \to B \otimes_A B \otimes_k R \xrightarrow{1 \otimes \varphi} B \otimes_A B \otimes_A B$ est injectif et à valeurs dans $C(B \otimes_A B \otimes_A B)$. C'est en fait un isomorphisme; en effet si (v_β) est une base de R sur k, tout élément de $B \otimes_A B \otimes_A B$ est de la forme $1 \otimes \varphi(\Sigma_\beta f_\beta \otimes v_\beta)$ où $f_\beta \in B \otimes_A B$; si de plus cet élément appartient à $C(B \otimes_A B \otimes_A B)$ on a $0 = \partial[1 \otimes \varphi(\Sigma_\beta f_\beta \otimes v_\beta)] = 1 \otimes \varphi(\Sigma_\beta (\partial f_\beta) \otimes v_\beta)$ pour tout $\partial \in T_A$; autrement dit $f_\beta \in R$; On identifie ainsi $R \otimes_k R$ et $C(B \otimes_A B \otimes_A B)$.

3) Structure de bigèbre de R:

On considère les morphismes différentiels suivants:

$$\Delta : B \otimes_A B \to B \otimes_A B \otimes_A B \quad \Delta(f \otimes h) = f \otimes 1 \otimes h$$
$$m : B \otimes_A B \to B \quad m(f \otimes h) = fh \quad \text{(multiplication dans } B)$$

Δ et m induisent par restriction aux constantes les homomorphismes de k algèbres $\delta : R \to R \otimes_k R$ et $\varepsilon : R \to k$; on a d'autrepart les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes_A B \otimes_A B \\ \Delta \downarrow & & \downarrow 1\otimes\Delta \\ B \otimes_A B & \xrightarrow{1\otimes\Delta} & B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes_A B \otimes_A B \\ \Delta \downarrow & 1 \searrow & \downarrow 1\otimes m \\ B \otimes_A B \otimes_A B & \xrightarrow{m\otimes 1} & B \otimes_A B \end{array}$$

ils induisent par restricitons aux constantes les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\delta} & R \otimes_k R \\ \delta \downarrow & & \downarrow 1\otimes\delta \\ R \otimes_k R & \xrightarrow{\delta\otimes 1} & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\delta} & R \otimes_k R \\ \delta \downarrow & 1 \searrow & \downarrow (1,p) \\ R \otimes_k R & \xrightarrow{p,1} & R \end{array}$$

p étant l'homomorphisme ε considéré à valeurs dans R.

La symétrie $s : B \otimes_A B \to B \otimes_A B$ $(s(f \otimes h) = h \otimes f)$ induit un isomorphisme $\sigma : R \to R$ et on vérifie alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\delta} & R \otimes_k R \\ \delta \downarrow & p \searrow & \downarrow (1,\sigma) \\ R \otimes_k R & \xrightarrow{\sigma,1} & R \end{array}$$

$\square$

Remarque 2.4. On va montrer que la structure de bigèbre sur $C(B \otimes_A B)$ définie ci-dessus se déduit de celle de $k[T_{ij}, \frac{1}{T}]$ par passage au quotient et la coaction de $C(B \otimes_A B)$ sur B est induite par celle de $k[T_{ij}, 1/T]$ sur $A[Y_{ij}, 1/Y]$.

Proposition 2.5. *L'homomorphisme $\alpha : k[T_{ij}, 1/T] \to C(B \otimes_A B)$ est un morphisme surjectif de k bigèbres autrement dit G est un sous-groupe fermé de $GL(n, k)$.*

Preuve. a) α est surjectif: on pose $t_{ij} = \alpha(T_{ij})$ et $t = \alpha(T)$; Soit R' l'image de α; de l'injection $R' \hookrightarrow C(B \otimes_A B)$ on déduit l'homomorphisme composé $\varphi' : B \otimes_k R' \hookrightarrow B \otimes_k C(B \otimes_A B) \overset{\varphi}{\tilde{\to}} B \otimes_A B$; On a $y_{ij} \otimes 1 = \varphi'(y_{ij} \otimes 1)$ et $1 \otimes y_{ij} = \varphi'(\Sigma_r y_{ir} \otimes t_{rj})$; φ' est donc surjectif; c'est un isomorphisme; l'injection $B \otimes_k R' \hookrightarrow B \otimes_k C(B \otimes_A B)$ est aussi un isomorphisme (fidèle platitude sur un corps); il en résulte que $R' = C(B \otimes_A B)$.

b) La compatibilité de α avec les structures de bigèbres résulte des définitions. $\square$

Proposition 2.6. *B est un comodule pour la coaction $\mu : B \to B \otimes_k C(B \otimes_A B)$ définie par $\mu(f) = \bar{\varphi}^1(1 \otimes f)$. (on a donc $\varphi = (i_1, \mu)$) et les diagrammes suivants sont commutatifs:*

$$\begin{array}{ccc}
A[Y_{ij}, 1/Y] & \xrightarrow{\mu_0} & A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k[T_{ij}, 1/T] \\
\chi \downarrow & & \downarrow \chi\otimes\alpha \\
B & \xrightarrow{\mu} & B \otimes_k C(B \otimes_A B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_A A[Y_{ij}, 1/Y] & \xrightarrow[\sim]{(i_1,\mu_0)} & A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k[T_{ij}, 1/T] \\
\chi\otimes\chi \downarrow & & \downarrow \chi\otimes\alpha \\
B \otimes_A B & \xrightarrow{(i_1,\mu)} & B \otimes_k C(B \otimes_A B)
\end{array}$$

Preuve. Évidente. $\square$

Remarque 2.7. Soit ρ_0 (resp. ρ) la représentation de $GL(n, k)$ (resp. G) dans $A[Y_{ij}, 1/Y]$ (resp. B) définie par μ_0 (resp. μ); on a $\rho_0(g)(Y_{ij}) = \Sigma_r Y_{ir} T_{rj}(g)$ et $\rho(g)(y_{ij}) = \Sigma_r y_{ir} t_{rj}(g)$; φ est injective et compatible avec la structure différentielle de B, G s'identifie à un sous groupe de Gal(B/A).

Proposition 2.8. $\rho : G \to \mathrm{Gal}(B/A)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Il suffit de montrer que c'est une surjection; Soit $\gamma \in \mathrm{Gal}(B/A)$; le morphisme différentiel composé $B \otimes_A B \xrightarrow{\gamma\otimes 1} B \otimes_A B \xrightarrow{m} B$ (m étant la multiplication dans B) induit par restriction aux constantes un homomorphisme de k algèbres $C(B \otimes_A B) \to k$ c'est-à-dire un élément $g \in G$ tel que $\gamma = \rho(g)$.

Soit G' le stabilisateur de $\mathfrak{m}$ dans $GL(n,k)$ c'est-à-dire le sous groupe de $GL(n,k)$ formé des g tels que $\rho_0(g)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$; Tout $g \in G'$ définit un élément $\varphi'(g) \in \mathrm{Gal}(B/A)$ tel que $\rho'(g) \cdot \chi = \chi_0\rho_0(g)$; d'où une représentation ρ' de G' dans $\mathrm{Gal}(B/A)$; ρ' est injective; D'autrepart si $g \in G$ on a $\rho(g)\chi = \chi\rho_0(g)$; $\rho_0(g)$ laisse donc stable $\mathfrak{m}$ ou encore $g \in G'$; on a ainsi $G \subset G'$ et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\rho}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \mathrm{Gal}(B/A) \\ \cap & \rho' \nearrow & \\ G' & & \end{array}$$

On en déduit que $G = G'$ et $\rho = \rho'$. $\square$

Théoréme 2.9. *Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble des idéaux différentiels maximaux de $A[Y_{ij}, 1/Y]$; alors*

(1) *$GL(n,k)$ opère transitivement sur $\mathfrak{I}$*

(2) *Si $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont dans $\mathfrak{I}$ alors $A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}_1$ et $A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}_2$ sont isomorphes.*

Remarque 2.10. Soit X une variété algébrique affine complexe irréductible et lisse d'anneau A; Soit $T_A = \mathrm{Der}(A, A)$; On a vu que le choix de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{I}$ définit un sous fibré principal $P^a_{\mathfrak{m}}$ du fibré des repères P^a associé au fibré vectoriel $\tilde{M}^a$ défini par M; $\mathfrak{I}$ représente donc une famille de G-structures; le théorème signifie que ces structures sont équivalentes; D'autrepart si ω est la connexion analytique dans P^a induite par la loi de dérivation dans M, alors les $P^a_{\mathfrak{m}}$ sont les adhérences pour la topologie de Zariski des feuilles d'holonomie de ω.

