ANNALS OF K-THEORY

vol. 3 no. 1 2018

Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Yang Cao

msp

A JOURNAL OF THE K-THEORY FOUNDATION

ANNALS OF K-THEORY
Vol. 3, No. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/akt.2018.3.157

Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Yang Cao

Dans cet article, où le corps de base est un corps de caractéristique zéro quelconque, pour X une variété géométriquement cellulaire, on étudie le quotient du troisième groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par sa partie constante. Pour X une compactification lisse d'un torseur universel sur une surface géométriquement rationnelle, on montre que ce quotient est fini. Pour X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5, on montre que ce quotient est trivial, sauf si X est une surface de del Pezzo de degré 8 d'un type particulier.

We consider geometrically cellular varieties X over an arbitrary field of characteristic zero. We study the quotient of the third unramified cohomology group $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ by its constant part. For X a smooth compactification of a universal torsor over a geometrically rational surface, we show that this quotient is finite. For X a del Pezzo surface of degree ≥ 5, we show that this quotient is zero, unless X is a del Pezzo surface of degree 8 of a special type.

1. Introduction

Soient k un corps de caractéristique 0, $\bar{k}$ une clôture algébrique et Γ_k le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. Pour une variété lisse X sur k et un faisceau étale F sur X,

MSC2010 : 14E08, 19E15.
Mots-clefs : del Pezzo surface, unramified cohomology.

on rappelle que *la cohomologie non ramifiée* de X de degré n est le groupe

$$H^n_{\mathrm{nr}}(X, F) := H^0_{\mathrm{Zariski}}(X, \mathcal{H}^n(X, F)),$$

où $\mathcal{H}^n(X, F)$ est le faisceau Zariski associé au préfaisceau $\{U \subset X\} \mapsto H^n_{\text{ét}}(U, F)$. Soit $F = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ le faisceau des racines de l'unité tordu j fois. Les groupes $H^n_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ sont des invariants k-birationnels des k-variétés projectives lisses géométriquement connexes, réduits à $H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour X k-rationnelle, c'est-à-dire k-birationnelle à un espace projectif. (cf. [Colliot-Thélène 1995, théorème 4.1.1 et proposition 4.1.4]). Le groupe $H^2_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ n'est autre que le groupe de Brauer de X, il a été fort étudié. On s'est intéressé plus récemment au groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Le cas des coniques fut traité par Suslin. En dimension quelconque, le quotient $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est trivial pour toute quadrique lisse qui n'est pas une quadrique d'Albert (Kahn, Rost, Sujatha, voir [Kahn 2008, théorème 10.2.4(b)]).

Notons

$$\bar{H}^n_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) := \operatorname{coker}\big(H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to H^n_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\big).$$

Dans cet article, nous nous intéressons aux surfaces géométriquement rationnelles les plus simples, les surfaces de del Pezzo de degré au moins 5. Rappelons que l'indice $I(X)$ d'une k-variété X est le pgcd des degrés sur k des points fermés. Si une surface de del Pezzo X de degré au moins 5 a un indice $I(X) = 1$, alors elle a un k-point et elle est k-rationnelle (cf. théorème 3.1). On a donc alors $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Nous nous intéressons ici au cas où $X(k)$ est éventuellement vide. Nous montrons :

Théorème 1.1 (théorème 5.2). *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Alors $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, sauf peut-être si $\deg(X) = 8$, $I(X) = 4$ et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

On construit une surface de del Pezzo X de degré 8 sur le corps $k = \mathbb{C}(x, y, z)$ pour laquelle $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$ (exemple 5.4).

Pour les surfaces géométriquement rationnelles générales, nous montrons :

Théorème 1.2 (théorème 2.11). *Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \to X$ un torseur universel sur X et soit $\mathcal{T}^c$ une k-compactification lisse de $\mathcal{T}$. Alors le groupe $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Pour le faisceau $\mathbb{Z}/n(i) = \mu_n^{\otimes i}$ ou pour le complexe de faisceau $\mathbb{Z}(i)$ dont la définition est rappelée plus bas, on note $H^j(-, -)$ la cohomologie étale. Pour une courbe conique lisse C sur k, on note $[C] \in \mathrm{Br}(k)$ sa classe dans le groupe de Brauer de k.

2. Sur les variétés cellulaires et leur cohomologie non ramifiée

On rappelle la définition d'une variété cellulaire [Kahn 1999, Definition 3.2].

Définition 2.1. Un k-schéma de type fini X *a une décomposition cellulaire* (brièvement : est *cellulaire*) s'il existe un sous-ensemble fermé propre $Z \subset X$ tel que $X \setminus Z$ est isomorphe à un espace affine et Z a une décomposition cellulaire.

Un k-schéma de type fini X est dit *géométriquement cellulaire* si $X_{\bar{k}}$ a une décomposition cellulaire.

Proposition 2.1. *Soit k un corps algébriquement clos.*

(1) *Une surface projective, lisse, k-rationnelle est cellulaire.*

(2) *Une variété torique, lisse, projective sur k est cellulaire.*

(3) *Soient T un tore sur k et T^c une T-variété torique, lisse, projective. Soient X une variété cellulaire sur k et $Y \to X$ un T-torseur. Alors $Y^c := Y \times^T T^c$ est cellulaire.*

Démonstration. Par [Fulton 1993, Lemma, p. 103], on a l'énoncé (2).

