Pacific Journal of Mathematics

SUR LE DÉPLOIEMENT DES FORMES BILINÉAIRES EN CARACTÉRISTIQUE 2

AHMED LAGHRIBI

Volume 232 No. 1 September 2007

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 232, No. 1, 2007

SUR LE DÉPLOIEMENT DES FORMES BILINÉAIRES EN CARACTÉRISTIQUE 2

AHMED LAGHRIBI

This article deals with the standard splitting of bilinear forms in characteristic 2. The first part is devoted to the study of bilinear Pfister neighbors (the definition of such a bilinear form is slightly different from the classical definition of a Pfister neighbor quadratic form). In the second part, we introduce the degree invariant for bilinear forms and we prove that for any integer $d \geq 0$, the d-th power of the ideal of even dimensional bilinear forms coincides with the set of bilinear forms of degree $\geq d$ (this is a positive answer to the analogue of the degree conjecture for quadratic forms). In the third part, we classify good bilinear forms of height 2, and we give information on the possible dimensions of bilinear forms of height 2 which are not necessarily good.

1. Introduction

Le but de cet article est d'étendre la théorie de déploiement standard aux formes bilinéaires en caractéristique 2. Cette théorie a été introduite en premier par M. Knebusch dans les années soixante-dix dans le cas des formes quadratiques en caractéristique $\neq 2$ [Knebusch 1976 ; 1977]. On la connait plutôt sous le nom de la théorie de déploiement générique, puisque dans ce cas la suite de déploiement standard d'une forme quadratique reflète des informations liées au comportement de la forme sur les extensions du corps de base. Récemment, en caractéristique 2, Knebusch et Rehmann ont étudié le déploiement standard des formes quadratiques de radical de dimension ≤ 1, et ont montré sa généricité comme ce qui est le cas en caractéristique $\neq 2$ [Knebusch and Rehmann 2000]. Ceci ne se généralise pas au cas des formes quadratiques de radical de dimension ≥ 2 [Hoffmann and Laghribi 2004, example 8.15]. Pour ces dernières, le déploiement standard a été traité dans [Laghribi 2002b], et une autre notion de généricité a été introduite dans [Knebusch ≥ 2007].

MSC2000: 11E04, 11E81.

Keywords: symmetric bilinear form, function field of a bilinear form, standard splitting of bilinear forms, bilinear Pfister neighbors.

Pour la suite de cet article, on fixe F un corps commutatif de caractéristique 2, et l'expression "forme bilinéaire" signifiera "forme bilinéaire symétrique de dimension finie et de radical nul".

A une forme bilinéaire B d'espace sous-jacent V, on associe une forme quadratique $\widetilde{B}$ définie par : $\widetilde{B}(v) = B(v, v)$ pour $v \in V$. Cette forme quadratique est totalement singulière[1] et est unique à isométrie près, on l'appelle la forme quadratique associée à B. Le corps de fonctions de B, qu'on note $F(B)$, est défini comme étant celui de $\widetilde{B}$. On note $\dim B$ (*resp.* B_{an}) la dimension de B (*resp.* la partie anisotrope de B).

La tour de déploiement standard d'une forme bilinéaire B non nulle est une suite $(B_i, F_i)_{0\leq i\leq h}$ donnée par :

$$\begin{cases} F_0 = F \quad \text{et} \quad B_0 = B_{\mathrm{an}} \\ \text{Pour } n \geq 1 : \quad F_n = F_{n-1}(B_{n-1}) \quad \text{et} \quad B_n = ((B_{n-1})_{F_n})_{\mathrm{an}}. \end{cases}$$

La hauteur (standard) de B, qu'on note $\mathrm{h}(B)$, est le plus petit entier h vérifiant $\dim B_h \leq 1$. En plus de la hauteur, on montre qu'il existe une d-forme bilinéaire de Pfister π unique telle que $B_{\mathrm{h}(B)-1}$ soit semblable à une sous-forme de π de dimension $2^d - 1$ ou 2^d suivant que $\dim B$ est impaire ou paire. L'entier d s'appelle le degré de B et on le note $\deg(B)$ (voir section 4).

On traitera le déploiement standard des formes bilinéaires en parallèle avec ce qui a été fait pour les formes quadratiques. Plus particulièrement, on s'intéressera à l'invariant degré et au problème de classification par hauteur et degré. Nos méthodes sont propres aux formes bilinéaires en caractéristique 2. Pour les faire deux difficultés se sont posées. D'une part, l'utilisation de l'analogue du théorème de la sous-forme (théorème 3.5) dont la formulation est basée sur la notion de forme bilinéaire et forme totalement singulière associées, qui est moins forte que la condition de sous-forme (ou de domination) utilisée dans le cas des formes quadratiques. D'autre part, on manque pour les formes bilinéaires d'un objet analogue à l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique.

Maintenant on détaille le contenu de notre travail. Pour garder l'autonomie de cet article, on rappelera dans la section 2 quelques notions de base sur les formes bilinéaires et quadratiques en caractéristique 2.

La section 3 sera consacrée aux formes bilinéaires voisines de Pfister et vient compléter des résultats établis récemment dans [Laghribi 2005, Section 5]. Dans la sous-section 3A, on donnera des généralités sur les formes bilinéaires voisines. La définition d'une telle forme utilise la notion de forme bilinéaire et forme totalement singulière associées. En terme de déploiement sur les corps de fonctions, on sait d'après [Laghribi 2005, Cor. 5.6] qu'une forme bilinéaire anisotrope B est une

[1] C'est-à-dire, une forme quadratique dont le radical coincide avec son espace sous-jacent.

voisine de Pfister si et seulement si il existe C et D des formes bilinéaires telles que $(C_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq D_{F(B)}$ et que $\widetilde{B} \simeq \widetilde{C}$ ($\simeq$ désigne l'isométrie). Contrairement au cas des formes quadratiques voisines, on va donner un exemple où la forme bilinéaire $C \perp D$ est isotrope, et un autre où $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq D'_{F(B)}$ avec $B \perp D'$ isotrope (Exemple 3.11). De plus, on va voir qu'une forme bilinéaire anisotrope B peut être une voisine de Pfister sans que la forme $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ soit définie sur F (Exemple 3.12). On finira cette sous-section par un fait important affirmant que toute forme bilinéaire anisotrope devient une voisine de Pfister anisotrope après extension des scalaires à un corps convenable (proposition 3.13). Ce résultat nous sera très utile dans la sous-section 5C pour les formes bilinéaires de hauteur 2. La sous-section 3B sera consacrée à la classe des formes bilinéaires voisines anisotropes B pour lesquelles la forme $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ est définie sur F. On utilisera les formes de cette classe pour suggérer une définition de forme bilinéaire excellente.

Dans la section 4, on abordera l'invariant degré en montrant que l'ensemble des formes bilinéaires de degré $\geq d$ coincide avec l'idéal $I^d F$ pour tout entier $d \geq 0$ (théorème 4.5). Pour cela, on va se ramener au cas des formes quadratiques en associant à toute forme bilinéaire B la forme quadratique $B \otimes [1, t^{-1}]$ avec t une variable sur F. Ceci va permettre d'utiliser quelques résultats récents dus à Aravire et Baeza [2003].

La section 5 sera consacrée aux formes bilinéaires bonnes, c'est-à-dire, celles dont la forme bilinéaire de Pfister correspondant à l'avant-dernière forme de leurs tours de déploiement standard est définie sur F. Plus particulièrement, on classifiera les formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 (proposition 5.9 et théorème 5.10). Pour cela, on utilisera entre autres une généralisation aux formes bilinéaires d'un résultat récent de Karpenko sur les dimensions des formes quadratiques de I^n en caractéristique $\neq 2$ (proposition 5.7). Notre classification fait paraître une classe de formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 dont on n'a pas un analogue pour les formes quadratiques en caractéristique $\neq 2$ (Commentaire après le théorème 5.10 ; Exemple 5.11). Finalement dans la sous-section 5C on donnera des informations sur les éventuelles dimensions des formes bilinéaires de hauteur 2 non nécessairement bonnes (corollaire 5.20), et ce en utilisant une version raffinée de la décomposition de Witt d'une forme bilinéaire (proposition 5.15).

2. Quelques rappels

Soit φ une forme quadratique (*resp.* une forme bilinéaire) d'espace sous-jacent V. On dit que φ est isotrope s'il existe $v \in V - \{0\}$ tel que $\varphi(v) = 0$ (*resp.* $\varphi(v, v) = 0$). Dans le cas contraire, on dit que φ est anisotrope. On désigne par $D_F(\varphi)$ l'ensemble des scalaires de F^* représentés par φ (*resp.* l'ensemble des scalaires $\varphi(v, v) \in F^*$ avec $v \in V$).

Pour $n \geq 1$ un entier et B une forme bilinéaire (ou quadratique), on désigne par $n \times B$ la somme orthogonale de n copies de B.

Deux formes bilinéaires (ou quadratiques) B et B' sont dites semblables si $B \simeq \alpha B'$ pour un certain $\alpha \in F^*$.

Le radical d'une forme bilinéaire B (*resp.* d'une forme quadratique φ) d'espace sous-jacent V est l'espace $\{v \in V \mid B(v, V) = 0\}$ (*resp.* le radical de la forme bilinéaire B_φ associée à φ).

Une forme quadratique est dite non singulière si son radical est nul.

On sait qu'une forme quadratique non singulière (*resp.* totalement singulière) est isométrique à une somme orthogonale de formes de type $[a, b] = ax^2 + xy + by^2$ (*resp.* de type $[a] = ax^2$).

On note $W(F)$ (*resp.* $W_q(F)$) l'anneau de Witt des formes bilinéaires (*resp.* le groupe de Witt des formes quadratiques non singulières).

2A. *Décomposition de Witt.*

2A1. *Cas des formes quadratiques.* Toute forme quadratique φ se décompose, à isométrie près, comme suit :

$$\varphi \simeq \varphi_{\mathrm{an}} \perp i \times [0, 0] \perp j \times [0] \tag{1}$$

où φ_{an} est une forme anisotrope, qu'on appelle la partie anisotrope de φ [Hoffmann and Laghribi 2004]. L'entier i s'appelle l'indice de Witt de φ et on le note $i_W(\varphi)$.

Une forme quadratique non singulière φ est dite hyperbolique si $\dim \varphi = 2i_W(\varphi)$.

2A2. *Cas des formes bilinéaires.* On note $\langle a_1 : b : a_2 \rangle$ la forme bilinéaire B dont l'espace sous-jacent a pour base $\{e_1, e_2\}$ qui satisfait les conditions $B(e_i, e_i) = a_i$ et $B(e_1, e_2) = b$. Un plan métabolique est une forme bilinéaire isométrique à $\langle a : 1 : 0 \rangle$ pour un certain $a \in F$.

Toute forme bilinéaire B se décompose de la manière suivante :

$$B \simeq M \perp B_{\mathrm{an}} \tag{2}$$

où M est une somme orthogonale de plans métaboliques, et B_{an} est une forme bilinéaire anisotrope. La forme B_{an} est unique à isométrie près [Milnor and Husemoller 1973; Knebusch 1970] ; on l'appelle la partie anisotrope de B. L'indice de Witt de B, qu'on note $i_W(B)$, est l'entier $\frac{1}{2} \dim M$.

