Pacific Journal of Mathematics

UNE REMARQUE DE DYNAMIQUE SUR LES VARIÉTÉS SEMI-ABÉLIENNES

GAËL RÉMOND

Volume 254 No. 2 December 2011

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 254, No. 2, 2011

UNE REMARQUE DE DYNAMIQUE SUR LES VARIÉTÉS SEMI-ABÉLIENNES

GAËL RÉMOND

Soit φ l'endomorphisme de multiplication par un entier sur une variété semi-abélienne A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et soit X une sous-variété algébrique de A. Il existe (pour des raisons évidentes) un entier N avec la propriété suivante : si les N premiers itérés de φ envoient un point x dans X alors ceci vaut pour tous les itérés. Nous montrons que N peut être choisi indépendamment de φ. Nous montrons aussi qu'un tel N peut être calculé explicitement si A est une variété abélienne ou un tore. La preuve repose sur un résultat d'effectivité dans la solution de la conjecture de Mordell–Lang et sur un résultat combinatoire de Crittenden et Vanden Eynden sur les progressions arithmétiques.

Let φ be the endomorphism of multiplication by an integer on a semi-abelian variety A defined over $\overline{\mathbb{Q}}$ and let X be an algebraic subvariety of A. There exists (for obvious reasons) an integer N with the property that if the first N iterates of φ map a point x into X then this is true of all iterates. We prove that N can be chosen independently of φ. Moreover we show that such an N can be explicitly computed if A is either an abelian variety or a torus. The proof relies on an effectivity result in the solution of the Mordell–Lang conjecture together with a combinatorial result of Crittenden and Vanden Eynden on arithmetic progressions.

1. Introduction

Lorsque l'on dispose d'une application $\varphi\colon A \to A$ d'un ensemble A dans lui-même, on peut étudier la dynamique de cette application, c'est-à-dire s'intéresser à l'action des itérés de φ. Dans cette note, nous considérons en particulier le problème suivant : une partie X de A étant fixée, quels sont les points dont toute l'orbite est contenue dans X ? Autrement dit, nous introduisons la *partie stable* de X

$$Y = \{x \in X \mid \varphi^n(x) \in X \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\varphi^n)^{-1} X.$$

MSC2010: 11G10, 11G35.
Mots-clefs: semi-abelian varieties, algebraic dynamics, Mordell–Lang problem, variétés semi-abéliennes, problème de Mordell–Lang effectif, dynamique algébrique.

Dans la suite, A et X seront des variétés algébriques et φ un morphisme de variétés. Dans ce cadre, on constate immédiatement que Y est un fermé de X et de plus (par nœthérianité) qu'il existe un entier N tel que

$$Y = \bigcap_{n=0}^{N} (\varphi^n)^{-1} X.$$

Nous étudions plus précisément la valeur de cet entier N lorsque A est une variété semi-abélienne définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ et φ un endomorphisme de A laissant stable toute sous-variété semi-abélienne de A. Bien entendu cette condition sur φ (nécessaire dans la preuve actuelle, voir aussi la remarque à la fin de la partie 3) s'avère assez restrictive. Elle comporte toutefois, comme exemple principal, le cas de $\varphi = [m]$ la multiplication par un entier m (au sens de la loi de groupe de A notée additivement). En outre, on peut construire des exemples différents de φ convenables comme $[m_1]\times\cdots\times[m_s]$ sur un produit $\prod_{i=1}^{s} A_i$ de variétés abéliennes A_i vérifiant $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$ si $i \neq j$. Dans le cas d'une variété abélienne à multiplication complexe, on peut également penser à des relevés d'endomorphismes de Frobenius. Dans le cas du tore $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, en revanche, la condition de stabilité force $\varphi = [m]$ pour un entier m.

Dans ce cadre, notre résultat principal affirme que l'entier N peut être choisi indépendamment de φ.