Pour (3), par récurrence noethérienne, il suffit de montrer que si $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ avec $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, alors Y^c est cellulaire. Dans ce cas, on sait que l'on a $H^1(\mathbb{A}^n, T) = 0$, $Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \times T$ et donc $Y^c \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \times T^c$. Le résultat découle de l'énoncé (2).

Pour (1), on sait (cf. [Kollár 1996, Theorem III.2.3]) que si la surface X est minimale, alors soit X est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ soit X est fibrée en $\mathbb{P}^1$ au-dessus de $\mathbb{P}^1$. De telles surfaces sont cellulaires. Il suffit donc de montrer que si une surface lisse X est cellulaire, pour tout $x \in X(k)$, la surface éclatée $Y := \mathrm{Bl}_x X$ est cellulaire.

Supposons que $X = \mathbb{A}^2 \cup Z$ est une décomposition cellulaire de X. Si $x \in \mathbb{A}^2$, il suffit donc de montrer que $Y := \mathrm{Bl}_{(0,0)} \mathbb{A}^2$ est cellulaire. La variété $Y \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ est définie par l'équation $xu = yv$, où $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$ et $\mathbb{P}^1 = \operatorname{Proj} k[u, v]$. Alors $Z(v = 0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1$ et $D(v \neq 0) = \operatorname{Spec} k[x, y, u/v]/((u/v) \cdot x = y) \cong \mathbb{A}^2$.

Si $x \in Z$, il existe un ouvert $U \subset X$ et un fermé $V \subset X$ tels que U, V soient cellulaires, $U \cap V = \varnothing$, $x \notin U \cup V$ et X ait une décomposition cellulaire $X = U \cup \mathbb{A}^1 \cup V$ ou $X = U \cup \mathbb{A}^0 \cup V$. Ainsi $Y \times_X U$ et $Y \times_X V$ sont cellulaires. Dans le premier cas, $Y \times_X \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{A}^1$ avec $\mathbb{P}^1 \cap \mathbb{A}^1 = \{x'\}$, où $\mathbb{P}^1$ est le diviseur exceptionnel. On a donc $\mathbb{P}^1 \setminus \{x'\} \cong \mathbb{A}^1$ et $(Y \times_X \mathbb{A}^1) \setminus (\mathbb{P}^1 \setminus \{x'\}) \cong \mathbb{A}^1$. Dans le deuxième cas, on a $Y \times_X \mathbb{A}^0 \cong \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$. Le résultat en découle. □

Soit de nouveau k un corps de caractéristique zéro quelconque. On utilise dans cet article le complexe motivique $\mathbb{Z}(n)$ de faisceaux sur les variétés lisses sur k (Voevodsky), sous la forme donnée par Bruno Kahn [2012, §2]). Pour toute k-variété lisse X, dans la catégorie dérivée, on a $\mathbb{Z}(n) = 0$ pour $n < 0$, $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m[-1]$ et une suite exacte ([Kahn 2012, proposition 2.9])

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X) \longrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Théorème 2.3 [Kahn 2010, Theorem 2.5]. *Soit X une k-variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire. Pour tout entier $n \geq 0$, on a une suite spectrale fonctorielle :*

$$E_2^{p,q}(X,n) = H^{p-q}\big(k, \mathrm{CH}^q(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}(n-q)\big) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Z}(n)) \tag{2.4}$$

et on a un accouplement de suites spectrales :

$$E_r^{p,q}(m) \times E_r^{p',q'}(n) \to E_r^{p+p',q+q'}(m+n), \tag{2.5}$$

tel que, pour $r = 2$, l'accouplement est le cup-produit.

On trouvera dans l'appendice des rappels sur l'accouplement de suites spectrales.

La différentielle $E_2^{1,1}(X, 1) \to E_2^{3,0}(X, 1)$ définit un homomorphisme :

$$d(1) : \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \to \mathrm{Br}(k).$$

La différentielle $E_2^{2,2}(X, 2) \to E_2^{4,1}(X, 2)$ définit un homomorphisme :

$$d(2) : \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \to H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

Lemme 2.6. *Soit X une k-variété lisse, géométriquement intègre, géométriquement cellulaire. Alors on a $\mathrm{Im}(\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \subset \mathrm{Ker}(d(2))$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}(n) = 0$ pour $n < 0$, dans la suite spectrale (2.4), on a $E_2^{p,q}(X, 2) = 0$ pour $q > 2$. Donc on a un morphisme canonique : $H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{d_X} E_\infty^{2,2}(X, 2)$ et une inclusion $E_\infty^{2,2}(X, 2) \subset E_2^{2,2}(X, 2)$. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^2(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d] & E_\infty^{2,2}(X, 2) \arrow[r] \arrow[d] & E_2^{2,2}(X, 2) = \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \arrow[d] \\
\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \arrow[r, "i_{X_{\bar{k}}}"] & H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) \arrow[r, "d_{X_{\bar{k}}}"] & E_\infty^{2,2}(X_{\bar{k}}, 2) \arrow[r] & E_2^{2,2}(X_{\bar{k}}, 2) = \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{CH}^2(X) \xrightarrow{i_X} H^4(X, \mathbb{Z}(2))$ désigne le morphisme dans la suite exacte (2.2). Puisque la suite spectrale (2.4) dégénère canoniquement lorsque $k = \bar{k}$, la composition dans la deuxième ligne est l'identité $\mathrm{id} : \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \to \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})$. Donc la composition dans la première ligne est le morphisme naturel $\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ et on a

$$\mathrm{Im}\big(\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}\big) \subset E_\infty^{2,2}(X, 2) \subset \mathrm{Ker}(d(2)). \qquad \square$$

Notons désormais $\mathcal{M}(X)$ l'homologie du complexe

$$\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times). \tag{2.7}$$

On note

$$d'(2) : \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} / \operatorname{Im} \mathrm{CH}^2(X) \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \operatorname{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^{\times})$$

l'application induite par $d(2)$. On a $\mathcal{M}(X) = \ker d'(2)$.

