

# *Algebra & Number Theory*

Volume 17  
2023  
No. 1

**Cohomologie analytique  
des arrangements d'hyperplans**

Damien Junger



# Cohomologie analytique des arrangements d'hyperplans

Damien Junger

Nous étudions la cohomologie de faisceaux analytiques sur le complémentaire, dans l'espace projectif, d'une collection infinie d'hyperplans bien choisie, comme l'espace symétrique de Drinfeld. En particulier, le faisceau de fonctions inversibles sur ces espaces rigides n'a pas de cohomologie de degré supérieur ou égal à 1. Ceci démontre l'annulation du groupe de Picard, et les méthodes utilisées nous donnent une description pratique des fonctions inversibles globales.

We study the cohomology of some analytic sheaves on the complement in the projective space of a suitable infinite collection of hyperplanes like the Drinfeld symmetric space. In particular, the sheaf of invertible functions on these rigid spaces has no cohomology in degree greater or equal to 1. This proves the vanishing of the Picard group and the methods used give a convenient description of the global invertible functions.

Introduction	1
1. L'espace des hyperplans $K$ -rationnels	6
2. Géométrie des arrangements	7
3. Énoncés et stratégies	11
4. Cas des arrangements algébriques	14
5. Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathcal{O}^{(r)}$	23
6. Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathbb{G}_m$	31
7. Étude des arrangements algébriques généralisés	38
8. Commentaires sur la cohomologie étale et de de Rham des arrangements d'hyperplans	39
Remerciements	42
Bibliographie	42

## Introduction

Cet article est lié à une série de travaux récents [Colmez et al. 2020a; 2020b; 2021] portant sur la géométrie et la cohomologie  $p$ -adique, pour  $p$  premier, des espaces symétriques de Drinfeld et de leurs revêtements. Il fait aussi partie d'une autre série d'articles tirés de la thèse de l'auteur [Junger 2022a;

---

This work has been written in large part during the author's Ph.D. studies at ENS Lyon. His work is currently funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) under Germany's Excellence Strategy EXC 2044-390685587, Mathematics Münster: Dynamics-Geometry-Structure.

MSC2020: 32C35, 32P05.

Mots-clefs: rigid analytic varieties, analytic cohomology, Drinfeld symmetric spaces.

[2022b; 2022c] qui visent à déterminer la partie supercuspidale de la cohomologie de de Rham du premier revêtement de ces espaces (voir le théorème A de [Junger 2022a]). Chacun de ces quatre articles présente des aspects de la géométrie du premier revêtement qui seront utilisés de manière cruciale dans la preuve du résultat principal. Ce travail constitue la première étape de ce programme et se concentre essentiellement sur la géométrie des espaces symétriques eux-mêmes (qui permettra de décrire le premier revêtement dans [Junger 2022b]).

Les espaces symétriques de Drinfeld sont des cas particuliers d'arrangements (infinis) d'hyperplans et l'objet de cet article est de comprendre ce qui se passe pour des arrangements plus généraux. L'étude de leur cohomologie étale  $p$ -adique semblant délicate (en effet, les travaux cités utilisent des propriétés spécifiques de l'espace de Drinfeld), nous nous intéresserons plutôt à leur cohomologie analytique à coefficients dans le faisceau  $\mathbb{G}_m$  des fonctions inversibles. Notre résultat principal affirme que beaucoup d'arrangements (même infinis) d'hyperplans sont acycliques pour  $\mathbb{G}_m$ . Par exemple, cela entraîne que le groupe de Picard des espaces de Drinfeld est trivial, ce qui ne semble pas être connu. Il serait intéressant d'avoir des résultats analogues pour la cohomologie étale, mais cela nous semble inaccessible pour le moment. En effet, le calcul de  $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$  pour l'espace de Drinfeld  $X$  de dimension plus grande que 1 semble déjà délicat (la partie de torsion est cependant bien comprise grâce aux résultats de Schneider et Stuhler [1991] et de Colmez, Dospinescu et Nizioł [Colmez et al. 2021]).