Théorème 1.1. *Pour toute variété semi-abélienne A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et tout fermé X de A, il existe un entier N tel que pour tout endomorphisme φ de A laissant stable toute sous-variété semi-abélienne on ait*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\varphi^n)^{-1} X = \bigcap_{n=0}^{N} (\varphi^n)^{-1} X.$$

Précisons que, dans cet énoncé, on ne suppose pas X définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. De plus, dans certains cas, nous pouvons même calculer une valeur pour N.

Théorème 1.2. *Soient X un fermé de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}^g$ et m un entier. Alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [m^n]^{-1} X = \bigcap_{n=0}^{2^S-1} [m^n]^{-1} X,$$

où $S = (\deg X)^{2g^2(\dim X+1)^{3(\dim X+1)^2}}$, le degré étant calculé dans le plongement de Segre $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^g \hookrightarrow (\mathbb{P}^1)^g \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^g-1}$.

Pour une variété abélienne principalement polarisée A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ nous disposons aussi d'une valeur effective de la même forme en remplaçant S par la partie entière de

$$(2^{34}h_0(A)\deg X)^{3g^{5(\dim X+1)^2+2}},$$

où $h_0(A)$ est une constante ne dépendant que de A (comme variété polarisée ; il s'agit essentiellement d'un terme de hauteur, voir partie suivante).

Le théorème 1.2 améliore un résultat d'Aliev et Smyth [2008] qui fournissait une borne dépendant de m et beaucoup plus grande (définie de manière récursive, elle comportait au moins une tour de puissance à n étages).

La démonstration consiste à remarquer que les itérés $\varphi^n(x)$ se trouvent dans un groupe de rang fini Γ de A. Les résultats sur la conjecture de Mordell–Lang nous disent alors que les points de $X\cap\Gamma$ se répartissent sur un nombre fini S de translatés de sous-variétés semi-abéliennes tracées sur X. Ensuite un calcul élémentaire montre que les entiers n tels que $\varphi^n(x)$ appartient à un translaté donné sont en progression arithmétique. Par ailleurs un théorème de Crittenden et Vanden Eynden [1970] affirme que si S progressions arithmétiques couvrent les entiers de 0 à 2^S-1 alors elles couvrent tout $\mathbb{N}$. On en déduit immédiatement le théorème avec $N=2^S-1$ à condition bien sûr que l'entier S intervenant ne dépende ni de x ni de φ. Pour cela nous avons besoin d'une précision quantitative dans le problème de Mordell–Lang : il nous faut savoir que S ne dépend de Γ que par son rang. Nous examinons ceci dans la partie suivante (ainsi que les valeurs explicites dans certains cas) avant de passer à la démonstration du théorème principal dans la troisième partie. Enfin, nous donnons les arguments de spécialisation permettant d'étendre dans notre situation des résultats de $\overline{\mathbb{Q}}$ à un corps de caractéristique zéro quelconque.

2. Mordell–Lang

Les travaux de Laurent (pour les tores), Faltings, Hindry (pour les variétés abéliennes), Vojta et McQuillan (cas général) permettent de donner l'énoncé qualitatif suivant.

Théorème 2.1. *Soit A une variété semi-abélienne sur un corps de caractéristique zéro. Pour tout sous-groupe Γ de rang fini de A et tout fermé X de A, on peut écrire*

$$X\cap\Gamma=\bigcup_{i=1}^{S}(x_i+B_i)\cap\Gamma$$

pour un entier S, des sous-variétés semi-abéliennes B_i et des points x_i avec la condition $x_i+B_i\subset X$.

Pour donner des versions quantitatives de ce résultat, nous introduisons quelques notations. Nous écrirons $g=\dim A$ et $m=\dim X+1$. Nous désignons en outre par r le rang de Γ (on rappelle qu'il s'agit de la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Gamma\otimes\mathbb{Q}$).

Comme dans le théorème 1.2, si A est un tore (c'est-à-dire $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{g}$), nous le plongeons dans $\mathbb{P}^{2^g-1}$ à la Segre et utilisons ce plongement pour parler du degré de X.