Le théorème suivant généralise les corollaires 7.1 et 7.2 de [Kahn 1996] :

Théorème 2.8. *Soit X une k-variété lisse, géométriquement intègre, géométriquement cellulaire. Si $H^1(k, \operatorname{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^{\times}) = 0$, alors les groupes $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $\mathcal{M}(X)$ sont finis et on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). \tag{2.9}$$

Démonstration. Par la suite exacte (2.2), on a une suite exacte :

$$\mathrm{CH}^2(X) \longrightarrow \frac{H^4(X, \mathbb{Z}(2))}{\operatorname{Im} H^4(k, \mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0.$$

Dans la suite spectrale (2.4), on a $E_2^{p,q}(X, 2) = 0$ pour $q > 2$ ou $q < 0$ et donc une suite exacte :

$$E_\infty^{3,1}(X, 2) \longrightarrow \frac{H^4(X, \mathbb{Z}(2))}{\operatorname{Im} H^4(k, \mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \operatorname{Ker}(d(2)) \longrightarrow E_2^{5,0}(X, 2).$$

D'après le lemme 2.6, on a une suite exacte :

$$E_\infty^{3,1}(X, 2) \longrightarrow \bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Si $E_2^{3,1}(X, 2) = H^1(k, \operatorname{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^{\times}) = 0$, on a $E_\infty^{3,1}(X, 2) = 0$ et donc la suite exacte (2.9).

Par [Kahn 1999, Lemma 3.3], $\operatorname{Pic}(X_{\bar{k}})$ et $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini. Puisque $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}/\operatorname{Im} \mathrm{CH}^2(X)$ est un groupe de torsion, le groupe $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}/\operatorname{Im} \mathrm{CH}^2(X)$ est fini et donc $\mathcal{M}(X)$ est fini. □

Remarque 2.10. Pour une k-variété lisse géométriquement connexe géométriquement cellulaire, le groupe $H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. Pour des généralisations du théorème 2.8 sous cette simple hypothèse, on consultera [Colliot-Thélène 2015, propositions 1.3 et 2.2].

Théorème 2.11. *Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre et géométriquement cellulaire. Soit $\mathcal{T} \to X$ un torseur universel sur X et soit $\mathcal{T}^c$ une k-compactification lisse de $\mathcal{T}$. Alors le groupe $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Démonstration. Soit S le k-tore de groupe des caractères du réseau $\operatorname{Pic}(X_{\bar{k}})$. D'après [Colliot-Thélène et al. 2005, corollaire 1], il existe une k-compactification torique lisse S^c de S. Comme le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un invariant k-birationnel, il suffit d'établir le résultat pour $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^S S^c$. D'après la proposition 2.1, $\mathcal{T}^c$ est alors une variété géométriquement cellulaire. Par ailleurs, le module galoisien $\mathrm{Pic}(\mathcal{T}^c_{\bar{k}})$ est un module de permutation [Colliot-Thélène et Sansuc 1987, théorème 2.1.2]. On a donc $H^1(k, \mathrm{Pic}(\mathcal{T}^c_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$. Une application du théorème 2.8 donne alors le résultat. □

D'après la proposition 2.1, le théorème 1.2 est un cas spécial du théorème 2.11.

Pour appliquer le théorème 2.8 au calcul du groupe $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, on a besoin de contrôler l'application $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)$.

Soit X une k-variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire. L'accouplement (2.5) pour $n = m = 1$ donne un diagramme commutatif (cf. l'appendice) :

$$\begin{tikzcd}
E_2^{1,1}(X,1) \otimes E_2^{1,1}(X,1) \arrow[r, "d_\otimes"] \arrow[d, "\cup"] & (E_2^{3,0}(X,1) \otimes E_2^{1,1}(X,1)) \oplus (E_2^{1,1}(X,1) \otimes E_2^{3,0}(X,1)) \arrow[d, "\cup+\cup"] \\
E_2^{2,2}(X,2) \arrow[r, "d(2)"] & E_2^{4,1}(X,2)
\end{tikzcd}$$

où $d_\otimes = d(1) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d(1)$. C'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \otimes \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \arrow[r, "d_\otimes"] \arrow[d, "\cup_1"] & (\mathrm{Br}(k) \otimes \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \oplus (\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \otimes \mathrm{Br}(k)) \arrow[d, "\cup_2+\cup_2"] \\
\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \arrow[r, "d(2)"] & H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times),
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

où $\cup_1$ est l'intersection et $\cup_2$ est le cup-produit

$$H^2(k, \bar{k}^\times) \times H^0(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})) \xrightarrow{\cup_2} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

3. Surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Une surface projective, lisse, géométriquement connexe X est appelée *surface de del Pezzo* si le faisceau anticanonique $-K_X$ est ample. Le degré d'une telle surface X est $\deg(X) := (K_X, K_X)$. Par [Kollár 1996, Exercise 3.9], X est alors géométriquement rationnelle, on a $1 \le \deg(X) \le 9$ et $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{10-\deg(X)}$. Comme pour toute surface X projective, lisse, géométriquement rationnelle, le degré sur les zéro-cycles définit un isomorphisme $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, et on a

$$\frac{\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^\Gamma}{\mathrm{Im}\,\mathrm{CH}^2(X)} = \mathbb{Z}/I(X),$$

où $I(X)$ désigne l'indice de X.