Une forme bilinéaire B est dite métabolique si $\dim B = 2i_W(B)$.

On renvoie à la proposition 5.15 pour une version raffinée de la décomposition donnée dans (2).

Deux formes quadratiques (*resp.* deux formes bilinéaires) B et B' sont dites équivalentes, qu'on note $B \sim B'$, lorsque les formes B_{an} et B'_{an} sont isométriques.

2B. ***Formes bilinéaires et formes quadratiques de Pfister.*** On note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$ avec $a_1, \dots, a_n \in F^*$. Une n-forme bilinéaire de Pfister est une forme isométrique à $\langle 1, a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle$. On la note $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$. La partie pure d'une forme bilinéaire de Pfister B est l'unique forme B' vérifiant $B = \langle 1 \rangle \perp B'$.

Une $(n+1)$-forme quadratique de Pfister est une forme isométrique à

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \otimes [1, b],$$

où $\otimes$ est l'action de module de $W(F)$ sur $W_q(F)$, et $a_1, \dots, a_n \in F^*$, $b \in F$.

Soit IF l'idéal de $W(F)$ formé des formes bilinéaires de dimension paire. On pose $I^n F = (IF)^n$ et $I_q^{n+1} F = I^n F \otimes W_q(F)$ pour tout $n \geq 0$ (avec $I^0 F = W(F)$).

On sait que $I^n F$ (*resp.* $I_q^{n+1} F$) est engendré additivement par les n-formes bilinéaires de Pfister (*resp.* les $(n+1)$-formes quadratiques de Pfister).

Une n-forme quadratique de Pfister est dite de degré n [Hoffmann and Laghribi 2004; Laghribi 2002b]. Notre définition de degré diffère de celle adoptée par Aravire et Baeza [2003]. La notre étend la définition de degré en caractéristique $\neq 2$.

2C. ***Formes quadratiques voisines.*** Soient φ et φ' deux formes quadratiques d'espaces sous-jacent respectifs V et V'. On dit que φ est dominée par φ', qu'on note $\varphi \prec \varphi'$, s'il existe une application linéaire injective $\sigma : V \longrightarrow V'$ telle que $\varphi'(\sigma(v)) = \varphi(v)$ pour tout $v \in V$. On renvoit à [Hoffmann and Laghribi 2004, lem. 3.1] pour une description équivalente à cette définition. Notons que la relation de domination n'est autre que la relation de sous-forme lorsque les formes φ et φ' sont non singulières ou totalement singulières

Une forme quadratique φ est dite voisine d'une forme de Pfister π si $2 \dim \varphi > \dim \pi$ et $a\varphi \prec \pi$ pour un certain $a \in F^*$. Lorsque φ est voisine de π, alors π est unique et pour toute extension K/F, la forme φ_K est isotrope si et seulement si π_K est isotrope.

On sait qu'une forme quadratique voisine ne peut être totalement singulière. Mais pour les formes totalement singulières on a aussi la notion de forme voisine (Définition 3.7).

3. Les formes bilinéaires voisines

3A. ***Généralités sur les formes bilinéaires voisines.*** La notion de forme bilinéaire et forme totalement singulière associées va jouer un rôle essentiel dans cet article. Le lemme qui suit donne une définition équivalente à cette notion :

Lemme 3.1. *Une forme quadratique totalement singulière φ est associée à une forme bilinéaire B si et seulement si* $\dim B = \dim \varphi$ *et* $D_F(B) = D_F(\varphi)$.

Démonstration. D'après [Laghribi 2004a, lem. 2.1], on sait que deux formes quadratiques totalement singulières sont isométriques si elles sont de même dimension et représentent les mêmes scalaires de F^*. □

Remarque 3.2. (1) Notons qu'une forme bilinéaire B est isotrope si et seulement si $\widetilde{B}$ est isotrope.
(2) La correspondance $B \mapsto \widetilde{B}$ est compatible avec la somme orthogonale et la multiplication par des scalaires de F^*.

Notations 3.3. Pour φ une forme quadratique totalement singulière, on notera $\mathscr{A}(\varphi)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires associées à φ.

Définition 3.4. Une forme bilinéaire B est dite une sous-forme d'une autre forme C si $C \simeq B \perp B'$ pour une certaine forme bilinéaire B'.

La définition d'une forme bilinéaire voisine est motivée par l'analogue du théorème de la sous-forme dont voici la formulation :

Théorème 3.5 [Laghribi 2005, prop. 1.1]. *Soient B et C deux formes bilinéaires anisotropes telles que B devienne métabolique sur $F(C)$. Alors, pour tout $\alpha \in D_F(C)D_F(B)$, il existe B' une sous-forme de αB telle que $B' \in \mathscr{A}(\widetilde{C})$. En particulier*, $\dim C \leq \dim B$.

Définition 3.6 [Laghribi 2005, section 5]. Une forme bilinéaire B est dite voisine d'une forme bilinéaire de Pfister π si $2\dim B > \dim \pi$ et s'il existe $B' \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$ semblable à une sous-forme de π.

Dans le cas des formes quadratiques totalement singulières, les notions de formes de Pfister et leurs voisines se définissent comme suit :

Définition 3.7. (1) Une forme totalement singulière est une quasi n-forme de Pfister si elle est associée à une n-forme bilinéaire de Pfister.
(2) Une forme totalement singulière φ est dite une quasi-voisine de Pfister s'il existe une quasi-forme de Pfister π tels que $2\dim \varphi > \dim \pi$ et $a\varphi \prec \pi$ pour un certain $a \in F^*$.

On renvoie à [Hoffmann and Laghribi 2004] et [Laghribi 2004a] pour plus de détails sur les formes quasi-voisines et leurs déploiements standard.

Les formes bilinéaires voisines et les formes quadratiques quasi-voisines se correspondent mutuellement comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.8. *Une forme bilinéaire anisotrope B est une voisine de Pfister si et seulement si $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister.*

Démonstration. Soit B une forme bilinéaire anisotrope.

Supposons que B soit voisine d'une forme bilinéaire de Pfister π. Alors on a $2\dim B > \dim \pi$ et il existe $B' \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$ qui est semblable à une sous-forme de π.

Puisque $\widetilde{B} \simeq \widetilde{B}'$, la forme $\widetilde{B}$ est semblable à une sous-forme de $\widetilde{\pi}$. Ainsi, $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de $\widetilde{\pi}$.

Réciproquement, supposons maintenant que $\widetilde{B}$ soit quasi-voisine d'une quasi-forme de Pfister τ. Soit C une forme bilinéaire de Pfister telle que $\widetilde{C} \simeq \tau$. Puisque $\tau_{F(B)}$ est isotrope, la forme $C_{F(B)}$ est isotrope et donc elle est métabolique [Laghribi 2005, prop. 3.3]. Par le théorème 3.5, il existe $B' \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$ qui est semblable à une sous-forme de C. Puisque $2 \dim B > \dim \tau = \dim C$, la forme B est bien une voisine de C. □

On se servira souvent de la proposition suivante qui montre qu'une forme bilinéaire anisotrope est une voisine de Pfister lorsqu'elle devient métabolique sur le corps de fonctions d'une autre forme bilinéaire de dimension suffisamment grande :

Proposition 3.9 [Laghribi 2005, cor. 5.4]. *Soient B et C deux formes bilinéaires anisotropes. Si $B_{F(C)}$ est métabolique et $2 \dim C > \dim B$, alors B est semblable à une forme bilinéaire de Pfister π, et toute forme bilinéaire $B' \in \mathscr{A}(\widetilde{C})$ est voisine de π. En particulier, C est voisine de π.*

Comme dans le cas des formes quadratiques voisines ou quasi-voisines, les formes bilinéaires voisines vérifient certaines propriétés classiques :

Proposition 3.10 [Laghribi 2005, prop. 5.2, 5.3, cor. 5.6]. *Soient B et C deux formes bilinéaires anisotropes avec C une forme bilinéaire de Pfister.*

(1) *Si B est voisine de C, alors pour toute extension K/F les formes B_K et C_K sont simultanément isotropes ou anisotropes.*

(2) *B est voisine de C si et seulement si $2 \dim B > \dim C$ et $C_{F(B)}$ est isotrope.*

(3) *B est une voisine d'une forme bilinéaire de Pfister si et seulement si il existe $B' \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$ telle que la forme $(B'_{F(B)})_{an}$ soit définie sur F.*

Cependant, d'autres propriétés sur les formes quadratiques voisines ou quasi-voisines ne se généralisent pas aux formes bilinéaires voisines. Par exemple, une forme bilinéaire peut être voisine de deux formes bilinéaires de Pfister non isométriques. De plus, contrairement à un résultat classique de Fitzgerald [1981, th. 1.6], l'exemple suivant illustre un cas d'une forme bilinéaire voisine anisotrope B et d'une forme $C \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$ telles que $(C_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq D_{F(B)}$ pour une certaine forme D mais que $C \perp D$ est isotrope.

Exemple 3.11. Soient $x_1, \dots, x_d, u, v$ des variables sur un corps F_0 de caractéristique 2 ($d \geq 1$), $F = F_0(x_i, u, v)$ et $R = \langle\langle x_1, \dots, x_d \rangle\rangle$. Soient

$$B = \langle 1, 1+u, v, uv \rangle \otimes R, \qquad C = \langle 1, u, u+v, uv \rangle \otimes R$$

et $\pi = \langle\langle u, v \rangle\rangle \otimes R$ qui sont des formes anisotropes. Alors :

(1) B est une voisine de π.

(2) $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (\langle u, 1+u \rangle \otimes R)_{F(B)}$ et $B \perp \langle u, 1+u \rangle \otimes R$ est isotrope.

(3) $C \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$.
(4) $(C_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (\langle v, u+v\rangle \otimes R)_{F(B)}$ et $C \perp \langle v, u+v\rangle \otimes R$ est isotrope.

Démonstration. Puisque les formes $\langle 1, 1+u, v, uv\rangle$ et $\langle 1, u, u+v, uv\rangle$ sont associées à la forme quadratique $[1] \perp [u] \perp [v] \perp [uv]$, on déduit que $\widetilde{B} \simeq \widetilde{\pi} \simeq \widetilde{C}$. Ainsi, B est voisine de π et $C \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$. On a $B \sim \pi \perp \langle u, 1+u\rangle \otimes R$ et $C \sim \pi \perp \langle v, u+v\rangle \otimes R$. Puisque $\pi_{F(B)}$ est isotrope et les formes $(\langle u, 1+u\rangle \otimes R)_{F(B)}$ et $(\langle v, u+v\rangle \otimes R)_{F(B)}$ sont anisotropes (par raison de dimension et le théorème 3.5), on déduit que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (\langle u, 1+u\rangle \otimes R)_{F(B)}$ et $(C_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (\langle v, u+v\rangle \otimes R)_{F(B)}$. □

L'exemple qui va suivre montre qu'une forme bilinéaire anisotrope B peut être une voisine de Pfister sans que la forme $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ soit définie sur F :

Exemple 3.12. Soient x, y, z des variables sur un corps F_0 de caractéristique 2, et $F = F_0(x, y, z)$. Soit $B = \langle x, y, xy, 1+x, z, (1+x)z\rangle$. Alors, B est une voisine de Pfister mais la forme $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ n'est pas définie sur F.

