

*Pacific
Journal of
Mathematics*

**CAPITULATION DES 2-CLASSES D'IDÉAUX DE CERTAINS
CORPS BIQUADRATIQUES DONT LE CORPS DE GENRES
DIFFÈRE DU 2-CORPS DE CLASSES DE HILBERT**

ABDELMALEK AZIZI ET ALI MOUHI

CAPITULATION DES 2-CLASSES D'IDÉAUX DE CERTAINS CORPS BIQUADRATIQUES DONT LE CORPS DE GENRES DIFFÈRE DU 2-CORPS DE CLASSES DE HILBERT

ABDELMALEK AZIZI ET ALI MOUHIB

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, where d_1 and d_2 are positive square-free integers such that $(d_1, d_2) = 1$. Let $K_2^{(1)}$ be the Hilbert 2-class field of K . Let $K_2^{(2)}$ be the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$ and $K^{(*)}$ the genus field of K . We suppose that $K_2^{(1)} \neq K^{(*)}$ and $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We study the capitulation problem of the 2-ideal classes of K in the sub-extensions of $K_2^{(1)}/K$ and we determine the structure of $\text{Gal}(K_2^{(2)})$.

1. Introduction

Soient K un corps de nombres, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K , $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, G le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ et $K^{(*)}$ le corps de genres de K , c'est-à-dire la plus grande extension de K de la forme KL non ramifiée pour tous les premiers finis et infinis et telle que L/\mathbb{Q} est abélienne.

On suppose que $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; alors $K_2^{(1)}$ contient trois sous-extensions quadratiques sur K qu'on désigne par K_1 , K_2 et K_3 . Kisilevsky [1976] a lié le problème de capitulation dans les extensions K_1/K , K_2/K et K_3/K à la structure du groupe G et aussi à la structure de la 2-partie du groupe de classes de ces trois extensions. Plus précisément, Olga Taussky a démontré que le groupe G est abélien, diédral, quaternionique ou semi-diédral (voir par exemple [Gorenstein 1980]). Par conséquent, il existe $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que le 2-groupe de classes de K_{i_0} est cyclique et on a deux possibilités:

- 1) Les 2-groupes de classes des extensions K_1 , K_2 et K_3 sont cycliques et dans ce cas G est abélien ou quaternionique d'ordre 8. Plus précisément:
 - G est abélien si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ toutes les 2-classes de K capitulent dans K_i .
 - G est quaternionique d'ordre 8 si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_i .
- 2) Le 2-groupe de classes de K_{i_0} est cyclique et pour $i \neq i_0$, le 2-groupe de classes de K_i est de type $(2, 2)$ et dans ce cas:

MSC2000: 11R27, 11R37.

Mots-clés: groupe de classes, capitulation, corps de classes de Hilbert.

- Pour $i \neq i_0$, il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_i .
- G est diédral si et seulement si toutes les 2-classes de K capitulent dans K_{i_0} .
- G est quaternionique d'ordre supérieur ou égal à 2^4 si et seulement si il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_{i_0} et K_{i_0} est de type (A). (Pour la définition du type (A) et du type (B), voir par exemple [Kisilevsky 1976].)
- G est semi-diédral d'ordre supérieur ou égal à 2^4 si et seulement si il existe une seule 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_{i_0} et K_{i_0} est de type (B).

Ces résultats nous permettent de réduire l'étude du problème de capitulation dans les extensions intermédiaires de $K_2^{(1)}/K$ à une étude dans K_{i_0} .

Si K est un corps biquadratique et $K_2^{(1)} \neq K^{(*)}$, alors d'après la théorie des groupes $K^{(*)} \neq K$ (car sinon $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K)$ serait cyclique) et par suite $K^{(*)}$ est l'un des corps K_1 , K_2 ou K_3 .

Dans [Azizi et Mouhib \geq 2008], on a démontré que si $K_2^{(1)}/K$ a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour Galois groupe et $[K_2^{(1)} : K^{(*)}] = 2$, alors:

- 1) Le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique et $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$.
- 2) Le groupe G ne peut jamais être semi-diédral.

Dans ce travail, on suppose que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $K_2^{(1)} \neq K^{(*)}$. Alors on étudie le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K en distinguant deux cas:

- 1) L'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée.
- 2) L'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée.

Avant d'étudier ces cas, on aura besoin de certains résultats sur le rang du 2-groupe de classes des corps biquadratiques réels contenant un corps quadratique de nombre de classes impair. Dans toute la suite, on désigne par $h(n)$ la 2-partie du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ et par $h(M)$ la 2-partie du nombre de classes d'un corps quelconque M .

2. Rang du 2-groupe de classes de certains corps biquadratiques réels

Dans ce paragraphe on suppose que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où m et d sont deux entiers naturels sans facteurs carrés et le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ est impair. On désigne par ε_m l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, E le groupe des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, r le nombre des premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans K , \mathcal{N} l'application norme par rapport à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, e l'entier naturel défini par $2^e = [E : E \cap \mathcal{N}(K)^*]$ et par $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K . Dans [Azizi et Mouhib 2001], on a

montré que le rang de $C_{2,K}$ est $r - 1 - e$. La détermination de l'entier e revient à chercher quand est-ce que les éléments -1 , ε_m et $-\varepsilon_m$ sont normes ou non dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Ce qui revient à chercher les valeurs du symbole du reste normique $(\frac{-1, d}{\mathfrak{p}})$, $(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathfrak{p}})$ pour tous les premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans K . Ainsi $e \in \{0, 1, 2\}$; plus précisément:

$e = 0$ si et seulement si -1 et ε_m sont des normes dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

$e = 2$ si et seulement si -1 , ε_m et $-\varepsilon_m$ ne sont pas des normes dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. D'autre part, d'après la théorie des genres m est de l'une des formes suivantes:

- 1) m est un premier.
- 2) $m = 2q$ où q est un premier tel que $q \equiv -1 \pmod{4}$.
- 3) $m = q'q''$ où q' et q'' sont deux premiers tels que $q' \equiv q'' \equiv -1 \pmod{4}$.

Théorème 1 [Azizi et Mouhib 2001]. Soient m un premier $\equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. Posons

$$S = \left\{ q_1 \text{ divisant } d \mid \left(\frac{m}{q_1}\right) = 1 \text{ et } q_1 \text{ premier impair de } \mathbb{Q} \right\}.$$

S'il existe un premier q tel que $q \equiv 3 \pmod{4}$ et $q|d$, alors $e = 1$ ou $e = 2$. Plus précisément :

- 1) Si $m \equiv 2$ ou $5 \pmod{8}$, alors $\text{rang}(C_{2,K}) = r - 2$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = 1$ pour tout $q_1 \in S$.
- 2) Si $m \equiv 1 \pmod{8}$, alors $\text{rang}(C_{2,K}) = r - 2$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = 1$ pour tout $q_1 \in S$ et

$$\left[d = 2c \text{ avec } \left(\frac{-1}{c}\right) = 1 \right] \text{ ou bien } d \equiv 1 \pmod{4}.$$

Théorème 2 [Azizi et Mouhib 2001]. Soient m un premier $\equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés, qui n'est pas divisible par les premiers $\equiv -1 \pmod{4}$. Alors $e = 0$ ou $e = 1$; plus précisément :

- 1) Si $m = p \equiv 1 \pmod{4}$, alors $\text{rang}(C_{2,K}) = r - 1$ si et seulement si pour chaque $q|d$ tel que $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ on a $\left(\frac{q}{p}\right)_4 = \left(\frac{p}{q}\right)_4$ et

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} \text{ si } p \equiv 1 \pmod{8} \text{ et } d = 2c.$$

- 2) Si $m = 2$, alors $\text{rang}(C_{2,K}) = r - 1$ si et seulement si pour chaque $q|d$ tel que $q \equiv 1 \pmod{8}$ on a $\left(\frac{2}{q}\right)_4 = (-1)^{(q-1)/8}$.