Théorème 2.2. *Si A est un tore le théorème 2.1 vaut avec*

$$S = (\deg X)^{(r+1)g^2 m^{3m^2}}.$$

Si $K = \overline{\mathbb{Q}}$ ceci est contenu dans le théorème 1.1 de [Rémond 2002]. Pour passer au cas général, on met en œuvre un argument de spécialisation. La démarche est assez classique mais l'argument ne semble pas être écrit sous la forme où nous en avons besoin (on trouvera dans la partie 3 de [Evertse et al. 2002] le cas où X est un hyperplan et où l'on se limite à des points non dégénérés). Nous le redonnons donc en détails dans la dernière partie (voir théorème 4.1).

Dans le cas d'une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ nous avons un résultat de même nature. Il provient essentiellement de [Rémond 2000] précisé par une estimation de David et Philippon pour le problème de Bogomolov effectif. Nous le citons sous la forme du théorème 1.3 de [Rémond 2002] qui impose que A soit principalement polarisée par un faisceau inversible symétrique $\mathscr{L}$. Dans ce cas, on définit une hauteur thêta h_θ de A associée à $\mathscr{L}^{\otimes 16}$ (la hauteur de l'origine dans le plongement thêta) et on pose $h_0(A) = [L:\mathbb{Q}]\max(1, h_\theta)$ où L est un corps de définition de $(A, \mathscr{L})$.

Théorème 2.3. *Si $(A, \mathscr{L})$ est une variété abélienne principalement polarisée définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, le théorème 2.1 vaut avec*

$$S = \left[(2^{34} h_0(A) \deg_{\mathscr{L}} X)^{(r+1)g^{5m^2}}\right].$$

Comme plus haut, le résultat de [Rémond 2002] donne ceci avec la restriction supplémentaire $K = \overline{\mathbb{Q}}$ (c'est-à-dire X et Γ définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$) et le théorème 4.1 ci-dessous permet de s'en affranchir.

En général, pour une variété semi-abélienne, nous ne disposons pas à l'heure actuelle d'un énoncé effectif dans le problème de Bogomolov. Ceci nous empêche de donner une formule explicite dans ce cas. Avec les méthodes existantes, nous pouvons tout de même montrer un résultat suffisamment uniforme.

Théorème 2.4. *Si A est une variété semi-abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, le théorème 2.1 vaut avec*

$$S = f(A, \deg X)^{r+1}$$

pour une certaine fonction f (le degré étant calculé dans n'importe quel plongement projectif de A).

Démonstration. Nous reprenons la stratégie de [Rémond 2000] lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$ (là encore, on passe au cas général grâce au théorème 4.1). La preuve peut se scinder en trois étapes :

1. Les grands points ne sont pas trop espacés (inégalité de Vojta).
2. Les grands points sont assez espacés (inégalité de Mumford).
3. Les petits points sont assez espacés (propriété de Bogomolov).

Dans le cas semi-abélien, l'étape 1 est entièrement décrite dans [Rémond 2003]. La deuxième étape n'est écrite que dans les cas abélien [Rémond 2000] et torique [Rémond 2002]. Toutefois la comparaison de ces deux cas montre que la preuve s'étend à l'identique dans le cas semi-abélien. Dans la première étape, on obtient des constantes qui ne dépendent que de A et du degré de X. Dans la seconde intervient en plus une borne en dimension inférieure. En raisonnant par récurrence, nous pouvons supposer que celle-ci est de la forme $f_1(A, \deg X)^{r+1}$.

Pour la dernière étape, nous n'avons pas de constante explicite mais la proposition 3 de [Rémond 2005] (avec $\Gamma = 0$) montre qu'elle ne dépend aussi que de A et de $\deg X$.

Nous pouvons alors combiner les trois étapes pour l'estimation de S. Les deux premières permettent de compter les grands points en les répartissant en un nombre fini de cônes dans $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ d'angle au sommet fixé (indépendant de Γ). Ceci conduit donc à une borne de la forme $f_2(A, \deg X)^{r+1}$ pour le nombre de grands points.