Par les travaux de Enriques, Châtelet, Manin, Swinnerton-Dyer (voir [Colliot-Thélène 1999, paragraphe 4] ou [Várilly-Alvarado 2013, Theorem 2.1]), on a :

Théorème 3.1. *Soit X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5.*

(1) *Si $X(k) \neq \varnothing$, alors X est k-rationnelle ;*

(2) *Si* $\deg(X) = 5$ *ou* 7, *alors $X(k) \neq \varnothing$.*

Soit X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Si $X(k) \neq \varnothing$, l'énoncé (1) implique que l'on a $\bar{H}^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) = 0$ pour tous entiers i et j. En particulier

$$\mathrm{Br}(X)/\operatorname{Im}\mathrm{Br}(k) = \bar{H}^2_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$$

(voir aussi le lemme 3.2) et $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

En fait, soit X une surface de del Pezzo de degré au moins 4, alors $I(X) = 1$ implique $X(k) \neq \varnothing$. La question analogue est ouverte pour les del Pezzo de degré 3, i.e., les surfaces cubiques. Ceci n'est pas utilisé dans le présent article.

Lemme 3.2. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Alors* $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$ *est stablement de permutation,* $H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$ *et* $\mathrm{Br}(X)/\operatorname{Im}\mathrm{Br}(k) = 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ la classe des surfaces X/K, pour K corps extension quelconque de k, de del Pezzo de degré ≥ 5. Par le théorème 3.1, si $X(K) \neq \varnothing$, alors X est K-rationnelle, et donc $\mathrm{Pic}(X_{\bar{K}})$ est stablement de permutation comme $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-module ([Colliot-Thélène et Sansuc 1987, proposition 2.A.1]). Pour chaque $X/K \in \mathcal{C}$, le $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-module $\mathrm{Pic}(X_{\bar{K}})$ est stablement de permutation, par [Colliot-Thélène et Sansuc 1987, théorème 2.B.1]. Alors

$$H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0.$$

Par la suite spectrale de Hochschild–Serre on obtient $\mathrm{Br}(X)/\operatorname{Im}\mathrm{Br}(k) = 0$, puisque $\mathrm{Br}(X_{\bar{k}}) = 0$. □

Proposition 3.3. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré ≥ 5. On a la suite exacte*

$$0 \to \mathcal{M}(X) \to \mathbb{Z}/I(X) \xrightarrow{d'(2)} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \tag{3.4}$$

et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)), \tag{3.5}$$

où $\mathcal{M}(X)$ est l'homologie du complexe (2.7).

Démonstration. Ceci résulte du théorème 2.8 et du lemme 3.2. □

4. Formes tordues de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Rappelons (voir par exemple [Auel et Bernardara 2015, Examples 3.1.3, 3.1.4]) que l'on a :

Proposition 4.1. *Soit X une surface de del Pezzo de degré* 8 *sur un corps k. Alors on a l'une des possibilités suivantes :*

(1) *X est un éclatement de $\mathbb{P}^2_k$ en un k-point, et dans ce cas, $X(k) \neq \varnothing$.*

(2) *Il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

(3) *Il existe une extension de corps K/k de degré 2 et une conique C sur K tels que $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$, où $R_{K/k}$ désigne la restriction à la Weil de K à k.*

De plus, $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$ *est un Γ_k-module de permutation.*

En fait, dans le cas où $X \subset \mathbb{P}^3_k$ est un quadrique lisse, on a l'extension discriminant K/k de degré 2 (peut-être $K = k \times k$) et, pour toute section plane lisse $C \subset X$, on a $X \simeq R_{K/k}C_K$. Ceci n'est pas utilisé dans le présent article.

Dans le cas (2), on a :

Proposition 4.2. *Soient C_1, C_2 deux coniques lisses sur k et $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$. Supposons $X(k) = \varnothing$. L'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$. Si $I(X) = 2$, alors $\mathcal{M}(X) = 0$ et $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Si $I(X) = 4$, alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. On a $\mathrm{Pic}(C_{i,\bar{k}})^{\Gamma}_k \cong \mathrm{Pic}(C_{i,\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ pour $i = 1, 2$. On note $p_i : X \to C_i$ la projection, et pour $p_i^* : \mathbb{Z} \cong \mathrm{Pic}(C_{i,\bar{k}}) \to \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$, on note $e_i := p_i^*(1_{\mathbb{Z}})$. Alors $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ et $H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(k)e_1 \oplus \mathrm{Br}(k)e_2$.