Dans le cas où $m \in \{q, 2q, q'q''\}$ où q , q' et q'' sont des premiers tels que $q \equiv q' \equiv q'' \equiv -1 \pmod{4}$, on vérifie facilement que l'unité fondamentale ε_m de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ vérifie $\varepsilon_m = a_m u^2$ où $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et $a_m \in \mathbb{N}$ est défini comme suit: $a_m = 2$ si $m = q$ ou $m = 2q$ et $a_m = q'$ ou $a_m = q''$ si $m = q'q''$. Alors en utilisant les propriétés du symbole du reste normique (voir par exemple [Hasse 1930]), on démontre les deux théorèmes suivants:

Théorème 3. Soient q, q' et q'' des premiers tels que $q \equiv q' \equiv q'' \equiv -1 \pmod{4}$, m un entier naturel tel que $m \in \{q, 2q\}$ ou $m = q'q'' \equiv 5 \pmod{8}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. On pose

$$S = \left\{ q_1 \text{ divisant } d \mid \left(\frac{m}{q_1}\right) = 1 \text{ et } q_1 \text{ premier impair de } \mathbb{Q} \right\}.$$

Alors :

$e = 0$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$ pour tout $q_1 \in S$.

$e = 2$ si et seulement si il existe des premiers q_1, q_2, q_3 de S tels que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right) = -1$ et $\left(\frac{-1}{q_3}\right) \neq \left(\frac{a_m}{q_3}\right)$.

Preuve. On suppose que $m \in \{q', 2q'\}$ ou $m = q'q'' \equiv 5 \pmod{8}$. Soit \mathcal{P} un idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ qui se ramifie dans K .

Calculons le symbole du reste normique $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus d'un premier q_1 impair tel que $\left(\frac{m}{q_1}\right) = -1$, alors d'après les propriétés du symbole du reste normique (voir par exemple [Hasse 1930]), on a

$$\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\mathbb{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(-1), d}{q_1}\right) = 1.$$

Si \mathcal{P} est au dessus de q_1 où $q_1 \in S$, alors $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{d, -1}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1}{\mathcal{P}}\right) v_{\mathcal{P}}(d) = \left(\frac{-1}{q_1}\right)$ où $v_{\mathcal{P}}(d)$ désigne la valuation d'indice \mathcal{P} appliquée à l'idéal engendré par (d) dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Si \mathcal{P} est au dessus de 2, alors \mathcal{P} est le seul premier de k qui est au dessus de 2. Ainsi, d'après [Hasse 1930], on a

$$\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\mathbb{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(-1), d}{2}\right) = 1.$$

On en déduit alors que -1 est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ si et seulement si pour tout premier $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = 1$.

Calculons le symbole du reste normique $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right)$. On sait que $\varepsilon_m = a_m u^2$ où $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Ainsi on a $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m, d}{\mathcal{P}}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus de q_1 où q_1 est un premier impair tel que $\left(\frac{m}{q_1}\right) = -1$, on trouve que

$$\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(\varepsilon_m), d}{q_1}\right) = 1.$$

Si \mathcal{P} est au dessus de q_1 où $q_1 \in S$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{d, a_m}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m}{\mathcal{P}}\right) v_{\mathcal{P}}(d) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus de 2, on trouve que $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = 1$. Ainsi ε_m est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ si et seulement si pour tout $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$. Ce qui termine la preuve du théorème. \square

Théorème 4. Soient q' et q'' deux premiers tels que $q' \equiv q'' \equiv -1 \pmod{4}$, m un entier naturel tel que $m = q'q'' \equiv 1 \pmod{8}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. On pose

$$S = \left\{ q_1 \text{ divisant } d \mid \left(\frac{m}{q_1}\right) = 1 \text{ et } q_1 \text{ premier impair de } \mathbb{Q} \right\}.$$

Alors $e = 0$ si et seulement si $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$ pour tout $q_1 \in S$ et

$$d \equiv 1 \pmod{4} \text{ ou } d = 2c \text{ tel que } \left(\frac{-1}{c}\right) = \left(\frac{2}{q'}\right) = 1.$$

$e = 2$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $d \equiv -1 \pmod{4}$ et $\exists q_1 \in S$ tel que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) \neq \left(\frac{a_m}{q_1}\right)$.
- $d \equiv 1 \pmod{4}$ et $\exists q_1, q_2, q_3 \in S$ tels que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{-1}{q_3}\right) \neq \left(\frac{a_m}{q_3}\right)$.
- $d = 2c$ et
 - $\left(\frac{2}{q'}\right) = -\left(\frac{-1}{c}\right) = 1$ et $\exists q_1 \in S$ tel que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) \neq \left(\frac{a_m}{q_1}\right)$ ou
 - $\left(\frac{-1}{c}\right) = -\left(\frac{2}{q'}\right) = 1$ et $\exists q_1 \in S$ tel que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = -1$ ou
 - $\left(\frac{-1}{c}\right) = \left(\frac{2}{q'}\right) = 1$ et $\exists q_1, q_2, q_3 \in S$ tels que $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = \left(\frac{a_m}{q_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{-1}{q_3}\right) \neq \left(\frac{a_m}{q_3}\right)$.

Preuve. On suppose que $m = q'q'' \equiv 1 \pmod{8}$. Soit \mathcal{P} un premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ qui se ramifie dans K . Calculons $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus d'un premier q_1 impair, alors comme dans le [théorème 3](#), on trouve que :

Si $\left(\frac{m}{q_1}\right) = -1$, on a $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = 1$. Si $\left(\frac{m}{q_1}\right) = 1$, on a $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1}{q_1}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus de 2, on raisonne comme suit :

Supposons que $d \equiv 3 \pmod{4}$, alors on a $\left(\frac{-1, q'd}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1, q'}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right)$. Comme $q'd \equiv 1 \pmod{4}$, alors \mathcal{P} ne se ramifie pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{q'd})$; par suite $\left(\frac{-1, q'd}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{q'd}{\mathcal{P}}\right)_{v\mathcal{P}}(-1) = 1$. Ainsi on a $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1, q'}{\mathcal{P}}\right)$. On se ramène à calculer le symbole $\left(\frac{-1, q'}{\mathcal{P}}\right)$. Soient le corps $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{q''})$ et $C_{2,L}$ son 2-groupe de classes. D'après le [théorème 3](#), on a $\text{rang}(C_{2,L}) = 0$, c'est à dire le nombre de classes de L est impair. On a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{q'})$. Si on note par r' le nombre des premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans L et par e' l'entier associé à l'extension $L/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, défini par $2^{e'} = [E : E \cap N(L)^*]$, alors on a $\text{rang}(C_{2,L}) = r' - 1 - e' = 1 - e' = 0$, ainsi $e' = 1$. Par suite -1 ou ε_m n'est pas une norme dans l'extension $L/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. On a

$$\left(\frac{\varepsilon_m, q'}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{q', q'}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1, q'}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{-q', q'}{\mathcal{P}}\right).$$

Or $\left(\frac{-q', q'}{\mathcal{P}}\right) = 1$; alors $\left(\frac{\varepsilon_m, q'}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1, q'}{\mathcal{P}}\right)$. Par suite $\left(\frac{-1, q'}{\mathcal{P}}\right) = -1$, et on a $\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = -1$.

