Pacific
Journal of
Mathematics

FORMES MODULAIRES SUR LA $\mathbb{Z}_p$-EXTENSION CYCLOTOMIQUE DE $\mathbb{Q}$

LAURENT CLOZEL

Volume 268 No. 2 April 2014

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 268, No. 2, 2014
dx.doi.org/10.2140/pjm.2014.268.259

FORMES MODULAIRES SUR LA $\mathbb{Z}_p$-EXTENSION CYCLOTOMIQUE DE $\mathbb{Q}$

LAURENT CLOZEL

In memoriam Jon Rogawski

Soit F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. On peut se demander s'il existe une théorie non triviale des formes modulaires pour GL(2, F). On montre qu'une telle théorie existe en caractéristique p, au moins si GL(2) est remplacé par une algèbre de quaternions définie en (p, ∞). En particulier, une telle théorie réalise naturellement le changement de base de Saito–Shintani–Langlands.

Let F be the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension of the rationals. It is natural to ask whether there exists a nontrivial theory of modular forms on GL(2, F). We show that this is the case if the ring of coefficients has characteristic p and if GL(2) is replaced by the quaternion algebra ramified at (p, ∞). In particular, such a theory incorporates the base change of Saito, Shintani and Langlands.

1.

Fontaine m'a demandé s'il existait une théorie des formes modulaires modulo p sur GL(2, $\mathbb{Q}(p^\infty)$) où l'on désigne par $\mathbb{Q}(p^\infty)$ « la » $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Le but de cet article est de montrer qu'une telle théorie existe en effet, avec quelques restrictions, pour $p \neq 2$. [1] [2]

La restriction essentielle porte sur le niveau en p. On fera ici une hypothèse de mauvaise réduction sur les formes classiques, qui nous permet de travailler sur (le groupe projectif d')une algèbre de quaternions ramifiée en p et l'infini. On verra aisément qu'une telle restriction n'est pas indispensable ; elle nous permet cependant ici d'obtenir une famille S_α ($\alpha \geq 0$) de « variétés de Shimura de dimension zéro »

L'auteur est membre de l'Institut Universitaire de France.
MSC2010 : 11F11, 11F99.
Mots-clefs : extension cyclotomique, forme modulaire, Saito–Shintani–Langlands, modular form, cyclotomic extension.

1. On est en fait amené à supposer $p \geq 5$ (§2) mais on pourrait éviter cette hypothèse en accroissant le niveau en p.

2. Voir également la note à la page 274.

essentiellement intrinsèque, en supposant au contraire que les formes modulaires considérées sont partout non ramifiées en-dehors de p.

Le test d'une théorie non triviale des formes modulaires est l'existence d'opérateurs de Hecke dont les valeurs propres devraient être liées aux valeurs propres d'opérateurs de Frobenius dans une représentation galoisienne associée. On montre l'existence d'une famille d'opérateurs de Hecke T_ℓ — sur cet espace infini de « formes » sur $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}(p^\infty))$ — associées à tous les nombres premiers ℓ inertes dans $\mathbb{Q}(p^\infty)$. Sur cet espace infini, ces opérateurs sont donnés formellement par une somme infinie. Pour chaque extension finie $\mathbb{Q}(p^\alpha)$, leur expression devient finie et égale à l'expression classique. Ces opérateurs, conformément à l'intuition de Fontaine, n'ont un sens que si l'anneau des coefficients R des formes modulaires est de caractéristique p (ou, peut-être, s'il est complet pour la topologie p-adique).

Les opérateurs obtenus jouissent de la propriété usuelle d'autodualité (§4). La commutativité de l'algèbre des T_ℓ est plus délicate, car leur définition naturelle envoie un espace de fonctions à support fini vers un espace de fonctions arbitraires. On montre que les T_ℓ s'étendent naturellement à l'espace (linéairement compact) des fonctions invariantes par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(p^\infty)/\mathbb{Q})$, qu'il préservent. Dans ce cadre, ils forment une famille commutative (§4).

Enfin, on montre dans le §5 que ces constructions donnent une nouvelle démonstration, naturelle, du changement de base de Saito–Shintani–Langlands. Celle-ci est limitée à la caractéristique p (et aux T_ℓ relatifs aux ℓ inertes) mais ne repose pas sur une identité de traces.

Dans leurs espaces linéairement compacts naturels, on peut évidemment se poser la question de la diagonalisation des T_ℓ ; en particulier on peut se demander si les valeurs propres classiques donnent lieu à des espaces propres dans ces espaces infinis. Nous n'obtenons qu'une réponse incomplète (proposition 5.2).

Notons deux perspectives naturelles. Tout d'abord, on peut sans doute faire des constructions similaires sur des anneaux p-adiques plutôt que de caractéristique p : ceci amènerait à définir un espace de Banach (de type L^∞) de formes p-adiques dont notre espace est la réduction modulo p. On peut aussi tenter de construire une théorie locale, qui n'apparaît pas ici puisque nous avons fixé la ramification (en particulier en p).

2.

On note $\mathbb{Q}(p^\infty)$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. On écrira parfois

$$F_\infty = \mathbb{Q}(p^\infty) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathbb{Q}(p^\alpha),$$

$F_\alpha = \mathbb{Q}(p^\alpha)$ étant la sous-extension de groupe $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Les corps F_α sont totalement réels.

On écrit de même

$$\mathbb{Q}_p(p^\infty) = \bigcup_\alpha \mathbb{Q}_p(p^\alpha), \quad F_{p,\alpha} = \mathbb{Q}_p(p^\alpha).$$

L'idéal (p) est totalement ramifié dans F_∞ ; les notations $\mathfrak{p}_\alpha$, $\mathfrak{p}_\infty$ sont évidentes. On note $\mathbb{O}_{p,\alpha}$ l'anneau des entiers de $F_{p,\alpha}$.

Considérons un nombre premier $\ell \neq p$, donc non ramifié dans F_∞.

Si $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ a pour image $\bar{x} \in \mathbb{F}_p^\times$, on peut écrire $x = x_1\tau(\bar{x})$, $\tau(\bar{x}) \in \mathbb{Z}_p^\times$ étant le représentant de Teichmüller de x, et x_1 appartenant à $1 + p\mathbb{Z}_p$. Soit

$$\chi : (1 + p\mathbb{Z}_p)/(1 + p^2\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{F}_p, \quad 1 + py \mapsto \bar{y}$$

l'isomorphisme naturel. On pose alors $\psi(x) = \chi(x_1) \in \mathbb{F}_p$. Si $\psi(\ell) \neq 0$, l'image de Frob_ℓ dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(p^\infty)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p$ en est un générateur topologique et il en résulte que ℓ est inerte dans chaque extension $\mathbb{Q}(p^\alpha)$. Il existe donc une unique place, aussi notée ℓ, de $\mathbb{Q}(p^\alpha)$ ou $\mathbb{Q}(p^\infty)$ au-dessus de la place rationnelle.