De manière analogue, l'étape 3 permet de répartir les petits points dans un nombre fini de boules de rayon fixé (indépendant de Γ) et ceci conduit à une borne de la même forme pour le nombre de petits points. Dans les deux cas, on trouvera des énoncés de décompte précis pour ces cônes ou boules au sens de la hauteur dans le lemme 5.1 de [Rémond 2003]. □

Nous nous sommes limités ici au cas arithmétique où A est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Cependant la preuve du théorème principal serait tout aussi valable dans d'autres cas si l'on connaît l'existence d'une borne ne dépendant de Γ que par son rang. Par exemple, dans un cas diagonalement opposé au nôtre, Buium [1993] donne une telle borne si A est une variété abélienne dont aucune sous-variété abélienne non nulle n'est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et X est lisse. Sa borne est explicite (mais beaucoup plus grande que les nôtres dans la mesure où elle comporte une factorielle itérée au moins $3\max(r, \deg X)^2$ fois).

3. Démonstration du théorème principal

Nous nous plaçons donc sous les hypothèses du théorème 1.1. Nous associons à tout point x le groupe

$$\Gamma_x = \operatorname{End}(A) \cdot x = \{\psi(x) \mid \psi \in \operatorname{End}(A)\}$$

de rang fini au plus égal au rang r_0 de $\operatorname{End}(A)$, que l'on sait être fini. En vue d'appliquer le théorème 2.4, nous posons $S = f(A, \deg X)^{r_0+1}$ puis $N = 2^S - 1$.

Nous écrivons comme dans le théorème 2.1

$$X \cap \Gamma_x = \bigcup_{i=1}^{S} (x_i + B_i) \cap \Gamma_x$$

avec la condition $x_i + B_i \subset X$ (noter que comme l'on a augmenté S il peut être nécessaire de répéter certains translatés).

Supposons à présent $x \in \bigcap_{n=0}^{N} (\varphi^n)^{-1} X$. Bien entendu nous avons $\varphi^n(x) \in X \cap \Gamma_x$ pour $0 \leq n \leq N$. Définissons ensuite pour $1 \leq i \leq S$ la partie

$$P_i = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi^n(x) \in x_i + B_i\}.$$

La remarque précédente se traduit par $\{0, \ldots, N\} \subset \bigcup_{i=1}^{S} P_i$. Notre but est de montrer $\bigcup_{i=1}^{S} P_i = \mathbb{N}$. Pour l'atteindre, nous allons établir que chaque P_i est une progression arithmétique.

Soient donc $n_1, n_2, n_3 \in P_i$ avec $n_1 \leq n_2$. Nous écrivons

$$\varphi^{n_3+n_2-n_1}(x) - \varphi^{n_2}(x) = \varphi^{n_2-n_1}\big(\varphi^{n_3}(x) - \varphi^{n_1}(x)\big).$$

Dans cette expression, $\varphi^{n_3}(x) - \varphi^{n_1}(x)$ est la différence de deux éléments de $x_i + B_i$ donc appartient à B_i. D'après l'hypothèse sur φ, on a $\varphi(B_i) \subset B_i$ donc le second membre de notre égalité est également un point de B_i. Par suite $\varphi^{n_2}(x) \in x_i + B_i$ entraîne $\varphi^{n_3+n_2-n_1}(x) \in x_i + B_i$ et donc $n_3 + n_2 - n_1 \in P_i$.

Cette propriété assure que si P_i est non vide alors il est de la forme $a_i + b_i\mathbb{N}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{N}$: en effet, il suffit de définir a_i comme le plus petit élément de P_i et $Q_i = P_i - a_i \subset \mathbb{N}$; alors Q_i jouit de la même propriété et contient 0 ; il est donc stable par somme et par différence positive donc de la forme $b_i\mathbb{N}$.