Pour $i = 1, 2$, on applique [Kahn 1999, Theorem 4.4(i)] à $E_2^{1,1}(-, 1) \to E_2^{3,0}(-, 1)$. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pic}(C_{i,\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d(C_i)} & \mathrm{Br}(k) \\
\downarrow{\scriptstyle p_i^*} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d(1)} & \mathrm{Br}(k)
\end{array}$$

Notons $[C_i] := d(C_i)(1_{\mathrm{Pic}(C_{i,\bar{k}})})$. En utilisant le diagramme (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} d(2)(e_1 \cup e_2) = (d(2) \circ \cup_1)(e_1 \otimes e_2) &= \cup_2([C_1] \otimes e_2) + \cup_2([C_2] \otimes e_1) \\ &= [C_1]e_2 + [C_2]e_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

On vérifie aisément

$$\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \cong \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(e_1 \cup e_2).$$

On obtient : $\mathrm{Im}(d(2)) = 0$ si et seulement si $[C_1] = [C_2] = 0$ et sinon $\mathrm{Im}(d(2)) = \mathbb{Z}/2$. On conclut alors avec la proposition 3.3. □

Dans le cas (3), le lemme suivant est dû à Olivier Benoist :

Lemme 4.4. *Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \varnothing$. Supposons que $[C] \in \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K))$. Alors $I(X) = 2$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(k)$ un élément tel que $\alpha|_K = [C] \in \mathrm{Br}(K)$. Puisque $[C]$ est d'indice 2, l'indice de α est 2 ou 4.

Si α est d'indice 2, il existe une extension k' de degré 2 de k telle que $\alpha|_{k'} = 0 \in \mathrm{Br}(k')$.

Si α est d'indice 4, on le représente par un k-corps gauche D de degré 4. Ainsi D est déployé sur une extension L de degré 2 de K. Alors D contient une sous-algèbre commutative isomorphe à L, donc a fortiori une sous-algèbre commutative isomorphe à K. Par un théorème d'Albert [1932, Theorem 5], cf. [Jacobson 1996, Lemma 2.9.23], il existe une extension k' de degré 2 de k telle que D contient une sous-algèbre commutative isomorphe à $K' := k' \cdot K$.

Dans tout cas, il existe une extension k' de degré 2 de k telle que $[C]|_{K'} = 0 \in \mathrm{Br}(K')$, où $K' = k' \cdot K$. Donc $X(k') \neq \varnothing$ et $I(X) = 2$. □

Remarque 4.5. Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \varnothing$. Si $[C] \notin \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K))$, alors $I(X) = 4$. Ceci sera montré dans la démonstration de la proposition 4.6.

Proposition 4.6. *Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \varnothing$. Alors $\mathcal{M}(X) = 0$ et $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Démonstration. On a $X_K \xrightarrow{\sim} C \times_K C^\sigma$, où $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, $\sigma \neq \mathrm{id}$ et

$$C^\sigma := (C \to \mathrm{Spec}\, K \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Spec}\, K).$$

Donc $\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ et $I(X)|4$. Puisque $d(2)(\mathrm{CH}^2(X)) = 0$, on a $\big(\#\,\mathrm{Im}(d(2))\big)|4$. L'hypothèse $X(k) = \varnothing$ équivaut à $C(K) = \varnothing$.

Par [Kahn 1999, Theorem 4.4(i),(iii)], on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_K} \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, "d(2)_K"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathbb{Z} \cong \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "d(2)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathbb{Z} \cong \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_K} \arrow[d, "d(2)_K"] \\
H^2(K, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^2(K, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)
\end{tikzcd}$$

où tr est le transfert et Res est la restriction. Par la proposition 4.2, l'image de $d(2)_K$ est $\mathbb{Z}/2$. Par le carré (2), l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ ou $\mathbb{Z}/4$. Puisque

$$\mathrm{tr}(1_{\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})}) = 2 \cdot 1_{\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})},$$

par le carré (1), l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ si et seulement si $\mathrm{tr}(\mathrm{Im}(d(2)_K)) = 0$.

On considère :

$$\mathrm{Br}(K) \oplus \mathrm{Br}(K) \xrightarrow{\cong} H^2(K, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \underset{\mathrm{Res}}{\overset{\mathrm{tr}}{\rightleftarrows}} H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Br}(K).$$

Pour chaque $a, b \in \mathrm{Br}(K)$, l'action de σ sur $\mathrm{Br}(K) \oplus \mathrm{Br}(K)$ est définie par $\sigma(a, b) = (\sigma(b), \sigma(a))$ et $\mathrm{Res}(a) = (a, \sigma(a))$. Alors $\sigma(a, b) + (a, b) = \mathrm{Res}(a + \sigma(b))$ et, d'après [Mazza et al. 2006, Exercise 6.5] et [Milne 1980, V.1.12], on a $\mathrm{tr}(a, b) = a+\sigma(b)$. Par l'équation (4.3), $d(2)_K(1_{\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})}) = ([C], [C])$. Donc $\mathrm{tr}(\mathrm{Im}(d(2)_K)) = 0$ si et seulement si $[C] = \sigma([C])$, i.e., $[C] \in \mathrm{Br}(K)^\sigma$. Puisque $\mathrm{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/2$, on a $H^3(\mathrm{Gal}(K/k), K^\times) \cong H^1(\mathrm{Gal}(K/k), K^\times) = 0$, et donc le morphisme $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)^\sigma$ est surjectif.

On a alors :

(1) Si $[C] \in \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K))$, l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ et, par le lemme 4.4, on a $I(X) = 2$.

(2) Si $[C] \notin \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K))$, l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/4$ et, par le lemme 2.6, on a $I(X) = 4$.

On conclut alors avec la proposition 3.3. □

5. Calcul de $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour une surface de del Pezzo X de degré ≥ 5

Rappelons un fait bien connu.