Soit B l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ ramifiée exactement en p et en la place archimédienne. Puisque p est impair, $B \otimes F_\alpha$ est ramifiée exactement en $\mathfrak{p}_\alpha$ et en les places réelles de F_α. On note G le groupe linéaire projectif associé à B : ainsi $G(\mathbb{Q}) = B^\times/\mathbb{Q}^\times$. On obtient de même un groupe G_α sur F_α, qui est obtenu par extension des scalaires à partir de G.

Considérons d'abord le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ où $\mathbb{A}$ désigne les adèles rationnels. Nous considérerons des formes automorphes sur $G(\mathbb{A})$, donc des fonctions sur le quotient compact $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$.

Nous nous limitons dans cette note au cas le plus simple, en imposant des conditions de ramification minimale.

Fixons un ordre maximal $\mathbb{O}_B$ de B. Pour $\ell \neq p$, $(\mathbb{O}_B \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times$ est un sous-groupe compact maximal de $(B \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_\ell)$. Soit K_ℓ son image dans $G(\mathbb{Q}_\ell)$.

En p, soit $\mathfrak{P}$ l'idéal maximal de $\mathbb{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$. Soit K_p l'image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ du sous-groupe $1 + \mathfrak{P}$ de $(B \otimes \mathbb{Q}_p)^\times$. On pose $K = \prod_q K_q \subset G(\mathbb{A}_f)$.

Dans ce qui suit on appelle α le *degré* d'un objet relatif à F_α. En degré α, on définit de même en toute place $\lambda \nmid p$ de F_α un sous-groupe K_λ à partir de l'ordre local $\mathbb{O}_B \otimes \mathbb{O}_\lambda$.

Le discriminant (réduit) de l'ordre maximal $\mathbb{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p \subset B_p$ est égal à p. En degré α, il en résulte par un calcul simple (voir [Vignéras 1980, p. 35]) que le discriminant de $\mathbb{O}_B \otimes \mathbb{O}_{p,\alpha} \subset B \otimes F_{p,\alpha}$ est l'idéal $(p) = \mathfrak{p}_\alpha^{p^\alpha}$. En particulier cet ordre n'est pas l'ordre maximal, le discriminant de celui-ci étant $\mathfrak{p}_\alpha$. Pour tout α, on munit au contraire $B_{p,\alpha}$ de son ordre maximal $\mathbb{O}_{B_{p,\alpha}}$. Ceux-ci vérifient les inclusions évidentes pour α variable. Pour tout α, la donnée de $\mathbb{O}_{B_{p,\alpha}}$ et des ordres précédents en $\lambda \nmid p$ définit un ordre maximal global $\mathbb{O}_{B,\alpha} \subset B \otimes F_\alpha$. Enfin, on définit $K_{p,\alpha} \subset G(F_{p,\alpha})$ comme précédemment à partir de l'idéal premier $\mathfrak{P}_\alpha \subset \mathbb{O}_{B_{p,\alpha}}$.

Soit

$$S_\alpha = G(F_\alpha)\backslash G(\mathbb{A}_{F_\alpha})/G(F_{\alpha,\infty})K_\alpha.$$

C'est un ensemble fini, et on pose

$$\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha(\bar{\mathbb{F}}_p) = \{f : S_\alpha \to \bar{\mathbb{F}}_p\}.$$

Noter que $S_\alpha = G(F_\alpha)\backslash G(\mathbb{A}_\alpha^f)/K_\alpha$ où on a noté $\mathbb{A}_\alpha^f$ les adèles finis de F_α.

On peut évidemment définir $\mathcal{S}_\alpha(R)$ pour toute algèbre commutative R. En particulier, $\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{C})$ correspond, par la correspondance de Jacquet–Langlands, à un espace de formes modulaires sur $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{A}_\alpha)$ (donc de caractère central trivial), de poids parallèle 2, et qui sont, ou des caractères d'Artin d'ordre 2 de $\mathbb{A}_\alpha^\times$, partout non ramifiés aux places ne divisant pas p, ou bien contenues dans des représentations cuspidales de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{A}_\alpha)$, non ramifiées hors p, et appartenant à la série discrète (avec une ramification bornée) en p.

Lemme 2.1. *Supposons $p > 3$. Alors $G(F_\alpha)$ opère librement sur $G(\mathbb{A}_\alpha^f)/K_\alpha$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $K_{p,\alpha}$ ne contient aucun élément non trivial d'ordre fini. Puisque $1 + \mathfrak{P}_\alpha$ est un p-groupe, l'ordre d'un tel élément γ serait égal à p^β, $\beta \geq 1$. Soit $S \subset B^\times$ le groupe des éléments de norme 1, de sorte qu'on a une suite exacte

$$1 \to \{\pm 1\} \to S \to G \to 1$$

d'où pour les points sur $F = F_{p,\alpha}$:

$$1 \to \{\pm 1\} \to S(F) \to G(F) \to F^\times/(F^\times)^2.$$

L'élément γ provient donc de $S(F)$; l'ordre de son image inverse dans $S(F)$ est p^β ou $2p^\beta$; dans le dernier cas le produit par (-1) donne un élément d'ordre p^β.

On obtient donc un élément semi-simple non central $\gamma_1 \in B^\times(F)$, qui engendre une extension quadratique de $F_{p,\alpha}$, donc une extension de degré $2p^\alpha$ de $\mathbb{Q}_p$.

Mais γ_1 s'identifie à une racine primitive de 1 d'ordre p^β, et son degré sur $\mathbb{Q}_p$ est donc $(p-1)p^{\beta-1}$. Si $p > 3$, ceci est impossible. $\square$

Les démonstrations qui suivent vont reposer sur des arguments galoisiens, concernant en particulier les groupes de Galois relatifs $\mathrm{Gal}(F_\beta/F_\alpha) \cong \mathbb{Z}/p^{\beta-\alpha}\mathbb{Z}$ $(\alpha \leq \beta)$. On notera que les sous-groupes compacts considérés sont stables par l'action galoisienne : c'est clair pour les K_λ (les places λ non inertes étant bien sûr permutées) et aussi pour les $K_{p,\alpha}$: l'ordre maximal $\mathcal{O}_{B_{p,\alpha}}$ étant unique, est invariant.

