

ANNALS OF K-THEORY

vol. 3 no. 1 2018

**Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires
et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5**

Yang Cao



A JOURNAL OF THE K-THEORY FOUNDATION

Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Yang Cao

Dans cet article, où le corps de base est un corps de caractéristique zéro quelconque, pour X une variété géométriquement cellulaire, on étudie le quotient du troisième groupe de cohomologie non ramifiée $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par sa partie constante. Pour X une compactification lisse d'un torseur universel sur une surface géométriquement rationnelle, on montre que ce quotient est fini. Pour X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 , on montre que ce quotient est trivial, sauf si X est une surface de del Pezzo de degré 8 d'un type particulier.

We consider geometrically cellular varieties X over an arbitrary field of characteristic zero. We study the quotient of the third unramified cohomology group $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ by its constant part. For X a smooth compactification of a universal torsor over a geometrically rational surface, we show that this quotient is finite. For X a del Pezzo surface of degree ≥ 5 , we show that this quotient is zero, unless X is a del Pezzo surface of degree 8 of a special type.

1. Introduction	157
2. Sur les variétés cellulaires et leur cohomologie non ramifiée	159
3. Surfaces de del Pezzo de degré au moins 5	162
4. Formes tordues de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	163
5. Calcul de $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour une surface de del Pezzo X de degré ≥ 5	166
Appendice: Accouplements de suites spectrales	169
Remerciements	169
Bibliographie	169

1. Introduction

Soient k un corps de caractéristique 0, \bar{k} une clôture algébrique et Γ_k le groupe de Galois de \bar{k} sur k . Pour une variété lisse X sur k et un faisceau étale F sur X ,

MSC2010: 14E08, 19E15.

Mots-clefs: del Pezzo surface, unramified cohomology.

on rappelle que la cohomologie non ramifiée de X de degré n est le groupe

$$H_{\text{nr}}^n(X, F) := H_{\text{Zariski}}^0(X, \mathcal{H}^n(X, F)),$$

où $\mathcal{H}^n(X, F)$ est le faisceau Zariski associé au préfaisceau $\{U \subset X\} \mapsto H_{\text{ét}}^n(U, F)$. Soit $F = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ le faisceau des racines de l'unité tordu j fois. Les groupes $H_{\text{nr}}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ sont des invariants k -birationnels des k -variétés projectives lisses géométriquement connexes, réduits à $H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour X k -rationnelle, c'est-à-dire k -birationnelle à un espace projectif. (cf. [Colliot-Thélène 1995, théorème 4.1.1 et proposition 4.1.4]). Le groupe $H_{\text{nr}}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ n'est autre que le groupe de Brauer de X , il a été fort étudié. On s'est intéressé plus récemment au groupe $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Le cas des coniques fut traité par Suslin. En dimension quelconque, le quotient $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est trivial pour toute quadrique lisse qui n'est pas une quadrique d'Albert (Kahn, Rost, Sujatha, voir [Kahn 2008, théorème 10.2.4(b)]).

Notons

$$\bar{H}_{\text{nr}}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) := \text{coker}(H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{\text{nr}}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))).$$

Dans cet article, nous nous intéressons aux surfaces géométriquement rationnelles les plus simples, les surfaces de del Pezzo de degré au moins 5. Rappelons que l'indice $I(X)$ d'une k -variété X est le pgcd des degrés sur k des points fermés. Si une surface de del Pezzo X de degré au moins 5 a un indice $I(X) = 1$, alors elle a un k -point et elle est k -rationnelle (cf. théorème 3.1). On a donc alors $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Nous nous intéressons ici au cas où $X(k)$ est éventuellement vide. Nous montrons :

Théorème 1.1 (théorème 5.2). *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, sauf peut-être si $\deg(X) = 8$, $I(X) = 4$ et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

On construit une surface de del Pezzo X de degré 8 sur le corps $k = \mathbb{C}(x, y, z)$ pour laquelle $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$ (exemple 5.4).

Pour les surfaces géométriquement rationnelles générales, nous montrons :

Théorème 1.2 (théorème 2.11). *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $\bar{H}_{\text{nr}}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Pour le faisceau $\mathbb{Z}/n(i) = \mu_n^{\otimes i}$ ou pour le complexe de faisceau $\mathbb{Z}(i)$ dont la définition est rappelée plus bas, on note $H^j(-, -)$ la cohomologie étale. Pour une courbe conique lisse C sur k , on note $[C] \in \text{Br}(k)$ sa classe dans le groupe de Brauer de k .

2. Sur les variétés cellulaires et leur cohomologie non ramifiée

On rappelle la définition d'une variété cellulaire [Kahn 1999, Définition 3.2].

Définition 2.1. Un k -schéma de type fini X a une *décomposition cellulaire* (brièvement : est *cellulaire*) s'il existe un sous-ensemble fermé propre $Z \subset X$ tel que $X \setminus Z$ est isomorphe à un espace affine et Z a une décomposition cellulaire.

Un k -schéma de type fini X est dit *géométriquement cellulaire* si $X_{\bar{k}}$ a une décomposition cellulaire.

Proposition 2.1. *Soit k un corps algébriquement clos.*

- (1) *Une surface projective, lisse, k -rationnelle est cellulaire.*
- (2) *Une variété torique, lisse, projective sur k est cellulaire.*
- (3) *Soient T un tore sur k et T^c une T -variété torique, lisse, projective. Soient X une variété cellulaire sur k et $Y \rightarrow X$ un T -torseur. Alors $Y^c := Y \times^T T^c$ est cellulaire.*

Démonstration. Par [Fulton 1993, Lemma, p. 103], on a l'énoncé (2).