Démonstration. Puisque $[x] \perp [1+x] \simeq [1] \perp [x]$ et $[z] \perp [z(1+x)] \simeq [z] \perp [xz]$, on obtient que B est voisine de $\langle\langle x, y, z\rangle\rangle$. On a nécessairement $\dim(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} = 4$ puisque $B_{F(B)}$ ne peut être métabolique. Ainsi, B est de hauteur et de degré 2. De plus, par le théorème 5.10 B ne peut être bonne et donc la forme $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$ n'est pas définie sur F. □

On finit cette sous-section par un résultat qui montre qu'une forme bilinéaire anisotrope devient une voisine de Pfister anisotrope après extension des scalaires à un corps convenable. L'ingrédient essentiel qu'on utilise est la notion de degré normique d'une forme totalement singulière. On renvoie à [Hoffmann and Laghribi 2004, section 8] pour plus de détails sur cet invariant et certaines de ses applications. Rappelons tout de même que le corps normique d'une forme quadratique totalement singulière non nulle φ, qu'on note $N_F(\varphi)$, est défini par $N_F(\varphi) = F^2(ab \mid a, b \in D_F(\varphi))$. Le degré $[N_F(\varphi) : F^2]$ s'appelle le degré normique de φ, et on le note $\mathrm{ndeg}_F(\varphi)$.

Proposition 3.13. *Soient $n \geq 1$ un entier et B une forme bilinéaire anisotrope telle que* $\dim B \in]2^n, 2^{n+1}]$. *Posons* $\mathrm{ndeg}_F(\widetilde{B}) = 2^l$.
(1) *On a $l \geq n+1$, et B est une voisine de Pfister si et seulement si $l = n+1$.*
(2) *Si $l > n+1$, alors il existe une suite de formes bilinéaires $\pi_{l-n-2} \subset \cdots \subset \pi_0$ telle que chaque π_i soit une $(l-i)$-forme bilinéaire de Pfister et B_K soit une voisine de Pfister anisotrope, où $K = F(\pi_0)\cdots(\pi_{l-n-2})$.*

Démonstration. (1) L'inégalité $l \geq n+1$ provient de [Hoffmann and Laghribi 2004, prop. 8.6]. De plus, par [Hoffmann and Laghribi 2004, prop. 8.9] on a que $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister si et seulement si $l = n+1$, et par la proposition 3.8 ceci équivaut à dire que B est une voisine de Pfister.

(2) On reprend la même preuve de [Laghribi 2004b, prop. 1.9] appliquée à la forme $\widetilde{B}$, et on utilise la proposition 3.8. □

3B. *Les formes bilinéaires voisines strictes.*

Définition 3.14. Une forme bilinéaire anisotrope B est dite une voisine stricte s'il existe une forme bilinéaire anisotrope C telle que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$.

Supposons que $B \perp C$ soit anisotrope.

Lemme 3.15. *Soient B, C, C' des formes bilinéaires anisotropes telles que*

$$(B_{F(B)})_{an} \simeq C_{F(B)} \simeq C'_{F(B)}.$$

Si $B \perp C$ est anisotrope, alors $B \perp C'$ est aussi anisotrope.

Démonstration. Par la proposition 3.9, la forme $B \perp C$ (*resp.* $(B \perp C')_{\mathrm{an}}$) est semblable à une forme bilinéaire de Pfister π_1 (*resp.* π_2) dont B est voisine. Puisque $\widetilde{B}$ est semblable à une sous-forme de $\widetilde{\pi}_2$ et que B est isotrope sur $F(\pi_1)$, on déduit que π_2 est isotrope sur $F(\pi_1)$ et donc elle est métabolique sur $F(\pi_1)$. En particulier, $\dim \pi_1 \leq \dim \pi_2$. Comme $\dim \pi_2 \leq \dim \pi_1$, on a nécessairement $\dim(B \perp C) = \dim(B \perp C')_{\mathrm{an}}$. Ainsi, $B \perp C'$ est anisotrope. □

Soit B une forme bilinéaire voisine stricte et C une autre forme bilinéaire telle $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$. Par le lemme 3.15, B est de l'un des deux types suivants qui s'excluent mutuellement :

Type I : si $B \perp C$ est isotrope.

Type II : si $B \perp C$ est anisotrope.

Voici une propriété sur les formes voisines strictes de type II qui les rapprochent des formes quadratiques voisines :

Proposition 3.16. *Soient B et C des formes bilinéaires anisotropes. Si $(B_{F(B)})_{an} \simeq C_{F(B)}$ et $B \perp C$ est anisotrope, alors $B \perp C$ est semblable à une forme bilinéaire de Pfister et la forme C est unique.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $\dim B \in]2^{n-1}, 2^n]$. Puisque $\dim B > \dim C$ et $(B \perp C)_{F(B)} \sim 0$, alors on obtient par la proposition 3.9 que $B \perp C$ est semblable d'une m-forme bilinéaire de Pfister dont B est voisine. Ainsi, $n = m$ et $\dim C < 2^{n-1} < \dim B$. Si C' est une forme bilinéaire telle que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C'_{F(B)}$, alors par le lemme 3.15 $B \perp C'$ est anisotrope. Comme pour la forme C, on a $\dim C' < 2^{n-1} < \dim B$. Puisque $(C \perp C')_{F(B)} \sim 0$ et $2 \dim B > 2^n > \dim C + \dim C'$, on obtient par la proposition 3.9 que $C \simeq C'$. □

Cette proposition motive la définition suivante :

Définition 3.17. Soient B et C deux formes bilinéaires anisotropes telles que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$ et $B \perp C$ est anisotrope. La forme C est appelée la forme complémentaire de B.

Lemme 3.18. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope qui est une voisine stricte de type II et de forme complémentaire C. Si K est une extension de F telles que B_K et C_K soient anisotropes, alors $(B_{K(B)})_{an} \simeq C_{K(B)}$.*

Démonstration. La condition $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$ donne $B_{K(B)} \sim C_{K(B)}$. Comme B est de forme complémentaire C, on obtient que $\dim B > 2^n > \dim C$ pour un certain entier $n \geq 1$. Comme B_K et C_K sont anisotropes, on a par [Hoffmann and Laghribi 2006, th. 1.1] que $C_{K(B)}$ est anisotrope et donc $(B_{K(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{K(B)}$. □

Définition 3.19. Soient B et C des formes bilinéaires anisotropes telles que $\dim B > \dim C$. Un couple de formes bilinéaires (B', C') est dit lié au couple (B, C) s'il existe une forme bilinéaire η telle que : $B \simeq B' \perp \eta$, $C \simeq C' \perp \eta$ et $(B \perp C)_{\mathrm{an}} \simeq B' \perp C'$. Dans ce cas, on note $(B, C) \dashrightarrow (B', C')$.

Le résultat suivant montre que de toute forme voisine stricte on peut se ramener au cas d'une forme voisine stricte de type II :

Proposition 3.20. *Soient B et C des formes bilinéaires anisotropes telles que $\dim B > \dim C$. Soient B' et C' des formes bilinéaires telles que $(B, C) \dashrightarrow (B', C')$.*
(1) *On a équivalence entre les assertions suivantes*:
(i) $(B_{F(B)})_{an} \simeq C_{F(B)}$.
(ii) $(B'_{F(B')})_{an} \simeq C'_{F(B')}$, $B'_{F(B)}$ *est isotrope et* $C_{F(B)}$ *est anisotrope.*
(2) *Si l'une des conditions équivalentes de* (1) *est vérifiée, alors B et B' sont voisines de la même forme bilinéaire de Pfister, et B' est une voisine stricte de type II.*

Démonstration. Soient B' et C' des formes bilinéaires telles que $(B,C) \dashrightarrow (B',C')$.

(1) (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons que $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$. Alors, $C_{F(B)}$ est anisotrope et $(B' \perp C')_{F(B)} \sim 0$. Puisque $B' \perp C'$ est anisotrope et

$$\dim(B' \perp C') \leq \dim(B \perp C) < 2 \dim B,$$

on déduit par la proposition 3.9 que $B' \perp C'$ est semblable à une n-forme de Pfister dont B est voisine. En particulier, $B'_{F(B)}$ est isotrope puisque $\dim B' > \dim C'$ (car $\dim B > \dim C$). Comme $\dim B' > 2^{n-1} > \dim C'$, on déduit par [Hoffmann and Laghribi 2006, th. 1.1] que $C'_{F(B')}$ est anisotrope. Puisque $(B' \perp C')_{F(B')} \sim 0$, on obtient $(B'_{F(B')})_{\mathrm{an}} \simeq C'_{F(B')}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Puisque $(B'_{F(B')})_{\mathrm{an}} \simeq C'_{F(B')}$, la proposition 3.9 implique que $B' \perp C'$ est semblable à une forme bilinéaire de Pfister. De l'isotropie de $B'_{F(B)}$ on déduit que $(B' \perp C')_{F(B)} \sim 0$. Ainsi, $(B \perp C)_{F(B)} \sim 0$. Comme $C_{F(B)}$ est anisotrope, on a bien $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$.

(2) Si on a l'une des conditions équivalentes de (1), il est clair que B' est une voisine stricte de type II. Comme $\dim B \geq \dim B'$ et $B'_{F(B)}$ est isotrope, on obtient par la proposition 3.10 que B et B' sont voisines d'une même forme bilinéaire de Pfister. □

En vue de l'introduction de la notion de forme complémentaire dans le cas des formes voisines strictes de type II, on suggère la définition suivante d'une forme bilinéaire excellente :

Définition 3.21. Une forme bilinéaire anisotrope B est dite excellente si $\dim B \leq 1$ ou bien $\dim B > 1$ et B est une voisine stricte de type II et de forme complémentaire une forme excellente.

Voici une description de la tour de déploiement standard d'une forme bilinéaire excellente :

Proposition 3.22. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope excellente de dimension ≥ 2 et de tour de déploiement standard $(B_i, F_i)_{0\leq i\leq \mathrm{h}(B)}$. Alors, $\mathrm{h}(B) \geq 1$ et il existe une suite de formes bilinéaires $(C_i)_{0\leq i\leq \mathrm{h}(B)}$ telle que:*
(1) $B_i \simeq (C_i)_{F_i}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, \mathrm{h}(B)\}$.
(2) C_i est une voisine stricte de type II et de forme complémentaire C_{i+1} pour tout $i \in \{0, \ldots, \mathrm{h}(B)-1\}$.

Démonstration. Il est évident que $h = \mathrm{h}(B) \geq 1$. Supposons que B soit excellente. Alors, il existe une suite $(C_i)_{0\leq i\leq k}$ de formes bilinéaires telles que $C_0 = B$, C_k est la forme nulle, et C_i soit une voisine stricte de type II et de forme complémentaire C_{i+1}. Supposons qu'on ait $B_i \simeq (C_i)_{F_i}$ pour un certain $i < \mathrm{h}(B)$. Alors, $F_{i+1} = F_i(C_i)$ et on a

$$(B_i)_{F_{i+1}} \sim B_{i+1} \sim (C_i)_{F_i(C_i)} \sim (C_{i+1})_{F_{i+1}}. \tag{3}$$

Comme C_i est une voisine de forme complémentaire C_{i+1} et que C_i est anisotrope sur F_i, alors la forme C_{i+1} est aussi anisotrope sur F_i. On déduit par le lemme 3.18 que $((C_i)_{F_i(C_i)})_{\mathrm{an}} \simeq (C_{i+1})_{F_{i+1}}$, et la relation (3) implique que $B_{i+1} \simeq (C_{i+1})_{F_{i+1}}$.