Donnons les lignes de la preuve du résultat ci-dessus:

Soient $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2 \in \mathfrak{I}$; Soient P_1 et P_2 les sous-variétés algébriques de P définies par $\mathfrak{m}_1$ et$\mathfrak{m}_2$. P_1 et P_2 étant deux fibrés au-dessus de X, on a alors:

1) P_1 trivialise P_2 (resp. P_2 trivialise P_1) c'est à dire le produit fibré $P_1 \times_X P_2$ (resp. $P_2 \times_X P_1$) est isomorphe à un produit $P_1 \times H_{12}$ (resp. $P_2 \times H_{21}$) où H_{12} (resp. H_{21}) est une variété algébrique.

2) Il existe des applications régulières injectives $\alpha_{12} : H_{12} \hookrightarrow GL(m, C)$, $\alpha_{21} : H_{21} \hookrightarrow GL(m, C)$ et un isomorphisme $\nu : H_{12} \to H_{21}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{12} & \xrightarrow{\alpha_{12}} & GL(n, C) \\ \nu \big\downarrow & & \big\downarrow \sigma \\ H_{21} & \xrightarrow{\alpha_{21}} & GL(n, C) \end{array}$$

σ désignant l'isomorphisme $g \mapsto g^{-1}$.

Soit u un point de H_{21}, alors $g = \alpha_{21}(u)$ est l'inverse de $g' = \alpha_{21}\nu(u)$, les applications composées

$$\begin{aligned} \psi_{12} : P_1 &\to P_1 \times H_{12} \xrightarrow{\sim} P_1 \times_X P_2 \xrightarrow{pr_2} P_2 \\ p &\mapsto (p, \nu(u)) \\ \psi_{21} : P_2 &\to P_2 \times H_{21} \xrightarrow{\sim} P_2 \times_X P_1 \xrightarrow{pr_2} P_1 \\ p &\mapsto (p, u) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes réciproques. On a ainsi $\psi_{12}(p) = p \cdot g$, pour tout $p \in P_1$ (resp. $\psi_{21}(p) = p \cdot g^{-1}$, pour tout $p \in P_2$); On a donc $P_2 = P_1 \cdot g$; d'autrepart comme $\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{m}_2$) est l'idéal de définition de P_1 (resp. P_2) on a $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1 \cdot g$.

Preuve du théorème: Soient $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ deux idéaux différentiels maximaux de $A[Y_{ij}, 1/Y]$; Soient $B_1 = A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}_1$ et $B_2 = A[Y_{ij}, 1/Y]/\mathfrak{m}_2$.

Lemme 2.11. *Les morphismes canoniques $j_{12} : B_1 \hookrightarrow B_1 \otimes_A B_2$ et $j_{21} : B_2 \hookrightarrow B_2 \otimes_A B_1$ sont triviaux ,c'est à dire $\varphi_{12} = (j_{12}, id) : B_1 \otimes_k C(B_1 \otimes_A B_2) \to B_1 \otimes_A B_2$ et $\varphi_{21} = (j_{21}, id) : B_2 \otimes_k C(B_2 \otimes_A B_1) \to B_2 \otimes_A B_1$ sont des isomorphismes.*

Preuve. B_1 et B_2 sont différentiellement simples, φ_{12} et φ_{21} sont injectifs (remarque I.6.6); Il suffit alors de montrer qu'ils sont surjectifs; soitχ_1 (resp. χ_2) la surjection de $A[Y_{ij}, 1/Y]$ sur B_1 (resp. B_2; Soit α_{12} (resp. α_{21}) l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} k[T_{ij}, 1/T] &\hookrightarrow A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_k k[T_{ij}, 1/T] \\ &\xrightarrow{(i_1, \mu_0)^{-1}} A[Y_{ij}, 1/Y] \otimes_A A[Y_{ij}, 1/Y] \\ &\xrightarrow{\chi_1 \otimes \chi_2} B_1 \otimes_A B_2 \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} k[T_{ij},1/T] &\hookrightarrow A[Y_{ij},1/Y]\otimes_k k[T_{ij},1/T] \\ &\xrightarrow{(i_1,\mu_0)^{-1}} A[Y_{ij},1/Y]\otimes_A A[Y_{ij},1/Y] \\ &\xrightarrow{\chi_2\otimes\chi_1} B_2\otimes_A B_1) \end{aligned}$$

α_{12} (resp. de α_{21}) est à valeurs dans $C(B_1\otimes_A B_2)$) (resp. $C(B_2\otimes_A B_1)$); on en déduit les diagrammes commutatifs:

$$\begin{tikzcd} A[Y_{ij},1/Y]\otimes_k k[T_{ij},1/T] \arrow[r, "(i_1,\mu_0)^{-1}"] \arrow[d, "\chi_1\otimes\chi_{12}"'] & A[Y_{ij},1/Y]\otimes_A A[Y_{ij},1/Y] \arrow[d, "\chi_1\otimes\chi_2"] \\ B_1\otimes_k C(B_1\otimes_A B_2) \arrow[r, "\phi_{12}"] & B_1\otimes_A B_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A[Y_{ij},1/Y]\otimes_k k[T_{ij},1/T] \arrow[r, "(i_1,\mu_0)^{-1}"] \arrow[d, "\chi_2\otimes\chi_{21}"'] & A[Y_{ij},1/Y]\otimes_A A[Y_{ij},1/Y] \arrow[d, "\chi_2\otimes\chi_1"] \\ B_2\otimes_k C(B_2\otimes_A B_1) \arrow[r, "\phi_{21}"] & B_2\otimes_A B_1 \end{tikzcd}$$

Soient $y_{ij}^{(1)}=\chi_1(Y_{ij})$; $y_{ij}^{(2)}=\chi_2(Y_{ij})$; $y^{(1)}=\det y_{ij}^{(1)}$; $y^{(2)}=\det y_{ij}^{(2)}$; alors $B_1\otimes_A B_2$ (resp. $B_2\otimes_A B_1$) est engendré sur A par

$$y_{ij}^{(1)}\otimes 1,\ 1\otimes y_{ij}^{(2)};\qquad \frac{1}{y^{(1)}}\otimes 1,\ 1\otimes\frac{1}{y^{(2)}}$$

(resp.

$$y_{ij}^{(2)}\otimes 1,\ 1\otimes y_{ij}^{(1)};\qquad \frac{1}{y^{(2)}}\otimes 1,\ 1\otimes\frac{1}{y^{(1)}}\ )$$

et on a:

$$y_{ij}^{(1)}\otimes 1=\varphi_{12}\left(y_{ij}^{(1)}\otimes 1\right);\qquad 1\otimes y_{ij}^{(2)}=\varphi_{12}\left[\Sigma_r y_{ir}^{(1)}\otimes\alpha_{12}(T_{rj})\right]$$

(resp.

$$y_{ij}^{(2)}\otimes 1=\varphi_{21}\left(y_{ij}^{(2)}\otimes 1\right);\qquad 1\otimes y_{ij}^{(1)}=\varphi_{21}\left[\Sigma_r y_{ir}^{(2)}\otimes\alpha_{21}(T_{rj})\right]\ );$$

ceci prouve que φ_{12} et φ_{21} sont surjectifs.