Il reste simplement à appliquer le théorème-titre de [Crittenden et Vanden Eynden 1970] avec $n = S$ (on vérifie que la nullité éventuelle de certains b_i ne pose pas de problème). Nous avons donc comme prévu $\bigcup_{i=1}^{s} P_i = \mathbb{N}$ ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe i avec $\varphi^n(x) \in x_i + B_i \subset X$. Par conséquent, nous avons bien $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\varphi^n)^{-1} X$ et le théorème 1.1 est établi.

Nous en déduisons immédiatement la formule citée dans l'introduction pour les variétés abéliennes à l'aide du théorème 2.3 et de la majoration du rang $r_0 \leq 2g^2$.

Pour les tores, on déduit le théorème 1.2 du théorème 2.2 en remarquant que cette fois le rang r_0 peut être remplacé par 1 : en effet, comme $\varphi = [m]$ l'argument s'applique au groupe $\mathbb{Z}x$ de rang au plus 1.

Remarque. Si l'on ne suppose pas que φ laisse stables les sous-variétés semi-abéliennes de A alors la partie P_i ci-dessus n'est plus en général une progression arithmétique. Toutefois Ghioca et Tucker [2009] ont montré que P_i est toujours une union finie de progressions arithmétiques. Si l'on savait majorer le nombre de progressions nécessaires par une borne T indépendante de x, de i et de φ alors la démonstration précédente permettrait de conclure de même avec $N = 2^{ST} - 1$.

4. Spécialisation

Dans cette partie, on fixe une variété semi-abélienne A_0 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ainsi qu'un plongement de A_0 dans $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ qui nous permet de calculer le degré des fermés de A_0. Pour toute extension K de $\overline{\mathbb{Q}}$, tout fermé X de $A = A_0 \times \operatorname{Spec} K$ et toute partie F de $A(K)$, on note $\lambda_{K,X}(F) \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'infimum des entiers naturels S pour lesquels il existe des sous-variétés semi-abéliennes B_i de A et des points $a_i \in A(K)$ tels que

$$X \cap F \subset \bigcup_{i=1}^{S} a_i + B_i \subset X.$$

(Si aucun tel S n'existe, on a $\lambda_{K,X}(F) = \infty$.) En outre on appelle rang de F le rang du sous-groupe de $A(K)$ engendré par F.

Nous montrons alors que toute borne suffisamment uniforme sur $\overline{\mathbb{Q}}$ s'étend automatiquement à K quelconque.

Théorème 4.1. *S'il existe une fonction $f\colon \overline{\mathbb{N}}^3 \to \overline{\mathbb{N}}$ telle que pour tous X et F on ait $\lambda_{\overline{\mathbb{Q}},X}(F) \leq f(\dim X, \deg X, \operatorname{rang} F)$ alors on a*

$$\lambda_{K,X}(F) \leq f(\dim X, \deg X, \operatorname{rang} F)$$

pour tous K, X et F.

Démonstration. Nous commençons par rappeler que l'on peut choisir les B_i dans un ensemble fini indépendant de X. On note $\Delta(X) = (\deg X)^{(\dim X+1)^2/4}$.

Lemme 1. *On ne change pas la définition de $\lambda_{K,X}(F)$ si l'on y impose de plus $a_i \in X \cap F$ et* $\deg B_i \leq \Delta(X)$.

Démonstration. Si $(a_i + B_i) \cap F = \varnothing$ on peut supprimer ce translaté en diminuant S. Si au contraire $x \in (a_i + B_i) \cap F$ alors $a_i + B_i = x + B_i$ et l'on peut remplacer a_i par $x \in X \cap F$. Pour le degré, on pose

$$Z = \bigcap_{b \in B_i} X - b \qquad \text{et} \qquad B = \operatorname{Stab}(Z) = \bigcap_{z \in Z} Z - z$$

de sorte que $\deg Z \leq (\deg X)^{\dim X - \dim Z + 1}$ et $\deg B \leq (\deg Z)^{\dim Z - \dim B + 1}$. Ces deux relations entraînent $\deg B \leq (\deg X)^{(\dim X + 2 - \dim B)^2/4}$ et donc, si l'on note B^0 la composante neutre de B, on a $\deg B^0 \leq \Delta(X)$ (car si $\dim B = 0$ alors $B^0 = 0$). Maintenant $a_i + B_i \subset X$ donne $a_i \in Z$ d'où $a_i + B \subset Z \subset X$. De plus $B_i \subset \operatorname{Stab}(Z)$ donne $B_i \subset B^0$ donc $a_i + B_i \subset a_i + B^0 \subset X$ ce qui montre que l'on peut remplacer B_i par B^0. $\square$

Nous nous ramenons ensuite à une partie F finie.