Ainsi de suite, on aboutit à $B_{h-1} \simeq (C_{h-1})_{F_{h-1}}$ et donc la forme C_h est forcèment nulle. En particulier, $k = \mathrm{h}(B)$. □

4. L'invariant degré pour les formes bilinéaires

Pour introduire le degré d'une forme bilinéaire, on se basera sur le théorème suivant qui classifie les formes bilinéaires de hauteur 1 :

Théorème 4.1. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope. Alors, B est de hauteur 1 si et seulement si B est semblable à une forme bilinéaire de Pfister ou est semblable à la partie pure d'une forme bilinéaire de Pfister.*

Démonstration. Le théorème a été prouvé dans [Laghribi 2005, cor. 5.5] lorsque $\dim B$ est paire. Supposons que $\dim B$ soit impaire. Alors, par hypothèse on a $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq \langle\alpha\rangle_{F(B)}$ avec $\alpha = \det B$. Par conséquent, $(B \perp \langle\alpha\rangle)_{F(B)} \sim 0$. On a $B \perp \langle\alpha\rangle \not\sim 0$, et le théoème 3.5 donne $\dim B \leq \dim(B \perp \langle\alpha\rangle)_{\mathrm{an}}$. Ainsi, $B \perp \langle\alpha\rangle$ est anisotrope. Par la proposition 3.9, $B \perp \langle\alpha\rangle \simeq \beta\pi$ avec π une forme bilinéaire de Pfister et $\beta \in F^*$. Par la multiplicativité d'une forme bilinéaire de Pfister [Baeza 1978, cor. 2.16, page 101], et l'unicité de la partie pure d'une telle forme (cor. 2.18, *ibid.*), il est clair que $\alpha B \simeq \pi'$. □

Corollaire 4.2. *Soit B une forme bilinéaire non nulle de tour de déploiement standard $(F_i, B_i)_{0\leq i\leq h}$ avec $h = \mathrm{h}(B)$. Alors, il existe une unique forme bilinéaire de Pfister π telle que B_{h-1} soit semblable à π ou semblable à la partie pure de π suivant que* $\dim B$ *est paire ou impaire.*

Démonstration. On utilise le théorème 4.1 et le fait que B_{h-1} est de hauteur 1, ainsi que la multiplicativité et l'unicité de la partie pure d'une forme de Pfister. □

Définition 4.3. Soit B une forme bilinéaire non nulle de tour de déploiement standard $(F_i, B_i)_{0\leq i\leq h}$ avec $h = \mathrm{h}(B) \geq 1$.
(1) Le corps F_{h-1} s'appelle le corps dominant de B.
(2) La forme dominante de B est l'unique forme bilinéaire de Pfister correspondant à B_{h-1} au sens du corollaire 4.2.
(3) Si $\dim B$ est paire, le degré de B est l'entier d tel que $\dim B_{h-1} = 2^d$. Si $\dim B$ est impaire, on dit que B est de degré 0. Dans les deux cas, on désigne par $\deg(B)$ le degré de B.

Notations 4.4. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par :
(1) $J_n^b(F)$ l'ensemble des formes bilinéaires de degré $\geq n$.
(2) $\overline{I^n}F$ le quotient $I^nF/I^{n+1}F$.
(3) $\overline{I^n}(K/F)$ le noyau de l'homomorphisme $\overline{I^n}F \longrightarrow \overline{I^n}K$ induit par l'inclusion $F \subset K$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 4.5. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a $I^nF = J_n^b(F)$.*

On introduit quelques résultats préliminaires nécessaires pour la preuve de ce théorème.

Lemme 4.6. *Soient t une variable sur F, B une forme bilinéaire sur F et $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$. Alors*:
(1) *B est isotrope si et seulement si φ est isotrope.*
(2) $i_W(\varphi) = 2i_W(B)$. *En particulier, B est métabolique si et seulement si φ est hyperbolique.*

Démonstration. (1) Si φ est anisotrope, alors B est aussi anisotrope. Supposons que B soit anisotrope. On pose $B \simeq \langle a_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle a_n \rangle$ pour $a_1, \cdots, a_n \in F^*$ convenables. On a $\varphi \simeq a_1[1, t^{-1}] \perp \cdots \perp a_n[1, t^{-1}]$. Supposons que φ soit isotrope, et soit $(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n) \in F(t)^{2n} - \{0\}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(p_i^2 + p_i q_i + t^{-1} q_i^2) = 0. \tag{4}$$

Sans perdre de généralités, on peut supposer que $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ sont des polynômes non tous divisibles par t. On multiplie (4) par t, on substitue 0 à t, et on utilise l'anisotropie de B pour déduire que les polynômes q_i sont tous divisibles par t. On substitue de nouveau 0 à t et on utilise l'anisotropie de B pour déduire cette fois-ci que t divise tous les polynômes p_i, une contradiction.

(2) Soit $B \simeq M \perp B_{\mathrm{an}}$ la décomposition de Witt de B. On a $\varphi \simeq M \otimes [1, t^{-1}] \perp B_{\mathrm{an}} \otimes [1, t^{-1}]$ et la forme $M \otimes [1, t^{-1}]$ est hyperbolique. Par (1) on a que $B_{\mathrm{an}} \otimes [1, t^{-1}]$ est anisotrope. Ainsi, $i_W(\varphi) = \dim M = 2i_W(B)$. □

Lemme 4.7. *Soient t une variable sur F, B une forme bilinéaire non nulle de degré d. Alors,* $\deg(B \otimes [1, t^{-1}]) \leq d + 1$.

Démonstration. Posons $K = F(t)$. Soient $(F_i, B_i)_{0 \leq i \leq h}$ et $(K_j, \varphi_j)_{0 \leq j \leq k}$ les tours de déploiement standard respectives de B et φ, avec $h = \mathrm{h}(B)$ et $k = \mathrm{h}(\varphi)$. On a donc $\dim(B_{F_{h-1}})_{\mathrm{an}} = 2^d$. Par le lemme 4.6, $\dim(\varphi_{K \cdot F_{h-1}})_{\mathrm{an}} = 2^{d+1}$. Puisque $(K_j, \varphi_j)_{0 \leq j \leq k}$ est la tour de déploiement générique de φ [Knebusch and Rehmann 2000], il existe $1 \leq j \leq k-1$ tel que $\dim \varphi_j = 2^{d+1}$. Ainsi, $\deg(\varphi) \leq d + 1$. □

On donne l'analogue du Hauptsatz d'Arason-Pfister pour les formes bilinéaires. Baeza a prouvé le même résultat dans le cas des formes quadratiques en caractéristique 2 [Baeza 1973] :

Lemme 4.8. *Soit $n \geq 0$ un entier et B une forme bilinéaire non métabolique. Si $B \in I^n F$, alors $\dim B_{an} \geq 2^n$. Si $\dim B_{an} = 2^n$, alors B_{an} est semblable à une n-forme bilinéaire de Pfister.*

Démonstration. Sans perdre de généralités, on peut supposer que B est anisotrope. Soit t une variable sur F et $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$. On a $\varphi \in I_q^{n+1} F(t)$. Par le lemme 4.6, φ est anisotrope. Par [Baeza 1973] $\dim \varphi \geq 2^{n+1}$, i.e., $\dim B \geq 2^n$. Si $\dim B = 2^n$, alors $B_{F(B)} \sim 0$ puisque $B_{F(B)} \in I^n F(B)$. Par le théorème 4.1, B est semblable à une n-forme bilinéaire de Pfister. □

On aura besoin du théorème de la sous-forme dans le cas des formes quadratiques :

Théorème 4.9 [Hoffmann and Laghribi 2004, th. 4.2]. *Soient φ et φ' deux formes quadratiques anisotropes telles que φ' soit non singulière et devienne hyperbolique sur $F(\varphi)$. Alors, $\varphi \prec \alpha\varphi'$ pour tout scalaire $\alpha \in D_F(\varphi) D_F(\varphi')$.*

Comme on l'a évoqué dans l'introduction, l'analogue du théorème 4.5 pour les formes quadratiques en caractéristique 2 est dû à Aravire et Baeza [2003] :

Théorème 4.10. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a que $I_q^n F$ est l'ensemble des formes quadratiques non singulières de degré $\geq n$.*

Ce théorème 4.10 permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 4.11. *Soient $n \geq 0$ un entier, $\varphi \in I_q^{n+1} F$ et ψ une forme quadratique totalement singulière anisotrope de dimension $> 2^n$. Si $\varphi_{F(\psi)} \in I_q^{n+2} F(\psi)$, alors $\varphi \in I_q^{n+2} F$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi \notin I_q^{n+2} F$. Par le théorème 4.10, on déduit que φ est de degré $n+1$. Soient $(F_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq h}$ sa tour de déploiement standard et π sa forme dominante avec $h = \mathrm{h}(\varphi)$. Puisque $\pi_{F_{h-1}(\psi)} \in I^{n+2} F_{h-1}(\psi)$, on obtient par le lemme 4.8 que $\pi_{F_{h-1}(\psi)} \sim 0$. Comme ψ est totalement singulière de dimension $> 2^n$, on obtient par le théorème 4.9 que $\pi \sim 0$, une contradiction. □

Lemme 4.12. *Soient t une variable sur F, $B \in I^n F$ une forme bilinéaire telle que $B \otimes [1, t^{-1}] \in I_q^{n+2} F(t)$. Alors, $B \in I^{n+1} F$.*

Démonstration. Posons $B = \pi_1 \perp \cdots \perp \pi_m$ avec $\pi_1, \cdots, \pi_m$ des formes semblables à des n-formes bilinéaires de Pfister anisotropes. On procède par induction sur m. Si $m \leq 1$, alors le lemme 4.8 implique que $B \otimes [1, t^{-1}]$ est hyperbolique, et donc B est métabolique par le lemme 4.6. Supposons que $m \geq 2$. Sur le corps $L = F(\pi_m)$ et par induction sur m, on a que $B_L \in I^{n+1} L$. Ainsi, $B + I^{n+1} F \in \overline{I^n}(L/F)$. Par un résultat de Aravire et Baeza [2003], on déduit que $B \perp \pi \in I^{n+1} F$ pour une n-forme bilinéaire de Pfister convenable. Puisque $B \otimes [1, t^{-1}] \in I_q^{n+2} F(t)$, on obtient que $\pi \otimes [1, t^{-1}] \in I^{n+2} F(t)$. Les lemmes 4.6 et 4.8 impliquent que $\pi \sim 0$. Ainsi, $B \in I^{n+1} F$. □

Le résultat suivant étend un calcul fait auparavant par Aravire et Baeza uniquement dans le cas du corps de fonctions d'une forme bilinéaire de Pfister [Aravire and Baeza 2003] :

Proposition 4.13. *Soit $n \geq 1$ un entier et ψ une forme quadratique totalement singulière telle que* $\dim \psi_{an} > 2^n$. *Alors, $\overline{I^n}(F(\psi)/F) = \{0\}$.*

Démonstration. On sait que si ψ est isotrope, alors $F(\psi)$ est une extension transcendante pure de $F(\psi_{\mathrm{an}})$. Donc, sans perdre de généralités, on peut supposer que ψ est anisotrope. Soient $B \in I^n F$ telle que $B + I^{n+1} F \in \overline{I^n}(F(\psi)/F)$, et $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$. Alors, $\varphi \in I_q^{n+1} F(t)$ et $\varphi + I_q^{n+2} F \in \overline{I_q^{n+1}}(F(t)(\psi)/F(t))$. Par le corollaire 4.11, $\varphi \in I_q^{n+2} F(t)$. Le lemme 4.12 implique que $B \in I^{n+1} F$. □

On obtient un corollaire qui va permettre de simplifier certains calculs plus tard :

Corollaire 4.14. *Soient $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ des formes quadratiques totalement singulières anisotropes de dimension $> 2^n$ telles que φ_i soit anisotrope sur $F(\varphi_0)\cdots(\varphi_{i-1})$ pour tout $i \geq 1$. Soit $L = F(\varphi_0)\cdots(\varphi_k)$. Alors*:
(1) $\overline{I^j}(L/F) = \{0\}$ *pour tout* $j \leq n$.
(2) *Une forme bilinéaire métabolique sur L appartient à $I^{n+1}F$.*

Démonstration. Puisque $\dim \varphi_i > 2^j$ pour tous $j \leq n$ et $i \in \{0, \cdots, k\}$, on peut appliquer de manière répétée la proposition 4.13. □

Démonstration du théorème 4.5. Soit $n \geq 1$ un entier.