Lemme 2.12.
(1) $\alpha_{12}: k[T_{ij},1/T]\to C(B_1\otimes_A B_2)$ *et* $\alpha_{21}: k[T_{ij},1/T]\to C(B_2\otimes_A B_1)$ *sont surjectifs*

(2) *Soit σ l'involution de $k[T_{ij}, 1/T]$ (c'est-à-dire l'isomorphisme de $k[T_{ij}, 1/T]$ qui à la matrice (T_{ij}) associe son inverse), alors le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} k[T_{ij}, 1/T] & \xrightarrow{\sigma} & k[T_{ij}, 1/T] \\ {\scriptstyle\alpha_{21}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{12}} \\ C(B_2 \otimes_A B_1) & \xrightarrow{C(\nu)} & C(B_1 \otimes_A B_2) \end{array}$$

où $C(\nu)$ est à la restriction à $C(B_2 \otimes_A B_1)$ de la symétrie $\nu : B_2 \otimes_A B_1 \to B_1 \otimes_A B_2$

Supposons le lemme prouvé: $C(B_2 \otimes_A B_1)$ est donc une k-algèbre de type fini et il existe un homomorphisme de k-algèbres $u : C(B_2 \otimes_A B_1) \to k$ (Nullstellensatz); $u\alpha_{21}$ définit un élément $g \in GL(n, k)$ dont l'inverse est défini par $uC(\nu)^{-1}$; on considère les morphismes différentiels composés:

$$\psi_{12} : B_2 \hookrightarrow B_1 \otimes_A B_2 \xrightarrow{\varphi_{12}^{-1}} B_1 \otimes_k C(B_1 \otimes_A B_2) \xrightarrow{1 \otimes uC(\nu)^{-1}} B_1 \otimes_k k \xrightarrow{\sim} B_1$$
$$\psi_{21} : B_1 \hookrightarrow B_2 \otimes_A B_1 \xrightarrow{\varphi_{21}^{-1}} B_2 \otimes_k C(B_2 \otimes_A B_1) \xrightarrow{1 \otimes u} B_2 \otimes_k k \xrightarrow{\sim} B_2$$

ψ_{12} et ψ_{21} sont des isomorphismes réciproques et on a

$$\psi_{12}(y_{ij}^{(2)}) = \Sigma_r y_{ir}^{(1)} T_{rj}(g^{-1})$$
$$\psi_{21}(y_{ij}^{(1)}) = \Sigma_r y_{ir}^{(2)} T_{rj}(g)$$

ceci signifie aussi que l'on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A[Y_{ij}, 1/Y] & \xrightarrow{\rho_0(g^{-1})} & A[Y_{ij}, 1/Y] \\ {\scriptstyle\chi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\chi_2}\downarrow \\ B_2 & \xrightarrow{\psi_{12}} & B_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A[Y_{ij}, 1/Y] & \xrightarrow{\rho_0(g)} & A[Y_{ij}, 1/Y] \\ {\scriptstyle\chi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\chi_2}\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_{21}} & B_2 \end{array}$$

On en déduit alors $\rho_0(g)(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2$, d'où le théorème.

Reste à prouver le Lemme 2.12:

1) Soient $t_{ij}^{(1)} = \alpha_{12}(T_{ij}), t_{ij}^{(2)} = \alpha_{21}(T_{ij}), t^{(1)} = \det t_{ij}^{(1)}$, $t^{(2)} = \det t_{ij}^{(2)}$; Soit R_{12} (resp. R_{21}) l'image de α_{12} (resp. α_{21}); De l'injection $R_{12} \hookrightarrow C(B_1 \otimes_A B_2)$ (resp. $R_{21} \hookrightarrow C(B_2 \otimes_A B_1)$) on déduit l'homomorphisme composé φ'_{12} (resp. φ'_{21})

$$B_1 \otimes_k R_{12} \hookrightarrow B_1 \otimes_k C(B_1 \otimes_A B_2) \xrightarrow{\varphi_{12}} B_1 \otimes_A B_2$$

(resp.

$$B_2 \otimes_k R_{21} \hookrightarrow B_2 \otimes_k C(B_2 \otimes B_1) \xrightarrow{\varphi_{21}} B_2 \otimes_A B_1);$$

on a $y_{ij}^{(1)} \otimes 1 = \varphi'_{12}\left(y_{ij}^{(1)} \otimes 1\right)$, $1 \otimes y_{ij}^{(2)} = \varphi'_{12}\left(\Sigma_r y_{ir}^{(1)} \otimes t_{rj}^{(1)}\right)$ [resp. $y_{ij}^{(2)} \otimes 1 = \varphi'_{12}\left(y_{ij}^{(2)} \otimes 1\right)$, $1 \otimes y_{ij}^{(1)} = \varphi'_{21}\left(\Sigma_r y_{ir}^{(2)} \otimes t_{rj}^{(2)}\right)$] ceci montre que φ'_{12} et φ'_{21} sont surjectifs; Ce sont donc des isomorphismes; l'injection $B_1 \otimes_k R_{12} \hookrightarrow B_1 \otimes_k C(B_1 \otimes_A B_2)$ [resp. $B_2 \otimes_k R_{21} \hookrightarrow B_2 \otimes_k C(B_2 \otimes_A B_1)$] est un isomorphisme. On en déduit que $R_{12} = C(B_1 \otimes_A B_2)$ [Resp. $R_{21} = C(B_2 \otimes_A B_1)$] (propriété de fidèle platitude sur un corps).

2) La seconde partie du lemme résulte immédiatement de la définition de α_{12} et α_{21}. □

Corollaire 2.13. *Si $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont deux idéaux différentiels maximaux de $A[Y_{ij},1/Y]$, les stabilisateurs G_1 et G_2 de $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ dans $GL(n,k)$ sont conjugués dans un automorphisme intérieur de $GL(n,k)$.*

3. Extensions galoisiennes et P.V. normales (cas des corps).

§1. Extensions galoisiennes.

Soit (K, T_K) un corps différentiel; on a vu que sous l'hypothèse "$C(K, T_K)$ algébriquement clôs" une algèbre différentielle qui est de type Joyal est galoisienne; ce résultat possède une réciproque: Soit B/K une extension galoisienne, alors B est de type Joyal trivialisant un $\mathcal{D}_K$ module convenable; B étant supposé intègre.

Pour montrer ce résultat, on aura besoin de développer le lien entre la structure différentielle et la structure de G-module de B; G étant le groupe de Galois de B sur K.

Soit (K, T_K) un corps différentiel; soit B/K une extension galoisienne; on suppose que $k = C(K)$ est algébriquement clôs et B intègre.

Proposition 1.1.

(1) *$C(B \otimes_K B)$ est une k-bigèbre munie d'un involution ($C(B \otimes_K B)$ est donc l'anneau d'un groupe algébrique affine G défini sur k)*

(2) *B est un comodule pour la coaction $\mu : B \to B \otimes_k C(B \otimes_K B)$ définie par $\mu(f) = \varphi^{-1}(1 \otimes f)$ où φ est l'isomorphisme de trivialisation $B \otimes_k C(B \otimes_K B) \to B \otimes_K B$.*

Preuve. Il est clair que $C(B \otimes_K B)$ est une K-algèbre de type fini. Soit $\varphi : B \otimes_k C(B \otimes_K B) \to B \otimes_K B$ l'isomorphisme de trivialisation.