Lemme 2. *Pour tout F on a*

$$\lambda_{K,X}(F) = \sup\{\lambda_{K,X}(F') \mid F' \subset F,\ F' \text{ finie}\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que si le membre de droite est un entier $S \in \mathbb{N}$ alors $\lambda_{K,X}(F) \leq S$. Fixons une partie finie F' de F telle que $\lambda_{K,X}(F') = S$ et considérons tous les choix de $a_i \in F'$ et de B_i de degré au plus $\Delta(X)$ tels que

$$X \cap F' \subset \bigcup_{i=1}^{S} a_i + B_i \subset X.$$

Ces choix sont en nombre fini. Si pour l'un d'entre eux on a $X \cap F \subset \bigcup_{i=1}^{S} a_i + B_i$ le résultat est acquis. Sinon on pourrait choisir à chaque fois un élément $y \in X \cap F$ avec $y \notin \bigcup_{i=1}^{S} a_i + B_i$. Nous formons alors la partie finie F'' constituée de F' et de tous les points y obtenus. Par hypothèse $\lambda_{K,X}(F'') \leq S$ ce qui permet d'écrire

$$X \cap F'' \subset \bigcup_{i=1}^{S} a_i + B_i \subset X$$

où $a_i \in F''$ et $\deg B_i \leq \Delta(X)$. Si $(a_i + B_i) \cap F' \neq \varnothing$ on peut supposer $a_i \in F'$. Si $(a_i + B_i) \cap F' = \varnothing$ on obtiendrait un recouvrement de $X \cap F'$ (inclus dans $X \cap F''$) par $S - 1$ translatés, ce qui contredit $\lambda_{K,X}(F') = S$. Par suite, le choix obtenu de a_i et B_i est l'un de ceux considérés ci-dessus donc il existe $y \in X \cap F''$ tel que $y \notin \bigcup_{i=1}^{S} a_i + B_i$, ce qui est contradictoire. □

Ce lemme implique que, pour montrer l'inégalité

$$\lambda_{K,X}(F) \leq f(\dim X, \deg X, \operatorname{rang} F)$$

que nous avons en vue, nous pouvons supposer F finie. En outre, comme X et F sont maintenant définis sur un corps de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, nous pouvons supposer que K est un tel corps. Ceci permet de regarder X comme une famille algébrique de fermés de A_0 et de mettre en place un argument de spécialisation.

Plus précisément, considérons un anneau $R \subset K$ de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont le corps des fractions est K. Il correspond à un schéma intègre $V = \operatorname{Spec} R$ de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Nous allons passer du point générique (de corps résiduel K) aux points fermés (de corps résiduel $\overline{\mathbb{Q}}$) dont on rappelle qu'ils forment une partie dense.

Dans la suite, nous aurons besoin à plusieurs reprises de remplacer V par un ouvert non vide. Nous le choisirons toujours de la forme $D(u) = \operatorname{Spec} R_u$ pour $u \in R \setminus \{0\}$: ceci revient à remplacer R par le localisé R_u sans changer aucune des propriétés de l'anneau ; nous conserverons la notation R pour notre anneau à chaque étape. Tout l'argument repose bien sûr sur la possibilité d'atteindre la situation désirée en un nombre *fini* de telles étapes.