Supposons que $d = 2c$ avec c impair. On a

$$\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{-1, 2}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{-1, c}{\mathcal{P}}\right).$$

On sait que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(\varepsilon_2) = -1$, donc $\left(\frac{-1, 2}{\mathcal{P}}\right) = 1$. Si $c \equiv 3 \pmod{4}$, alors $\left(\frac{-1, c}{\mathcal{P}}\right) = -1$. Si $c \equiv 1 \pmod{4}$, alors $\left(\frac{-1, c}{\mathcal{P}}\right) = 1$. On tire que -1 est norme dans l'extension K/k si et seulement si pour tout premier q_1 de S on a $\left(\frac{-1}{q_1}\right) = 1$ et $[d \equiv 1 \pmod{4} \text{ ou } d = 2c \text{ tel que } \left(\frac{-1}{c}\right) = 1]$.

Calculons $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus d'un premier q_1 tel que $\left(\frac{m}{q_1}\right) = -1$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = 1$. Si \mathcal{P} est au dessus d'un premier q_1 tel que $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{q', d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{a_m}{q_1}\right)$. Si \mathcal{P} est au dessus de 2, on raisonne comme suit.

On suppose que $d \equiv 3 \pmod{4}$; alors on a $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{q', d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{q', -d}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{q', -1}{\mathcal{P}}\right)$. Or $\left(\frac{q', -1}{\mathcal{P}}\right) = -1$ (voir le cas précédent) et $\left(\frac{q', -d}{\mathcal{P}}\right) = 1$ (car $-d \equiv 1 \pmod{4}$), donc $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = -1$. On suppose que $d = 2c$ où c est impair; alors $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m, 2}{\mathcal{P}}\right)\left(\frac{\varepsilon_m, c}{\mathcal{P}}\right)$.

Si $c \equiv 3 \pmod{4}$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m, c}{\mathfrak{p}}\right) = -1$. Si $c \equiv 1 \pmod{4}$, alors $\left(\frac{\varepsilon_m, c}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{c}{\mathfrak{p}}\right)^{v_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_m)} = 1$. On a $\left(\frac{\varepsilon_m, 2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q', 2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2}{q'}\right)$, d'où $\left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{-1}{c}\right)\left(\frac{2}{q'}\right)$. Ainsi ε_m est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ si et seulement si pour tout premier $q_1 \in S$, on a $\left(\frac{a_m}{q_1}\right) = 1$ et $[d \equiv 1 \pmod{4}]$ ou $d = 2c$ tel que $\left(\frac{-1}{c}\right) = \left(\frac{2}{q'}\right)$. Par conséquent, on retrouve le théorème. \square

3. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K où $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée

Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels premiers entre eux et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$. On suppose que l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée, que $[K^{(*)} : K] = 2$ et que $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, on donne une méthode générale qui permet de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur d_1 et d_2 pour que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et on donne un moyen qui permet de chercher la structure du groupe G . On termine par donner une application aux résultats trouvés.

Étude des conditions pour lesquels $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. On note par $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ le 2-groupe de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$.

Théorème 5. *On garde les notations précédentes et on suppose que l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est non ramifiée, $[K^{(*)} : K] = 2$ et $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors il existe un corps biquadratique L dont le 2-groupe de classes est cyclique tel que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$.

Preuve. D'après [Azizi et Mouhib \geq 2008], le groupe $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ est de type $(2, 2^2)$ ou bien de type $(2, 2)$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ est de type $(2, 2^2)$, alors $K_2^{(1)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$. Comme K est une extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ dont la 2-partie du nombre de classes est égale à 4, alors d'après [Benjamin et al. 1998], la suite des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ s'arrête en $K_2^{(1)}$. Par conséquent on a $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})}$ est de type $(2, 2)$, alors $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$. D'après la théorie des groupes, il existe une sous-extension propre de $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ notée L telle que le 2-groupe de classes de L est cyclique. D'autre part et comme $K^{(*)}/L$ est une extension non ramifiée, L et $K^{(*)}$ ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Par suite $h(K_2^{(1)}) = \frac{1}{2}h(K^{(*)}) = \frac{1}{4}h(L)$. On en déduit que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$, ce qui achève la preuve. \square

Le [théorème 1](#) nous permet de transformer l'étude des conditions pour lesquels $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ à une étude de la 2-partie du nombre de classes du corps L . Un tel corps est bien un corps biquadratique de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{d'}, \sqrt{d''})$ où d' et d'' sont deux entiers premiers entre eux divisant $d_1 d_2$. Or $K^{(*)}/L$ est bien une extension de degré 2 et $K^{(*)}$ est le corps de genres de L ; par suite et à l'aide de la théorie des

genres; l'un des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{d''})$ est de nombre de classes impair. Donc L contient un corps quadratique de nombre de classes impair et par suite L peut être déterminé à partir des théorèmes 1, 2, 3 et 4. Ainsi, à l'aide des résultats connus sur la 2-partie du nombre de classes des corps quadratiques (voir par exemple [Kaplan 1976; Kučera 1995; Benjamin et Snyder 1995]) et en utilisant la formule de Wada sur le nombre de classes d'un composé de corps quadratiques (voir [Wada 1966]), on peut déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur d_1 et d_2 pour lesquels $8|h(L)$ et par suite $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$.

Structure du groupe $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. On sait que $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Par conséquent G est abélien.

Si $C_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$. De plus $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$. On se ramène ainsi à des questions de capitulation sur des corps quadratiques. En utilisant [Benjamin et Snyder 1995] et [Couture et Derhem 1992], on trouve la structure du groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2}))$. Comme G est un sous-groupe d'indice 2 dans $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2}))$, la structure du groupe G est bien déterminée.

Dans la suite on va donner une application à cette étude pour illustrer la méthode qu'on vient de décrire.

Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où $d_1 = p$ et $d_2 = p'q_1q_2$. Les entiers naturels d_1 et d_2 sont premiers entre eux et on a $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{q_1q_2})$ et par suite $[K^{(*)} : K] = 2$.

Théorème 6 [Azizi et Mouhib 2001]. Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'q_1q_2})$. Alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si l'un des cas suivants est vérifié :

- 1) $\left(\frac{p}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{q_1}\right) = -\left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ et $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$.
- 2) $-\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ et $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$.
- 3) $-\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ et $\left(\frac{p'}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$.
- 4) $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_1}\right)$.
- 5) $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{q_1}\right) \neq \left(\frac{p'}{q_1}\right)$ et $\left[\left(\frac{p'}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1\right]$.

Dans ce qui suit, on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K , en distinguant les cinq cas du théorème 6.