Pour (3), par récurrence noethérienne, il suffit de montrer que si $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ avec $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, alors Y^c est cellulaire. Dans ce cas, on sait que l'on a $H^1(\mathbb{A}^n, T) = 0$, $Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \times T$ et donc $Y^c \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \times T^c$. Le résultat découle de l'énoncé (2).

Pour (1), on sait (cf. [Kollár 1996, Theorem III.2.3]) que si la surface X est minimale, alors soit X est isomorphe à \mathbb{P}^2 soit X est fibrée en \mathbb{P}^1 au-dessus de \mathbb{P}^1 . De telles surfaces sont cellulaires. Il suffit donc de montrer que si une surface lisse X est cellulaire, pour tout $x \in X(k)$, la surface éclatée $Y := \text{Bl}_x X$ est cellulaire.

Supposons que $X = \mathbb{A}^2 \cup Z$ est une décomposition cellulaire de X . Si $x \in \mathbb{A}^2$, il suffit donc de montrer que $Y := \text{Bl}_{(0,0)} \mathbb{A}^2$ est cellulaire. La variété $Y \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ est définie par l'équation $xu = yv$, où $\mathbb{A}^2 = \text{Spec } k[x, y]$ et $\mathbb{P}^1 = \text{Proj } k[u, v]$. Alors $Z(v=0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1$ et $D(v \neq 0) = \text{Spec } k[x, y, u/v]/((u/v) \cdot x = y) \cong \mathbb{A}^2$.

Si $x \in Z$, il existe un ouvert $U \subset X$ et un fermé $V \subset X$ tels que U, V soient cellulaires, $U \cap V = \emptyset$, $x \notin U \cup V$ et X ait une décomposition cellulaire $X = U \cup \mathbb{A}^1 \cup V$ ou $X = U \cup \mathbb{A}^0 \cup V$. Ainsi $Y \times_X U$ et $Y \times_X V$ sont cellulaires. Dans le premier cas, $Y \times_X \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{A}^1$ avec $\mathbb{P}^1 \cap \mathbb{A}^1 = \{x'\}$, où \mathbb{P}^1 est le diviseur exceptionnel. On a donc $\mathbb{P}^1 \setminus \{x'\} \cong \mathbb{A}^1$ et $(Y \times_X \mathbb{A}^1) \setminus (\mathbb{P}^1 \setminus \{x'\}) \cong \mathbb{A}^1$. Dans le deuxième cas, on a $Y \times_X \mathbb{A}^0 \cong \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$. Le résultat en découle. \square

Soit de nouveau k un corps de caractéristique zéro quelconque. On utilise dans cet article le complexe motivique $\mathbb{Z}(n)$ de faisceaux sur les variétés lisses sur k (Voevodsky), sous la forme donnée par Bruno Kahn [2012, §2]. Pour toute k -variété lisse X , dans la catégorie dérivée, on a $\mathbb{Z}(n) = 0$ pour $n < 0$, $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m[-1]$ et une suite exacte ([Kahn 2012, proposition 2.9])

$$0 \longrightarrow \text{CH}^2(X) \longrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0. \quad (2.2)$$

Théorème 2.3 [Kahn 2010, Theorem 2.5]. *Soit X une k -variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire. Pour tout entier $n \geq 0$, on a une suite spectrale fonctorielle :*

$$E_2^{p,q}(X, n) = H^{p-q}(k, \mathrm{CH}^q(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}(n-q)) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{Z}(n)) \quad (2.4)$$

et on a un accouplement de suites spectrales :

$$E_r^{p,q}(m) \times E_r^{p',q'}(n) \rightarrow E_r^{p+p',q+q'}(m+n), \quad (2.5)$$

tel que, pour $r = 2$, l'accouplement est le cup-produit.

On trouvera dans l'appendice des rappels sur l'accouplement de suites spectrales.

La différentielle $E_2^{1,1}(X, 1) \rightarrow E_2^{3,0}(X, 1)$ définit un homomorphisme :

$$d(1) : \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \rightarrow \mathrm{Br}(k).$$

La différentielle $E_2^{2,2}(X, 2) \rightarrow E_2^{4,1}(X, 2)$ définit un homomorphisme :

$$d(2) : \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \rightarrow H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

Lemme 2.6. *Soit X une k -variété lisse, géométriquement intègre, géométriquement cellulaire. Alors on a $\mathrm{Im}(\mathrm{CH}^2(X) \rightarrow \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \subset \mathrm{Ker}(d(2))$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}(n) = 0$ pour $n < 0$, dans la suite spectrale (2.4), on a $E_2^{p,q}(X, 2) = 0$ pour $q > 2$. Donc on a un morphisme canonique : $H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{d_X} E_\infty^{2,2}(X, 2)$ et une inclusion $E_\infty^{2,2}(X, 2) \subset E_2^{2,2}(X, 2)$. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CH}^2(X) & \xrightarrow{i_X} & H^4(X, \mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{d_X} & E_\infty^{2,2}(X, 2) & \longrightarrow & E_2^{2,2}(X, 2) = \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) & \xrightarrow{i_{X_{\bar{k}}}} & H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{d_{X_{\bar{k}}}} & E_\infty^{2,2}(X_{\bar{k}}, 2) & \longrightarrow & E_2^{2,2}(X_{\bar{k}}, 2) = \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \end{array}$$

où $\mathrm{CH}^2(X) \xrightarrow{i_X} H^4(X, \mathbb{Z}(2))$ désigne le morphisme dans la suite exacte (2.2). Puisque la suite spectrale (2.4) dégénère canoniquement lorsque $k = \bar{k}$, la composition dans la deuxième ligne est l'identité $\mathrm{id} : \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})$. Donc la composition dans la première ligne est le morphisme naturel $\mathrm{CH}^2(X) \rightarrow \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ et on a

$$\mathrm{Im}(\mathrm{CH}^2(X) \rightarrow \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \subset E_\infty^{2,2}(X, 2) \subset \mathrm{Ker}(d(2)). \quad \square$$

Notons désormais $\mathcal{M}(X)$ l'homologie du complexe

$$\mathrm{CH}^2(X) \rightarrow \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times). \quad (2.7)$$

On note

$$d'(2) : \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} / \mathrm{Im} \mathrm{CH}^2(X) \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)$$

l'application induite par $d(2)$. On a $\mathcal{M}(X) = \ker d'(2)$.