Notons à présent $\mathcal{A} = A_0 \times V$ (de fibre générique A_0) et $\mathcal{X}$ l'adhérence de X dans $\mathcal{A}$ (munie de sa structure de sous-schéma fermé réduit). Le morphisme $\mathcal{X} \to V$ (de type fini) nous donne la famille algébrique cherchée. Quitte à restreindre V, nous pouvons la supposer plate de sorte que, pour tout $t \in V$, on ait $\dim \mathcal{X}_t = \dim X$ et $\deg \mathcal{X}_t = \deg X$ (pour cette dernière égalité, nous voyons $\mathcal{A}$ comme plongée dans $\mathbb{P}^n_R$ et donc $\mathcal{X}_t$ dans $\mathbb{P}^n_{k(t)}$).

Intéressons-nous ensuite aux points de l'ensemble F. Ils s'identifient à des sections $\operatorname{Spec} K \to A$ que nous souhaitons étendre en $\operatorname{Spec} R \to \mathcal{A}$. C'est possible après restriction à un ouvert : par exemple un point $\operatorname{Spec} K \to \mathbb{P}^n$ donné par des coordonnées $(x_0 : \cdots : x_n)$ choisies dans R s'étend en $\operatorname{Spec} R_{x_i} \to \mathbb{P}^n$ pour tout i tel que $x_i \neq 0$; ensuite la section $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n$ se factorise en $s \colon \operatorname{Spec} R \to \overline{\mathcal{A}}$ (immersion fermée) ; enfin on retire à V, par une nouvelle restriction, le fermé strict $s^{-1}(\overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A})$ pour obtenir $V \to \mathcal{A}$. Ceci fait, tout élément $x \in F$ donne donc naissance à des spécialisations

$$x_t \in \mathcal{A}_t \simeq A_0 \times \operatorname{Spec} k(t)$$

pour $t \in V$.

Finalement, nous restreignons V pour avoir les propriétés suivantes pour tous $x, y \in F$, toute sous-variété semi-abélienne B de A_0 de degré au plus $\Delta(X)$ et tout $t \in V$:

(1) Si $x - y \notin B$ alors $x_t - y_t \notin B$.

(2) Si $x + B \not\subset X$ alors $x_t + B \not\subset \mathcal{X}_t$.

(On note ici B pour $B \times \operatorname{Spec} k(t') \subset \mathcal{A}_{t'}$ tant pour $t' = t$ que pour le point générique de V.) Ceci est possible car il y a un nombre fini de conditions et chacune revient à demander comme ci-dessus à une section $\operatorname{Spec} R \to \mathcal{A}$ d'éviter un fermé : c'est direct pour (1) et on choisit pour (2) un point de torsion ξ de B (défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$) tel que $x + \xi \notin X$ de sorte qu'il suffit bien sûr d'assurer $x_t + \xi \notin \mathcal{X}_t$.

Nous pouvons alors fixer définitivement un point fermé t de V. En particulier nous avons $\mathcal{A}_t = A_0$. En outre, en notant $F_t = \{x_t \mid x \in F\}$, il vient clairement $\operatorname{rang} F_t \leq \operatorname{rang} F$ (si $\sum n_i x_i = 0$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $x_i \in F$ alors $\sum n_i (x_i)_t = 0$). Choisissons un sous-groupe G de $A_0(\overline{\mathbb{Q}})$ contenant F_t tel que $\operatorname{rang} G = \operatorname{rang} F$. Nous savons par hypothèse que

$$\begin{aligned} S = \lambda_{\overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{X}_t}(F_t) \leq \lambda_{\overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{X}_t}(G) &\leq f(\dim \mathcal{X}_t, \deg \mathcal{X}_t, \operatorname{rang} G) \\ &= f(\dim X, \deg X, \operatorname{rang} F). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$X_t \cap F_t \subset \bigcup_{i=1}^{S} (x_i)_t + B_i \subset \mathcal{X}_t$$

avec $(x_i)_t \in F_t$ et $\deg B_i \leq \Delta(\mathscr{X}_t) = \Delta(X)$. Nos réductions permettent alors d'affirmer