Étude des conditions pour lesquels $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Nous aurons besoin de quelques résultats sur les unités qu'on va démontrer dans ce qui suit:

Soient $L = \mathbb{Q}(\sqrt{A}, \sqrt{B})$ un corps biquadratique réel et Q_L l'indice du groupe des unités de L modulo son sous-groupe engendré par les unités des trois sous-corps quadratiques de L . On suppose que $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est engendré par σ et τ et que $\mathbb{Q}(\sqrt{A}) = \text{inv}(\sigma)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{B}) = \text{inv}(\tau)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{AB}) = \text{inv}(\sigma\tau)$. D'après une idée qui revient à Hergoltz, on sait que le carré d'une unité ε de L vérifie

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon\varepsilon^\sigma)(\varepsilon\varepsilon^\tau)(\varepsilon^\sigma\varepsilon^\tau)^{-1},$$

c'est-à-dire il est un produit d'unités dans $\mathbb{Q}(\sqrt{A})$, dans $\mathbb{Q}(\sqrt{B})$ et dans $\mathbb{Q}(\sqrt{AB})$ (voire $\varepsilon\varepsilon^\sigma$, $\varepsilon\varepsilon^\tau$, $\varepsilon^\sigma\varepsilon^\tau$ respectivement). Ainsi, l'indice Q_L est égal à 1, 2, 4 ou 8.

T. Kubota [1956] a démontré que $Q_L \in \{1, 2, 4\}$. S'il existe exactement r relations quadratiques et indépendantes entre les unités ε_1 , ε_2 et ε_3 des trois sous-corps quadratiques de L , alors $Q_L = 2^r$.

Pour m entier naturel, on désigne dans tout ce qui suit par $e(m)$ la norme par rapport à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$ de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Lemme 1. Soient q_1, q_2, p, p' des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$. On suppose que $e(pp') = 1$; alors $Q_L = 2$.

Preuve. Soit ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$, ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ et ε_3 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. Comme $e(q_1q_2) = e(pp') = e(pp'q_1q_2) = 1$, on a, d'après [Cohn 1978, théorème 11.23, p. 106], les trois relations suivantes:

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}, \quad \text{avec } y_1, y_2 \in \mathbb{Q};$$

$$\sqrt{\varepsilon_2} = t_1\sqrt{p} + t_2\sqrt{p'}, \quad \text{avec } t_1, t_2 \in \mathbb{Q};$$

$$\sqrt{\varepsilon_3} = v_1\sqrt{m} + v_2\sqrt{n}, \quad \text{avec } v_1, v_2 \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}, mn = pp'q_1q_2.$$

Donc, il existe trois entiers naturels uniques i, j, k tels que $\{i, j, k\} \subset \{0, 1\}$, $i + j + k \neq 0$ et $\sqrt{\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varepsilon_3^k} \in K$. Par conséquent $Q_L = 2$. \square

Lemme 2. Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$. On suppose que $e(pp') = -1$,

$$\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p}{q_1}\right) = -\left(\frac{p}{q_1}\right) = -\left(\frac{p}{q_2}\right) = 1.$$

Alors $Q_L = 1$.

Preuve. Comme $e(pp') = -1$, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ n'est pas un carré dans L . Soient ε_1 et ε_2 les unités fondamentales respectives des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. On sait d'après la preuve du lemme 1 qu'il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$(3-1) \quad \sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}.$$

Soit w un entier naturel sans facteurs carrés tel que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})/\mathbb{Q}}(1 + \varepsilon_2) = wx^2$ où x est un entier naturel. D'après [Benjamin et Snyder 1995], on a $w = p'q_1q_2$; par suite il existe deux entiers naturels b et c tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{c}{2}\sqrt{p'q_1q_2} + \frac{b}{2}\sqrt{p}.$$

De cela et de (3–1) on tire que les unités ε_1 , ε_2 et $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ne sont pas des carrés dans L . Par conséquent $Q_L = 1$. \square

Lemme 3. Soient p , p' , q_1 , q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$. On suppose que $e(pp') = -1$, $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, $\left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1$, et $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_1}\right)$; alors $Q_L = 2$.

Preuve. Soient ε_1 et ε_2 les unités fondamentales respectives des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. D'après la preuve du lemme 1, il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}.$$

Soit w l'entier naturel défini dans la preuve du lemme 2. D'après [Benjamin et Snyder 1995], on a $w = q_1$ ou $w = q_2$; par suite il existe deux entiers naturels c et d tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{c}{2}\sqrt{w} + \frac{d}{2}\sqrt{\frac{pp'q_1q_2}{w}}.$$

Par suite, on a $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in L$, d'où $Q_L = 2$. \square

Lemme 4. Soient q , p deux premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$. Alors :

- 1) $e(2p) = 1 \implies Q_L = 4$.
- 2) $e(2p) = -1 \implies Q_L = 2$.

Preuve. 1) Soient ε_1 , ε_2 et ε_3 les unités fondamentales de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ respectivement. On vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels a_1 et a_2 tels que

$$(3-2) \quad \sqrt{\varepsilon_1} = a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2q}.$$

Comme $e(2p) = 1$, il existe deux nombres rationnels b_1 et b_2 tels que

$$(3-3) \quad \sqrt{\varepsilon_2} = b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{p}.$$

D'autre part il existe deux nombres rationnels c_1 et c_2 tels que

$$(3-4) \quad \sqrt{\varepsilon_3} = c_1\sqrt{m} + c_2\sqrt{n}$$

où m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $mn = 2pq$.

De (3–2) et (3–3), on déduit que $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in L$ et de (3–2) et (3–4), on déduit que $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou bien $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \in L$. Par conséquent, on a $Q_L = 4$.

2) On suppose que $e(2p) = -1$. D'après 1), on a $\sqrt{\varepsilon_1} \notin L$ et $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou bien $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \in L$. Par suite on a $Q_L = 2$. \square

Lemme 5. Soient p, q, q' des premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. On suppose que $\left(\frac{q'}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$; alors $Q_K = 2$.

Preuve. Soit ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Comme $e(q) = 1$, il existe deux nombres rationnels t_1 et t_2 tels que

$$(3-5) \quad \sqrt{\varepsilon_1} = t_1\sqrt{2} + t_2\sqrt{2q}.$$

Soit ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq'})$. Comme $e(pq') = 1$, il existe deux nombres rationnels v_1 et v_2 tels que

$$(3-6) \quad \sqrt{\varepsilon_2} = v_1\sqrt{m} + v_2\sqrt{n},$$

et m, n deux entiers naturels tels que $mn \in \{pq', 4pq'\}$.

Soit $\varepsilon_3 = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{pqq'}$ où x et y sont des entiers, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$. On a $e(pqq') = 1$; alors $(x-2)(x+2) = pqq'y^2$. Comme $\left(\frac{q'}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\begin{cases} x \pm 2 = q'y_1^2 & \text{où } 2y_1y_2 = y, \\ x \mp 2 = pqy_2^2. \end{cases}$$

En posant $W = \sqrt{q'}y_1 + \sqrt{pq}y_2$, on trouve que $W^2 = 4\varepsilon_3$. Ainsi

$$(3-7) \quad \sqrt{\varepsilon_3} = \frac{y_1}{2}\sqrt{q'} + \frac{y_2}{2}\sqrt{pq}.$$

De (3-5), (3-6) et (3-7), on a $\sqrt{\varepsilon_1} \notin K$, $\sqrt{\varepsilon_3} \notin K$. De plus, il existe trois entiers naturels i, j, k uniques tels que $\{i, j, k\} \subset \{0, 1\}$, $i + j + k \neq 0$ et $\sqrt{\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varepsilon_3^k} \in K$. Ainsi, on a $Q_K = 2$. \square

Théorème 7. Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'q_1q_2})$.

- On suppose que K vérifie les conditions des cas 1 ou 5 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{p'}{p}\right)_4 = \left(\frac{p}{p'}\right)_4 = 1$.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 2 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{pq_1q_2})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(pq_1q_2)$ ou $[Q_L = 2$ et $h(pq_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}]$.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 3 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{pq_1q_2})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(pq_1q_2)$ ou $[Q_L = 2$ et $h(pq_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}]$.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 4 du théorème 6; alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$.