Lemme 5.1. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré 6. On a :*

(1) *Il existe une extension K_1/k de degré divisant 2, une K_1-forme X_1 de $\mathbb{P}^2$ sur K_1 et un morphisme $f_1 : X_{K_1} \to X_1$ birationnel.*

(2) *Il existe une extension K_2/k de degré divisant 3, une surface de del Pezzo X_2 de degré 8 sur K_2 et un morphisme $f_2 : X_{K_2} \to X_2$ tels que X_{K_2} est un éclatement de X_2 le long d'un sous-schéma réduit de dimension 0 et de degré 2. Donc l'indice $I(X_2)$ de la K_2-surface X_2 est 1 ou 2.*

Démonstration. Cela provient du fait que la configuration des 6 courbes exceptionnelles de $X_{\bar{k}}$ est celle d'un hexagone ([Colliot-Thélène 1972], ou voir [Várilly-Alvarado 2013, Section 2.4]). □

Théorème 5.2. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$ si et seulement si $I(X) = 4$, $\deg(X) = 8$, et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

Sinon, $\mathcal{M}(X) = 0$ et donc $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Démonstration. La dernière implication résulte de la proposition 3.3.

Si $X(k) \neq \varnothing$, le morphisme $\mathrm{CH}^2(X) \to \mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}}) = \mathbb{Z}$ est surjectif. Donc $\mathcal{M}(X) = 0$. Si $\deg(X) = 5$ ou 7, par le théorème 3.1, $X(k) \neq \varnothing$ et donc alors $\mathcal{M}(X) = 0$. On suppose dorénavant $X(k) = \varnothing$.

Si $\deg(X) = 9$ avec $X(k) = \varnothing$, X est la variété de Severi–Brauer associée à une algèbre centrale simple A de degré 3 (cf. [Várilly-Alvarado 2013, Theorem 1.6]). Par un théorème de Kahn [1999, Theorem 7.1],

$$d(2)(1_{\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})}) = 2[A] \in \mathrm{Br}(k) = H^2(k, \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^*).$$

Puisque $X(k)=\varnothing$, on a $[A]\neq 0$, $3[A]=0$ et $I(X)=3$. Donc $d(2)(1_{\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})})\neq 0$ et $d'(2)$ est injectif. Alors $\mathcal{M}(X)=0$.

Si $\deg(X)=8$ avec $X(k)=\varnothing$, le résultat en degré 8 est donné par les propositions 4.1, 4.2 et 4.6.

Considérons le cas des surfaces de del Pezzo de degré 6.

S'il existe une surface de del Pezzo Y et un morphisme $f: X\to Y$ projectif, birationnel, alors f^* induit un morphisme des suites spectrales (2.4) pour Y et X. De plus, $f^*:\mathrm{CH}^2(Y_{\bar{k}})^{\Gamma_k}\xrightarrow{\sim}\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ est un isomorphisme et $f^*:\mathrm{Pic}(Y_{\bar{k}})\to\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$ admet un inverse à gauche. Donc

$$\begin{aligned} f^*: E_2^{4,1}(Y,2)&\to E_2^{4,1}(X,2) && \text{est injectif,}\\ f^*:\mathrm{Ker}(d(2)_Y)&\to\mathrm{Ker}(d(2)_X) && \text{est un isomorphisme.}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}(X)\cong\mathcal{M}(Y)$.

Si $\deg(X)=6$, avec $X(k)=\varnothing$, par le lemme 5.1(2), il existe une extension K_2/k de degré divisant 3 et une surface de del Pezzo X_2 de degré 8 sur K_2 et un K_2-morphisme $f_2: X_{K_2}\to X_2$ projectif, birationnel, tels que $I(X_2)=1$ ou 2. D'après ce que l'on a déjà établi pour les surfaces de del Pezzo de degré 8, on a $\mathcal{M}(X_2)=0$ et, d'après le paragraphe ci-dessus, $\mathcal{M}(X_{K_2})=0$. Par [Kahn 1999, Theorem 4.4(3)], le transfert est bien défini pour la suite spectrale (2.4). Puisque le transfert est bien défini pour la suite exacte (2.2), le transfert est bien défini pour le complexe

$$\mathrm{CH}^2(X)\to\mathrm{CH}^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}\xrightarrow{d(2)} H^2(k,\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})\otimes\bar{k}^\times),$$

et donc le transfert est bien défini pour $\mathcal{M}(X)$. Donc $\mathcal{M}(X)$ est annulé par 3.

Par le même argument (lemme 5.1(1)) et le résultat en degré 9, le groupe $\mathcal{M}(X)$ est annulé par 2. On a donc $\mathcal{M}(X)=0$. □

Corollaire 5.3. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré* 8 *avec* $\mathcal{M}(X)\neq 0$. *Si la dimension cohomologique* $\mathrm{cd}(k)$ *de k est* ≤ 3, *alors* $\mathcal{M}(X)=\mathbb{Z}/2$, $I(X)=4$ *et* $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))=\mathbb{Z}/2$.

Démonstration. Par la proposition 3.3, on a $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))=\mathcal{M}(X)$. Le résultat découle du théorème 5.2. □

Exemple 5.4. Soit $k:=\mathbb{C}(t,x,y)$. Soient C_1 la conique correspondant à l'algèbre (t,x), C_2 la conique correspondant à l'algèbre $(t+1,y)$ et $X:=C_1\times C_2$. Alors $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))=\mathbb{Z}/2$.