Le théorème suivant généralise les corollaires 7.1 et 7.2 de [Kahn 1996] :

Théorème 2.8. *Soit X une k -variété lisse, géométriquement intègre, géométriquement cellulaire. Si $H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$, alors les groupes $\bar{H}_{\mathrm{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $\mathcal{M}(X)$ sont finis et on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bar{H}_{\mathrm{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). \quad (2.9)$$

Démonstration. Par la suite exacte (2.2), on a une suite exacte :

$$\mathrm{CH}^2(X) \longrightarrow \frac{H^4(X, \mathbb{Z}(2))}{\mathrm{Im} H^4(k, \mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \bar{H}_{\mathrm{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0.$$

Dans la suite spectrale (2.4), on a $E_2^{p,q}(X, 2) = 0$ pour $q > 2$ ou $q < 0$ et donc une suite exacte :

$$E_\infty^{3,1}(X, 2) \longrightarrow \frac{H^4(X, \mathbb{Z}(2))}{\mathrm{Im} H^4(k, \mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d(2)) \longrightarrow E_2^{5,0}(X, 2).$$

D'après le lemme 2.6, on a une suite exacte :

$$E_\infty^{3,1}(X, 2) \longrightarrow \bar{H}_{\mathrm{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Si $E_2^{3,1}(X, 2) = H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$, on a $E_\infty^{3,1}(X, 2) = 0$ et donc la suite exacte (2.9).

Par [Kahn 1999, Lemma 3.3], $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$ et $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})$ sont des \mathbb{Z} -modules libres de type fini. Puisque $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} / \mathrm{Im} \mathrm{CH}^2(X)$ est un groupe de torsion, le groupe $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} / \mathrm{Im} \mathrm{CH}^2(X)$ est fini et donc $\mathcal{M}(X)$ est fini. \square

Remarque 2.10. Pour une k -variété lisse géométriquement connexe géométriquement cellulaire, le groupe $H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. Pour des généralisations du théorème 2.8 sous cette simple hypothèse, on consultera [Colliot-Thélène 2015, propositions 1.3 et 2.2].

Théorème 2.11. *Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre et géométriquement cellulaire. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $\bar{H}_{\mathrm{nr}}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Démonstration. Soit S le k -tore de groupe des caractères du réseau $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$. D'après [Colliot-Thélène et al. 2005, corollaire 1], il existe une k -compactification torique lisse S^c de S . Comme le groupe $H_{\mathrm{nr}}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un invariant k -birationnel, il suffit d'établir le résultat pour $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^S S^c$. D'après la proposition 2.1, \mathcal{T}^c est alors

une variété géométriquement cellulaire. Par ailleurs, le module galoisien $\text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)$ est un module de permutation [Colliot-Thélène et Sansuc 1987, théorème 2.1.2]. On a donc $H^1(k, \text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) \otimes \bar{k}^\times) = 0$. Une application du théorème 2.8 donne alors le résultat. \square

D'après la proposition 2.1, le théorème 1.2 est un cas spécial du théorème 2.11.

Pour appliquer le théorème 2.8 au calcul du groupe $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, on a besoin de contrôler l'application $\text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)$.

Soit X une k -variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire. L'accouplement (2.5) pour $n = m = 1$ donne un diagramme commutatif (cf. l'appendice) :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{1,1}(X, 1) \otimes E_2^{1,1}(X, 1) & \xrightarrow{d_\otimes} & (E_2^{3,0}(X, 1) \otimes E_2^{1,1}(X, 1)) \oplus (E_2^{1,1}(X, 1) \otimes E_2^{3,0}(X, 1)) \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup + \cup \\ E_2^{2,2}(X, 2) & \xrightarrow{d(2)} & E_2^{4,1}(X, 2) \end{array}$$

où $d_\otimes = d(1) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d(1)$. C'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \otimes \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d_\otimes} & (\text{Br}(k) \otimes \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \oplus (\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \otimes \text{Br}(k)) \\ \downarrow \cup_1 & & \downarrow \cup_2 + \cup_2 \\ \text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d(2)} & H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times), \end{array} \quad (2.12)$$

où \cup_1 est l'intersection et \cup_2 est le cup-produit

$$H^2(k, \bar{k}^\times) \times H^0(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \xrightarrow{\cup_2} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

3. Surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Une surface projective, lisse, géométriquement connexe X est appelée *surface de del Pezzo* si le faisceau anticanonique $-K_X$ est ample. Le degré d'une telle surface X est $\text{deg}(X) := (K_X, K_X)$. Par [Kollár 1996, Exercice 3.9], X est alors géométriquement rationnelle, on a $1 \leq \text{deg}(X) \leq 9$ et $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \simeq \mathbb{Z}^{10-\text{deg}(X)}$. Comme pour toute surface X projective, lisse, géométriquement rationnelle, le degré sur les zéro-cycles définit un isomorphisme $\text{CH}^2(X_{\bar{k}}) \simeq \mathbb{Z}$, et on a

$$\frac{\text{CH}^2(X_{\bar{k}})^\Gamma}{\text{Im CH}^2(X)} = \mathbb{Z}/I(X),$$

où $I(X)$ désigne l'indice de X .