Preuve. On note par ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et par ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})$. Soit w un entier naturel sans facteurs carrés tel que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2})/\mathbb{Q}}(1 + \varepsilon_2) = wx^2$ où x est un entier naturel.

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 1 du [théorème 6](#). Donc

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{q_1}\right) = -\left(\frac{p}{q_2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1.$$

D'après le [théorème 4](#), le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ est cyclique. On sait d'après le [théorème 5](#) que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$. D'après [[Kaplan 1976](#)], $h(pp'q_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}$ et $e(pp'q_1q_2) = 1$. Si $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 \neq \left(\frac{p'}{p}\right)_4$, alors, d'après [[Kučera 1995](#)], on a $h(pp') \equiv 2 \pmod{4}$ et $e(pp') = 1$. D'autre part, d'après le [lemme 1](#), on a $Q_L = 2$, par suite, d'après [[Wada 1966](#)], on a

$$h(L) = \frac{Q_L h(q_1q_2) h(pp') h(pp'q_1q_2)}{4} \equiv 4 \pmod{8}.$$

Ainsi on a $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = -1$, alors d'après [[Kučera 1995](#)], on a $h(pp') \equiv 4 \pmod{8}$ et $e(pp') = -1$. D'autre part, d'après le [lemme 2](#), on a $Q_L = 1$ et donc $h(L) \equiv 4 \pmod{8}$. Si $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = 1$, alors si $e(pp') = -1$, on a $8|h(pp')$, d'après [[Kučera 1995](#)]; par suite $8|h(L)$. Ainsi, on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Si $e(pp') = 1$, alors, d'après le [lemme 1](#), on a $Q_L = 2$; par suite $8|h(L)$. Donc

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \iff \left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = 1.$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 2 du [théorème 6](#). Donc

$$-\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1.$$

D'après le [théorème 1](#), le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{pq_1q_2})$ est cyclique. Or, d'après [[Kaplan 1976](#)], on a $h(pp'q_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}$ et $4|h(pq_1q_2)$, donc on a

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \iff 8|h(pq_1q_2) \text{ ou bien } [h(pq_1q_2) \equiv 4 \pmod{8} \text{ et } Q_L = 2].$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 3 du [théorème 6](#). Donc

$$-\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p'}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1.$$

D'après le [théorème 1](#), le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{pq_1q_2})$ est cyclique. Ce cas est similaire au cas 2; par suite, on a

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \iff 8|h(pq_1q_2) \text{ ou bien } [h(pq_1q_2) \equiv 4 \pmod{8} \text{ et } Q_L = 2].$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 4 du [théorème 6](#). Donc

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1, \quad \left(\frac{p'}{q_1}\right)\left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p'}{q_1}\right).$$

D'après le [théorème 4](#), le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ est cyclique. D'après [[Kaplan 1976](#)], on a $h(pp'q_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}$. Si $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 \neq \left(\frac{p'}{p}\right)_4$, on trouve que $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$, comme dans le cas 1 du [théorème 6](#). Dans le cas contraire, d'après [[Kučera 1995](#)], on a $4|h(pp')$ et on distingue les cas suivants:

Si $e(pp') = -1$, d'après le [lemme 3](#), on a $Q_L = 2$; par suite $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$.

Si $e(pp') = 1$, d'après le [lemme 1](#), on a $Q_L = 2$; par suite $8|h(L)$. Par conséquent

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \iff \left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4.$$

– On suppose que K vérifie les conditions du cas 5 du [théorème 6](#). Donc

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{q_1}\right) \neq \left(\frac{p'}{q_1}\right), \quad \left[\left(\frac{p'}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{p'}{q_2}\right) = -1\right].$$

D'après le [théorème 4](#), le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{pp'})$ est cyclique. Ce cas est similaire au cas 1, donc on a

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \iff \left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = 1. \quad \square$$

Structure du groupe $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. On a prouvé précédemment (page 23) que la détermination de la structure du groupe G revient à chercher la structure du groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2d}))$. Alors en utilisant [[Couture et Derhem 1992](#)] et [[Benjamin et Snyder 1995](#)], on retrouve le théorème suivant: On désigne par w l'entier naturel sans facteurs carrés défini par $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pq_1q_2})/\mathbb{Q}}(1 + \varepsilon_{pq_1q_2}) = wn^2$ où $\varepsilon_{pq_1q_2}$ est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq_1q_2})$ et n un entier naturel.

Théorème 8. Soient p, p', q_1, q_2 des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'q_1q_2})$.

- On suppose que K vérifie les conditions du cas 1 du [théorème 6](#) et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$; alors G est diédral.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 2 du [théorème 6](#) et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$; alors G est quaternionique si $w \in \{pq_1, pq_2\}$, sinon G est diédral.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 3 du [théorème 6](#) et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$; alors G est quaternionique si $w = p$, sinon G est diédral.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 4 du [théorème 6](#) et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$; alors G est quaternionique si $e(2p) = -1$, sinon G est diédral.
- On suppose que K vérifie les conditions du cas 5 du [théorème 6](#) et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$; alors G est diédral.

Preuve. On utilise plusieurs fois des résultats contenus dans [[Benjamin et Snyder 1995](#)].

Dans le cas 1 du [théorème 6](#), on a $h(pp'q_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}$. Si $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2}))$ est diédral et comme G est un sous-groupe d'indice 2 dans $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2}))$, alors G est diédral.

Dans le cas 2 du [théorème 6](#), on a $h(pp'q_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}$. Si $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2}))$ est quaternionique si $w \in \{pq_1, pq_2\}$, et diédral dans le cas contraire. G est d'indice 2 dans $\text{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q_1q_2}))$, ce qui donne le résultat.

Pour les autres cas du [théorème 6](#), on a toujours $h(2pq_1q_2) \equiv 4 \pmod{8}$, et on trouve le résultat toujours en utilisant [[Benjamin et Snyder 1995](#)]. \square

4. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K où $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est ramifiée

Dans cette section, on suppose que $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[K^{(*)} : K] = 2$ et l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est ramifiée. D'après [[Azizi et Mouhib \$\geq\$ 2008](#)], la 2-partie du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1d_2})$ est égale à 1 ou à 2; par suite la 2-partie

du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est égale à 2 (car sinon le nombre de classes de K serait impair). D'après [Kaplan 1976], les cas tels que $h(d_1 d_2) \equiv 2 \pmod{4}$ sont:

- 1) $d_1 d_2 = 2pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$.
- 2) $d_1 d_2 = pq q'$ où $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q'}{p}\right) = -1$.
- 3) $d_1 d_2 = pp'$ où $p \equiv p' \equiv 1 \pmod{4}$ et $h(pp') \equiv 2 \pmod{4}$.
- 4) $d_1 d_2 = 2p$ où $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $h(2p) \equiv 2 \pmod{4}$.
- 5) $d_1 d_2 = 2qq'$ où $q \equiv q' \equiv -1 \pmod{4}$ et $h(2qq') \equiv 2 \pmod{4}$.
- 6) $d_1 d_2 = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$ et $h(pq) \equiv 2 \pmod{4}$.

Les cas 3, 4 et 6 sont à rejeter car l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est supposée ramifiée.

Le cas 5 est aussi à rejeter car, d'après le théorème 3, le 2-groupe de classes de K est trivial ou cyclique, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi ce qui reste sont les cas 1 et 2.