La suite des K_α étant croissante, on a des applications évidentes $S_\alpha \to S_\beta$ $(\alpha \leq \beta)$, qui sont donc équivariantes.

Lemme 2.2 ($p \geq 5$). *Les applications naturelles $\iota_\alpha^\beta : S_\alpha \to S_\beta$ sont injectives $(\alpha \leq \beta)$.*

Pour $\alpha \le \beta$, on note j_α^β l'application $\mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{S}_\beta$ obtenue par l'extension par zéro, et r_α^β la restriction $\mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\alpha$.

On définit alors, pour tout R

$$\mathcal{S}_\infty = \mathcal{S}_\infty(R) = \varinjlim \mathcal{S}_\alpha(R)$$

et $\mathcal{S}^\infty = \varprojlim \mathcal{S}_\alpha(R)$, les limites étant prises respectivement pour les j_α^β et r_α^β.

Le premier espace est l'espace des fonctions à support fini sur $S_\infty = \varinjlim S_\alpha$, alors que $\mathcal{S}^\infty$ est l'espace des fonctions $S_\infty \to R$.

Démonstration du lemme 2.2. Soit $x, x' \in S_\alpha$ d'image commune $y \in S_\beta$ et $g, h \in G(\mathbb{A}_\alpha^f)$ des représentants de x, x'. On a donc par hypothèse

$$g = \gamma h k \quad (\gamma \in G(F_\beta),\ k \in K_\beta). \tag{2-1}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_\beta/F_\alpha)$, alors

$$g = \sigma(g) = \sigma(\gamma) h \sigma(k)$$

donc

$$\sigma(\gamma)^{-1}\gamma h k = h\sigma(k), \quad k(\sigma(k) \in K_\beta).$$

D'après le lemme 2.1, on a donc $\sigma(\gamma) = \gamma$ pour tout σ, donc $\gamma \in G(F_\alpha)$; il résulte de (2-1) que $\sigma(k) \equiv k$ et donc $k \in K_\alpha$, soit $x = x'$. □

La dernière assertion résulte du lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soit* $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\beta/F_\alpha)$. *Alors* $H^0(\Gamma, K_\beta) = K_\alpha$.

Démonstration. Le groupe K_α est décomposé, et l'assertion du lemme se voit place par place. Aux places $\nmid p$ elle est évidente.

Rappelons que $K_{p,\alpha}$ est l'image dans $G(F_{p,\alpha})$ de $1+\mathfrak{P}_\alpha$. On vérifie aisément que $(1+\mathfrak{P}_\alpha) \cap F_{p,\alpha}^\times = 1+\mathfrak{p}_\alpha$, le corps étant plongé centralement dans $B_{p,\alpha}$. Par ailleurs $(1+\mathfrak{P}_\beta) \cap B_{p,\alpha} = 1+\mathfrak{P}_\alpha$. Il suffit évidemment de vérifier que $\mathfrak{P}_\beta \cap B_{p,\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha$. Notons N_α, N_β les normes réduites. Alors $\mathfrak{P}_\alpha$ (par exemple) est défini par $|N_\alpha(x)| < 1$, et pour $x \in B_{p,\alpha}$, $N_\beta(x) = N_\alpha(x)^{[F_\beta:F_\alpha]}$.

La suite exacte en cohomologie déduite de

$$1 \to (1+\mathfrak{p}_\beta) \to (1+\mathfrak{P}_\beta) \to K_\beta \to 1$$

donne donc

$$1 \to (1+\mathfrak{p}_\alpha) \to (1+\mathfrak{P}_\alpha) \to K_\beta^\Gamma \to H^1(\Gamma, 1+\mathfrak{p}_\beta) \to H^1(\Gamma, 1+\mathfrak{P}_\beta),$$

et il suffit de vérifier que la dernière flèche est injective. Mais la norme réduite donne de nouveau :

$$1 \to (1+\mathfrak{p}_\beta) \to (1+\mathfrak{P}_\beta) \xrightarrow[N_\beta]{} (1+\mathfrak{p}_\beta) \to 1,$$

la composée des deux applications étant l'application carré. Puisque $p \neq 2$, il en résulte que $H^1(\Gamma, 1+\mathfrak{p}_\beta) \to H^1(\Gamma, 1+\mathfrak{P}_\beta)$ est injective. □

La fin de ce paragraphe, qui n'est pas nécessaire pour la suite, est consacrée au calcul de la dimension des espaces $\mathcal{S}$.

Rappelons que

$$S_\alpha = G(F_\alpha)\backslash G(\mathbb{A}_\alpha)/G(F_{\alpha,\infty})K_\alpha. \tag{2-2}$$

Munissons $G(\mathbb{A}_\alpha)$ de la mesure de Tamagawa [Vignéras 1980]. D'après Weil, la mesure de $G(F_\alpha)\backslash G(\mathbb{A}_\alpha)$ est égale à 2. Puisque $G(F_\alpha)$ opère librement, on a donc

$$N_\alpha := \#S_\alpha = \frac{2}{\mathrm{vol}(G(F_{\alpha,\infty})K_\alpha)}$$

le volume étant calculé à l'aide de la mesure de Tamagawa τ.

Nous suivons pour ce calcul l'exposé de Vignéras [1980]. Écrivons pour simplifier $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\alpha$. On a

$$G(\mathbb{A}) = B^\times(\mathbb{A})/\mathbb{A}^\times,$$

et la mesure τ est le quotient de $dX_{\mathbb{A}}^\times$ et $dx_{\mathbb{A}}^\times$, chacune multipliée par les facteurs $\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F_\alpha}$ qui donc s'annulent [Vignéras 1980, p. 65]. On a :

$$dx_{\mathbb{A}}^\times = \prod_v dx_v^\times,$$

$$d^\times x_v = \frac{dx_v}{|x_v|} \quad (v \text{ réelle}),$$

$$d^\times x_v = (1-q_v^{-1})^{-1} D_v^{-1/2} \frac{dx_v}{|x_v|} \quad (v\ p\text{-adique}).$$

De même

$$d^\times X_v = \frac{dX_v}{|Nrd(X_v)|^2} \quad (v \text{ réelle}),$$

$$d^\times X_v = D_v^{-1/2}(1-q_v^{-1})^{-1} \frac{dX_v}{|NrdX_v|^2} \quad (v\ p\text{-adique}),$$

où D_v désigne maintenant le discriminant de B_v. Les mesures additives dx_v sont les mesures usuelles ; les mesures dX_v sont spécifiées dans [Vignéras 1980, pp. 49–50].