(1) $I^nF \subset J_n^b(F)$: Soient $B \in I^nF$ non nulle, t une variable sur F et $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$. Par le lemme 4.7, $\deg(\varphi) \leq \deg(B)+1$. Comme $\varphi \in I_q^{n+1}K$, on déduit par le théorème 4.10 que $\deg(\varphi) \geq n+1$, i.e., $\deg(B) \geq n$ et donc $B \in J_n^b(F)$.

(2) $J_n^b(F) \subset I^nF$: Soit $B \in J_n^b(F)$ non nulle. On peut supposer B anisotrope et on procède par induction sur $\dim B$. On a $\dim B \geq 2^n$.

Si $\dim B = 2^n$, alors $B_{F(B)}$ est métabolique. Par le théorème 4.1, B est semblable à une n-forme bilinéaire de Pfister, et donc $B \in I^nF$.

Si $\dim B > 2^n$. Puisque $\deg(B) = \deg(B_{F(B)})$, on obtient par induction que $B_{F(B)} \in I^nF(B)$. Par la proposition 4.13, on déduit que si $B \in I^kF$ avec $k < n$, alors $B \in I^{k+1}F$. Ainsi, en appliquant ceci de manière successive pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on déduit que $B \in I^nF$. □

Maintenant on donne un corollaire qui complète le lemme 4.7 :

Corollaire 4.15. *Soient t une variable sur F et B une forme bilinéaire non nulle. Alors*, $\deg(B) + 1 = \deg(B \otimes [1, t^{-1}])$.

Démonstration. Posons $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$, $d = \deg(B)$ et $d' = \deg(\varphi)$. Si $d = 0$, alors il est clair que $d' = 1$. Supposons $d \geq 1$. L'inégalité $d' \leq d+1$ provient du lemme 4.7. Si $d+1 > d'$, alors $B \in J_{d'}^b(F) = I^{d'}F$. Par conséquent, $\varphi \in I_q^{d'+1}F$, une contradiction. □

5. Les formes bilinéaires bonnes

5A. ***Généralités sur les formes bilinéaires bonnes.*** La théorie de déploiement met en évidence une classe importante de formes quadratiques, celle des formes quadratiques bonnes ("good forms" dans la terminologie de [Fitzgerald 1984]). Dans cette section, on va étendre certains résultats connus sur ces formes quadratiques au cas des formes bilinéaires en caractéristique 2.

Définition 5.1. Une forme bilinéaire non nulle est dite bonne si sa forme dominante est définie sur F.

Exemple 5.2. Si B est une forme bilinéaire de dimension paire et de déterminant $d \neq 1$, alors elle est bonne de degré 1 et de forme dominante $\langle 1, d\rangle_L$, où L est le corps dominant de B.

Démonstration. Soit π la forme dominante de B. Puisque $B_L \sim \pi$, les formes B_L et π ont le même déterminant (modulo un carré). Ainsi, π ne peut être qu'une 1-forme bilinéaire de Pfister et donc $\pi \simeq \langle 1, d\rangle_L$. □

Voici quelques propriétés générales liées aux formes bilinéaires bonnes :

Proposition 5.3. *Soit B une forme bilinéaire non nulle de hauteur h. On note $(F_i, B_i)_{0\leq i\leq h}$ la tour de déploiement standard de B et τ sa forme dominante. Posons* $\dim \tau = 2^d$.

(1) *Si B est bonne, alors il existe une unique d-forme bilinéaire de Pfister C définie sur F telle que $\tau \simeq C_{F_{h-1}}$.*

(2) *Si B est de dimension paire, alors B est bonne si et seulement si $B \perp C \in I^{d+1}F$ pour une certaine d-forme bilinéaire de Pfister C. Dans ce cas, $C_{F_{h-1}}$ est la forme dominante de B.*

(3) *Si B est de dimension impaire, alors B est bonne si et seulement si $B \perp \langle \det B\rangle$ est bonne. Dans ce cas, B et $B \perp \langle \det B\rangle$ ont la même forme dominante.*

(4) *Si* $\dim B$ *est paire et C est une d-forme bilinéaire de Pfister telle que $B \perp rC \in I^{d+2}F$ pour $r \in F^*$ convenable, alors $B_{h-1} \simeq (rC)_{F_{h-1}}$.*

Avant de prouver cette proposition, on donne un lemme préliminaire :

Lemme 5.4. *Soient B et C des formes bilinéaires anisotropes avec C une forme bilinéaire de Pfister. Soit t une variable sur F.*

(1) *Si $B \otimes [1, t^{-1}]$ est hyperbolique sur le corps de fonctions de $C \otimes [1, t^{-1}]$, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F^*$ des scalaires convenables tels que $B \simeq \alpha_1 C \perp \cdots \perp \alpha_s C$.*

(2) *Si* $\dim B = \dim C = 2^d$ *et $aB \perp C \in I^{d+1}F$ pour un certain $a \in F^*$, alors B est semblable à C.*

Démonstration. Posons $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$ et $\psi = C \otimes [1, t^{-1}]$.

(1) On procède par induction sur $\dim B$. Soit $\alpha_1 \in D_F(B)D_F(C)$. Par le théorème 4.9, on a $\alpha_1\psi \subset \varphi$. Du lemme 4.6 on obtient $\alpha_1 C \subset B$. Soit B' une forme bilinéaire telle que $B \simeq \alpha_1 C \perp B'$. Puisque $(\varphi \perp \alpha_1\psi)_{\mathrm{an}} \simeq B' \otimes [1, t^{-1}]$ est hyperbolique sur $F(t)(\psi)$ et que $\dim B' < \dim B$, on obtient par induction que $B' \simeq \alpha_2 C \perp \cdots \perp \alpha_s C$ pour certains $\alpha_2, \dots, \alpha_s \in F^*$. Ainsi, $B \simeq \alpha_1 C \perp \cdots \perp \alpha_s C$.

(2) Puisque $aB \perp C \in I^{d+1}F$, on obtient que $a\varphi \perp \psi \in I^{d+2}F(t)$. Par le lemme 4.8, la forme φ devient hyperbolique sur le corps de fonctions de ψ. Par l'assertion (1), on déduit que B est semblable à C. □

Démonstration de la proposition 5.3. Soit B une forme bilinéaire non nulle de hauteur h, de degré d et de tour de déploiement standard $(F_i, B_i)_{0\leq i\leq h}$. Soit τ sa forme dominante.

La proposition est clairement vérifiée lorsque $h = 1$. On peut donc supposer $h \geq 2$.

(1) Supposons que B soit bonne. Soit ρ une forme bilinéaire définie sur F telle que $\rho_{F_{h-1}} \simeq \tau$. Alors $\rho_{F_{h-1}} \in I^d F_{h-1}$. Soit k le plus grand entier tel que $\rho \in I^k F$. Par le lemme 4.8, on a $k \leq d$. Si $k < d$, alors $\rho_{F_{h-1}} \in \overline{I^k}(F_{h-1}/F)$. Par le corollaire 4.14(1), $\rho \in I^{k+1}F$ car F_{h-1} est la succession de corps de fonctions de formes bilinéaires de dimension $> 2^d$, une contradiction. Ainsi, $\rho \in I^d F$ et par le lemme 4.8 ρ est semblable à une d-forme bilinéaire de Pfister C.

Il reste à prouver l'unicité de C. En effet, si C' est une autre forme bilinéaire de Pfister telle que $\tau \simeq C'_{F_{h-1}}$, alors $(C \perp C')_{F_{h-1}} \sim 0$. Le corollaire 4.14(2) implique que $C \perp C' \in I^{d+1}F$. Comme $C \perp C'$ est isotrope (car $1 \in D_F(C) \cap D_F(C')$), on obtient par le lemme 4.8 que $C \simeq C'$.

(2) Supposons que $\dim B$ soit paire. Soit C une d-forme bilinéaire de Pfister définie sur F.

Si $\tau \simeq C_{F_{h-1}}$, alors $B_{F_{h-1}} \perp C_{F_{h-1}} \in I^{d+1}F$. Puisque $B \perp C \in I^d F$, on déduit que $B \perp C + I^{d+1}F \in \overline{I^d}(F_{h-1}/F)$. Par le corollaire 4.14(1), on obtient $B \perp C \in I^{d+1}F$.

Réciproquement, si $B \perp C \in I^{d+1}F$, alors $x\tau \perp C_{F_{h-1}} \in I^{d+1}F_{h-1}$ pour $x \in F^*_{h-1}$ convenable. Par le lemme 5.4(2) et la multiplicativité d'une forme de Pfister, on déduit que τ est isométrique à $C_{F_{h-1}}$, et donc B est bonne.

(3) Supposons que $\dim B$ soit impaire. Posons $\alpha = \det B$.

Si B est bonne, alors par l'assertion (1) il existe C une d-forme bilinéaire de Pfister tel que $\tau \simeq C_{F_{h-1}}$. Comme B_{h-1} est semblable à la partie pure τ' de τ, on obtient par comparaison des déterminants que $\alpha B_{h-1} \simeq \tau'$. Ainsi, $\alpha B_{h-1} \perp \langle 1 \rangle \simeq C_{F_{h-1}}$, et donc $(\alpha B \perp \langle 1 \rangle \perp C)_{F_{h-1}} \sim 0$. Comme F_{h-1} est une succession de corps de fonctions de formes bilinéaires de dimension $\geq 2^d + 1$, on obtient par le corollaire 4.14(2) que $\alpha B \perp \langle 1 \rangle \perp C \in I^{d+1}F$. Ainsi, $\alpha B \perp \langle 1 \rangle$ est bonne, c'est-à-dire, $B \perp \langle \alpha \rangle$ est aussi bonne.