Afin d'avoir $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ ramifiée, K doit prendre l'une des formes suivantes:

Dans le cas 1:

$$\left[K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq}) \text{ ou bien } K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p}) \right] \text{ et } \left[\left(\frac{2}{p}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{q}{p}\right) = -1 \right].$$

Dans le cas 2:

$$\left[K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'}) \text{ ou bien } K = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq}) \right] \text{ et } \left[\left(\frac{q}{p}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{q'}{p}\right) = -1 \right].$$

Théorème 9. Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels premiers entre eux. On suppose que l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée et que $[K^{(*)} : K] = 2$; alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si l'un des deux cas suivants est vérifié :

- 1) $d_1 = 2, d_2 = pq$ où p et q sont deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.
- 2) $d_1 = q, d_2 = pq'$ où p, q et q' sont des premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$.

Preuve. 1) D'après le théorème 2, le 2-groupe de classes de K est de rang 2 si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$. Alors, dans ce qui suit, on suppose que c'est le cas. On sait d'après ce qui précède que $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$; par suite $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, et alors, d'après [Kaplan 1976], on a $h(pq) \equiv h(2pq) \equiv 2 \pmod{4}$. D'autre part, d'après [Kubota 1956], on a $Q_K \in \{1, 2, 4\}$ et comme $\text{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $4|h(K)$ et par suite $Q_K = 4$ et $h(K) = 4$.

2) Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. D'après le théorème 3, le 2-groupe de classes de K est de rang égal à 2 si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = 1$. On suppose dans ce qui suit que c'est le cas. On sait d'après ce qui précède que $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q'}{p}\right) = -1$; par suite $\left(\frac{q'}{p}\right) = -1$, et alors, d'après [Kaplan 1976], on a $h(pq) \equiv h(2pq) \equiv 2 \pmod{4}$.

D'autre part d'après [Kubota 1956], on a $Q_K \in \{1, 2, 4\}$ et comme $\text{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $4|h(K)$ et par suite $Q_K = 4$ et $h(K) = 4$. Ainsi le théorème est démontré. \square

Dans la suite on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les deux cas du [théorème 9](#).

Étude de la capitulation dans le cas 1 du théorème 9. Dans ce cas, on a $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ où p et q sont deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{q})$.

Proposition 1. *Soient p, q deux premiers tels que $p \equiv -1 \pmod{4}$ et que $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. Alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$.*

Preuve. Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$; alors d'après le [théorème 3](#), le 2-groupe de classes de L est cyclique. De plus, l'extension $K^{(*)}/L$ est non ramifiée; par suite $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Ainsi $h(K_2^{(1)}) = \frac{1}{2}h(K^{(*)}) = \frac{1}{4}h(L)$ et par conséquent on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$. Donc on est ramené à étudier la 2-partie du nombre de classes de L . D'après [Kaplan 1976], on a $h(2pq) \equiv 2 \pmod{4}$ et d'après la théorie des genres $h(q) = 1$ et $2|h(2p)$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}$; alors d'après [Kučera 1995], $h(2p) \equiv 2 \pmod{4}$ et $e(2p) = 1$. D'autre part, d'après le [lemme 4](#), on a $Q_L = 4$. Ainsi on a $h(L) \equiv 4 \pmod{8}$ et donc $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$; alors, d'après [Kučera 1995], on a $4|h(2p)$. On distingue deux cas:

- On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$; alors d'après [Kučera 1995], on a:
Si $e(2p) = -1$, alors $8|h(2p)$ et d'après le [lemme 4](#), on a $Q_L = 2$. Par suite $Q_L = 2$ et par conséquent $8|h(L)$. Si $e(2p) = 1$, alors d'après le [lemme 4](#), on a $Q_L = 4$ et par conséquent $8|h(L)$.
- On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1$; alors d'après [Kučera 1995], on a $h(2p) \equiv 4 \pmod{8}$ et $e(2p) = -1$. D'après le [lemme 4](#), $Q_L = 2$. Par suite, on a $h(L) \equiv 4 \pmod{8}$, d'où $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Ainsi la proposition est démontrée. \square

Dans la suite, on va déterminer les classes engendrant le 2-groupe de classes de K . On note par O_M l'anneau des entiers d'un corps M .

Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, alors $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ où \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De plus pour $i \in \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}_i O_K = Y_i^2$ où Y_i est un idéal premier de K .

Proposition 2. *Soient p, q deux premiers tels que $p \equiv -1 \pmod{4}$ et que $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$; alors le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes d'idéaux de Y_1 et de Y_2 .*

Preuve. On sait que le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est égal à 1. Comme \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ils sont principaux. Or pour $i \in \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}_i O_K = Y_i^2$, donc les classes $[Y_1]$ et $[Y_2]$ sont des 2-classes de K . Montrons que Y_1 n'est pas principal.

On vérifie facilement que Y_1 reste inerte dans $K^{(*)}$; alors d'après la loi de réciprocité d'Artin appliquée à l'extension $K^{(*)}/K$, l'idéal Y_1 n'est pas principal. Montrons que $Y_1 Y_2$ n'est pas principal. On a $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(Y_1 Y_2) = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = p \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$. On suppose que $Y_1 Y_2$ est principal; alors il existe une unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tel que pu est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ce qui est impossible. En effet:

En utilisant le symbole du reste normique, on sait que pu est norme dans cette extension si et seulement si $\left(\frac{pu, pq}{\mathfrak{Q}}\right) = 1$ pour tout premier \mathfrak{Q} de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ramifié dans K (voir [Azizi et Mouhib 2001]).

D'autre part, l'idéal premier \mathcal{P}_1 de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se ramifie dans K et on a

$$\left(\frac{-1, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\varepsilon_2, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right) \left(\frac{\varepsilon_2, q}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right).$$

Or, $\left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8}$ d'après [Azizi et Mouhib 2001]. Comme $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, on a $\left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$ et donc $\left(\frac{\varepsilon_2, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$. Ainsi l'unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ vérifie $\left(\frac{u, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$. De plus, on a

$$\left(\frac{p, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{p, p}{\mathcal{P}_1}\right) \left(\frac{p, q}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

D'où $\left(\frac{pu, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = -1$, par conséquent on a une contradiction. Ainsi $Y_1 Y_2$ n'est pas principal et la proposition est démontrée. \square

Dans la suite, on va déterminer les 2-classes de K qui capitulent dans $K^{(*)}$.

On sait que Y_1 et Y_2 restent inerte dans $K^{(*)}$, donc $Y_1 \mathcal{O}_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_1$ et $Y_2 \mathcal{O}_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_2$ où \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 sont deux idéaux premiers de $K^{(*)}$.

D'autre part on a $p \mathcal{O}_L = \mathfrak{Q}^2$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et \mathfrak{Q} est un idéal premier de L ; par suite $\mathfrak{Q} \mathcal{O}_{K^{(*)}} = Y_1 Y_2$.

Proposition 3. *En gardant les mêmes notations, les idéaux premiers \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 sont principaux si et seulement si l'idéal premier \mathfrak{Q} est principal.*

Preuve. On sait que si \mathcal{Q}_1 est principal; alors $\mathfrak{Q} = \mathcal{N}_{K^{(*)}/L}(\mathcal{Q}_1)$ est principal.