***Places non ramifiées* ($v \nmid p$).** Dans ce cas, $K_v = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{O}_v)$ et $\mathrm{vol}(K_v) = 1 - q_v^{-2}$ [Vignéras 1980, p. 49].

***Place* $v = \mathfrak{p}_\alpha \mid p$.** Dans ce cas, on a [ibid.]

$$\mathrm{vol}(\mathbb{O}_B^\times,\ d^\bullet X_v) = \frac{1-q_v^{-2}}{1-q_v^{-1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{vol}(\mathbb{O}_{F_v}^\times, d^\bullet x_v) = 1,$$

où les mesures $d^\bullet$ ne contiennent pas le discriminant, donc pour le compact maximal :

$$\mathrm{vol}\left(K_v^0, \frac{d^\times X_v}{d^\times x_v}\right) = \left(\frac{1-q_v^{-2}}{1-q_v^{-1}}\right)\left(\frac{D(B_v)}{D(F_v)}\right)^{-1/2}.$$

On a $D(B_v) = D(F_v)^4\ N(d_B)^2$ [ibid., p. 65] où $N(d_B) = N\mathfrak{p}_\alpha = p$ [ibid., p. 35]. Donc

$$\mathrm{vol}(K_v^0) = D(F_v)^{-3/2}\left(\frac{1-p^{-2}}{p-1}\right)$$

puisque $q_v = p$.

Mais notre groupe K_v (en $v = \mathfrak{p}_\alpha$) est quotient de $1+\mathfrak{P}$, non $\mathbb{O}_B^\times$. Leurs intersections respectives avec le centre $F_{p,\alpha}^\times$ de $B^\times$ sont $1+\mathfrak{p}_\alpha \subset \mathbb{O}_{p,\alpha}^\times$. On vérifie aisément que $K_v^0/K_v \cong k_2^\times/k^\times$ où $k = k_\alpha$, k_2 est son extension quadratique, donc d'ordre $p+1$. Au total, la partie finie du volume est

$$\mathrm{vol}(K_f) = D_v^{-3/2}\zeta_{F_\alpha}(2)^{-1}\frac{1}{p^2-1}$$

où D_v est évidemment le discriminant de F_α.

Places archimédiennes. On doit calculer

$$\mathrm{vol}\left(B^\times/\mathbb{R}^\times, \frac{d^\times X_v}{d^\times x_v}\right),$$

où B est l'algèbre de Hamilton et $dX_v = 4\,dX_1 \ldots dX_4$ avec les coordonnées usuelles. En identifiant B à $\mathbb{R}^4$, on voit qu'on doit calculer

$$\mathrm{vol}\left(S^3/\pm 1, \frac{4dX}{r^4}\Big/\frac{dr}{r}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}(S^3, 4d\omega) = 2\,\mathrm{vol}(S^3)$$

avec la mesure de surface $d\omega$, donc $4\pi^2$.

Il reste à calculer le discriminant, qui se déduit aisément de la Führerdiskriminantenproduktformel [3]

$$D_v = D_{F_\alpha} = \prod_\chi \mathfrak{f}_\chi$$

où χ parcourt les caractères d'ordre multiple de p de $(\mathbb{Z}/p^{\alpha+1}\mathbb{Z})^\times$. Il vient

$$D_{F_\alpha} = p^d,$$

où

$$\begin{aligned} d = d_\alpha &= (\alpha+1)(p^\alpha - p^{\alpha-1}) + \alpha(p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2}) + \cdots + 2(p-1) \\ &= (p^\alpha - 1)\frac{p-2}{p-1} + \alpha p^\alpha. \end{aligned}$$

3. C'est un exercice amusant de calculer D_v à l'aide de la théorie p-adique.

On a donc démontré :

Proposition 2.4. $$N_\alpha = \# S_\alpha = 2\cdot (4\pi^2)^{-p^\alpha} p^{\frac{3}{2}d_\alpha}(p^2-1)\zeta_{F_\alpha}(2).$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a en fait

$$N_\alpha = -2\cdot 2^{-p^\alpha}(p^2-1)\zeta_{F_\alpha}(-1) \tag{2-3}$$

ce qui montre la compatibilité avec les résultats connus sur la rationalité de $\zeta_{F_\alpha}(-1)$. (En fait, on sait d'après Serre, Harder et Hirzebruch [Serre 1971] que $24\cdot 2^{-p^\alpha}\zeta_F(-1)\in\mathbb{Z}$, ce qui implique l'intégralité de N_α.)

Soit $\Gamma_\alpha = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_\alpha)$. Puisque $\Gamma_{\alpha-1}/\Gamma_\alpha \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ opère sans point fixe sur $S_\alpha - S_{\alpha-1}$, on en déduit d'ailleurs :

Proposition 2.5. $\zeta_{F_\alpha}(-1)-\zeta_{F_{\alpha-1}}(-1)$ *est divisible par* p.

Noter par ailleurs que la condition $p>3$ était nécessaire pour le lemme 2.1, au moins si $\alpha=0$. En effet si $F=\mathbb{Q}$, $\zeta_F(-1)=-\frac{1}{12}$; d'après (2-3), N_α n'est entier que pour $p>3$.

Pour comprendre la croissance de N_α, revenons à la proposition 2.4. On a $\zeta_{F_\alpha}(2)\geq 1$, donc

$$\log_p(N_\alpha)\geq \tfrac{3}{2}\alpha p^\alpha(1+o(1)) - p^\alpha\log_p(4\pi^2)+O(1)\sim \tfrac{3}{2}\alpha p^\alpha.$$

En particulier, N_α croît très vite avec α.

Dans le § 4, nous serons amenés à considérer les fonctions sur S_β ($\beta\geq\alpha$) invariantes par Γ_α, α étant fixé. Le groupe Γ_α opère sur $S_\beta - S_{\beta-1}$ par son quotient $\Gamma_{\beta-1}/\Gamma_\beta\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'action de ce quotient étant libre. La dimension de l'espace des fonctions invariantes sur $S_\beta - S_{\beta-1}$ est donc $\frac{1}{p}(N_\beta - N_{\beta-1})$. Des estimées analogues — à l'aide d'une majoration de $\zeta_{F_\alpha}(2)$, par exemple par $(\zeta_{\mathbb{Q}}(2))^{p^\alpha}$ — montrent que cet espace croît très vite. Il en résulte que l'espace $\mathcal{S}^\alpha_\beta := \mathcal{S}_\beta^{\Gamma_\alpha}$ considéré au § 4 n'est pas constitué (disons sur $\mathbb{C}$) par des formes automorphes provenant par changement de base à partir de formes sur F_α.