Par les travaux de Enriques, Châtelet, Manin, Swinnerton-Dyer (voir [Colliot-Thélène 1999, paragraphe 4] ou [Várilly-Alvarado 2013, Theorem 2.1]), on a :

Théorème 3.1. *Soit X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 .*

- (1) *Si $X(k) \neq \emptyset$, alors X est k -rationnelle ;*
- (2) *Si $\deg(X) = 5$ ou 7 , alors $X(k) \neq \emptyset$.*

Soit X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Si $X(k) \neq \emptyset$, l'énoncé (1) implique que l'on a $\bar{H}_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) = 0$ pour tous entiers i et j . En particulier

$$\text{Br}(X)/\text{Im Br}(k) = \bar{H}_{\text{nr}}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$$

(voir aussi le lemme 3.2) et $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

En fait, soit X une surface de del Pezzo de degré au moins 4, alors $I(X) = 1$ implique $X(k) \neq \emptyset$. La question analogue est ouverte pour les del Pezzo de degré 3, i.e., les surfaces cubiques. Ceci n'est pas utilisé dans le présent article.

Lemme 3.2. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est stablement de permutation, $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$ et $\text{Br}(X)/\text{Im Br}(k) = 0$.*

Démonstration. Soit \mathcal{C} la classe des surfaces X/K , pour K corps extension quelconque de k , de del Pezzo de degré ≥ 5 . Par le théorème 3.1, si $X(K) \neq \emptyset$, alors X est K -rationnelle, et donc $\text{Pic}(X_{\bar{K}})$ est stablement de permutation comme $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -module ([Colliot-Thélène et Sansuc 1987, proposition 2.A.1]). Pour chaque $X/K \in \mathcal{C}$, le $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -module $\text{Pic}(X_{\bar{K}})$ est stablement de permutation, par [Colliot-Thélène et Sansuc 1987, théorème 2.B.1]. Alors

$$H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0.$$

Par la suite spectrale de Hochschild–Serre on obtient $\text{Br}(X)/\text{Im Br}(k) = 0$, puisque $\text{Br}(X_{\bar{k}}) = 0$. \square

Proposition 3.3. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . On a la suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{Z}/I(X) \xrightarrow{d'(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \quad (3.4)$$

et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)), \quad (3.5)$$

où $\mathcal{M}(X)$ est l'homologie du complexe (2.7).

Démonstration. Ceci résulte du théorème 2.8 et du lemme 3.2. \square

4. Formes tordues de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Rappelons (voir par exemple [Auel et Bernardara 2015, Exemples 3.1.3, 3.1.4]) que l'on a :

Proposition 4.1. *Soit X une surface de del Pezzo de degré 8 sur un corps k . Alors on a l'une des possibilités suivantes :*

- (1) X est un éclatement de \mathbb{P}_k^2 en un k -point, et dans ce cas, $X(k) \neq \emptyset$.
- (2) Il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.
- (3) Il existe une extension de corps K/k de degré 2 et une conique C sur K tels que $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$, où $R_{K/k}$ désigne la restriction à la Weil de K à k .

De plus, $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est un Γ_k -module de permutation.

En fait, dans le cas où $X \subset \mathbb{P}_k^3$ est un quadrique lisse, on a l'extension discriminant K/k de degré 2 (peut-être $K = k \times k$) et, pour toute section plane lisse $C \subset X$, on a $X \simeq R_{K/k}C_K$. Ceci n'est pas utilisé dans le présent article.

Dans le cas (2), on a :

Proposition 4.2. *Soient C_1, C_2 deux coniques lisses sur k et $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$. Supposons $X(k) = \emptyset$. L'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$. Si $I(X) = 2$, alors $\mathcal{M}(X) = 0$ et $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Si $I(X) = 4$, alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. On a $\text{Pic}(C_{i,\bar{k}})_{\Gamma_k} \cong \text{Pic}(C_{i,\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ pour $i = 1, 2$. On note $p_i : X \rightarrow C_i$ la projection, et pour $p_i^* : \mathbb{Z} \cong \text{Pic}(C_{i,\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})$, on note $e_i := p_i^*(1_{\mathbb{Z}})$. Alors $\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ et $H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Br}(k)e_1 \oplus \text{Br}(k)e_2$.

Pour $i = 1, 2$, on applique [Kahn 1999, Theorem 4.4(i)] à $E_2^{1,1}(-, 1) \rightarrow E_2^{3,0}(-, 1)$. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(C_{i,\bar{k}})_{\Gamma_k} & \xrightarrow{d(C_i)} & \text{Br}(k) \\ \downarrow p_i^* & & \downarrow = \\ \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d(1)} & \text{Br}(k) \end{array}$$

Notons $[C_i] := d(C_i)(1_{\text{Pic}(C_{i,\bar{k}})})$. En utilisant le diagramme (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} d(2)(e_1 \cup e_2) &= (d(2) \circ \cup_1)(e_1 \otimes e_2) = \cup_2([C_1] \otimes e_2) + \cup_2([C_2] \otimes e_1) \\ &= [C_1]e_2 + [C_2]e_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

On vérifie aisément

$$\text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \cong \text{CH}^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(e_1 \cup e_2).$$

On obtient : $\text{Im}(d(2)) = 0$ si et seulement si $[C_1] = [C_2] = 0$ et sinon $\text{Im}(d(2)) = \mathbb{Z}/2$. On conclut alors avec la proposition 3.3. \square

Dans le cas (3), le lemme suivant est dû à Olivier Benoist :

Lemme 4.4. *Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \emptyset$. Supposons que $[C] \in \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$. Alors $I(X) = 2$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{Br}(k)$ un élément tel que $\alpha|_K = [C] \in \text{Br}(K)$. Puisque $[C]$ est d'indice 2, l'indice de α est 2 ou 4.

Si α est d'indice 2, il existe une extension k' de degré 2 de k telle que $\alpha|_{k'} = 0 \in \text{Br}(k')$.