Inversement, si l'idéal premier \mathfrak{Q} est principal, on raisonne comme suit:

On sait que le 2-groupe de classes de L est cyclique et que $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. D'autre part, d'après la théorie des corps de classes de Hilbert, le noyau de l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/L$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux de L . Comme l'idéal premier \mathfrak{Q} est principal, \mathfrak{Q} se décompose complètement dans $K_2^{(2)}$; par suite les idéaux premiers \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 se décomposent complètement dans $K_2^{(2)}$. Comme $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$, le noyau de l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/K^{(*)}$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux de $K^{(*)}$. Ainsi \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 sont principaux et la proposition est démontrée. \square

Théorème 10. *Soient p et q deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$; alors toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$ et le groupe $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.*

Preuve. On sait que le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes d'idéaux $[Y_1]$ et $[Y_2]$ définis dans la [proposition 2](#). Montrons que $Y_1 Y_2$ capitule dans $K^{(*)}$.

On a $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})} = \mathcal{P}^2$ où \mathcal{P} est un idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$; par suite $\mathcal{P}O_K = Y_1 Y_2$. Ainsi, il existe deux 2-classes ambiguës de K relativement à $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, la classe triviale et la classe $[Y_1 Y_2]$. Comme $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension abélienne et $K^{(*)}/K$ est une extension non ramifiée, $K^{(*)}$ est le 2-corps de genres relatif à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. On sait, d'après [[Terada 1971](#)], que toutes les 2-classes ambiguës de $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ capitulent dans $K^{(*)}$. Ainsi la classe $[Y_1 Y_2]$ capitule dans $K^{(*)}$. Montrons que Y_1 capitule dans $K^{(*)}$.

On sait que $Y_1 O_{K^{(*)}} = \mathfrak{Q}_1$ où \mathfrak{Q}_1 est un idéal premier de $K^{(*)}$ et que $pO_L = \mathfrak{Q}^2$ où \mathfrak{Q} est un idéal premier de L . D'après la [proposition 3](#), Y_1 capitule dans $K^{(*)}$ si et seulement si \mathfrak{Q} est principal. Montrons que \mathfrak{Q} est principal.

Soit $\varepsilon_q = x + y\sqrt{q}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Alors, d'après [[Azizi 2000](#)], $x \pm 1$ est un carré dans \mathbb{N} . Donc il existe deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que $x \pm 1 = y_1^2$, $x \mp 1 = y_2^2$ et $y_1 y_2 = y$; par suite $\sqrt{\varepsilon_q} = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2q}y_2$. De plus, on a $pO_L = (\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_q})^2 \varepsilon_q^{-1} O_L = \mathfrak{Q}^2$. Comme $\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_q}$ est un entier de L , l'idéal \mathfrak{Q} est principal; par suite l'idéal \mathfrak{Q}_1 est principal. Ainsi, toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. Comme $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et d'après [[Kisilevsky 1976](#)], le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. \square

Étude de la capitulation dans le cas 2 du théorème 9. Ce cas est similaire au cas 1, et on suit les mêmes étapes.

Dans le cas 2 du [théorème 9](#), on a $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$ où p, q et q' sont des premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p}, \sqrt{q'})$.

Proposition 4. Soient p, q, q' des premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. Alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(pq)$.

Preuve. D'après le [théorème 3](#), le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq})$ est cyclique. De plus, l'extension $K^{(*)}/F$ est non ramifiée, donc $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Alors comme dans le cas 1 du [théorème 9](#), on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8|h(L)$. On est donc ramené à étudier la 2-partie du nombre de classes de L . D'après [[Kaplan 1976](#)] on a $h(qp q') = 2$ et $4|h(qp)$. D'après le [lemme 5](#), on a $Q_L = 2$.

Si $h(pq) \equiv 4 \pmod{8}$, on a $h(L) \equiv 4 \pmod{8}$; par suite $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $8|h(pq)$, on a $8|h(L)$; par suite $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. D'où la proposition est démontrée. \square

Dans la suite on va déterminer les classes engendrant le 2-groupe de classes de K . Comme $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, l'idéal premier p se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et on a $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$ où \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Comme p est ramifié dans K , alors $\mathcal{P}_i O_K = Y_i^2$ où Y_i est un idéal premier de K .

Proposition 5. Soient p, q, q' des premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. Alors le 2-groupe de classes de K est engendré par $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$ où l est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$.

Preuve. Le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ est de nombre de classes impair. Soit l le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$; alors \mathcal{P}_1^l et \mathcal{P}_2^l sont des idéaux principaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Par suite $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$ sont des 2-classes de K . Les idéaux premiers Y_1 et Y_2 ne sont pas principaux. En effet:

On vérifie que Y_1 et Y_2 restent inerte dans $K^{(*)}$. Alors d'après la loi de réciprocité d'Artin appliquée à l'extension $K^{(*)}/K$, les idéaux premiers Y_1 et Y_2 ne sont pas principaux. Comme l est impair et l'extension $K^{(*)}/K$ est de degré 2, alors Y_1^l et Y_2^l ne sont pas principaux. Montrons que $Y_1^l Y_2^l$ est non principal.

On a $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{q})}(Y_1^l Y_2^l) = \mathcal{P}_1^l \mathcal{P}_2^l = p^l O_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})}$. On suppose que $Y_1^l Y_2^l$ est principal; alors il existe une unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ tel que $p^l u$ est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Ce qui est impossible. En effet:

Comme dans le cas 1, en utilisant le symbole du reste normique, on a:

l'idéal \mathcal{P}_1 est un premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ ramifié dans K . On a $\left(\frac{-1, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{\varepsilon_q, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_q, p}{\mathcal{P}_1}\right)$. D'autre part, d'après la preuve du [théorème 10](#), il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que $\sqrt{\varepsilon_q} = y_1\sqrt{2} + y_2\sqrt{2q}$; par suite $\varepsilon_q = 2v^2$ où v est un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et on a $\left(\frac{\varepsilon_q, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = 1$. Ainsi $\left(\frac{u, pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$ et de plus

$$\left(\frac{p', pq'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{p', p}{\mathcal{P}_1}\right) \left(\frac{p', q'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q'}{p}\right)^l = -1.$$

Donc on a une contradiction. Par conséquent la proposition est démontrée. \square

Dans la suite on va déterminer les 2-classes de K qui capitulent dans $K^{(*)}$.

On sait que le 2-groupe de classes de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$ est engendré par $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$ où l est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. On pose $Y_1 O_{K^*} = \mathfrak{Q}_1$ et $Y_2 O_{K^*} = \mathfrak{Q}_2$ où \mathfrak{Q}_1 et \mathfrak{Q}_2 sont deux idéaux premiers de $K^{(*)}$. D'autre part, on a $q O_L = \mathfrak{Q}^2$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq'})$ et \mathfrak{Q} est un idéal premier de L .

Proposition 6. En gardant les mêmes notations, \mathfrak{Q} est principal si et seulement si \mathfrak{Q}_1 et \mathfrak{Q}_2 sont principaux.

Preuve. Le corps $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{pq'})$ est de 2-groupe de classes cyclique, alors la preuve de la [proposition 3](#) reste valable ici. \square

Théorème 11. Soient p, q et q' des premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{pq'})$. On suppose que $8 \mid h(pq')$; alors toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$ et le groupe $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.

Preuve. On sait, d'après la [proposition 5](#), que le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes $[Y_1^l]$ et $[Y_2^l]$. Montrons que $Y_1^l Y_2^l$ capitule dans $K^{(*)}$. Comme dans le cas 1 du [théorème 9](#), on trouve que $[Y_1^l Y_2^l]$ est la seule 2-classe ambiguë non

triviale relativement à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$ et $K^{(*)}$ est le 2-corps de genres relatif de l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$. D'après [Terada 1971], $Y_1^l Y_2^l$ capitule dans $K^{(*)}$. Montrons que Y_1 capitule dans $K^{(*)}$.