3.

Dans ce paragraphe nous définissons *en caractéristique* p des opérateurs de Hecke T_ℓ (ℓ inerte) opérant sur $\mathcal{S}_\infty$.

Soit donc $\ell\neq p$ un nombre premier inerte : $\psi(\ell)\neq 0$. Le corps $\mathbb{Q}_\ell(p^\infty)$ a pour corps résiduel une $\mathbb{Z}_p$-extension $\mathbb{F}=\varinjlim \mathbb{F}_{\ell p^\alpha}$ de $\mathbb{F}_\ell$. On écrit $\mathbb{F}_\alpha$ pour $\mathbb{F}_{\ell p^\alpha}$.

En degré fini α, l'opérateur $T_\ell : \mathcal{S}_\alpha\to\mathcal{S}_\alpha$ est donné (quels que soient les coefficients) par

$$\begin{aligned} T_\ell f(g) &= \sum_{\xi\in\mathbb{F}_\alpha} f\left(g\begin{pmatrix}\ell & \xi\\ & 1\end{pmatrix}\right)+f\left(g\begin{pmatrix}1 & \\ & \ell\end{pmatrix}\right)\\ &=: U_\ell f(g)+V_\ell f(g).\end{aligned} \tag{3-1}$$

On choisit des représentants dans l'anneau d'entiers $\mathbb{O}(\mathbb{Q}_\ell(p^\alpha))$ des $\xi \in \mathbb{F}_\alpha$; la valeur de $T_\ell f(g)$ n'en dépend point. La fonction f doit être considérée comme une fonction de

$$g \in Y_\alpha := G(F_\alpha)\backslash G(\mathbb{A}_\alpha^f)/K_\alpha^\ell,$$

où K_α^ℓ est le produit des composantes de K_α aux places ne divisant pas ℓ. L'espace Y_α est donc réunion finie de quotients de $G(F_{\alpha,\ell})$ par des groupes de congruence.

On vérifie aisément, en imitant la démonstration du lemme 2.2, que les applications

$$Y_\alpha \to Y_\beta \qquad (\beta \geq \alpha)$$

sont injectives. En effet, $G(F_\alpha)$ opère librement sur $G(\mathbb{A}_\alpha^f)/K_\alpha^\ell$ (considérer les composantes en ℓ) ; la démonstration précédente s'applique en utilisant le lemme 2.3 aux places ne divisant pas p. Si $f \in \mathcal{S}_\infty$, on peut évidemment considérer f comme une fonction sur

$$Y_\infty = \varinjlim Y_\alpha.$$

On définit formellement T_ℓ par

$$T_\ell = U_\ell + V_\ell$$

l'expression de V_ℓ étant inchangée et U_ℓ étant donné par

$$U_\ell f(g) = \sum_\xi f\left(g\begin{pmatrix}\ell & \xi\\ & 1\end{pmatrix}\right). \tag{3-2}$$

La somme porte maintenant sur les $\xi \in \mathbb{F}$; $g \in Y_\infty$ donc $g \in Y_\beta$ pour un certain β.

Avant de poursuivre, notons T_ℓ^α l'opérateur (3-1), i.e. T_ℓ en degré fini. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "T_\ell^\alpha"'] & \mathcal{S}_\beta \arrow[d, "T_\ell^\beta"] \\ \mathcal{S}_\alpha \arrow[r] & \mathcal{S}_\beta \end{tikzcd}$$

$(\beta \geq \alpha)$ n'est certainement pas commutatif, par exemple si l'anneau de coefficients est égal à $\mathbb{C}$. La commutativité impliquerait en effet qu'une valeur propre a_α de T_ℓ^α (opérateur de Hecke en la place $(\ell) = \lambda_\alpha$ de F_α) serait une valeur propre de T_ℓ^β en la place λ_β. Mais les valeurs propres sont, au moins pour les formes issues de formes paraboliques sur GL(2), de la forme

$$a_\alpha = \ell^{p^{\alpha/2}}(u+v) \tag{3-3}$$

où $|u| = |v| = 1$, et on ne peut donc avoir $a_\alpha = a_\beta$ pour des raisons de poids. Noter que le changement de base de Langlands [1980] associe à (3-3) une valeur propre

$$a_\beta = \ell^{p^{\beta/2}}(u^{p^{\beta-\alpha}} + v^{p^{\beta-\alpha}}) \tag{3-4}$$

puisque $p^{\beta-\alpha}$ est le degré de l'extension locale, inerte. On peut vérifier directement, sur l'expression (3-1), que, pour $f \in \mathcal{S}_\alpha$, $T_\beta f$ n'est pas en général à support dans S_α. Pour les mêmes raisons, la somme (3-2) n'est pas évidemment convergente, i.e. finie.

Mais supposons l'anneau des coefficients R de caractéristique p. On considère l'ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{F})$ des complémentaires des $\mathbb{F}_\alpha$ ($\alpha \geq 0$). Ce n'est pas un filtre, mais il définit une notion de convergence analogue. En particulier, si R est muni de la topologie discrète, on dira qu'une somme $\sum_{\xi \in \mathbb{F}} f(\xi)$ est convergente pour $\mathcal{F}$ si la somme

$$\sum_{\mathbb{F}_0} f(\xi) + \sum_{\mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_0} f(\xi) + \cdots + \sum_{\mathbb{F}_\alpha - \mathbb{F}_{\alpha-1}} f(\xi) + \cdots$$

est convergente, i.e. si tous les termes sont nuls pour $\alpha \gg 0$.

Proposition 3.1. *Pour $f \in \mathcal{S}_\infty(R)$ la somme*

$$U_\ell f(g) = \sum_\xi f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

est convergente pour $\mathcal{F}$ si R est de caractéristique p. De plus $T_\ell f = U_\ell f + V_\ell f$ est un élément de $\mathcal{S}^\infty(R)$.

Démonstration. Supposons f à support dans S_α (donc dans Y_α pour le calcul de U_ℓ). Soit $x \in S_\beta$, image de $g \in Y_\beta$. Considérons un terme

$$f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{3-5}$$

de (3-2) ; soit $\mathbb{F}_\gamma = \langle \mathbb{F}_\alpha, \mathbb{F}_\beta \rangle$ et supposons que $\xi \notin \mathbb{F}_\gamma$. Soit $\sigma \in \Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_\ell(\xi)/\mathbb{F}_\gamma)$. Si le terme (3-5) est non nul, $g\left(\begin{smallmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Y_\alpha$ est invariant par σ. On a alors

$$f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\sigma\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \sigma\xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

car σ fixe g. Puisque ξ n'est pas fixe par Γ, le cardinal de l'orbite de ξ est divisible par p. On a donc pour tout $\delta > \gamma$

$$\sum_{\xi \in \mathbb{F}_\delta - \mathbb{F}_\gamma} f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

ce qui démontre la convergence de la somme.