Si α est d'indice 4, on le représente par un k -corps gauche D de degré 4. Ainsi D est déployé sur une extension L de degré 2 de K . Alors D contient une sous-algèbre commutative isomorphe à L , donc a fortiori une sous-algèbre commutative isomorphe à K . Par un théorème d'Albert [1932, Theorem 5], cf. [Jacobson 1996, Lemma 2.9.23], il existe une extension k' de degré 2 de k telle que D contient une sous-algèbre commutative isomorphe à $K' := k' \cdot K$.

Dans tout cas, il existe une extension k' de degré 2 de k telle que $[C]|_{K'} = 0 \in \text{Br}(K')$, où $K' = k' \cdot K$. Donc $X(k') \neq \emptyset$ et $I(X) = 2$. \square

Remarque 4.5. Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \emptyset$. Si $[C] \notin \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$, alors $I(X) = 4$. Ceci sera montré dans la démonstration de la proposition 4.6.

Proposition 4.6. Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \emptyset$. Alors $\mathcal{M}(X) = 0$ et $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Démonstration. On a $X_K \xrightarrow{\sim} C \times_K C^\sigma$, où $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$, $\sigma \neq \text{id}$ et

$$C^\sigma := (C \rightarrow \text{Spec } K \xrightarrow{\sigma} \text{Spec } K).$$

Donc $\text{CH}^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ et $I(X)|4$. Puisque $d(2)(\text{CH}^2(X)) = 0$, on a $(\# \text{Im}(d(2)))|4$. L'hypothèse $X(k) = \emptyset$ équivaut à $C(K) = \emptyset$.

Par [Kahn 1999, Theorem 4.4(i),(iii)], on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \cong \text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_K} & \xrightarrow{\text{tr}} & \mathbb{Z} \cong \text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbb{Z} \cong \text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_K} \\ \downarrow d(2)_K & (1) & \downarrow d(2) & (2) & \downarrow d(2)_K \\ H^2(K, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) & \xrightarrow{\text{tr}} & H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^2(K, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \end{array}$$

où tr est le transfert et Res est la restriction. Par la proposition 4.2, l'image de $d(2)_K$ est $\mathbb{Z}/2$. Par le carré (2), l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ ou $\mathbb{Z}/4$. Puisque

$$\text{tr}(1_{\text{CH}^2(X_{\bar{k}})}) = 2 \cdot 1_{\text{CH}^2(X_{\bar{k}})},$$

par le carré (1), l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ si et seulement si $\text{tr}(\text{Im}(d(2)_K)) = 0$.

On considère :

$$\text{Br}(K) \oplus \text{Br}(K) \xrightarrow{\cong} H^2(K, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{tr}} \\ \xleftarrow{\text{Res}} \end{array} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{\cong} \text{Br}(K).$$

Pour chaque $a, b \in \text{Br}(K)$, l'action de σ sur $\text{Br}(K) \oplus \text{Br}(K)$ est définie par $\sigma(a, b) = (\sigma(b), \sigma(a))$ et $\text{Res}(a) = (a, \sigma(a))$. Alors $\sigma(a, b) + (a, b) = \text{Res}(a + \sigma(b))$ et,

d'après [Mazza et al. 2006, Exercise 6.5] et [Milne 1980, V.1.12], on a $\text{tr}(a, b) = a + \sigma(b)$. Par l'équation (4.3), $d(2)_K(1_{\text{CH}^2(X_{\bar{k}})}) = ([C], [C])$. Donc $\text{tr}(\text{Im}(d(2)_K)) = 0$ si et seulement si $[C] = \sigma([C])$, i.e., $[C] \in \text{Br}(K)^\sigma$. Puisque $\text{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/2$, on a $H^3(\text{Gal}(K/k), K^\times) \cong H^1(\text{Gal}(K/k), K^\times) = 0$, et donc le morphisme $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K)^\sigma$ est surjectif.

On a alors :

- (1) Si $[C] \in \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$, l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ et, par le lemme 4.4, on a $I(X) = 2$.
- (2) Si $[C] \notin \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$, l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/4$ et, par le lemme 2.6, on a $I(X) = 4$.

On conclut alors avec la proposition 3.3. □

5. Calcul de $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour une surface de del Pezzo X de degré ≥ 5

Rappelons un fait bien connu.

Lemme 5.1. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré 6. On a :*

- (1) *Il existe une extension K_1/k de degré divisant 2, une K_1 -forme X_1 de \mathbb{P}^2 sur K_1 et un morphisme $f_1 : X_{K_1} \rightarrow X_1$ birationnel.*
- (2) *Il existe une extension K_2/k de degré divisant 3, une surface de del Pezzo X_2 de degré 8 sur K_2 et un morphisme $f_2 : X_{K_2} \rightarrow X_2$ tels que X_{K_2} est un éclatement de X_2 le long d'un sous-schéma réduit de dimension 0 et de degré 2. Donc l'indice $I(X_2)$ de la K_2 -surface X_2 est 1 ou 2.*

Démonstration. Cela provient du fait que la configuration des 6 courbes exceptionnelles de $X_{\bar{k}}$ est celle d'un hexagone ([Colliot-Thélène 1972], ou voir [Várilly-Alvarado 2013, Section 2.4]). □

Théorème 5.2. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$ si et seulement si $I(X) = 4$, $\text{deg}(X) = 8$, et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

Sinon, $\mathcal{M}(X) = 0$ et donc $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Démonstration. La dernière implication résulte de la proposition 3.3.

Si $X(k) \neq \emptyset$, le morphisme $\text{CH}^2(X) \rightarrow \text{CH}^2(X_{\bar{k}}) = \mathbb{Z}$ est surjectif. Donc $\mathcal{M}(X) = 0$. Si $\text{deg}(X) = 5$ ou 7, par le théorème 3.1, $X(k) \neq \emptyset$ et donc alors $\mathcal{M}(X) = 0$. On suppose dorénavant $X(k) = \emptyset$.