Soit inj l'injection de $C(B\otimes_K B)$ dans $B\otimes_K B$; l'homomorphisme composé

$$C(B\otimes_K B)\otimes_k C(B\otimes_K B) \xrightarrow{\text{inj}\otimes 1} B\otimes_K B\otimes_k C(B\otimes_K B) \xrightarrow{1\otimes\varphi} B\otimes_K B\otimes_K B$$

est à valeurs dans $C(B\otimes_K B\otimes_K B)$; Le même raisonnement que dans la preuve du th. II.2.3 montre que c'est un isomorphisme sur $(B\otimes_K B\otimes_K B)$; la structure de bigèbre est alors définie de la même façon que dans le th. II.2.3. Soit ρ la représentation de G dans B définie par μ; on a $\varphi(g)(f) = \Sigma_i r_i(g)f_i$ si $\mu(f) = \Sigma_i f_i\otimes r_i$; ρ est injective et compatible avec la structure différentielle. □

Proposition 1.2. $\rho : G \to \mathrm{Gal}(B/K)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Il suffit de montrer que ρ est surjectif; Soit $\gamma\in\mathrm{Gal}(B/K)$; le morphisme différentiel $B\otimes_K B \overset{\gamma\otimes 1}{\to} B\otimes_K B \overset{m}{\to} B$ (où m est la multiplication dans B) induit par restriction aux constantes un homomorphisme de k-algèbres $C(B\otimes_K B)\to k$ c'est-à-dire un élément de G dont l'action sur B n'est autre que γ. □

Remarque 1.3. $\mathrm{Gal}(B/K)$ possède donc une structure de groupe algébrique défini sur k.

Proposition 1.4. *B est un G module simple autrement dit B ne possède pas d'idéaux stables pour G autres que* 0 *et B.*

Preuve. On note pour toute K algèbre E, $G(E) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(C(B\otimes_K B);E)$ muni de sa structure de groupe linéaire défini par la bigèbre $C(B\otimes_K B)$; Soit $X = \mathrm{Hom}_{K-alg}(B;\cdot)$; Si $X(E)\neq\emptyset$ alors $G(E)$ opère simplement transitivement sur l'ensemble $X(E)$ l'opération étant définie de la façon suivante: si $g\in G(E)$ et $\mathcal{E}\in X(E)$ alors $g(\mathcal{E})$ est l'homomorphisme composé $B \overset{\mu}{\to} B\otimes_k C(B\otimes_K; B) \xrightarrow{(\mathcal{E},g)} E$.

Soit $\hat{K}$ une clôture algébrique de K alors $X(\hat{K})\neq\emptyset$ (Nullstellensatz) et $G(\hat{K})$ opère simplement transitivement sur $X(\hat{K})$; Soit I un idéal de B stable pour G; supposons $I\neq B$ et montrons que $I=0$: Soit $\mathcal{E}\in X(\hat{K})$ tel que $I\subset\ker\mathcal{E}$ on a alors $I\subset\ker g(\mathcal{E})$ pour tout $g\in G(\hat{K})$; l'orbite de $\mathcal{E}$ est donc formée de points dont le noyau contient I; comme cette orbite est $X(\hat{K})$; il s'ensuit que I est contenu dans l'intersection des idéaux maximaux de B et donc $I=0$ (Nullentensatz). □

Corollaire 1.5. *Soit B^G l'algèbre des invariants de B sous G, alors $B^G = K$.*

Lemme 1.6. *Soit $f\in B$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f\in B^G$

(ii) $\mu(f) = f \otimes 1$.

Preuve du Corollaire 1.5. Soit $f \in B^G$; on déduit du Lemme 1.6 que $\mu(f) = f \otimes 1$ c'est-à-dire $1 \otimes f = f \otimes 1$ ce qui implique que $f \in K$ (fidèle platitude sur un corps). $\square$

Définition 1.7. On appelle (G, B)-module, un B-module qui est muni d'une structure de G-module qui satisfait à la condition de compatibilité suivante: $g(fm) = g(f)g(m)$, $g \in G, f \in B, m \in M$. On note M^G l'espace vectoriel sur K des invariants de M.

Remarque 1.8. Si V est un K-espace vectoriel, alors $B \otimes_K V$ est un (G, B)-module pour la structure définie par $g(f \otimes v) = g(f) \otimes v$; $g \in G, f \in B, v \in V$; cette structure est dite triviale.

Proposition 1.9. *Soit V un K-espace vectoriel ; alors l'injection $i_2 : V \hookrightarrow B \otimes_K V$ est un isomorphisme sur $(B \otimes_K V)^G$.*

Proposition 1.10. *Soit M un (G, B)-module; alors l'homomorphisme canonique $B \otimes_K M^G \to M$ est un morphisme injectif de (G, B)-modules ($B \otimes_K M^G$ étant muni de sa structure triviale de (G, B)-module).*

Définition 1.11. Un (G, B)-module M est dit trivial si le morphisme canonique $B \otimes_K M^G \to M$ est un isomorphisme. (Il suffit pour cela qu'il soit surjectif.)

Proposition 1.12.

(1) *Tout module quotient d'un (G, B)-module trivial est trivial.*

(2) *Tous sous module d'un (G, B)-module trivial est trivial.*

Soit L le corps de fractions de B;

Proposition 1.13. $L^G = K$

Proposition 1.14.

(i) $C(L) = K$

(ii) *B est une algèbre différentielle simple.*

Remarque. Pour montrer la proposition 1.14 il faut voir de plus près le lien entre B et L;

Si $f \in L$, on note $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} f$; I_f est un idéal à gauche de $\mathcal{D}_K$; on dit que f est un élément de Picard-Vessiot de L sur K si $\dim_K \mathcal{D}_K / I_f < \infty$ (il revient au même de dire que le $\mathcal{D}_K$ module engendré par f est un K-espace vectoriel de dimension finie).

L'ensemble des éléments de Picard-Vessiot de L sur K est un sous anneau différentiel de L qu'on note $PV(L/K)$.

Si $f \in L$ on note $\mathcal{E}_k(f)$ le k-espace vectoriel engendré par l'orbite de f sous G.

Lemme 1.15 [2]. *Soit $f \in L$; les conditions suivantes sont équivanlentes:*
(i) $f \in B$
(ii) $\dim_k \mathcal{E}_k(f) < \infty$.

Preuve. Il est clair que i) entraîne ii);

Réciproquement, supposons $f \neq 0$ et $\dim \mathcal{E}_k(f) < \infty$; Soit $(\frac{a_i}{b})$ $i = 1, \cdots, r$ une base de $\mathcal{E}_k(f)$ sur k, a_i, $b \in B$; on a pour tout $g \in G$ $g(f) = \Sigma_{i=1}^{r} \rho_i(g) \frac{a_i}{b}$ où $\rho_i(g) \in k$; $g(f)$ est donc défini sur l'ouvert U de $\operatorname{spec} B$ formé des x tels que $b(x) \neq 0$ Supposons qu'il existe un point x_0 où f n'est pas défini, alors l'orbite de x_0 ne rencontre pas U ce qui est contradictoire; on montre en effet que G opérant sur $\operatorname{spec} B$ simplement transitivement, toute orbite est dense; il s'ensuit que f est défini en tout point de $\operatorname{spec} B$ c'est-à-dire $f \in B$.

Reste à montrer que toute orbite de $\operatorname{spec} B$ est partout dense: Soit F un fermé de $\operatorname{spec} B$ stable pour l'action de G et soit I l'idéal radiciel qui définit F alors I est stable sous G; comme B est un G module simple on a $I = 0$ c'est-à-dire $F = \operatorname{spec} B$. □

Lemme 1.16. *$PV(L/K) \subset B$.*

Remarque. On montrera que $PV(L/K) = B$ (cf. Prop. 1.20).