Pour la fin de la démonstration, on peut supposer $\beta \geq \alpha$. Alors (si $x \in S_\beta$) le calcul précédent montre que $T_\ell f(g) = T_\ell^\beta f(g)$; la théorie classique montre alors que $T_\ell f$ est invariante par $K_{\ell,\beta}$ donc définit par restriction un élément de $\mathcal{S}_\beta$. $\square$

La démonstration précédente montre en fait que (pour R de caractéristique p) $T_\ell^\beta f(x) = T_\ell^\alpha f(x)$ si f est à support dans S_α, $x \in S_\alpha$ et $\beta \geq \alpha$. En termes de la restriction $r_\alpha^\beta : \mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\alpha$, ceci s'écrit

$$r_\alpha^\beta T_\ell^\beta j_\alpha^\beta = T_\ell^\alpha. \tag{3-6}$$

Si on considère une base de $\mathcal{S}_\infty$ obtenue à l'aide de bases des fonctions sur $S_{\alpha+1} - S_\alpha$, T_ℓ est donc représenté par une matrice doublement infinie dont les blocs diagonaux (pour $\alpha \geq 0$) sont les T_ℓ^α.

Supposons pour simplifier que $R = \bar{\mathbb{F}}_p$.

Écrivons une valeur propre de T_ℓ^α — par exemple venant par réduction modulo p d'une valeur propre (3-3) — sous la forme

$$a_\alpha = u + v \tag{3-7}$$

où nous avons changé de notation et u, v sont les valeurs propres de $\mathrm{Frob}_{\lambda_\alpha}$ dans la représentation galoisienne (de poids géométrique 1) associée, modulo p évidemment. La valeur propre associée pour T_ℓ^β est alors par changement de base, cf. (3-4) :

$$a_\beta = u^{p^{\beta-\alpha}} + v^{p^{\beta-\alpha}}.$$

Mais l'ensemble des valeurs propres (3-7) apparaissant en degré α est, par rationalité ($\mathcal{S}_\alpha$ est défini sur $\mathbb{F}_p$) invariant par $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ opérant sur les *coefficients*. On voit donc que $a_\beta = \Phi_p^{\beta-\alpha}(a_\alpha)$ (Frobenius Φ_p *arithmétique*) apparaît dans $\mathcal{S}_\alpha$.

Il en résulte, de même, que toute valeur propre a_α de T_ℓ^α apparaît dans $\mathcal{S}_\beta$. Nous y reviendrons.

4.

Nous considérons maintenant les deux propriétés fondamentales des opérateurs de Hecke dans la théorie classique : ils sont auto-adjoints et forment une famille commutative. On suppose toujours ℓ inerte.

On a construit $T_\ell : \mathcal{S}_\infty \to \mathcal{S}^\infty$. On dispose d'une dualité naturelle

$$\mathcal{S}_\infty \times \mathcal{S}^\infty \to R, \quad \langle f, F\rangle = \sum_{x \in S_\infty} f(x) F(x).$$

Pour fixer les idées, supposons désormais que R est un corps, et en fait que $R = \bar{\mathbb{F}}_p$. Alors $\mathcal{S}_\infty$ est limite inductive d'espaces de dimension finie et $\mathcal{S}^\infty$, son dual, est linéairement compact (compact si R est une extension finie de $\mathbb{F}_p$).

La relation d'adjonction est immédiate :

Proposition 4.1. *Pour $f, g \in \mathcal{S}_\infty$,*

$$\langle T_\ell f, g\rangle = \langle f, T_\ell g\rangle.$$

Démonstration. On peut en effet considérer $j_\alpha : \mathcal{S}_\alpha \to \mathcal{S}_\infty$ et $r_\alpha : \mathcal{S}^\infty \to \mathcal{S}_\alpha$. La relation (3-6) donne alors

$$r_\alpha T_\ell j_\alpha = T_\ell^\alpha.$$

On peut supposer que $f, g \in \mathcal{S}_\alpha$ et donc

$$\langle T_\ell f, g\rangle = \langle r_\alpha T_\ell j_\alpha f, g\rangle = \langle T_\ell^\alpha f, g\rangle_\alpha = \langle f, T_\ell^\alpha g\rangle_\alpha$$

(produit scalaire sur S_α), d'où le résultat par symétrie. □

Puisque T_ℓ ne préserve pas $\mathcal{S}_\infty$, la relation de commutation

$$T_\ell T_m = T_m T_\ell$$

(ℓ, m premiers inertes) n'a pas de sens pour l'instant. Nous devons étendre le domaine de T_ℓ. Noter que

$$\mathcal{S}^\infty = \varprojlim \mathcal{S}_\alpha$$

(limite projective pour la restriction) ; pour $f \in \mathcal{S}_\infty$, la relation (3-6) montre que $T_\ell f \in \mathcal{S}^\infty$ est la limite projective des $T_\ell^\alpha f$ pour $\alpha \geq \gamma$ et $f \in \mathcal{S}_\gamma$. Mais l'application $T_\ell : \mathcal{S}^\infty \to \varprojlim \mathcal{S}_\alpha$ ne s'étend pas continûment à $\mathcal{S}_\infty$.

Notons maintenant Γ le groupe $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$; on a $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$. Soit également $\Gamma_\alpha = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_\alpha)$; alors $\Gamma_\alpha = p^\alpha \mathbb{Z}_p$.

Proposition 4.2. *T_ℓ commute à l'action de* Γ.