Réciproquement, supposons que $B \perp \langle \alpha \rangle$ soit bonne. Alors, il existe C une d-forme bilinéaire de Pfister tel que $B \perp \langle \alpha \rangle \perp C \in I^{d+1}F$. En particulier, $B_{h-1} \perp (\langle \alpha \rangle \perp C)_{F_{h-1}} \in I^{d+1}F_{h-1}$. Comme $B_{h-1} \perp \langle \alpha \rangle$ est semblable à τ, on obtient par le lemme 5.4 que $\tau \simeq C_{F_{h-1}}$ et donc B est bonne.

(4) Supposons que $B \perp rC \in I^{d+2}F$ pour un certain $r \in F^*$. Alors, $B_{h-1} \perp (rC)_{F_{h-1}} \in I^{d+2}F_{h-1}$. Par le lemme 4.8 on a que $B_{h-1} \simeq (rC)_{F_{h-1}}$. □

L'exemple suivant montre que la réciproque de l'assertion (4) de la proposition 5.3 n'est pas vraie en général :

Exemple 5.5. Soient F_0 un corps de caractéristique 2 et x, y des variable sur F_0. Soient $F = F_0(x, y)$ et $B = \langle 1, x, x+y, xy \rangle$. Alors :
(1) B est bonne de hauteur 2, de degré 1 et de forme dominante $\tau = \langle 1, y(x+y) \rangle$.
(2) On a $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (y\tau)_{F(B)}$ mais $B \perp y\tau$ ne peut être dans I^3F.

Démonstration. Soit $\pi = \langle\langle x, y \rangle\rangle$. Puisque $\pi \in \mathscr{A}(\widetilde{B})$, la forme B est voisine de π. De plus, B est de déterminant $y(x+y) \neq 1$, donc B est nécessairement de hauteur

2, de degré 1 et de forme dominante τ. Puisque $\pi_{F(B)}$ est isotrope et $B \sim \pi \perp y\tau$, on obtient $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (y\tau)_{F(B)}$. Mais par le lemme 4.8, on ne peut avoir $B \perp \alpha\tau \in I^3 F$ car B est anisotrope. □

5B. ***Formes bilinéaires bonnes de hauteur 2.*** La démonstration du lemme suivant se fait comme dans le cas des formes quadratiques en utilisant la multiplicativité d'une forme bilinéaire de Pfister :

Lemme 5.6. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F^*$ et B une forme bilinéaire de Pfister. Alors*, $i_W(\perp_{i=1}^{s} \alpha_i B) = 0$ *ou* $\geq \dim B$.

On étend aux formes bilinéaires un résultat récent de Karpenko [2004] décrivant les dimensions de certaines formes quadratiques de I^n sur un corps de caractéristique $\neq 2$:

Proposition 5.7. *Soient $n \geq 1$ un entier et $B \in I^n F$ anisotrope telle que* $\dim B < 2^{n+1}$. *Alors*, $\dim B \in \{2^{n+1} - 2^i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$.

Démonstration. Soit t une variable sur F. On a $B \otimes [1, t^{-1}] \in I_q^{n+1} F(t)$ qui est de dimension $< 2^{n+2}$. En considérant $F(t)$ comme étant le corps résiduel d'un corps K de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, on peut utiliser le résultat de Karpenko [2004] pour déduire qu'un relèvement de $B \otimes [1, t^{-1}]$ à K a pour dimension $2^{n+2} - 2^i$ avec $1 \leq i \leq n+2$ (en fait on a ceci pour $2 \leq i \leq n+2$ puisque $\dim B$ est paire). Ainsi, $\dim B \in \{2^{n+1} - 2^i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$. □

Remarque 5.8. La même idée de la preuve de la proposition 5.7 permet d'avoir l'analogue du résultat de Karpenko dans le cas des formes non singulières. Mais on n'en a pas besoin ici.

Maintenant on donne nos résultats classifiant les formes bilinéaires bonnes de hauteur 2. Dans le cas d'une forme de dimension impaire on obtient :

Proposition 5.9. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope bonne de hauteur* 2 *et de dimension impaire. Alors*:
(1) *B est une voisine de Pfister.*
(2) *Il existe π semblable à une forme bilinéaire de Pfister dont B est voisine*, *et C une forme bilinéaire semblable à la partie pure d'une certaine d-forme bilinéaire de Pfister telles que*: $\dim B > 2^d$ *et $B \sim C \perp \pi$.*
Réciproquement, *une forme bilinéaire B vérifiant les conditions de* (2) *est bonne de hauteur* 2.

Démonstration. Soit B une forme bilinéaire anisotrope de dimension impaire et de hauteur 2. Soit $(B_i, F_i)_{0 \leq i \leq 2}$ sa tour de déploiement standard. Par le corollaire 4.2, il existe une unique forme bilinéaire de Pfister τ définie sur F tel que $B_1 \simeq \alpha\tau'$ pour un certain $\alpha \in F_1^*$. En comparant les déterminants, on peut supposer que $\alpha \in F^*$. De plus, si $\dim \tau = 2^d$ alors $\dim B \geq 2^d + 1 > 2^d$ puisque $\dim B > \dim B_1 = 2^d - 1$.

Posons $C = \alpha\tau'$. Puisque $(B \perp C)_{F(B)} \sim 0$ et $\dim B > \dim C$, on obtient par la proposition 3.9 que la forme $(B \perp C)_{\mathrm{an}}$ est semblable à une forme bilinéaire de Pfister dont B est voisine. La forme π sera alors $(B \perp C)_{\mathrm{an}}$. D'où le résultat.

Réciproquement, si B est une forme bilinéaire qui vérifie les conditions de (2), alors $B_{F(B)} \sim C_{F(B)}$. Puisque $\dim B > 2^d > \dim C$, on obtient par [Hoffmann and Laghribi 2006] que la forme $C_{F(B)}$ est anisotrope. Ainsi, $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq C_{F(B)}$. Comme C est semblable à la partie pure d'une forme bilinéaire de Pfister, on a que $C_{F(B)}$ est de hauteur 1, et donc B est bonne de hauteur 2. □

Le résultat suivant classifie les formes bilinéaires bonnes de hauteur 2 et de dimension paire :

Théorème 5.10. *Soit B une forme bilinéaire non nulle de dimension paire, de hauteur 2 et de degré d. On suppose que B est bonne de forme dominante C.*
(1) *Si* $\dim B > 2^{d+1}$, *alors on a deux cas*:
(i) *soit* $\dim B$ *est une puissance de* 2*. Dans ce cas, on ne peut pas conclure.*
(ii) *soit* $\dim B$ *n'est pas une puissance de* 2*. Dans ce cas, il existe ρ une forme bilinéaire de dimension impaire tel que $B \simeq \rho \otimes C$ et $B \perp \alpha C$ soit semblable à une n-forme bilinéaire de Pfister avec $n \geq d+2$ et $\alpha = \det \rho$.*
(2) *Si* $\dim B \leq 2^{d+1}$, *alors* $\dim B = 2^{d+1}$ *et $B \sim xC \perp \pi$ avec $x \in F^*$ et π une forme semblable à une $(d+1)$-forme bilinéaire de Pfister.*
Réciproquement, les conditions dans (1)(ii) (*resp. dans* (2)) *sont suffisantes pour dire que B est bonne de hauteur* 2, *de degré d et de forme dominante C.*

Démonstration. Soient t une variable sur F, $L = F(t)$, $\varphi = B \otimes [1, t^{-1}]$ et $\tau = C \otimes [1, t^{-1}]$. Puisque $(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq a(C_{F(B)})$ pour un certain $a \in F(B)^*$, alors $\varphi_{L(B)} \sim a(\tau_{L(B)})$. Ainsi,

$$\varphi_{L(\tau)(B)} \sim 0. \tag{5}$$

En particulier, $\varphi_{L(\tau)(\varphi)(B)} \sim 0$. Ceci implique que

$$\varphi_{L(\tau)(\varphi)} \sim 0 \tag{6}$$

car sinon la forme $\widetilde{B}_{L(\tau)(\varphi)}$ (qui est anisotrope par [Laghribi 2002a]) serait dominée par $(\varphi_{L(\tau)(\varphi)})_{\mathrm{an}}$, ce qui n'est pas possible par le théorème 4.9 car $\dim(\varphi_{L(\tau)(\varphi)})_{\mathrm{an}} < \dim \varphi = 2 \dim \widetilde{B}$.

(1) Supposons que $\dim B > 2^{d+1}$ et que $\dim B$ ne soit pas une puissance de 2. En particulier, $\dim \varphi$ n'est pas une puissance de 2. La forme $\varphi_{L(\tau)}$ est nécessairement isotrope et donc par (6) $\varphi_{L(\tau)} \sim 0$, car sinon $\varphi_{L(\tau)}$ serait de hauteur 1 et donc serait semblable à une forme de Pfister [Laghribi 2002b], en particulier $\dim \varphi$ serait une puissance de 2. Par le lemme 5.4 on obtient $B \simeq \rho \otimes C$ pour une certaine forme bilinéaire ρ. On a $\dim \rho$ impaire car sinon B serait dans $I^{d+1}F$, ce qui contredirait $\deg(B) = d$. Pour $\alpha = \det \rho$, on a $\rho \perp \langle \alpha \rangle \in I^2 F$, ainsi $B \perp \alpha C \in I^{d+2} F$. Puisque

$(B_{F(B)})_{an}$ est semblable à $C_{F(B)}$, on obtient par le lemme 4.8 que $(B \perp \alpha C)_{F(B)} \sim 0$. La forme $B \perp \alpha C$ est anisotrope, car sinon par le lemme 5.6 $i_W(B \perp \alpha C) \geq \dim C = 2^d$, et donc on aurait $\dim(B \perp \alpha C)_{an} \leq \dim B - \dim C < \dim B$. Le théorème 3.5 impliquerait $B \perp \alpha C \sim 0$ et donc B serait isotrope, une contradiction. Par la proposition 3.9, $B \perp \alpha C$ est semblable à une n-forme de Pfister. Puisque $\dim(B \perp \alpha C) > 2 \dim C = 2^{d+1}$, on obtient $n \geq d+2$.

(2) Supposons que $\dim B \leq 2^{d+1}$.

(i) Cas où $B_{F(C)}$ est anisotrope. Puisque $B_{F(B)(C)}$ est métabolique, on déduit par le théorème 4.1 que $B_{F(C)}$ est semblable à une forme bilinéaire de Pfister. Ainsi, $\dim B = 2^{d+1}$ puisque $\dim B > 2^d$.

(ii) Cas où $B_{F(C)}$ est isotrope. Par la relation (5) et [Laghribi 2005, prop. 3.9], on obtient que $\varphi_{L(\tau)(C)}$ est hyperbolique. Comme $\tau_{L(C)}$ est isotrope, l'extension $L(C)(\tau)/L(C)$ est transcendante pure et donc $\varphi_{L(C)}$ est hyperbolique. Par le lemme 4.6, on a que $B_{F(C)}$ est métabolique. Puisque $2^d < \dim B \leq 2^{d+1}$, on déduit de [Laghribi 2005, th. 1.2] que $B \simeq \beta_1 B_1 \perp \beta_2 B_2$, où B_1, B_2 sont des d-formes bilinéaires de Pfister associées à $\widetilde{C}$. En particulier, $\dim B = 2^{d+1}$.