Preuve du Lemme 1.16. Soit $\ell = C(L)$, on considère l'application ℓ-linéaire canonique $u : \ell \otimes_k \mathcal{E}_k(f) \to L$ l'image de u n'est autre que le ℓ espace vectoriel $\mathcal{E}_\ell(f)$ engendré par l'orbite de f sous G. D'autrepart ℓ et L sont linéairement disjoints sur k puisque k est algébriquement clôs; l'application canonique $\ell \otimes_k L \to L$ est donc injective et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \ell \otimes_k L \arrow[r] & L \\ \ell \otimes_k \mathcal{E}_k(f) \arrow[u, "\mathrm{Can}"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

montre alors que u est injective; on a ainsi un isomorphisme de $\ell \otimes_k \mathcal{E}_k(f)$ sur $\mathcal{E}_\ell(f)$. Soit $f \in PV(L/K)$, d'après ce qui précède pour prouver que $\dim_k \mathcal{E}_k(f) < \infty$ il suffit de prouver que $\dim_\ell \mathcal{E}_\ell(f) < \infty$; Soit $S = \mathrm{Sol}(I_f, L)$ l'espace vectoriel sur ℓ des solutions de I_f dans L; on a $S \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{D}_K/I_f; L)$ $= C(\mathrm{Hom}_K(\mathcal{D}_K/I_f; L))$ et l'injection canonique $L \otimes_\ell S \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{D}_K/I_f; L)$

montre que $\dim_\ell S \leq \dim_K(\mathcal{D}_K/I_f) < \infty$; Comme $\mathcal{E}_\ell(f) \subset S$ on a donc $\dim \mathcal{E}_\ell(f) < \infty$; d'où le lemme. $\square$

Preuve de la Proposition 1.14. 1) Soit $f \in C(L)$ alors $f \in PV(L/K) \subset B$ (Lemme 1.16) on a donc $f \in C(B) = k$.

2) Soit $f \in B$, $f \neq 0$; Soit I l'idéal différentiel de B engendré par f; on va montrer que I contient un élément inversible : soient $\partial_1, \cdots, \partial_r$ une base de T_K sur K et $f_1, \cdots, f_m$ une base de $\mathcal{E}_k(f)$ sur k; il existe alors $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in N^r$ tels que $W = \det \partial^{\alpha_i} f_j \neq 0$; Soit $\chi : G \to k^*$ le déterminant de la représentation de G dans $\mathcal{E}_k(f)$; on a pour tout $g \in G$ $g(W) = \chi(g)W$ et $g(1/W) = (1/\chi(g))(1/W)$; on a donc $\dim_k \mathcal{E}_k(W) = 1$ et le Lemme 1.15 implique que $1/W \in B$; Comme $W \in I$ on en déduit que $I = B$ ce qui prouve que B est une algèbre différentielle simple. $\square$

On exprime maintenant la dualité de Spencer pour l'extension galoisienne B/K.

Définition 1.17. On munit $B \otimes_k B$ de la structure de G-module définie par $g(f \otimes h) = g(f) \otimes g(h)$: On munit $\mathcal{D}_B$ de la structure de G-module définie par $g(\Sigma_i h_i \mathcal{E}_i) = \Sigma_i g(h_i)\mathcal{E}_i,\ h_i \in B\ h_i \in B\ \mathcal{E}_i \in \mathcal{D}_K$; on a alors $\mathcal{D}_B^G = \mathcal{D}_K$ et $\mathcal{D}_B$ est trivial. La dualité $\langle \mathcal{D}_B, B \otimes_k B\rangle$ est compatible avec les structures de G-modules définies ci-dessus; on a donc $g(\langle D, \eta\rangle) = \langle g(D), g(\eta)\rangle$ pour tout $g \in G$, $D \in \mathcal{D}_B$, $\eta \in B \otimes_k B$.

Proposition 1.18.

(1) *Soit S un sous k-espace vectoriel de B de dimension finie stable sous G alors $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$ est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B (autrement dit BI est complètement résoluble) et tel que $S =$* $\mathrm{Sol}(I; B)$.

(2) *Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B alors $S = \mathrm{Sol}(I; B)$ est un sous k-espace vectoriel de B de dimension finie stable sous G et tel que $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$.*

Preuve. 1) Soit S un sous k-espace vectoriel de B de dimension finie stable sous G; soient $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$ et $J = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_B} S$; alors J est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_B$ complètement résoluble et $S = \mathrm{Sol}(J; B)$. D'autre part, comme $B \otimes_k S$ est un sous G-module de $B \otimes_k B$, J est un sous G- module de $\mathcal{D}_B$ (la dualité étant compatible avec les structures de G- modules de $B \otimes_k B$ et $\mathcal{D}_B$); J est donc trivial (Proposition 1.12) autrement dit on a $J = B \otimes_K J^G = B \otimes_K I$; De l'isomorphisme canonique $\mathcal{D}_B/J \simeq B \otimes_K \mathcal{D}_K/I$ on déduit alors que $\dim_K \mathcal{D}_K/I = rg_B \mathcal{D}_B/J = \dim_k S$: ceci montre que I est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble et $S = \mathrm{Sol}(I, B)$.

2) Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B. $S = \mathrm{Sol}(I; B)$ est alors un k-espace vectoriel de dimension finie et l'on a $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S = (B \otimes_k I)^G = I$; Enfin il est clair que S est stable sous G; ceci achève la preuve. $\square$

Corollaire 1.19. *L'application $S \mapsto \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$ définit une bijection entre les sous k-espaces de B de dimension finie et stables sous G et les idéaux de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résolubles dans B.*

Proposition 1.20.
(1) *Pour tout $f \in B, I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} f$ est un idéal de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B et $\mathcal{E}_k(f) = \mathrm{Sol}(I_f, B)$.*
(2) *$PV(L/K) = B$.*

Preuve. 1) Soit $f \in B$ alors $\mathcal{E}_k(f)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie stable sous G et l'on déduit la Proposition 1.18 que $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} \mathcal{E}_k(f)$ est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble et $\mathcal{E}_k(f) = \mathrm{Sol}(I_f; B)$.

2) La seconde assertion résulte de la première et du Lemme 1.15. $\square$

Corollaire 1.21. $\mathrm{Gal}(L/K) = G$.

En effet si $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$ alors g laisse stable $\mathrm{PV}(L/K) = B$; On a donc $g \in G$.

Proposition 1.22. *B/K est une extension différentielle de type Joyal trivialisant un $\mathcal{D}_K$-module qui est un K-espace vectoriel de dimension finie.*

Preuve. Il existe un sous k-espace vectoriel S de B de dimension finie stable sous G et qui engendre la K-algèbre B; Soit $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$; I est alors un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B tel que $S = \mathrm{Sol}(I; B)$; Soit $f_1, \cdots, f_n$ une base de S sur k; soient $D_1, \cdots, D_n \in \mathcal{D}_K$ tels que les classes $\bar{D}_j$ modulo I forment une base de $\mathcal{D}_K/I$. $\square$

Notons $Y_{ij} = D_j f_i$ et $Y = \det Y_{ij}$, on a alors $B = K[Y_{ij}, 1/Y]$; en effet on a pour tout $\partial \in T_K$ $\partial Y_{ij} = \Sigma_r a_{jr}(\partial) Y_{ir}$ où $a_{jr}(\partial) \in K$ et $\dim_k \mathcal{E}_K(1/Y) < \infty$ autrement dit $1/Y \in B$; B est donc de type Joyal trivialisant $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{D}_K/I, K)$.

§2. Extensions P.V. normales.

Définition 2.1. Soit (K, T_K) un corps différentiel; une extension de corps différentiels L/K est dite P.V. normale si elle vérifie les conditions suivantes
(i) L est une extension de type fini de K (au sens des corps)
(ii) $C(K) = C(L)$ et $C(K)$ est algébriquement clôs

(iii) L est le corps de fractions de P.V. (L/K)

(iv) Pour tout $f \in \mathrm{PV}(L/K)$, $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} f$ est complètement résoluble dans L.