Démonstration. Soit en effet $f \in \mathcal{S}_\alpha$ et $g \in Y_\infty$; on peut supposer $g \in Y_\beta$ avec $\beta \geq \alpha$. Alors

$$U_\ell f(g) = \sum_\xi f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1\end{pmatrix}\right) \qquad (\xi \in \mathbb{F}_\beta)$$

d'après la preuve de la proposition 3.1. Si $\sigma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} U_\ell f(\sigma g) &= \sum_\xi f\left(\sigma g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1\end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_\xi f\left(\sigma\left(g\begin{pmatrix} \ell & \sigma^{-1}\xi \\ & 1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \sum_\xi f\circ\sigma\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

□

Soit $\mathcal{S}^\alpha \subset \mathcal{S}^\infty$ le groupe des invariants pour Γ_α :

$$\mathcal{S}^\alpha = H^0(\Gamma_\alpha, \mathcal{S}^\infty)$$

de sorte que $\mathcal{S}^\alpha = \varprojlim \mathcal{S}^\alpha_\beta$ où $\mathcal{S}^\alpha_\beta = H^0(\Gamma_\alpha, \mathcal{S}_\beta)$. Noter que $\mathcal{S}^\alpha$ est le produit des $\mathcal{S}^\alpha_\gamma / \mathcal{S}^\alpha_{\gamma-1}$ $(\gamma \geq 0)$, chacun de ces groupes s'identifiant à l'espace des fonction (à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$) sur l'ensemble fini des orbites de Γ_α dans $S_\gamma - S_{\gamma-1}$.

On peut définir de même $\mathcal{S}^\alpha_\infty = \mathcal{S}_\infty \cap \mathcal{S}^\alpha$. D'après la proposition 4.2,

$$T_\ell : \mathcal{S}^\alpha_\infty \to \mathcal{S}^\alpha.$$

Proposition 4.3. *T_ℓ s'étend continûment en un opérateur $T_\ell : \mathcal{S}^\alpha \to \mathcal{S}^\alpha$.*

La topologie sur $\mathcal{S}^\infty$ est la topologie naturelle d'espace linéairement compact.

Démonstration de la proposition 4.3. Soit en effet $F \in \mathcal{S}^\alpha$, et $g \in Y_\beta$. On veut définir

$$U_\ell F(g) = \sum_\xi F\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right). \tag{4-1}$$

On peut supposer $\beta \geq \alpha$. Si $\sigma \in \Gamma_\beta$,

$$F\left(g \begin{pmatrix} \ell & \sigma\xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = F\left(\sigma\left(\sigma^{-1} g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = F\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right),$$

puisque F et g sont fixes par Γ_β. On peut donc restreindre la sommation aux $\xi \in \mathbb{F}_\beta$, et l'opérateur ainsi défini ne dépend pas du choix de β. L'opérateur $T_\ell = U_\ell + V_\ell$ ainsi défini étend évidemment $T_\ell : \mathcal{S}^\alpha_\infty \to \mathcal{S}^\infty$. Son image est dans $\mathcal{S}^\alpha$ comme on le voit en imitant la démonstration de la proposition 4.2. (Ceci résulte aussi de la continuité.) Mais la topologie sur $\mathcal{S}^\infty$ est aussi la topologie de la convergence simple. Si $F \in \mathcal{S}^\alpha$, $F \to 0$,

$$U_\ell F(g) = \sum_\xi F\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

est donné, pour g fixé, par une somme finie d'après la démonstration précédente, et tend donc vers 0. □

On a alors :

Théorème 4.4. *Pour tout $\alpha \geq 0$, les T_ℓ (ℓ inerte) forment une famille commutative d'opérateurs continus $\mathcal{S}^\alpha \to \mathcal{S}^\alpha$.*

Ceci résulte de la démonstration précédente. Soit ℓ, m inertes et notons $\mathbb{F}_{\ell,\alpha}$, $\mathbb{F}_{m,\alpha}$ les p^α-extensions de $\mathbb{F}_\ell$ et $\mathbb{F}_m$. Pour $g \in Y_\beta$, l'expression (4-1) s'applique à U_ℓ et U_m, les sommes portant sur $\mathbb{F}_{\ell,\beta}$ et $\mathbb{F}_{m,\beta}$. Puisque les matrices $\left(\begin{smallmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} m & \eta \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (dans $G(F_{\ell,\alpha})$ et $G(F_{m,\alpha})$) commutent le résultat est évident.

La propriété d'auto-adjonction reste vraie dans ce cadre, si l'on définit convenablement le produit scalaire dans $\mathcal{S}^\alpha$. Soit $F, G \in \mathcal{S}^\alpha = \varprojlim \mathcal{S}^\alpha_\beta$. Considérons $\beta \geq \alpha$ et les restrictions de F, G à S_β. On considère leur produit scalaire $\langle F, G\rangle_\beta = \sum_{x \in S_\beta} F(x)G(x)$.

Lemme 4.5. *Si H est une fonction invariante par Γ_α,*

$$\int_{S_\beta} H = \sum_{x \in S_\beta} H(x)$$

ne dépend pas de $\beta \geq \alpha$. En particulier $\langle F, G\rangle_\beta = \langle F, G\rangle_\alpha$ pour $\beta \geq \alpha$.

Démonstration. En effet les orbites de Γ_α sur $S_\beta - S_\alpha$ ont pour ordre des puissances non nulles de p. □

On définit donc, pour $F, G \in \mathcal{S}^\alpha$:

$$\langle F, G\rangle = \langle F, G\rangle_\alpha = \langle F, G\rangle_\beta \qquad (\beta \geq \alpha).$$

La démonstration de la proposition 4.3 montre par ailleurs :

Lemme 4.6. *Si $F \in \mathcal{S}^\alpha$ et $x \in S_\beta$ $(\beta \geq \alpha)$,*

$$T_\ell F(x) = T_\ell^\beta (r_\beta F)(x),$$

où $r_\beta F = F|_{S_\beta}$.

On a donc :

Proposition 4.7. *Pour $F, G \in \mathcal{S}^\alpha$,*

$$\langle T_\ell F, G\rangle = \langle F, T_\ell G\rangle.$$

Démonstration. En effet $\langle T_\ell F, G\rangle = \langle T_\ell F, G\rangle_\alpha = \langle T_\ell^\alpha F, G\rangle_\alpha$, d'où le résultat d'après la propriété classique. Noter que l'accouplement $\langle F, G\rangle$ est évidemment très dégénéré sur $\mathcal{S}^\alpha$. □

5.

Nous considérons maintenant la relation des constructions précédentes avec le changement de base. Fixons α, et soit $f \in \mathcal{S}_\alpha$ forme propre des opérateurs de Hecke :

$$T_\ell^\alpha f = a_\ell f \quad (\ell \text{ inerte}).$$

On a

$$r_\alpha^\beta\, T_\ell^\beta\, j_\alpha^\beta f = a_\ell f \quad (\beta \geq \alpha)$$

mais ceci n'implique pas, évidemment, que $j_\alpha^\beta f \in \mathcal{S}_\beta$ est forme propre. Soit $h \in \mathcal{S}_\beta$: alors

$$\langle T_\ell^\beta h, f\rangle_\beta = \langle h, T_\ell^\beta f\rangle_\beta,$$

où on identifie f à $j_\alpha^\beta f$.