Avant de préciser nos résultats principaux, mentionnons-en certaines motivations et applications à l'étude du premier revêtement des espaces de Drinfeld. Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers,  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  son corps résiduel et  $\varpi$  une uniformisante. Soit aussi  $C$  le complété d'une clôture algébrique de  $K$ . On note  $\mathbb{H}_K^d$  l'espace symétrique de Drinfeld de dimension  $d \geq 1$ , i.e., l'espace rigide analytique sur  $K$  défini par<sup>1</sup>

$$\mathbb{H}_K^d = \mathbb{P}_K^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$

avec  $\mathcal{H}$  l'ensemble des hyperplans  $K$ -rationnels et  $\mathbb{P}_K^d$  l'espace projectif rigide analytique de dimension  $d$  sur  $K$ . L'espace  $\mathbb{H}_K^d$  possède un modèle formel semi-stable  $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$ , construit par Deligne. Soit  $D$  l'algèbre à division sur  $K$  d'invariant  $1/(d+1)$  et  $\Pi_D$  une uniformisante. Un théorème fondamental de Drinfeld [1976] fournit une interprétation modulaire de l'espace  $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$ , et cette description entraîne l'existence d'un  $\mathcal{O}_D$ -module formel universel  $\mathfrak{X}$  sur  $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$ . Les points de  $\Pi_D$ -torsion  $\mathfrak{X}[\Pi_D]$  forment un schéma formel en  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels de Raynaud. Ces derniers admettent une classification [Raynaud 1974] et sont caractérisés par la donnée des parties isotypiques  $(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D])$  pour certains caractères de  $\mathbb{F}_{q^{d+1}}$ , dits fondamentaux. Comprendre les fibrés en droites  $(\mathcal{L}_i)_i$  universels sur  $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$  est essentiel pour comprendre la géométrie du premier revêtement  $\Sigma^1$  de  $\mathbb{H}_K^d$ . En fibre spéciale, les faisceaux  $(\mathcal{L}_i)_i$  sont relativement bien compris et sont étudiés dans [Teitelbaum 1989; 1990; 1993; Grosse-Klönne 2004b]. L'annulation du groupe de Picard de  $\mathbb{H}_K^d$ , qui découle de nos résultats, fournit donc une description en

1. Il n'est pas immédiat que ce complémentaire d'un nombre infini de parties fermées est bien un espace rigide analytique, mais cela découle de la remarque 2.2.

fibre générique de ces faisceaux localement libres de rang 1 sur  $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$ . Dans un travail ultérieur, nous obtiendrons une classification des  $\mu_N$ -torseurs sur  $\mathbb{H}_K^d$  avec  $N = q^{d+1} - 1$  et nous donnerons une équation explicite du revêtement modéré de l'espace symétrique de Drinfeld.

Passons maintenant à notre résultat principal. Gardons les notations ci-dessus. Soit  $\mathcal{A}$  une partie fermée (par exemple une partie finie) de l'espace profini  $\mathcal{H}$  et posons

$$\text{Int}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_K^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Alors  $\text{Int}(\mathcal{A})$  possède encore une structure naturelle d'espace rigide analytique sur  $K$ . Si  $L$  est une extension complète de  $K$  et si  $X$  est un  $K$ -espace analytique, on note  $X_L = X \hat{\otimes}_K L$ .

**Théorème A.** *Avec les notations ci-dessus, pour toute partie fermée  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{H}$  et toute extension complète  $L$  de  $K$ , on a  $H_{\text{an}}^i(\text{Int}(\mathcal{A})_L, \mathbb{G}_m) = 0$  pour  $i \geq 1$ .*

**Remarque.** (1) L'égalité [Berkovich 1993, Proposition 4.1.10]

$$H_{\text{an}}^1(X, \mathbb{G}_m) = H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X)$$

est valable pour tout espace analytique  $X$ . Ainsi, le groupe de Picard et les fonctions inversibles sur  $X$  peuvent être déterminées en calculant sa cohomologie analytique. Ce n'est malheureusement pas le cas des groupes de cohomologie en degrés strictement plus grands que 1.

(2) Nous prouvons aussi une version du théorème dans laquelle le faisceau  $\mathbb{G}_m$  est remplacé par le sous-faisceau  $\mathcal{O}^{**} = 1 + \mathcal{O}^{++}$  des fonctions  $1 + f$  telles que  $|f| < 1$  (la norme étant celle spectrale). Si  $\mathcal{O}^+$  désigne le faisceau des fonctions  $f$  telles que  $|f| \leq 1$ , il est probable que  $H_{\text{an}}^i(\text{Int}(\mathcal{A})_L, \mathcal{O}^+) = 0$  pour  $i \geq 1$ , mais nous n'arrivons pas à le démontrer. Le résultat analogue avec  $\text{Int}(\mathcal{A})_L$  remplacé par une boule fermée est un théorème de Bartenwerfer [1982] (il est crucial d'utiliser la topologie analytique pour ce genre de résultat, car il est totalement faux pour la topologie étale). Nos méthodes permettent de démontrer que si le résultat de Bartenwerfer est aussi valable pour les polycouronnes, alors  $H_{\text{an}}^i(\text{Int}(\mathcal{A})_L, \mathcal{O}^+) = 0$  pour  $i \geq 1$ .