Remarque. Soit B/K une extension galoisienne, si B est intègre alors $L = \mathrm{Frac}\, B$ est une extension P.V. normale de K et $B = \mathrm{PV}(L/K)$ (Prop. 1.20), réciproquement:

Proposition 2.2 [Kolchin-Lang]. *Soit (K, T_K) un corps différentiel; soit L une extension P.V. normale de K. On suppose que $C(K)$ est algébriquement clôs, alors $\mathrm{PV}(L/K)$ est une extension galoisienne de K.*

Preuve. On considère une famille finie (h_α) d'éléments de PV(L/K) qui engendrent L sur K; Soient $I_\alpha = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} h_\alpha$, $S_\alpha = \mathrm{Sol}(I_\alpha, L)$, $I = \cap_\alpha I_\alpha$, $S = \Sigma_\alpha S_\alpha$; on a $S = \mathrm{Sol}(I; L)$; D'autrepart comme les I_α sont par hypothèse de Picard-Vessiot et complètement résolubles dans L, I est aussi P.V. complètement résoluble dans L. Soient $f_1, \cdots, f_n$ une base de S sur $k = C(K)$, et $D_1, \cdots, D_n \in \mathcal{D}_K$ tels que les classes $\bar{D}_j$ modulo I forment une base de $\mathcal{D}_K/I$ sur K ; Soient $Y_{ij} = D_j f_i, Y = \det(Y_{ij})$ et $B = K[Y_{ij}, 1/Y]$ alors:

• B est un sous anneau différentiel de L puisqu'on a pour tout $\partial \in T_K$, $\partial Y_{ij} = \Sigma_r a_{ij}(\partial) Y_{ir}$ où $a_{ij}(\partial) \in K$.

• $L = \mathrm{Frac}\, B$ puisque $S_\alpha \subset S$ pour tout α.

• On va prouver que B/K est galoisien. On en déduira $\mathrm{PV}(L/K) = B$ (Prop. 1.20). On considère les morphismes canoniques $\varphi : B \otimes_k C(B \otimes_K B) \to B \otimes_K B$ et $\varphi' : L \otimes_k C(L \otimes_K L) \to L \otimes_K L$; On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_k C(B \otimes_K B) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Can}"'] & B \otimes_K B \arrow[d, "\mathrm{Can}"] \\
L \otimes_k C(L \otimes_K L) \arrow[r, "\varphi'"] & L \otimes_K L
\end{tikzcd}$$

comme φ' est injectif, φ est aussi injectif; Reste donc à montrer que φ est surjectif. Soient Y la matrice (Y_{ij}) et $Z = Y^{-1}$; on a pour tout $\partial \in T_K$ $\partial(Z \otimes Y) = \partial Z \otimes Y + Z \otimes \partial Y = -A(\partial)Y \otimes Z + Z \otimes Y(A(\partial) = 0$ où $A(\partial) = (a_{ij}(\partial))$; on en déduit que $C = Z \otimes Y$ est à coefficients dans $C(B \otimes_K B)$ et la relation $1 \otimes Y = (Y \otimes 1)C$ prouve alors que φ est surjective. Ceci achève la preuve du lemme. $\square$

4. Extensions galoisiennes et P.V. normales (cas des algèbres).

§1. Extensions galoisiennes.

L'objet est de montrer le résultat suivant: Soient (A, T_A) une algère différentielle simple et B une A-algèbre différentielle galoisienne; si les conditions suivantes sont vérifiées:

i) $C(A)$ est algébriquement clôs
ii) A est noethérien et local
iii) B est intègre
iv) $B = PV(B/A)$

alors B est de type Joyal trivialisant un $\mathcal{D}_A$ module qui est un A module libre de rang fini; la condition iv) est nécessaire, on donnera un contre exemple.

Soit (A, T_A) une algèbre différentielle; soit B une A-algèbre différentielle galoisienne; on suppose que $k = C(A)$ est algébriquement clôs, A noethérien et B intègre.

Proposition 1.1.

(1) *$C(B \otimes_A B)$ est une k-bigèbre munie d'une involution: autrement dit $C(B \otimes_A B)$ est l'anneau d'un groupe algébrique affine G défini sur k.*

(2) *$C(B \otimes_A B)$ est un comodule pour la coaction $\mu : B \to B \otimes_k C(B \otimes_A B)$ définie par $\mu(f) = \varphi^{-1}(1 \otimes f)$ où φ est l'isomorphisme de trivialisation $B \otimes_k C(B \otimes_A B) \to B \otimes_A B$.*

(3) *la représentation de G dans B définie par μ est un isomorphisme de G sur* $\mathrm{Gal}(B/A)$.

Remarque 1.2. l'homomorphisme canonique $A \to B$ est injectif puisque (A, T_A) est simple.

Soient K le corps de fractions de A et $B' = B \otimes_A K$; on va montrer que B' est galoisien sur K; ceci permettra d'utiliser dans l'étude de B les propriétés de B' établies au chapitre III.

Lemme 1.3. *Soient E une A algèbre différentielle et S une partie multiplicative de A; si E est un anneau réduit alors l'homomorphisme canonique $E \to ES^{-1}$ est injectif.*

Lemme 1.4.

(1) *B' est galoisien sur K*

(2) $\mathrm{Gal}(B'/K) = \mathrm{Gal}(B/A)$.

Preuve. – $C(B') = k$: soit $f \in C(B')$; il existe $a \in A$, $a \neq 0$, $b \in B$ tels que $af = b$; Soit $D \in \mathcal{D}_A$ tel que $Da = 1$; on a alors $D(af) = (Da)f = f$ et $f = Db \in B$ autrement dit $f \in C(B) = k$.

– l'homomorphisme canonique $\varphi' : B' \otimes_k C(B' \otimes_K B') \to B' \otimes_K B'$ est un isomorphisme.

Il résulte du Lemme 1.3 que l'homomorphisme canonique $j : B \otimes_A B \to B' \otimes_K B'$ est injectif ; il induit donc une injection $C(j) : C(B \otimes_A B) \to C(B' \otimes_K B')$; Notons i l'injection $B \to B'$; du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_k C(B \otimes_A B) & \xrightarrow{\varphi} & B \otimes_A B \\ {\scriptstyle i\otimes C(j)}\big\downarrow & & {\scriptstyle j}\big\downarrow \\ B' \otimes_k C(B' \otimes_K B') & \xrightarrow{\varphi'} & B' \otimes_K B' \end{array}$$

on déduit à la fois que $C(j)$ et φ' sont des isomorphismes.

– $C(j)$ est par définition compatible avec les structures de bigèbres sur $C(B \otimes_A B)$ et $C(B' \otimes_K B')$; on a donc $\mathrm{Gal}(B'/K) = G = \mathrm{Gal}(B/A)$. □

Proposition 1.5. *B est une algèbre différentielle simple.*

Preuve. Soit I un idéal différentiel de B; supposons $I \neq B$ et prouvons $I = 0$; Comme (A, T_A) est simple on a $I \cap A = 0$. Soit I' l'idéal de B' engendré par I; il est clair que I' est différentiel; il est donc trivial (B' étant simple); montrons $I' = 0$; en effet si $I' \neq 0$ on a alors $I' = B'$ et il existe une famille finie (f_i) (resp. (λ_i)) d'éléments dans B (resp. I) tels que $\Sigma_i \lambda_i f_i \in I \cap A$ et $\Sigma_i \lambda_i f_i \neq 0$ ce qui est contradictoire. On a donc $I' = 0$ et par suite $I = 0$. □

On donne l'expression de la dualité de Spencer dans le cas d'une extension galoisienne d'algèbres différentielles.

Définition 1.6. On dit qu'un élément $f \in B$ est de Picard Vessiot (ou P.V.) sur A si $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} f$ est un idéal de Picard-Vessiot de $\mathcal{D}_A$ autrement dit si $\mathcal{D}_A/I_f$ est un A-module de présentation; c'est alors un A-module projectif de rang fini (A étant supposé noethérien).