Si $\text{deg}(X) = 9$ avec $X(k) = \emptyset$, X est la variété de Severi–Brauer associée à une algèbre centrale simple A de degré 3 (cf. [Várilly-Alvarado 2013, Theorem 1.6]). Par un théorème de Kahn [1999, Theorem 7.1],

$$d(2)(1_{\text{CH}^2(X_{\bar{k}})}) = 2[A] \in \text{Br}(k) = H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^*).$$

Puisque $X(k) = \emptyset$, on a $[A] \neq 0$, $3[A] = 0$ et $I(X) = 3$. Donc $d(2)(1_{\text{CH}^2(X_{\bar{k}})}) \neq 0$ et $d'(2)$ est injectif. Alors $\mathcal{M}(X) = 0$.

Si $\text{deg}(X) = 8$ avec $X(k) = \emptyset$, le résultat en degré 8 est donné par les propositions 4.1, 4.2 et 4.6.

Considérons le cas des surfaces de del Pezzo de degré 6.

S'il existe une surface de del Pezzo Y et un morphisme $f : X \rightarrow Y$ projectif, birationnel, alors f^* induit un morphisme des suites spectrales (2.4) pour Y et X . De plus, $f^* : \text{CH}^2(Y_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{\sim} \text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ est un isomorphisme et $f^* : \text{Pic}(Y_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ admet un inverse à gauche. Donc

$$\begin{aligned} f^* : E_2^{4,1}(Y, 2) &\rightarrow E_2^{4,1}(X, 2) && \text{est injectif,} \\ f^* : \text{Ker}(d(2)_Y) &\rightarrow \text{Ker}(d(2)_X) && \text{est un isomorphisme.} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(Y)$.

Si $\text{deg}(X) = 6$, avec $X(k) = \emptyset$, par le lemme 5.1(2), il existe une extension K_2/k de degré divisant 3 et une surface de del Pezzo X_2 de degré 8 sur K_2 et un K_2 -morphisme $f_2 : X_{K_2} \rightarrow X_2$ projectif, birationnel, tels que $I(X_2) = 1$ ou 2. D'après ce que l'on a déjà établi pour les surfaces de del Pezzo de degré 8, on a $\mathcal{M}(X_2) = 0$ et, d'après le paragraphe ci-dessus, $\mathcal{M}(X_{K_2}) = 0$. Par [Kahn 1999, Theorem 4.4(3)], le transfert est bien défini pour la suite spectrale (2.4). Puisque le transfert est bien défini pour la suite exacte (2.2), le transfert est bien défini pour le complexe

$$\text{CH}^2(X) \rightarrow \text{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times),$$

et donc le transfert est bien défini pour $\mathcal{M}(X)$. Donc $\mathcal{M}(X)$ est annulé par 3.

Par le même argument (lemme 5.1(1)) et le résultat en degré 9, le groupe $\mathcal{M}(X)$ est annulé par 2. On a donc $\mathcal{M}(X) = 0$. \square

Corollaire 5.3. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré 8 avec $\mathcal{M}(X) \neq 0$. Si la dimension cohomologique $\text{cd}(k)$ de k est ≤ 3 , alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$, $I(X) = 4$ et $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. Par la proposition 3.3, on a $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \mathcal{M}(X)$. Le résultat découle du théorème 5.2. \square

Exemple 5.4. Soit $k := \mathbb{C}(t, x, y)$. Soient C_1 la conique correspondant à l'algèbre (t, x) , C_2 la conique correspondant à l'algèbre $(t + 1, y)$ et $X := C_1 \times C_2$. Alors $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}/2$.

Démonstration. Puisque la dimension cohomologique $\text{cd}(k)$ de k est 3, par le théorème 5.2 et le corollaire 5.3, il suffit de montrer que $I(X) = 4$. On note $A = (t, x) \otimes (t + 1, y)$ l'algèbre de biquaternions. Par [Albert 1972, Theorem], A est un corps gauche si et seulement si, pour chaque point $x_1 \in C_1$ de degré 2 et

chaque point $x_2 \in C_2$ de degré 2, on a $k(x_1) \not\cong k(x_2)$. Donc $I(X) = 4$ si et seulement si A est un corps gauche. Par [Colliot-Thélène 2002, corollaire 4], A est un corps gauche si et seulement si t et $t + 1$ sont indépendantes dans $\mathbb{C}(t)^\times / \mathbb{C}(t)^{\times 2}$, ce qui est satisfait. \square

Corollaire 5.5. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Supposons que toute forme quadratique en 6 variables sur k est isotrope. Alors $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Démonstration. D'après le théorème 5.2, il suffit de montrer que, pour toute paire de coniques lisses C_1 et C_2 sur k , on a $I(C_1 \times C_2) \neq 4$. Soient (a, b) l'algèbre de quaternion correspondant à C_1 et (c, d) l'algèbre de quaternion correspondant à C_2 . Par l'argument de la démonstration de l'exemple 5.4, $I(C_1 \times C_2) = 4$ si et seulement si $(a, b) \otimes (c, d)$ est un corps gauche. Par un théorème de Albert (cf. [Colliot-Thélène 2002, proposition 1]), ceci vaut si et seulement si la forme quadratique diagonale $\langle a, b, -ab, -c, -d, cd \rangle$ est anisotrope sur k . Ceci donne immédiatement le résultat annoncé. \square

Corollaire 5.6. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Supposons que k satisfait la propriété (C_2) (cf. [Serre 1965, §II.4.5]). Alors $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Démonstration. Par le corollaire 5.5 et la définition de la propriété (C_2) , on a $\bar{H}_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. D'après [Serre 1965, §II.4.5, théorème MS], la dimension cohomologique de k satisfait $\text{cd}(k) \leq 2$. Alors,

$$H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0 \quad \text{et donc} \quad H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0. \quad \square$$