Ainsi, dans les deux cas (i) et (ii) on a que $\dim B = 2^{d+1}$.

Soit $x \in D_F(B)$. On a $0 < \dim(B \perp xC)_{an} < 2^{d+1} + 2^d$ du fait que $B \perp xC$ est isotrope mais non métabolique. Puisque $B \perp xC \in I^{d+1}F$, on déduit par la proposition 5.7 que $\dim(B \perp xC)_{an} = 2^{d+1}$. Par le lemme 4.8, il existe π semblable à une $(d+1)$-forme bilinéaire de Pfister tel que $B \perp xC \sim \pi$.

Réciproquement, si on est dans le cas (1)(ii) ou (2), alors $B \perp C \in I^{d+1}F$. La proposition 5.3 implique que B est bonne de degré d et de forme dominante C. Il reste à prouver que B est de hauteur 2. En effet, dans le cas (1)(ii) on a $B_{F(B)} \sim (\alpha C)_{F(B)}$. Puisque $\dim C = 2^d < \dim B$, la forme $C_{F(B)}$ est anisotrope [Hoffmann and Laghribi 2006]. Ainsi, $(B_{F(B)})_{an} \simeq (\alpha C)_{F(B)}$ et donc B est de hauteur 2. Si on est dans le cas (2), alors $B_{F(B)(C)} \sim \pi_{F(B)(C)}$. Comme $\dim B = \dim \pi$ et $B_{F(B)}$ est isotrope, la forme $\pi_{F(B)(C)}$ est isotrope et donc métabolique. Ainsi, $B_{F(B)(C)} \sim 0$. La forme $B_{F(B)}$ ne peut être métabolique, car sinon B serait semblable à une $(d+1)$-forme de Pfister et donc $xC \in I^{d+1}F$, ce qui contredirait l'anisotropie de C. Ainsi, $0 < \dim(B_{F(B)})_{an} < 2^{d+1}$. Puisque $B_{F(B)(C)} \sim 0$, on a par [Laghribi 2005, th. 1.2] que $(B_{F(B)})_{an}$ est semblable à une d-forme bilinéaire de Pfister et donc B est de hauteur 2. □

On n'a pas une caractérisation des formes bilinéaires indiquées dans l'assertion (1)(i) du théorème 5.10, c'est-à-dire, les formes B anisotropes qui sont bonnes de hauteur 2 telles que $\dim B$ soit une puissance de 2 strictement supérieure à $2^{\deg(B)+1}$. Ci-dessous on donne quelques exemples de telles formes bilinéaires.

Exemple 5.11. Soient $k \geq 2$ et $d \geq 1$ des entiers et $x_1, \ldots, x_{d-1}, y_1, \ldots, y_{k-1}, u, v$ des variables sur un corps F_0 de caractéristique 2. Soit $F = F_0(u, v, x_i, y_j)$. On considère $C = \langle\langle x_1, \dots, x_{d-1}\rangle\rangle$, $D = \langle\langle y_1, \dots, y_{k-1}\rangle\rangle$ et $\pi = \langle\langle u, v\rangle\rangle \otimes D \otimes C$. Alors, la forme

$$B = \langle 1, u, u+v, uv\rangle \otimes C \perp \langle\langle u, v\rangle\rangle \otimes D' \otimes C$$

vérifie les conditions suivantes :

(1) B est anisotrope de dimension 2^{k+d}.
(2) B est une voisine de π.
(3) $B \sim \pi \perp v\,\langle 1, v(u+v)\rangle \otimes C$.
(4) B est bonne de forme dominante $\langle 1, v(u+v)\rangle \otimes C$, de hauteur 2 et de degré d.

Démonstration. La forme bilinéaire $\langle 1, u, u+v, uv\rangle$ est associée à la forme quadratique totalement singulière $[1] \perp [u] \perp [v] \perp [uv]$. Ainsi, on déduit facilement que π est associée à $\widetilde{B}$, et par conséquent B est une voisine de π. Puisque π est anisotrope, la forme B est aussi anisotrope. Aussi, on vérifie que

$$B \sim \pi \perp v\,\langle 1, v(u+v)\rangle \otimes C.$$

Par raison de dimension et le théorème 3.5, la forme $\langle 1, v(u+v)\rangle \otimes C$ est anisotrope sur $F(B)$. Puisque $\pi_{F(B)}$ est isotrope, on déduit que

$$(B_{F(B)})_{\mathrm{an}} \simeq (v\,\langle 1, v(u+v)\rangle \otimes C)_{F(B)}.$$

Ainsi, B est bonne de hauteur 2, de degré d et de forme dominante

$$\langle 1, v(u+v)\rangle \otimes C. \qquad \square$$

Question 5.12. Soit B une forme bilinéaire anisotrope bonne de hauteur 2, de degré d et de forme dominante C. On suppose que $\dim B = 2^k > 2^{d+1}$. A-t-on B voisine d'une k-forme bilinéaire de Pfister π et $B \sim \alpha\pi \perp \beta C$ pour certains scalaires $\alpha, \beta \in F^*$?

5C. ***Sur les dimensions des formes bilinéaires de hauteur 2.*** Avant de donner notre résultat concernant les dimensions des formes bilinéaires de hauteur 2, on commence par donner un résultat sur la décomposition de Witt des formes bilinéaires. Notons tout d'abord que la forme métabolique M intervenant dans la décomposition (2) n'est pas unique à isométrie près. En voici un exemple :

Exemple 5.13. Soit t une variable sur F. On a

$$\langle t : 1 : 0\rangle \perp \langle t\rangle \simeq \langle 0 : 1 : 0\rangle \perp \langle t\rangle$$

et $\langle t : 1 : 0\rangle \not\simeq \langle 0 : 1 : 0\rangle$.

Démonstration. Posons $B = \langle t : 1 : 0\rangle \perp \langle t\rangle$. Soit $\{e, f, g\}$ une $F(t)$-base de l'espace sous-jacent à B telle que :

$$\begin{cases} B(e,e) = B(g,g) = t, \\ B(f,f) = B(e,g) = B(f,g) = 0, \\ B(e,f) = 1. \end{cases}$$

La restriction de B à l'espace engendré par $\{e+g,\ f\}$ est la forme $\langle 0:1:0\rangle$. Ainsi, $\langle t:1:0\rangle \perp \langle t\rangle \simeq \langle 0:1:0\rangle \perp \langle \alpha\rangle$ pour un certain $\alpha \in F(t)^*$. En comparant les déterminants dans cette dernière isométrie, on trouve que $a=\alpha$ (modulo un carré). Finalement, $\langle t:1:0\rangle \not\simeq \langle 0:1:0\rangle$ puisque les formes quadratiques associées à ces formes bilinéaires sont $[t] \perp [0]$ et $[0] \perp [0]$ qui ne sont pas isométriques. □

Définition 5.14. Une forme bilinéaire est dite un plan hyperbolique si elle est isométrique à $\langle 0:1:0\rangle$. On la note $\mathcal{H}$.

La proposition suivante raffine la décomposition de Witt d'une forme bilinéaire.

Proposition 5.15. *Soit B une forme bilinéaire de dimension ≥ 1. Alors, il existe un couple d'entiers (s,t) unique, des scalaires $a_1,\dots,a_t \in F^*$ tels que:*
(1) $B \simeq s\times\mathcal{H} \perp (\langle a_1:1:0\rangle \perp \cdots \perp \langle a_t:1:0\rangle) \perp B_{an}$.
(2) *La forme quadratique $(\widetilde{B})_{an}$ est associée à la forme bilinéaire $\langle a_1,\dots,a_t\rangle \perp B_{an}$.*
En particulier, $\langle a_1,\dots,a_t\rangle \perp B_{an}$ est anisotrope, $t+\dim B_{an} = \dim(\widetilde{B})_{an}$ et $\dim\widetilde{B} - \dim(\widetilde{B})_{an} = 2s+t$.

Démonstration. Soit M une forme métabolique telle que $B \simeq M \perp B_{\mathrm{an}}$. Parmi toutes ces décompositions, on choisit celle telle que M contienne comme sous-forme un nombre maximal de copies de $\mathcal{H}$. Notons ce nombre s. Alors,

$$B \simeq s\times\mathcal{H} \perp (\langle a_1:1:0\rangle \perp \cdots \perp \langle a_t:1:0\rangle) \perp B_{\mathrm{an}} \tag{7}$$

pour certains $a_1,\dots,a_t \in F^*$ avec $\langle a_1,\dots,a_t\rangle$ anisotrope. Sinon, il existerait $l_1,\dots,l_t \in F$ non tous nuls tels que $b := \sum_{i=1}^t a_i l_i^2 \in D_F(B_{\mathrm{an}})$. Ainsi, $B_{\mathrm{an}} \simeq \langle b\rangle \perp C$ pour une certaine forme bilinéaire C, et on vérifie facilement que

$$\langle a_1:1:0\rangle \perp \cdots \perp \langle a_t:1:0\rangle \simeq \langle b:1:0\rangle \perp M' \tag{8}$$

pour une forme bilinéaire convenable M'. Par unicité de la partie anisotrope, la forme M' est nécessairement métabolique. En utilisant la même preuve que celle de l'exemple 5.13, on a

$$\langle b:1:0\rangle \perp \langle b\rangle \simeq \mathcal{H} \perp \langle b\rangle \tag{9}$$

En substituant (8) et (9) dans (7), on aurait une contradiction avec le choix de s.

Posons $C = \langle a_1,\dots,a_t\rangle \perp B_{\mathrm{an}}$. En prenant la forme quadratique associée à B, on obtient l'isométrie :

$$\widetilde{B} \simeq (2s+t)\times[0] \perp \widetilde{C} \simeq j\times[0] \perp (\widetilde{B})_{\mathrm{an}}$$

pour un certain $j \geq 0$. Puisque $\widetilde{C}$ est anisotrope, on obtient par la simplification de Witt [Hoffmann and Laghribi 2004, lem. 2.6] que $\widetilde{C} \simeq (\widetilde{B})_{\text{an}}$. En particulier, $j = 2s + t = \dim B - \dim(\widetilde{B})_{\text{an}}$. D'où l'unicité du couple (s, t). □

Notations 5.16. Comme dans la proposition 5.15, on note $i_h(B) = s$ et $i_m(B) = t$.

Comme prouvé par Milnor [1971, th. 3], une forme bilinéaire B est déterminée, à isométrie près, par sa dimension qui vaut $2\dim(\widetilde{B})_{\text{an}} - \dim B_{\text{an}} + 2i_h(B)$, sa partie anisotrope et le F^2-espace vectoriel $D_F(B) \cup \{0\}$.

La proposition 5.15 se précise beaucoup plus dans le cas d'une forme bilinéaire voisine de Pfister étendue à son corps de fonctions :

Proposition 5.17. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope qui est une voisine de Pfister. Posons* $\dim B = 2^n + l$ *avec* $0 < l \leq 2^n$, $B_1 = (B_{F(B)})_{an}$, $s = i_h(B_{F(B)})$ *et* $t = i_m(B_{F(B)})$. *Alors, on a*:
(1) $2s + t = l$ *et* $t + \dim B_1 = 2^n$.
(2) $\dim B = 2^{n+1} - \dim B_1 + 2s$.