$$X \cap F \subset \bigcup_{i=1}^{S} x_i + B_i \subset X.$$

En effet : si $y \in X \cap F$ alors $y_t \in \mathscr{X}_t \cap F_t$ donc il existe i tel que $y_t - (x_i)_t \in B_i$; par (1) il est impossible que $y - x_i \notin B_i$; donc $y \in x_i + B_i$, ce qui donne la première inclusion ; pour la seconde si $x_i + B_i \not\subset X$ on aurait $(x_i)_t + B_i \not\subset \mathscr{X}_t$ par (2) ce qui est absurde. Nous venons de montrer $\lambda_{K,X}(F) \leq f(\dim X, \deg X, \operatorname{rang} F)$ et ceci termine la démonstration. □

Bibliographie

[Aliev et Smyth 2008] I. Aliev et C. Smyth, "Power maps and subvarieties of the complex algebraic n-torus", prépublication, 2008. arXiv 0802.2938

[Buium 1993] A. Buium, "Effective bound for the geometric Lang conjecture", *Duke Math. J.* **71**:2 (1993), 475–499. MR 95c:14055 Zbl 0812.14029

[Crittenden et Vanden Eynden 1970] R. B. Crittenden et C. L. Vanden Eynden, "Any n arithmetic progressions covering the first 2^n integers cover all integers", *Proc. Amer. Math. Soc.* **24**:3 (1970), 475–481. MR 41 #3365 Zbl 0192.39001

[Evertse et al. 2002] J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei et W. M. Schmidt, "Linear equations in variables which lie in a multiplicative group", *Ann. of Math.* (2) **155**:3 (2002), 807–836. MR 2003f:11037 Zbl 1026.11038

[Ghioca et Tucker 2009] D. Ghioca et T. J. Tucker, "Periodic points, linearizing maps, and the dynamical Mordell–Lang problem", *J. Number Theory* **129**:6 (2009), 1392–1403. MR 2010i:37219 Zbl 1186.14047

[Rémond 2000] G. Rémond, "Décompte dans une conjecture de Lang", *Invent. Math.* **142**:3 (2000), 513–545. MR 2002f:14058 Zbl 0972.11054

[Rémond 2002] G. Rémond, "Sur les sous-variétés des tores", *Compositio Math.* **134**:3 (2002), 337–366. MR 2003m:11093 Zbl 1101.14030

[Rémond 2003] G. Rémond, "Approximation Diophantienne sur les variétés semi-abéliennes", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **36**:2 (2003), 191–212. MR 2004d:11064 Zbl 1081.11053

[Rémond 2005] G. Rémond, "Borne générique pour le problème de Mordell–Lang", *Manuscripta Math.* **118**:1 (2005), 85–97. MR 2006f:14023 Zbl 1136.11039

Received January 11, 2011.

GAËL RÉMOND
INSTITUT FOURIER, UMR 5582
BOÎTE POSTALE 74
38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES CEDEX
FRANCE

Gael.Remond@ujf-grenoble.fr

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

http://pacificmath.org

Founded in 1951 by
E. F. Beckenbach (1906–1982) and F. Wolf (1904–1989)

See inside back cover or pacificmath.org for submission instructions.

The subscription price for 2011 is US $420/year for the electronic version, and $485/year for print and electronic.
Subscriptions, requests for back issues from the last three years and changes of subscribers address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163, U.S.A. Prior back issues are obtainable from Periodicals Service Company, 11 Main Street, Germantown, NY 12526-5635. The Pacific Journal of Mathematics is indexed by Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, PASCAL CNRS Index, Referativnyi Zhurnal, Current Mathematical Publications and the Science Citation Index.

The Pacific Journal of Mathematics (ISSN 0030-8730) at the University of California, c/o Department of Mathematics, 969 Evans Hall, Berkeley, CA 94720-3840, is published monthly except July and August. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices. POSTMASTER: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163.

PJM peer review and production are managed by EditFLOW™ from Mathematical Sciences Publishers.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
at the University of California, Berkeley 94720-3840
A NON-PROFIT CORPORATION
Typeset in LaTeX

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 254 No. 2 December 2011