Notons  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]$  le dual du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$  des fonctions localement constantes sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . On voit les éléments de  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]$  comme des mesures sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . On note  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0$  le sous-groupe des mesures de masse totale 0 (l'orthogonal de la fonction constante 1).

**Théorème B.** *Pour toute partie fermée  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{H}$  et toute extension complète  $L$  de  $K$ , il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})_L)/L^* \simeq \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0.$$

**Remarque.** (1) Ce théorème a été récemment obtenu par Gekeler [2020] pour l'espace symétrique de Drinfeld. Notre méthode est complètement différente.

(2) Si l'on combine le théorème ci-dessus avec la suite exacte de Kummer et l'annulation du groupe de Picard, on obtient une description du groupe  $H_{\text{ét}}^1(\text{Int}(\mathcal{A})_L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  pour tout entier  $n$ . Cela semble

suggérer qu'il existe des descriptions explicites de la cohomologie étale en degré cohomologique plus grand. Voir [Colmez et al. 2021] pour le cas de l'espace de Drinfeld.

Nous finissons cette introduction en expliquant les grandes étapes de la preuve de nos résultats principaux. L'ingrédient technique principal est un résultat d'annulation de van der Put [1982], qui affirme que pour tout  $r \in p^{\mathbb{Q}}$ , le faisceau  $\mathcal{O}^{(r)}$  des fonctions de norme spectrale strictement plus petite que  $r$  est acyclique sur les boules fermées et les polycouronnes de dimension arbitraire. Pour se ramener à ce type d'espaces, nous utilisons les constructions géométriques de Schneider et Stuhler [1991]. Plus précisément, l'espace  $\text{Int}(\mathcal{A})$  possède un recouvrement de type Stein par des affinoïdes  $\text{Int}(\mathcal{A}_n)$  obtenus en enlevant de  $\mathbb{P}_K^d$  les tubes ouverts d'épaisseur  $|\varpi|^n$  autour des hyperplans dans  $\mathcal{A}$ . Cela nous amène à étudier la géométrie d'un arrangement tubulaire

$$X_I = \mathbb{P}_K^d \setminus \bigcup_{i \in I} H_i(|\varpi|^n),$$

où  $H_i(|\varpi|^n)$  est le voisinage tubulaire ouvert d'épaisseur  $|\varpi|^n$  de l'hyperplan  $H_i$ . Nous allons supposer que ces voisinages tubulaires sont deux à deux distincts. Suivant Schneider et Stuhler, pour comprendre la géométrie de  $X$ , il s'agit de comprendre la géométrie des espaces de la forme

$$Y_J = \mathbb{P}_K^d \setminus \bigcap_{j \in J} H_j(|\varpi|^n)$$

avec  $J \subset I$ . Le point essentiel est que les espaces  $Y_J$  sont des fibrations localement triviales en boules fermées au-dessus d'espaces projectifs, dont la dimension dépend de la combinatoire des hyperplans. Cela permet d'utiliser les résultats d'annulation de van der Put et nous ramène à l'étude de certains complexes de Čech relativement explicites. Pour transférer l'étude des faisceaux sur les  $Y_J$  à  $X_I$ , nous montrons un lemme combinatoire, essentiellement basé sur la suite de Mayer–Vietoris, qui remplace la suite spectrale utilisée par Schneider et Stuhler (et dont l'étude devient assez compliquée dans notre situation). Cela permet de démontrer que les faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}$  sont acycliques sur  $X_I$ . Un argument basé sur le logarithme tronqué permet d'en déduire l'acyclicité du faisceau  $\mathcal{O}^{**} = 1 + \mathcal{O}^{++}$  des fonctions  $1 + f$  vérifiant  $|f| < 1$  sur les  $X_I$ . Enfin, l'étude du quotient  $\mathbb{G}_m / \mathcal{O}^{**}$  fait apparaître des complexes de Čech identiques à ceux apparaissant en géométrie algébrique, ce qui permet de passer de  $\mathcal{O}^{**}$  à  $\mathbb{G}_m$ .

Le paragraphe précédent explique la preuve de l'acyclicité de  $\mathbb{G}_m$  sur les espaces  $X_I$ . Le passage de ces espaces à  $\text{Int}(\mathcal{A})$  n'est pas trivial et représente en fait le cœur technique de l'article. Pour expliquer la difficulté, notons que l'on dispose d'un recouvrement Stein  $\text{Int}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \geq 1} X_{I_n}$ , où les  $X_{I_n}$  sont des espaces du même type que ceux introduits ci-dessus, les  $I_n$  étant des ensembles finis, de plus en plus grands. On en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \varprojlim_n H_{\text{an}}^{s-1}(X_{I_n}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) \rightarrow \varprojlim_n H_{\text{an}}^s(X_{I_n}, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0.$$