Démonstration. Posons $C = (B_{F(B)})_{\text{an}}$. Par la proposition 5.15, on peut écrire :

$$B_{F(B)} \simeq s \times \mathscr{H} \perp (\langle a_1 : 1 : 0\rangle \perp \cdots \perp \langle a_t : 1 : 0\rangle) \perp C \tag{10}$$

avec $\langle a_1, \ldots, a_t\rangle \perp C$ anisotrope. En considérant la forme quadratique associée à $B_{F(B)}$, on obtient :

$$\widetilde{B}_{F(B)} \simeq (2s + t) \times [0] \perp ([a_1] \perp \cdots \perp [a_t]) \perp \widetilde{C}. \tag{11}$$

Puisque B est une voisine de Pfister, la forme $\widetilde{B}$ est une quasi-voisine de Pfister. D'après [Laghribi 2004a, th. 3.6] et [Hoffmann and Laghribi 2004, section 8], on sait que

$$\widetilde{B}_{F(B)} \simeq l \times [0] \perp (\widetilde{B}_{F(B)})_{\text{an}} \tag{12}$$

et donc $\dim(\widetilde{B}_{F(B)})_{\text{an}} = 2^n$. Par la proposition 5.15, on a $t + \dim B_1 = 2^n$ et $l = 2s + t$, d'où l'affirmation (1). (2) se déduit de (1). □

De cette proposition on peut déduire quelques corollaires. Le premier donne des exemples de formes bilinéaires dont la décomposition de Witt admet des plans métaboliques non hyperboliques et inversement :

Corollaire 5.18. (1) *Si B est une n-forme bilinéaire de Pfister anisotrope, alors* $i_h(B_{F(B)}) = 0$ *et* $i_m(B_{F(B)}) = 2^{n-1}$.
(2) *Si B est une forme bilinéaire de dimension* 6 *comme dans l'exemple 3.12, alors* $i_h(B_{F(B)}) = 1$ *et* $i_m(B_{F(B)}) = 0$.

Démonstration. Puisque dans les deux cas les formes bilinéaires sont des voisines de Pfister, on applique la proposition 5.17 sachant que dans le premier cas on a $\dim(B_{F(B)})_{\text{an}} = 0$, et dans le deuxième cas on a $\dim(B_{F(B)})_{\text{an}} = 4$. □

Corollaire 5.19. *Soient B une forme bilinéaire anisotrope et K comme dans la proposition 3.13. Posons* $\dim B = 2^n + l$ *avec* $0 < l \leq 2^n$, $s = i_h(B_{K(B)})$ *et* $t = i_m(B_{K(B)})$. *Alors, on a*:
(1) $2s + t = l$ *et* $t + \dim(B_{K(B)})_{an} = 2^n$.
(2) $\dim B = 2^{n+1} - \dim(B_{K(B)})_{an} + 2s$.

Démonstration. Puisque B_K est une voisine bilinéaire de Pfister anisotrope, le corollaire se déduit de la proposition 5.17. □

Voici notre résultat autour des dimensions des formes bilinéaires anisotropes de hauteur 2 :

Corollaire 5.20. *Soit B une forme bilinéaire anisotrope de hauteur* 2 *et de forme dominante de dimension* 2^d, *non nécessairement bonne. Supposons que* $2^n < \dim B \leq 2^{n+1}$ *pour un certain entier* $n \geq 1$. *Alors*, $\dim B$ *appartient à l'ensemble* $\{2^{n+1} - 2^d + 2s + \epsilon \mid 0 \leq s \leq 2^{d-1} - \epsilon\}$, *où* $\epsilon = 0$ *ou* 1 *suivant que* $\dim B$ *est paire ou impaire.*

Démonstration. Soit ϵ comme dans le corollaire, et K comme dans la proposition 3.13. Si $\dim B = 2^{n+1} - \epsilon$, alors dans ce cas $\dim B \in \{2^{n+1} - 2^d + 2s + \epsilon \mid 0 \leq s \leq 2^{d-1} - \epsilon\}$ pour $s = 2^{d-1} - \epsilon$. On peut donc supposer que $\dim B \neq 2^{n+1} - \epsilon$. Posons $C = (B_{K(B)})_{\mathrm{an}}$ et $B_1 = (B_{F(B)})_{\mathrm{an}}$. Alors, $B_{K(B)} \sim (B_1)_{K(B)}$. La forme $(B_1)_{K(B)}$ est anisotrope, car sinon $\dim((B_1)_{K(B)})_{\mathrm{an}} = \epsilon$ et donc B_K serait de hauteur 1, en particulier on aurait $\dim B = 2^{n+1} - \epsilon$. Ainsi. $C \simeq (B_1)_{K(B)}$ et donc $\dim C = 2^d - \epsilon$. Par le corollaire 5.19(2), on a $\dim B = 2^{n+1} - 2^d + 2s + \epsilon$ où $s = i_h(B_{K(B)})$. Puisque $\dim B < 2^{n+1} - \epsilon$, on déduit que $0 \leq s < 2^{d-1} - \epsilon$. D'où le corollaire. □

Remarque 5.21. Dans le cas des formes bilinéaires B anisotropes de hauteur 2 et de degré $d > 0$, le corollaire 5.20 prend son intérêt lorsque $\dim B \geq 2^{d+1}$, puisque dans le cas $\dim B < 2^{d+1}$ la proposition 5.7 donne de manière précise la dimension de B.

On finit par un commentaire sur les dimensions des formes bilinéaires anisotropes de hauteur 2. On sait par le corollaire 5.20 qu'une telle forme de degré 2 ne peut avoir que la dimension 2^n, $2^n - 4$ ou $2^n - 2$. Le théorème 5.10 montre que les deux premiers entiers sont réalisables comme dimensions de formes bilinéaires anisotropes (bonnes) de hauteur et degré 2. En ce qui concerne l'entier $2^n - 2$, on a montré dans un travail en préparation [Laghribi and Rehmann $\geq$ 2007] qu'une forme de dimension $2^n - 2$ de hauteur et degré 2 qui n'est pas bonne a exactement la dimension 6 et que l'entier 8 est aussi réalisable comme dimension d'une forme bilinéaire de hauteur et degré 2. En ce qui concerne le degré $d > 2$, on ne sait pas exactement lesquelles des possibilités données par le corollaire 5.20 sont réalisables comme dimensions de formes bilinéaires anisotropes de hauteur 2 et de degré d.

Remerciements

Cet article a été achevé durant un séjour à l'Universität Bielefeld pour la période Mars-Mai 2006. Je tiens à remercier Ulf Rehmann d'avoir permis ce séjour et pour les discussions que nous avons eues autour du sujet de cet article. Je remercie aussi le Sonderforschungsbereich 701 "Spektrale Strukturen und topologische Methoden in der Mathematik" pour le soutien offert durant ce séjour.

Bibliographie

[Aravire and Baeza 2003] R. Aravire and R. Baeza, "The behavior of quadratic and differential forms under function field extensions in characteristic two", *J. Algebra* **259**:2 (2003), 361–414. MR 2003k:11060 Zbl 01891328

[Baeza 1973] R. Baeza, "Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2", *Math. Z.* **135** (1973), 175–184. MR 49 #2534 Zbl 0263.15015

[Baeza 1978] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings*, Lecture Notes in Mathematics **655**, Springer, Berlin, 1978. MR 58 #10972 Zbl 0382.10014

[Fitzgerald 1981] R. W. Fitzgerald, "Function fields of quadratic forms", *Math. Z.* **178**:1 (1981), 63–76. MR 83b:10021 Zbl 0442.10013

[Fitzgerald 1984] R. W. Fitzgerald, "Quadratic forms of height two", *Trans. Amer. Math. Soc.* **283**:1 (1984), 339–351. MR 85f:11027 Zbl 0512.10011

[Hoffmann and Laghribi 2004] D. W. Hoffmann and A. Laghribi, "Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2", *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), 4019–4053. MR 2005e:11041 Zbl 02091232

[Hoffmann and Laghribi 2006] D. W. Hoffmann and A. Laghribi, "Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic 2", *J. Algebra* **295**:2 (2006), 362–386. MR 2007a:11052 Zbl 05019786

[Karpenko 2004] N. A. Karpenko, "Holes in I^n", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **37**:6 (2004), 973–1002. MR 2005k:11082 Zbl 02174960

[Knebusch 1970] M. Knebusch, "Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen", *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.* **1969/70** (1970), 93–157. MR 42 #6001 Zbl 0256.15016

[Knebusch 1976] M. Knebusch, "Generic splitting of quadratic forms. I", *Proc. London Math. Soc.* (3) **33**:1 (1976), 65–93. MR 54 #230 Zbl 0351.15016

[Knebusch 1977] M. Knebusch, "Generic splitting of quadratic forms. II", *Proc. London Math. Soc.* (3) **34**:1 (1977), 1–31. MR 55 #379 Zbl 0359.15013

[Knebusch $\geq$ 2007] M. Knebusch, "Spezialisierung von quadratischen und symmetrisch bilinearen Formen". livre en préparation.

[Knebusch and Rehmann 2000] M. Knebusch and U. Rehmann, "Generic splitting towers and generic splitting preparation of quadratic forms", pp. 173–199 in *Quadratic forms and their applications* (Dublin, 1999), edited by E. Bayer-Fluckiger et al., Contemp. Math. **272**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. MR 2001g:11052 Zbl 0995.11028

[Laghribi 2002a] A. Laghribi, "Certaines formes quadratiques de dimension au plus 6 et corps des fonctions en caractéristique 2", *Israel J. Math.* **129** (2002), 317–361. MR 2003f:11047 Zbl 1049.11040

[Laghribi 2002b] A. Laghribi, "On the generic splitting of quadratic forms in characteristic 2", *Math. Z.* **240**:4 (2002), 711–730. MR 2003f:11048 Zbl 1007.11017

[Laghribi 2004a] A. Laghribi, "On splitting of totally singular quadratic forms", *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **53**:3 (2004), 325–336. MR 2006f:11040 Zbl 1097.11017

[Laghribi 2004b] A. Laghribi, "Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms", pp. 237–248 in *Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms*, Contemp. Math. **344**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. MR 2005f:11066 Zbl 02154490

[Laghribi 2005] A. Laghribi, "Witt kernels of function field extensions in characteristic 2", *J. Pure Appl. Algebra* **199**:1-3 (2005), 167–182. MR 2006c:11041 Zbl 02175024

[Laghribi and Rehmann $\geq$ 2007] A. Laghribi and U. Rehmann, "Bilinear forms of height and degree 2 in characteristic 2". En préparation.

[Milnor 1971] J. Milnor, "Symmetric inner products in characteristic 2", pp. 59–75 in *Prospects in mathematics* (Princeton, 1970), edited by F. Hirzebruch et al., Ann. of Math. Studies **70**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971. MR 50 #367 Zbl 0265.10013

[Milnor and Husemoller 1973] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse der Mathematik **73**, Springer, New York, 1973. MR 58 #22129 Zbl 0292.10016

Received June 12, 2006. Revised October 9, 2006.

AHMED LAGHRIBI
FACULTÉ JEAN PERRIN
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE LENS EA2462
FÉDÉRATION CNRS NORD-PAS-DE-CALAIS FR2956
RUE JEAN SOUVRAZ - SP18
F-62307 LENS
FRANCE

laghribi@euler.univ-artois.fr