Le théorème 5.2 donne la conjecture de Hodge entière pour certaines variétés de dimension 4 (voir [Colliot-Thélène et Voisin 2012, §1]) :

Proposition 5.7. *Soit X une \mathbb{C} -variété projective et lisse de dimension 4 munie d'un morphisme dominant $X \xrightarrow{f} S$ de base une \mathbb{C} -surface projective lisse S et de fibre générique X_η une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors la conjecture de Hodge entière en degré 4 vaut sur X .*

Démonstration. Puisque $\mathbb{C}(S)$ satisfait la propriété (C_2) (cf. [Serre 1965, §II.4.5]), d'après le corollaire 5.6, $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. D'après Colliot-Thélène et Voisin [2012, théorème 3.8], il suffit alors de montrer qu'il existe une variété projective lisse Y de dimension au plus 3 et un morphisme $Y \xrightarrow{f} X$ tels que l'application induite $\text{CH}_0(Y) \xrightarrow{f_*} \text{CH}_0(X)$ soit surjective. Comme X_η est une $\mathbb{C}(S)$ -surface géométriquement rationnelle, il existe une surface T projective et lisse sur \mathbb{C} et une application génériquement finie $T \rightarrow S$, telles que $X_\eta \times_{\mathbb{C}(S)} \mathbb{C}(T)$ soit rationnelle sur $\mathbb{C}(T)$. Il existe donc une application rationnelle dominante de $\mathbb{P}^2 \times T$ vers X . Il existe alors une surface projective et lisse T' birationnelle à T et un morphisme $T' \rightarrow X$ tels que l'application induite $\text{CH}_0(T') \xrightarrow{f_*} \text{CH}_0(X)$ soit surjective. \square

Appendice : Accouplements de suites spectrales

Soient X une variété lisse sur k et $\text{Sh}(X)$ la catégorie des faisceaux étales sur X . On rappelle quelques définitions données dans [McCleary 2001, Section 2.3] :

Définition A.1. Un module bigradué différentiel de $\text{Sh}(X)$ est une collection d'éléments $E^{p,q} \in \text{Sh}(X)$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$ de bidegré $(s, 1-s)$ pour certains $s \in \mathbb{Z}$, tels que $d \circ d = 0$.

Le produit tensoriel de deux modules bigradués différentiels $(E^{*,*}(1), d(1))$, $(E^{*,*}(2), d(2))$ est un module bigradué différentiel $((E(1) \otimes E(2))^{*,*}, d_{\otimes})$ avec

$$(E(1) \otimes E(2))^{p,q} = \bigoplus_{r+t=p, s+u=q} E^{r,s}(1) \otimes E^{t,u}(2)$$

et $d_{\otimes}(x \otimes y) = d(1)(x) \otimes y + (-1)^{r+s} x \otimes d(2)(y)$, où $x \in E^{r,s}(1)$, $y \in E^{t,u}(2)$.

Pour deux complexes A, B , par le théorème de Künneth, on a un morphisme canonique

$$\bigoplus_{s+r=n} H^r(A) \otimes H^s(B) \xrightarrow{p} H^n(A \times B).$$

Définition A.2. Soient $E_r^{*,*}(1), d_r(1), E_r^{*,*}(2), d_r(2)$ et $E_r^{*,*}(3), d_r(3)$ trois suites spectrales dans $\text{Sh}(X)$. Un accouplement

$$\psi : E_r^{*,*}(1) \times E_r^{*,*}(2) \rightarrow E_r^{*,*}(3)$$

est une collection de morphismes $\psi_r : E_r^{*,*}(1) \otimes E_r^{*,*}(2) \rightarrow E_r^{*,*}(3)$ pour chaque r , tel que ψ_{r+1} est la composition :

$$\begin{aligned} E_{r+1}^{*,*}(1) \otimes E_{r+1}^{*,*}(2) &\xrightarrow{\sim} H(E_r^{*,*}(1)) \otimes H(E_r^{*,*}(2)) \xrightarrow{p} H((E_r(1) \otimes E_r(2))^{*,*}) \\ &\xrightarrow{H(\psi_r)} H(E_r^{*,*}(3)) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{*,*}(3), \end{aligned}$$

où p est le morphisme dans le théorème de Künneth.

Remerciements

Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène pour plusieurs discussions. Je remercie également Olivier Benoist et Bruno Kahn pour leurs commentaires. Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Île-de-France.

Bibliographie

- [Albert 1932] A. A. Albert, "A note on normal division algebras of order sixteen", *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**:10 (1932), 703–706. MR Zbl
- [Albert 1972] A. A. Albert, "Tensor products of quaternion algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.* **35** (1972), 65–66. MR Zbl