Démonstration. Puisque la dimension cohomologique $\mathrm{cd}(k)$ de k est 3, par le théorème 5.2 et le corollaire 5.3, il suffit de montrer que $I(X)=4$. On note $A=(t,x)\otimes(t+1,y)$ l'algèbre de biquaternions. Par [Albert 1972, Theorem], A est un corps gauche si et seulement si, pour chaque point $x_1\in C_1$ de degré 2 et chaque point $x_2 \in C_2$ de degré 2, on a $k(x_1) \ncong k(x_2)$. Donc $I(X) = 4$ si et seulement si A est un corps gauche. Par [Colliot-Thélène 2002, corollaire 4], A est un corps gauche si et seulement si t et $t+1$ sont indépendantes dans $\mathbb{C}(t)^\times/\mathbb{C}(t)^{\times 2}$, ce qui est satisfait. $\square$

Corollaire 5.5. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Supposons que toute forme quadratique en 6 variables sur k est isotrope. Alors $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Démonstration. D'après le théorème 5.2, il suffit de montrer que, pour toute paire de coniques lisses C_1 et C_2 sur k, on a $I(C_1 \times C_2) \neq 4$. Soient (a, b) l'algèbre de quaternion correspondant à C_1 et (c, d) l'algèbre de quaternion correspondant à C_2. Par l'argument de la démonstration de l'exemple 5.4, $I(C_1 \times C_2) = 4$ si et seulement si $(a, b) \otimes (c, d)$ est un corps gauche. Par un théorème de Albert (cf. [Colliot-Thélène 2002, proposition 1]), ceci vaut si et seulement si la forme quadratique diagonale $\langle a, b, -ab, -c, -d, cd\rangle$ est anisotrope sur k. Ceci donne immédiatement le résultat annoncé. $\square$

Corollaire 5.6. *Soit X une k-surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Supposons que k satisfait la propriété (C_2) (cf. [Serre 1965, §II.4.5]). Alors $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Démonstration. Par le corollaire 5.5 et la définition de la propriété (C_2), on a $\bar{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. D'après [Serre 1965, §II.4.5, théorème MS], la dimension cohomologique de k satisfait $\mathrm{cd}(k) \leq 2$. Alors,

$$H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0 \quad \text{et donc} \quad H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0. \qquad \square$$

Le théorème 5.2 donne la conjecture de Hodge entière pour certaines variétés de dimension 4 (voir [Colliot-Thélène et Voisin 2012, §1]) :

Proposition 5.7. *Soit X une $\mathbb{C}$-variété projective et lisse de dimension 4 munie d'un morphisme dominant $X \xrightarrow{f} S$ de base une $\mathbb{C}$-surface projective lisse S et de fibre générique X_η une surface de del Pezzo de degré ≥ 5. Alors la conjecture de Hodge entière en degré 4 vaut sur X.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{C}(S)$ satisfait la propriété (C_2) (cf. [Serre 1965, §II.4.5]), d'après le corollaire 5.6, $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. D'après Colliot-Thélène et Voisin [2012, théorème 3.8], il suffit alors de montrer qu'il existe une variété projective lisse Y de dimension au plus 3 et un morphisme $Y \xrightarrow{f} X$ tels que l'application induite $\mathrm{CH}_0(Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{CH}_0(X)$ soit surjective. Comme X_η est une $\mathbb{C}(S)$-surface géométriquement rationnelle, il existe une surface T projective et lisse sur $\mathbb{C}$ et une application génériquement finie $T \to S$, telles que $X_\eta \times_{\mathbb{C}(S)} \mathbb{C}(T)$ soit rationnelle sur $\mathbb{C}(T)$. Il existe donc une application rationnelle dominante de $\mathbb{P}^2 \times T$ vers X. Il existe alors une surface projective et lisse T' birationnelle à T et un morphisme $T' \to X$ tels que l'application induite $\mathrm{CH}_0(T') \xrightarrow{f_*} \mathrm{CH}_0(X)$ soit surjective. $\square$

Appendice : Accouplements de suites spectrales

Soient X une variété lisse sur k et $\mathrm{Sh}(X)$ la catégorie des faisceaux étales sur X. On rappelle quelques définitions données dans [McCleary 2001, Section 2.3] :

Définition A.1. Un module bigradué différentiel de $\mathrm{Sh}(X)$ est une collection d'éléments $E^{p,q} \in \mathrm{Sh}(X)$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d : E^{*,*} \to E^{*,*}$ de bidegré $(s, 1-s)$ pour certains $s \in \mathbb{Z}$, tels que $d \circ d = 0$.

Le produit tensoriel de deux modules bigradués différentiels $(E^{*,*}(1), d(1))$, $(E^{*,*}(2), d(2))$ est un module bigradué différentiel $((E(1) \otimes E(2))^{*,*}, d_\otimes)$ avec

$$(E(1) \otimes E(2))^{p,q} = \bigoplus_{r+t=p,\ s+u=q} E^{r,s}(1) \otimes E^{t,u}(2)$$

et $d_\otimes(x \otimes y) = d(1)(x) \otimes y + (-1)^{r+s} x \otimes d(2)(y)$, où $x \in E^{r,s}(1)$, $y \in E^{t,u}(2)$.