Soit $PV(B/A)$ l'ensemble des éléments de P.V de B sur A; c'est un sous anneau différentiel de B stable sous l'action de G.

Proposition 1.7.

(1) *Soit S un sous k-espace vectoriel de $PV(B/A)$ de dimension finie stable sous G alors $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$ est un idéal de P.V de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans B et $S = \mathrm{Sol}(I; B)$.*

(2) *Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans B, alors $S = \mathrm{Sol}(I; B)$ est un sous k-espace vectoriel de $PV(B/A)$ de dimension finie stable sous G et $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$.*

Preuve. 1) Soit S un sous k-espace vectoriel de $PV(B/A)$ de dimension finie stable sous G alors $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$ est un idéal de P.V de $\mathcal{D}_A$: en effet si

$f_1, \cdots, f_n$ est une base de S sur k, $I_{f_i} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} f_i$, $1 \leq i \leq n$ on a $I = \cap_i I_{f_i}$; comme les I_{f_i} sont P.V. la suite exacte canonique $0 \to \mathcal{D}_A/I \to \oplus_i \mathcal{D}_A/I_{f_i}$ montre que $\mathcal{D}_A/I$ est un A module de type fini (A étant noethérien); c'est donc un A module projectif de rang fini.

Soient $J = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_B} S$ et $I' = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$; J est un idéal de P.V de $\mathcal{D}_B$ complètement résoluble (Prop. I.7.8) et I' est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B' et tel que $I' = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_K} S$ (Prop. III.1.18).

D'autrepart I' est l'image de $K \otimes_A I$ par l'image canonique de $K \otimes_A \mathcal{D}_A/I$ par l'isomorphisme canonique $K \otimes_A \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_K$ ce qui implique $\mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I = \dim_K \mathcal{D}_K/I' = \dim_k S$.

Notons J_0 l'image de l'homomorphisme composé $B \otimes_A I \to B \otimes_A \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_B$. J_0 n'est autre que l'idéal de $\mathcal{D}_B$ engendré par I i.e. $J_0 = BI$; il est clair que J_0 est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_B$ tel que $\mathrm{rg}_B \mathcal{D}_B/J_0 = \mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I$. Comme $J_0 \subset J$ on déduit de la suite exacte canonique $0 \to J/J_0 \to \mathcal{D}_B/J_0 \to \mathcal{D}_B/J \to 0$ que J/J_0 est un B module projectif de rang $\mathrm{rg}_B \mathcal{D}_B/J - \mathrm{rg}\, \mathcal{D}_B/J_0 = 0$ autrement dit $J = J_0$; on obtient ainsi $\mathrm{Sol}(I;B) = \mathrm{Sol}(J;B) = S$ et $\mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I = \dim_k S$.

2) Soit I un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans B; $S = \mathrm{Sol}(I;B)$ est alors un sous k -espace vectoriel de B de dimension finie (Prop. I.7.6); d'autrepart KI est un idéal de P.V de $\mathcal{D}_K$ complètement résoluble dans B'; on en déduit que $S' = \mathrm{Sol}(I;B)$ et un sous k-espace vectoriel de B' de dimension finie stable sous G (Prop. III.1.18); on a $S \subset S'$, $I = KI \cap \mathcal{D}_A = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S'$ et $\dim_k S' = \dim_K \mathcal{D}_K/KI = \mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I = \dim_k S$ ce qui implique $S = S'$.

Reste à prouver $S \subset PV(B/A)$: en effet si $f \in S$ alors $I \in I_f$ $(= \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} f)$ et la surjection canonique $\mathcal{D}_A/I \to \mathcal{D}_A/I_f$ implique que $\mathcal{D}_A/I_f$ est un A module de type fini. $\square$

Corollaire 1.8. *L'application $S \mapsto \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$ définit une bijection entre l'ensemble des sous k-espaces vectoriels de $PV(B/K)$ de dimension finie stables sous G et l'ensemble des idéaux de P.V. de $\mathcal{D}_K$ complètement résolubles dans B.*

La proposition suivante donne une condition pour que A soit l'algèbre des invariants de B sous l'action de G.

Proposition 1.9. *Si $B = PV(B/A)$ alors $B^G = A$.*

Preuve. On sait que ${B'}^G = K$ on a par conséquent $B^G = B \cap K$; D'autrepart si P est un idéal maximal de A, on a $(B \otimes_A A_P)^G = B^G \otimes_A A_P$ et $PV(B \otimes_A A_P/A_P) = PV(B/A) \otimes_A A_P$. Ainsi quitte à remplacer A par A_P on peut supposer que A est local; Supposons donc $B = PV(B/A)$ et soit $f \in B^G$ alors $f \in K$ et $\dim_k \mathcal{E}_k(f) = 1$, ($\mathcal{E}_k(f)$ étant le sous k-espace vectoriel de B

engendré par l'orbite de f sous G); il résulte de la Prop. 1.7 que $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} f$ est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans B et $\mathcal{E}_k(f) = \mathrm{Sol}(I_f; B)$; Comme $\mathcal{D}_A/I_f \simeq \mathcal{D}_A f$, $\mathcal{D}_A f$ est un A-module libre de rang 1. Soit e une base de $\mathcal{D}_A f$, on a $e \in K$ et il existe donc $a_0 \in A$ tel que $a_0 e \in I$, on va prouver que I est différentiel, on en déduira $I = A$ autrement dit $e \in A$ et par suite $f \in A$; soit donc $a \in A$, on a pour tout $\partial \in T_A$, $\partial e = a(\partial)e$ où $a(\partial) \in A$ et $(\partial a)e = \partial(ae) - a(\partial)ae \in A$ ce qui montre $\partial a \in I$ d'où le lemme. □

Proposition 1.10. *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées*

(i) *A est local*

(ii) *$B = PV(B/A)$*

alors B est de type Joyal trivialisant un $\mathcal{D}_A$ module qui est un A module libre de rang fini.

Lemme 1.11. *Soit J un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_B$ complètement résoluble ; soit $f_1, \cdots, f_n$ une base de $S = \mathrm{Sol}(J; B)$ alors $(D_j f_i)$ est une matrice inversible dans B.*

Preuve de la Proposition 1.10. Soit S un sous k-espace vectoriel de $B = PV(B/A)$ de dimension finie stable sous G et qui engendre la A-algèbre B; $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} S$ est alors un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans B et $S = \mathrm{Sol}(I; B)$ (Prop. 1.7); Soient $f_1, \cdots, f_n$ une base de S et $D_1, \cdots, D_n \in \mathcal{D}_A$ tels que les classes $\bar{D}_j$ modulo I forment une base de $\mathcal{D}_A/I$, on déduit du lemme précédent que $\det D_j f_i$ est inversible dans B, on a donc $B = A[D_j f_i, 1/\det D_j f_i]$ et B trivialise $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}_A/I; A)$. □

Remarque 1.12. Dans proposition précédente la condition $B = PV(B/A)$ est nécessaire; en effet soit A un anneau local régulier de la forme R_P où R est une C algèbre de type fini et P un idéal premier de R; soit $T_A = \mathrm{Der}(A, A)$, alors (A, T_A) est une algèbre différentielle simple.

Soient B une A algèbre différentielle de type Joyal et $G = \mathrm{Gal}(B/A)$; on considère un élément f dans A non inversible , alors $B_f = B[1/f]$ est de type Joyal sur $A_f = A[1/f]$ de groupe G de sorte que $B_f = PV(B_f/A_f)$ et $B_f^G = A_f$ (prop. 1.9). D'autrepart B_f est galoisienne sur A de groupe G et $B_f^G \neq A$ puisque $A_f \neq A$. Ceci implique $B_f \neq PV(B_f/A)$. (Prop. 1.9.)