Supposons h invariante par Γ_α ; f l'est évidemment. Alors $T_\ell^\beta f = T_\ell f|_{S_\beta}$ est Γ_α-invariante (proposition 4.2). On a donc

$$\langle T_\ell^\beta h, f\rangle = \langle h, r_\alpha^\beta T_\ell^\beta f\rangle_\alpha$$

(d'après le lemme 4.5). Ainsi

$$\langle T_\ell^\beta h, f\rangle = \langle h, T_\ell^\alpha f\rangle_\alpha = a_\ell\langle h, f\rangle_\alpha = a_\ell\langle h, f\rangle_\beta.$$

Alors $h \mapsto \lambda(h) = \langle h, f\rangle$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}_\beta^\alpha$ telle que $(T_\ell^\beta)^*\lambda = a_\ell\lambda$ pour tout ℓ inerte ; elle est non nulle car on peut choisir h dont la restriction à S_α n'est pas orthogonale à f.

On en déduit par dualité :

Théorème 5.1 (changement de base en degré fini). *Pour tout $\beta \geq \alpha$ il existe $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$ telle que*

$$T_\ell^\beta f_\beta = a_\ell f_\beta \quad (\ell \textit{ inerte}).$$

Comme on l'a vu à la fin du §3, ceci résulte du changement de base de Langlands [1980] (et Saito, Shintani) ; on notera cependant que la démonstration présente (en caractéristique p, et pour les ℓ inertes) donne un argument *direct* pour l'existence de f_β.

Nous terminons sur le *problème* suivant. Partant de la forme propre $f \in \mathcal{S}_\alpha$, nous avons construit, pour tout β, une forme $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$, forme propre des T_ℓ^β pour la famille de valeurs propres (a_ℓ). L'espace $\mathcal{S}^\alpha$ étant linéairement compact, une sous-suite des formes $(f_\beta)_\beta$ converge vers une forme propre $f \in \mathcal{S}^\alpha$ qui est forme propre des T_ℓ. Mais nous ne savons pas montrer qu'il existe une limite non nulle. Le problème est évidemment d'obtenir une suite (f_β) telle que (pour quelque β_0 fixe) $f_\beta|_{S_{\beta_0}} \neq 0$ pour tout β. Or l'argument de dualité utilisé dans la démonstration du théorème 5.1 ne garantit pas que la forme $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$ obtenue a une restriction non nulle à S_α. On aimerait évidemment — peut-être sous des conditions convenables relatives à la famille (a_ℓ) — obtenir une forme propre $F \in \mathcal{S}^\alpha$ pour les opérateurs « infinis » T_ℓ.

On peut cependant obtenir ainsi, partant de $f \in \mathcal{S}_\alpha$, une forme propre généralisée $F \in \mathcal{S}^\alpha$, au sens suivant. Revenons à l'argument précédent. On a considéré f comme une forme linéaire sur $\mathcal{S}_\beta^\alpha$, associée à la valeur propre a_ℓ. Considérons l'espace propre généralisé

$$\bigcup_n \ker\big(((T_\ell^\beta)^* - a_\ell)^n\big)$$

de $(T_\ell^\beta)^*$ dans $(\mathcal{S}_\beta^\alpha)^*$. Il est en dualité parfaite avec l'espace propre généralisé de T_ℓ^β dans $\mathcal{S}_\beta^\alpha$. Il existe donc une forme propre généralisée $h_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$ telle que $\langle h, f\rangle \neq 0$; en particulier $h|_{S_\alpha} \neq 0$.

Puisque l'espace $\mathscr{S}^\alpha = \varprojlim \mathscr{S}_\beta$ est linéairement compact, une sous-suite des h_β donne une forme $F \in \mathscr{S}^\alpha$ de même restriction à S_α. (Par ailleurs l'argument précédent permet d'obtenir une forme propre généralisée simultanée pour les T_ℓ). On a donc :

Proposition 5.2. *Il existe $F \in \mathscr{S}^\alpha$, non nulle, telle que, pour tout $\beta \geq \alpha$, $F_\beta = F|_{S_\beta}$ soit forme propre généralisée des T_ℓ^β, pour les valeurs propres (a_ℓ).*

D'après le lemme 4.6, $T_\ell - a_\ell$ est donc « localement nilpotent », mais le degré de nilpotence dépend a priori de β.

Note (ajoutée sur épreuves)

Après la rédaction de cet article, l'auteur a appris qu'une généralisation étendue de ces résultats (pour les extensions finies) avait été démontrée par D. Treumann et A. Venkatesh (en préparation). Par ailleurs J. Coates lui a montré comment la proposition 2.5 résultait naturellement de la théorie de la fonction zêta p-adique. Son argument est exposé dans une note de l'auteur à paraître (« Formes modulaires modulo p, changement de base et théorie d'Iwasawa »).

Bibliographie

[Langlands 1980] R. P. Langlands, *Base change for* GL(2), Annals of Mathematics Studies **96**, Princeton University Press, 1980. MR 82a:10032 Zbl 0444.22007

[Serre 1971] J.-P. Serre, "Cohomologie des groupes discrets", pp. 77–169 dans *Prospects in mathematics* (Princeton, 1970)), Ann. of Math. Studies **70**, Princeton University Press, 1971. MR 52 #5876 Zbl 0235.22020

[Vignéras 1980] M.-F. Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Mathematics **800**, Springer, Berlin, 1980. MR 82i:12016 Zbl 0422.12008

Received March 13, 2013. Revised June 13, 2013.

LAURENT CLOZEL
MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS-SUD
BÂT. 425
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE
laurent.clozel@math.u-psud.fr

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

msp.org/pjm

Founded in 1951 by E. F. Beckenbach (1906–1982) and F. Wolf (1904–1989)

See inside back cover or msp.org/pjm for submission instructions.

The subscription price for 2014 is US $410/year for the electronic version, and $535/year for print and electronic.
Subscriptions, requests for back issues and changes of subscribers address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163, U.S.A. The Pacific Journal of Mathematics is indexed by Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, PASCAL CNRS Index, Referativnyi Zhurnal, Current Mathematical Publications and Web of Knowledge (Science Citation Index).

The Pacific Journal of Mathematics (ISSN 0030-8730) at the University of California, c/o Department of Mathematics, 798 Evans Hall #3840, Berkeley, CA 94720-3840, is published twelve times a year. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices. POSTMASTER: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 4163, Berkeley, CA 94704-0163.

PJM peer review and production are managed by EditFlow® from Mathematical Sciences Publishers.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 268 No. 2 April 2014