On sait que $Y_1 O_{K^{(*)}} = \mathfrak{D}_1$ où \mathfrak{D}_1 est un idéal premier de $K^{(*)}$ et que $p O_L = \mathfrak{D}^2$ où \mathfrak{D} est un idéal premier de L . D'après la proposition 6, Y_1 capitule dans $K^{(*)}$ si et seulement si \mathfrak{D} est principal. Montrons que \mathfrak{D} est principal.

Soit $\varepsilon_{pqq'}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pqq'})$. Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$, il existe, d'après le lemme 5, deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que $\sqrt{\varepsilon_{pqq'}} = \frac{1}{2}y_1\sqrt{q} + \frac{1}{2}y_2\sqrt{pq'}$. Par conséquent on a

$$p O_L = (\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_{pqq'}})^2 \varepsilon_{pqq'}^{-1} O_L = \mathfrak{D}^2.$$

Comme $\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_{pqq'}}$ est un entier de L , l'idéal \mathfrak{D} est principal. Par suite \mathfrak{D}_1^l et \mathfrak{D}_2^l sont principaux. Ainsi, toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. De plus, comme $8|h(L)$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et d'après [Kisilevsky 1976], le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. \square

Conclusion. Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. On suppose que $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $K^{(*)} \neq K_2^{(1)}$ et l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée. Alors il existe toujours une sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$ où toutes les 2-classes de K capitulent. Plus précisément le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien ou diédral.

Exemples numériques. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ où d_1 et d_2 sont deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux tels que $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ est ramifiée. On suppose que $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $K^{(*)} \neq K_2^{(1)}$. Soit alors L le corps biquadratique contenu dans $K^{(*)}$ tel que le 2-groupe de classes de L est cyclique et l'extension $K^{(*)}/L$ est non ramifiée.

On sait, d'après le théorème 9, qu'il existe deux cas de corps K dont le 2-groupe de classes est de type (2, 2). On donne des exemples numériques correspondant à chaque cas. Dans la suite p, q, q' sont des premiers différents vérifiant $p \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod{4}$.

Cas 1) $d_1 = 2$ et $d_2 = pq$ où $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.

– Soient $p = 113$ et $q = 3$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$ et $h(2p) = 8$. De plus on a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et $e(2p) = -1$; par suite $Q_L = 2$. Ainsi d'après la proposition 1, on a $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$. D'autre part on a

$$|\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)| = [K_2^{(2)} : L] = h(L) = \frac{Q_L h(2p) h(2qp) h(q)}{4} = h(2p) = 8$$

et d'après le théorème 10, le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 8.

– Soient $p = 3313$ et $q = 11$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$,

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1 \quad \text{et} \quad h(2p) = 16.$$

De plus on a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et $e(2p) = -1$; par suite $Q_L = 2$ (voir [lemme 4](#)). Ainsi d'après la [proposition 1](#), on a $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$. D'autre part on a

$$|\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)| = h(L) = h(2p) = 16$$

et d'après le [théorème 10](#), le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 16.

– Soient $p = 41$ et $q = 19$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$; de plus

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1.$$

Alors, d'après la [proposition 1](#), $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$ et le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

Cas 2) $d_1 = q$ et $d_2 = pq'$ où $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1$.

– Soient $p = 433$, $q = 3$ et $q' = 7$. On a

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad h(pq) = 8.$$

Ainsi, d'après la [proposition 4](#), on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. D'autre part, on a $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q'}, \sqrt{qp})$, $Q_L = 2$ et

$$|\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)| = h(L) = \frac{Q_L h(qp) h(qq'p) h(q')}{4} = h(qp) = 8.$$

D'après le [théorème 11](#), le groupe $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 8.

– Soient $p = 17$, $q = 7$ et $q' = 31$. On a

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}.$$

D'après la [proposition 4](#), $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

– Soient $p = 1009$, $q' = 11$ et $q = 7$. On a

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad h(pq) = 8.$$

D'après la [proposition 4](#), $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. D'après le [théorème 11](#), $\text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 8.

References

- [Azizi 2000] A. Azizi, “Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$ ”, *Acta Arith.* **94**:4 (2000), 383–399. [MR 2001k:11221](#) [Zbl 0953.11033](#)
- [Azizi et Mouhib 2001] A. Azizi et A. Mouhib, “Sur le rang du 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où $m = 2$ ou un premier $p \equiv 1 \pmod{4}$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**:7 (2001), 2741–2752. [MR 2002b:11152](#)
- [Azizi et Mouhib \geq 2008] A. Azizi et A. Mouhib, “Sur le 2-groupe de classes du corps de genres de certains corps biquadratiques”, *Ann. Sci. Math. Québec*. To appear.
- [Benjamin et Snyder 1995] E. Benjamin et C. Snyder, “Real quadratic number fields with 2-class group of type $(2, 2)$ ”, *Math. Scand.* **76**:2 (1995), 161–178. [MR 96m:11094](#) [Zbl 0847.11058](#)

- [Benjamin et al. 1998] E. Benjamin, F. Lemmermeyer et C. Snyder, “Real quadratic fields with abelian 2-class field tower”, *Journal of Number Theory* **73**:2 (1998), 182–194. [MR 2000c:11179](#) [Zbl 0919.11073](#)
- [Cohn 1978] H. Cohn, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields*, Springer-Verlag, New York, 1978. [MR 80c:12001](#)
- [Couture et Derhem 1992] R. Couture et A. Derhem, “Un problème de capitulation”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314**:11 (1992), 785–788. [MR 93c:11100](#) [Zbl 0778.11059](#)
- [Gorenstein 1980] D. Gorenstein, *Finite groups*, Second éd., Chelsea Publishing Co., New York, 1980. [MR 81b:20002](#)
- [Hasse 1930] H. Hasse, “Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie der Normenrest-symbols”, *J. Reine Angew. Math.* **162** (1930), 134–144.
- [Kaplan 1976] P. Kaplan, “Sur le 2-groupe des classes d’idéaux des corps quadratiques”, *J. Reine Angew. Math.* **283/284** (1976), 313–363. [MR 53 #8009](#)
- [Kisilevsky 1976] H. Kisilevsky, “Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and Hilbert’s theorem 94”, *J. Number Theory* **8**:3 (1976), 271–279. [MR 54 #5188](#) [Zbl 0334.12019](#)
- [Kubota 1956] T. Kubota, “Über den bzyklischen biquadratischen Zahlkörper”, *Nagoya Math. J.* **10** (1956), 65–85. [MR 18,643e](#)
- [Kučera 1995] R. Kučera, “On the parity of the class number of a biquadratic field”, *J. Number Theory* **52**:1 (1995), 43–52. [MR 96c:11139](#)
- [Terada 1971] F. Terada, “A principal ideal theorem in the genus field”, *Tôhoku Math. J. (2)* **23** (1971), 697–718. [MR 46 #5285](#) [Zbl 0243.12003](#)
- [Wada 1966] H. Wada, “On the class number and the unit group of certain algebraic number fields”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **13** (1966), 201–209 (1966). [MR 35 #5414](#)

Received October 15, 2002.

ABDELMALEK AZIZI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOHAMMED I
OUJDA
MAROC
azizi@sciences.univ-oujda.ac.ma

ALI MOUHIB
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOHAMMED I
OUJDA
MAROC