Proposition 1.13. *Soit L le corps de fractions de B. Supposons $B = PV(B/A)$ alors*

(1) *Pour tout $f \in B, I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} f$ est un idéal de P.V. de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans B et $\mathcal{E}_k(f) = \mathrm{Sol}(I_f; B)$*

(2) *$B = PV(L/A)$.*

Preuve. La première assertion est une simple application de la Proposition I.7.2), à $S = \mathcal{E}_k(f)$. Quant à la seconde c'est une conséquence du lemme suivant. $\square$

Lemme 1.14. *$PV(L/A) \subset B$.*

En effet soit $f \in PV(L/A)$ alors $f \in PV(L/K)$ autrement dit B', il existe donc $a_0 \in A$, $a_0 \neq 0$, tel que $a_0 f \in B$. Soient $D_1, \cdots, D_n \in \mathcal{D}_A$ tels que $D_1 f, \cdots, D_n f$ engendrent le A module $\mathcal{D}_A f$. Soit ℓ un entier qui vérifie $a_0^\ell D_i f \in B$ pour tout i, soit I l'idéal de A formé des a tels que $aDf \in B$ pour tout $D \in \mathcal{D}_A$. On a $a_0^\ell \in I$, on va prouver que I est différentiel on en déduira $I = A$ c'est-à-dire $Df \in B$ pour tout $D \in \mathcal{D}_A$ et en particulier $f \in B$. Soient donc $a \in I$ et $\partial \in T_A$. On a pour tout $D \in \mathcal{D}_A : (\partial a)Df = \partial(aDf) - a(\partial D)f \in B$ autrement dit $\partial a \in I$. Ceci achève la démonstration.

§2. Extensions P.V. normales.

Définition 2.1. Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple: une A algèbre différentielle B est dite P.V. normale si elle vérifie des conditions suivantes:

(i) B est une A algèbre de type fini.

(ii) $C(B) = C(A)$

(iii) B est intègre et $PV(L/A) = B$ où L est le corps de fractions de B

(iv) Pour tout $f \in B$, $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} f$ est un idéal de PV de $\mathcal{D}_A$ complètement résoluble dans L.

Remarque. Soit B une algèbre galoisienne sur une algèbre différentielle simple (A, T_A); on a vu que sous les conditions

– $C(A)$ algébriquement clôs
– A noethérien
– $B = PV(B/A)$

B est PV normale, (Proposition 1.13); Réciproquement:

Proposition 2.2. *Soit (A, T_A) une algèbre différentielle simple, soit B une algèbre P.V. normale sur (A, T_A); On suppose que $C(A)$ est algébriquement clôs et A noethérien alors B est galoisienne et $B = PV(B/A)$.*

Le lemme suivant montre que l'on peut se réduire au cas où A est local.

Lemme 2.3. *Soient (A, T_A) une algèbre différentielle simple et B une algèbre P.V. normale sur (A, T_A). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A. Alors:*

(1) *$B_\mathfrak{p} = B \otimes_A A_\mathfrak{p}$ est P.V. normale sur $A_\mathfrak{p}$*

(2) $\mathrm{Gal}(B_{\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Gal}(B/A)$.

Preuve de la Proposition 2.2. Supposons donc A local, et considérons une famille finie $(h\alpha)$ qui engendre la A-algèbre B. Soient L le corps de fractions de B, $I_\alpha = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_A} h_\alpha$, $S_\alpha = \mathrm{Sol}(I_\alpha, L)$, $I = \cap_\alpha I_\alpha$ et $S = \Sigma_\alpha S_\alpha$; les I_α sont par hypothèse de P.V. complètement résolubles dans L et $S = \mathrm{Sol}(I; L)$.

De la suite exacte canonique $0 \to \mathcal{D}_A/I \to \oplus_\alpha \mathcal{D}_A/I_\alpha$ on déduit que $\mathcal{D}_A/I$ est un A module de type fini, il est alors libre (A étant supposé noethérien et local). D'autrepart comme L est plat sur A on a la suite exacte $0 \to L \otimes_A \mathcal{D}_A/I \to \oplus_\alpha L \otimes_A \mathcal{D}_A/I_\alpha$ de sorte que $L \otimes_A \mathcal{D}_A/I$ est un sous module du $\mathcal{D}_L$ module trivial $\oplus_\alpha L \otimes_A \mathcal{D}_A/I_\alpha$; c'est donc un $\mathcal{D}_L$ module trivial autrement dit I est complètement résoluble dans L ou encore $\dim_{C(A)} S = \mathrm{rg}_A \mathcal{D}_A/I$.

Soient $f_1, \cdots, f_n$ une base de S sur $k = C(A)$ et $D_1, \cdots, D_n \in \mathcal{D}_A$ tels que les classes $\bar{D}_j$ modulo I forment une base de $\mathcal{D}_A/I$ sur A. Soient $Y_{ij} = D_j f_i$, $Y = \det Y_{ij}$ et $B_1 = A[Y_{ij}, 1/Y]$ alors:

– B est un sous anneau différentiel de L et $B_1 = PV(B_1/A)$. En effet on a pour tout $\partial \in T_A$, $\partial Y_{ij} = \Sigma a_{rj}(\partial) Y_{ir}$ où $a_{rj}(\partial) \in A$

– on va prouver que B_1 est galoisienne on en déduira $B_1 = PV(L/A)$ autrement dit B (Prop. 1.13):

Soient K le corps de fractions de A, φ et φ' les homomorphismes canoniques $B_1 \otimes_k C(B_1 \otimes_A B_1) \to B_1 \otimes_A B_1$, $L \otimes_k C(L \otimes_K L) \to L \otimes_K L$. Alors φ est injectif puisque φ' est injectif et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_1 \otimes_k C(B_1 \otimes_A B_1) & \xrightarrow{\varphi} & B_1 \otimes_A B_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{can}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} \\ L \otimes_k C(L \otimes_K L) & \xrightarrow{\varphi'} & L \otimes_K L \end{array}$$

D'autrepart si Y est la matrice (Y_{ij}) et $Z = Y^{-1}$ on a pour tout $\partial \in T_A$ $\partial(Z \otimes Y) = \partial Z \otimes Y + Z \otimes \partial Y = -A(\partial) Y \otimes Z + Z \otimes Y A(\partial) = 0$ où $A(\partial) = (a_{ij}(\partial))$ de sorte que $C = Z \otimes Y$ est à coefficients dans $C(B_1 \otimes_A B_1)$ et $1 \otimes Y = (Y \otimes 1) C$. Ceci montre que φ est surjectif. D'où la proposition. $\square$

Réferences

[1] D. Bernard, *Sur la géométrie différentielle des G-structures*, Ann. de l'Institut Fourier, **10** (1960), 151-270.

[2] A. Bialynick Birula, *On the Galois Theory of fields with operators*, Amer. J. of Maths, **84** (1962), 89-109.

[3] J. Bjork, *Rings of differential operators*, North Holland Amsterdam, 1979.

[4] R. et A. Douady, *Algèbre et théorie galoisiennes*, Cedic/F. Nathan.

[5] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, 1957.

[6] E.R. Kolchin, *Galois Theory of differential fields*, Amer J. of Maths, **75** (1958), 753-824.

[7] ______, *On the Galois Theory of differential fields*, Amer. J. of Maths, **77** (1955), 868-894.

[8] E.R. Kolchin and S. Lang, *Algebraic groups and the Galois theory of differential fields*, Amer. J. of maths, **80** (1958), 103-110.

[9] G.S. Rinehart, *Differential forms on general commutative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 195-200.

Received January 4, 1995 and revised August 3, 1995

University de'Angers
2, Boulevard Lavoisier
49045 Angers Cedex 01
France
E-mail address: fahim@tonton.univ-angers.fr