- [Auel et Bernardara 2015] A. Auel et M. Bernardara, “Semiorthogonal decompositions and birational geometry of del Pezzo surfaces over arbitrary fields”, preprint, 2015. arXiv
- [Colliot-Thélène 1972] J.-L. Colliot-Thélène, “Surfaces de Del Pezzo de degré 6”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **275** (1972), A109–A111. MR Zbl
- [Colliot-Thélène 1995] J.-L. Colliot-Thélène, “Birational invariants, purity and the Gersten conjecture”, pp. 1–64 dans *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), édité par B. Jacob et A. Rosenberg, Proc. Sympos. Pure Math. **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. MR Zbl
- [Colliot-Thélène 1999] J.-L. Colliot-Thélène, “Points rationnels sur les variétés non de type général, chapitre II: Surfaces rationnelles”, course notes, Institut Henri Poincaré, 1999, <https://tinyurl.com/CT99ChII>.
- [Colliot-Thélène 2002] J.-L. Colliot-Thélène, “Exposant et indice d’algèbres simples centrales non ramifiées”, *Enseign. Math. (2)* **48**:1-2 (2002), 127–146. MR Zbl
- [Colliot-Thélène 2015] J.-L. Colliot-Thélène, “Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications”, *Doc. Math.* Extra vol. : Alexander S. Merkurjev’s sixtieth birthday (2015), 195–220. MR Zbl
- [Colliot-Thélène et Sansuc 1987] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles, II”, *Duke Math. J.* **54**:2 (1987), 375–492. MR Zbl
- [Colliot-Thélène et Voisin 2012] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, “Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière”, *Duke Math. J.* **161**:5 (2012), 735–801. MR Zbl
- [Colliot-Thélène et al. 2005] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, “Compactification équivariante d’un tore (d’après Brylinski et Künnemann)”, *Expo. Math.* **23**:2 (2005), 161–170. MR
- [Fulton 1993] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies **131**, Princeton University Press, 1993. MR Zbl
- [Jacobson 1996] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer, 1996. MR Zbl
- [Kahn 1996] B. Kahn, “Applications of weight-two motivic cohomology”, *Doc. Math.* **1** (1996), No. 17, 395–416. MR Zbl
- [Kahn 1999] B. Kahn, “Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties”, pp. 149–174 dans *Algebraic K-theory* (Seattle, WA, 1997), édité par W. Raskind et C. Weibel, Proc. Sympos. Pure Math. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. MR Zbl
- [Kahn 2008] B. Kahn, *Formes quadratiques sur un corps*, Cours Spécialisés **15**, Société Mathématique de France, Paris, 2008. MR Zbl
- [Kahn 2010] B. Kahn, “Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras”, *Doc. Math.* Extra vol. : Andrei A. Suslin sixtieth birthday (2010), 317–369. MR Zbl
- [Kahn 2012] B. Kahn, “Classes de cycles motiviques étales”, *Algebra Number Theory* **6**:7 (2012), 1369–1407. MR Zbl
- [Kollár 1996] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik (3) **32**, Springer, 1996. MR
- [Mazza et al. 2006] C. Mazza, V. Voevodsky et C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs **2**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. MR Zbl

- [McCleary 2001] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, 2nd éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics **58**, Cambridge University Press, 2001. MR Zbl
- [Milne 1980] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, 1980. MR Zbl
- [Serre 1965] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 3e éd., Lecture Notes in Math. **5**, Springer, 1965. MR Zbl
- [Várilly-Alvarado 2013] A. Várilly-Alvarado, "Arithmetic of del Pezzo surfaces", pp. 293–319 dans *Birational geometry, rational curves, and arithmetic*, édité par F. Bogomolov et al., Springer, 2013. MR Zbl

Received 25 Aug 2016. Revised 15 Mar 2017. Accepted 2 Apr 2017.

YANG CAO: yang.cao@math.u-psud.fr

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Univ. Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

ANNALS OF K-THEORY

msp.org/akt

EDITORIAL BOARD

- | | |
|---------------------|--|
| Paul Balmer | University of California, Los Angeles, USA
balmer@math.ucla.edu |
| Alain Connes | Collège de France; Institut des Hautes Études Scientifiques; Ohio State University
alain@connes.org |
| Guillermo Cortiñas | Universidad de Buenos Aires and CONICET, Argentina
gcorti@dm.uba.ar |
| Eric Friedlander | University of Southern California, USA
ericmf@usc.edu |
| Max Karoubi | Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, France
max.karoubi@imj-prg.fr |
| Gennadi Kasparov | Vanderbilt University, USA
gennadi.kasparov@vanderbilt.edu |
| Alexander Merkurjev | University of California, Los Angeles, USA
merkurev@math.ucla.edu |
| Amnon Neeman | amnon.Australian National University
neeman@anu.edu.au |
| Jonathan Rosenberg | (Managing Editor)
University of Maryland, USA
jmr@math.umd.edu |
| Marco Schlichting | University of Warwick, UK
schlichting@warwick.ac.uk |
| Andrei Suslin | Northwestern University, USA
suslin@math.northwestern.edu |
| Vladimir Voevodsky | Institute for Advanced Studies, USA
vladimir@math.ias.edu |
| Charles Weibel | (Managing Editor)
Rutgers University, USA
weibel@math.rutgers.edu |
| Guoliang Yu | Texas A&M University, USA
guoliangyu@math.tamu.edu |

PRODUCTION

- | | |
|-------------|---|
| Silvio Levy | (Scientific Editor)
production@msp.org |
|-------------|---|

Annals of K-Theory is a journal of the K-Theory Foundation (ktheoryfoundation.org). The K-Theory Foundation acknowledges the precious support of Foundation Compositio Mathematica, whose help has been instrumental in the launch of the Annals of K-Theory.


See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2017 is US \$420/year for the electronic version, and \$470/year (+\$25, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Annals of K-Theory (ISSN 2379-1681 electronic, 2379-1683 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

AKT peer review and production are managed by EditFlow[®] from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**
nonprofit scientific publishing

<http://msp.org/>

© 2017 Mathematical Sciences Publishers

ANNALS OF K-THEORY

2018

vol. 3

no. 1

Hochschild homology, lax codescent, and duplicial structure Richard Garner, Stephen Lack and Paul Slevin	1
Localization, Whitehead groups and the Atiyah conjecture Wolfgang Lück and Peter Linnell	33
Suslin's moving lemma with modulus Wataru Kai and Hiroyasu Miyazaki	55
Abstract tilting theory for quivers and related categories Moritz Groth and Jan Šťovíček	71
Equivariant noncommutative motives Gonçalo Tabuada	125
Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5 Yang Cao	157