Pour deux complexes A, B, par le théorème de Künneth, on a un morphisme canonique

$$\bigoplus_{s+r=n} H^r(A) \otimes H^s(B) \xrightarrow{p} H^n(A \times B).$$

Définition A.2. Soient $E_r^{*,*}(1), d_r(1)$, $E_r^{*,*}(2), d_r(2)$ et $E_r^{*,*}(3), d_r(3)$ trois suites spectrales dans $\mathrm{Sh}(X)$. Un accouplement

$$\psi : E_r^{*,*}(1) \times E_r^{*,*}(2) \to E_r^{*,*}(3)$$

est une collection de morphismes $\psi_r : E_r^{*,*}(1) \otimes E_r^{*,*}(2) \to E_r^{*,*}(3)$ pour chaque r, tel que ψ_{r+1} est la composition :

$$\begin{aligned} E_{r+1}^{*,*}(1) \otimes E_{r+1}^{*,*}(2) \xrightarrow{\sim} H(E_r^{*,*}(1)) \otimes H(E_r^{*,*}(2)) \xrightarrow{p} H((E_r(1) \otimes E_r(2))^{*,*}) \\ \xrightarrow{H(\psi_r)} H(E_r^{*,*}(3)) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{*,*}(3), \end{aligned}$$

où p est le morphisme dans le théorème de Künneth.

Remerciements

Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène pour plusieurs discussions. Je remercie également Olivier Benoist et Bruno Kahn pour leurs commentaires. Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Île-de-France.

Bibliographie

[Albert 1932] A. A. Albert, "A note on normal division algebras of order sixteen", *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**:10 (1932), 703–706. MR Zbl

[Albert 1972] A. A. Albert, "Tensor products of quaternion algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.* **35** (1972), 65–66. MR Zbl

[Auel et Bernardara 2015] A. Auel et M. Bernardara, “Semiorthogonal decompositions and birational geometry of del Pezzo surfaces over arbitrary fields”, preprint, 2015. arXiv

[Colliot-Thélène 1972] J.-L. Colliot-Thélène, “Surfaces de Del Pezzo de degré 6”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **275** (1972), A109–A111. MR Zbl

[Colliot-Thélène 1995] J.-L. Colliot-Thélène, “Birational invariants, purity and the Gersten conjecture”, pp. 1–64 dans *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), édité par B. Jacob et A. Rosenberg, Proc. Sympos. Pure Math. **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. MR Zbl

[Colliot-Thélène 1999] J.-L. Colliot-Thélène, “Points rationnels sur les variétés non de type général, chapitre II: Surfaces rationnelles”, course notes, Institut Henri Poincaré, 1999, https://tinyurl.com/CT99ChII.

[Colliot-Thélène 2002] J.-L. Colliot-Thélène, “Exposant et indice d’algèbres simples centrales non ramifiées”, *Enseign. Math.* (2) **48**:1-2 (2002), 127–146. MR Zbl

[Colliot-Thélène 2015] J.-L. Colliot-Thélène, “Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications”, *Doc. Math.* Extra vol. : Alexander S. Merkurjev’s sixtieth birthday (2015), 195–220. MR Zbl

[Colliot-Thélène et Sansuc 1987] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles, II”, *Duke Math. J.* **54**:2 (1987), 375–492. MR Zbl

[Colliot-Thélène et Voisin 2012] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, “Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière”, *Duke Math. J.* **161**:5 (2012), 735–801. MR Zbl

[Colliot-Thélène et al. 2005] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, “Compactification équivariante d’un tore (d’après Brylinski et Künnemann)”, *Expo. Math.* **23**:2 (2005), 161–170. MR

[Fulton 1993] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies **131**, Princeton University Press, 1993. MR Zbl

[Jacobson 1996] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer, 1996. MR Zbl

[Kahn 1996] B. Kahn, “Applications of weight-two motivic cohomology”, *Doc. Math.* **1** (1996), No. 17, 395–416. MR Zbl

[Kahn 1999] B. Kahn, “Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties”, pp. 149–174 dans *Algebraic K-theory* (Seattle, WA, 1997), édité par W. Raskind et C. Weibel, Proc. Sympos. Pure Math. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. MR Zbl

[Kahn 2008] B. Kahn, *Formes quadratiques sur un corps*, Cours Spécialisés **15**, Société Mathématique de France, Paris, 2008. MR Zbl

[Kahn 2010] B. Kahn, “Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras”, *Doc. Math.* Extra vol. : Andrei A. Suslin sixtieth birthday (2010), 317–369. MR Zbl

[Kahn 2012] B. Kahn, “Classes de cycles motiviques étales”, *Algebra Number Theory* **6**:7 (2012), 1369–1407. MR Zbl

[Kollár 1996] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik (3) **32**, Springer, 1996. MR

[Mazza et al. 2006] C. Mazza, V. Voevodsky et C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs **2**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. MR Zbl

[McCleary 2001] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, 2nd éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics **58**, Cambridge University Press, 2001. MR Zbl

[Milne 1980] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, 1980. MR Zbl

[Serre 1965] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 3e éd., Lecture Notes in Math. **5**, Springer, 1965. MR Zbl

[Várilly-Alvarado 2013] A. Várilly-Alvarado, "Arithmetic of del Pezzo surfaces", pp. 293–319 dans *Birational geometry, rational curves, and arithmetic*, édité par F. Bogomolov et al., Springer, 2013. MR Zbl

Received 25 Aug 2016. Revised 15 Mar 2017. Accepted 2 Apr 2017.

YANG CAO: yang.cao@math.u-psud.fr
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Univ. Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

ANNALS OF K-THEORY

msp.org/akt

Annals of K-Theory is a journal of the K-Theory Foundation (ktheoryfoundation.org). The K-Theory Foundation acknowledges the precious support of Foundation Compositio Mathematica, whose help has been instrumental in the launch of the Annals of K-Theory.

See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2017 is US $420/year for the electronic version, and $470/year (+$25, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Annals of K-Theory (ISSN 2379-1681 electronic, 2379-1683 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

AKT peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

ANNALS OF K-THEORY

2018 vol. 3 no. 1