Pour  $s > 1$ , cela permet de démontrer l'annulation de  $H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m)$ , mais pour  $s = 1$ , il s'agit de

démontrer que

$$R^1 \varprojlim_n \mathcal{O}^*(X_{I_n}) = 0.$$

Pour cela, on se ramène à démontrer le même résultat avec les faisceaux  $\mathcal{O}^{**}$  et  $\mathcal{O}^{(r)}$  à la place de  $\mathbb{G}_m$ . Le point crucial à démontrer est alors une version en dimension quelconque du lemme 1.3 de [Colmez et al. 2020a], qui permet de comprendre la flèche de restriction  $\mathcal{O}^{**}(X_{I_{n+1}}) \rightarrow \mathcal{O}^{**}(X_{I_n})$ . Plus précisément, par application du logarithme, nous nous ramenons à montrer, pour  $r$  assez petit, qu'il existe une constante  $c$  telle que, pour tout  $n$ ,  $\mathcal{O}^{(r)}(X_{I_{n+c}}) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(X_{I_n})$  avec  $\mathcal{O}_L^{(r)}$  le sous-ensemble des éléments de  $L$  de norme strictement inférieure ou égale à  $r$ . C'est le point le plus délicat de l'article et la preuve en est assez indirecte, car nous n'avons pas de description explicite des groupes  $\mathcal{O}^{(r)}(X_{I_n})$ .

**Notations et conventions.** Dans tout l'article, on fixe un nombre premier  $p$  et une extension finie  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $\mathcal{O}_K$  son anneau des entiers,  $\varpi$  une uniformisante et  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  son corps résiduel. On note  $C = \widehat{K}$  la complétion d'une clôture algébrique de  $K$  et  $\check{K}$  la complétion de l'extension maximale non ramifiée de  $K$ . Soit  $L \subset C$  une extension complète de  $K$  susceptible de varier (pouvant par exemple être égale à  $K$ ,  $\check{K}$ , ou  $C$ ), d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_L$  et de corps résiduel  $\kappa$ .

Soit  $S$  un  $L$ -espace rigide analytique.<sup>2</sup> On note respectivement  $\mathbb{A}_{\text{rig},S}^n$  et  $\mathbb{P}_{\text{rig},S}^n$  les espaces affine et projectif rigides analytiques de dimension relative  $n$  sur  $S$ . Si  $s = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille de nombres rationnels, le polydisque rigide fermé sur  $S$  de polyrayon  $(|\varpi|^{s_i})_i$  sera noté  $\mathbb{B}_S^n(|\varpi|^{s_i})$  ou  $\mathbb{B}_S^n(s)$  par abus. L'espace  $\mathbb{B}_S^n$  sera la boule unité et les boules ouvertes seront notées  $\mathring{\mathbb{B}}_S^n$  et  $\mathring{\mathbb{B}}_S^n(s)$ . Si  $S$  est maintenant un schéma,  $\mathbb{A}_{\text{zar},S}^n$  sera l'espace affine sur  $S$  et  $\mathbb{P}_{\text{zar},S}^n$  l'espace projectif.

Si  $X$  est un  $L$ -espace analytique réduit, on note  $\mathcal{O}_X^\dagger$  le faisceau des fonctions à puissances bornées,  $\mathcal{O}_X^{++}$  le faisceau des fonctions topologiquement nilpotentes,  $\mathcal{O}_X^{(r)}$  le faisceau des fonctions bornées strictement en norme spectrale par  $r$ ,  $\mathcal{O}_X^*$  (ou bien  $\mathbb{G}_{m,X}$ ) le faisceau des fonctions inversibles et  $\mathcal{O}_X^{**}$  le faisceau  $1 + \mathcal{O}_X^{++}$ . Si  $X = \text{Sp}(L)$ , on écrit  $\mathcal{O}_L^{(r)} = \mathcal{O}_X^{(r)}(X)$ . Pour tout ouvert affinoïde réduit  $U \subset X$ , on munit  $\mathcal{O}_X^*(U)$  de la topologie induite par le plongement  $\mathcal{O}_X^*(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)^2 : f \mapsto (f, f^{-1})$  (muni de la norme spectrale). On notera  $K(x)$  le corps valué associé au point fermé  $x \in X$ .

Si  $X$  est un espace analytique sur  $L$  (resp. un schéma), la cohomologie d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur le site analytique (resp. de Zariski) sera notée  $H_{\text{an}}^*(X, \mathcal{F})$  (resp.  $H_{\text{zar}}^*(X, \mathcal{F})$ ). Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement de  $X$  (pour une des topologies précédemment nommées), la cohomologie de Čech de  $X$  pour le faisceau  $\mathcal{F}$  par rapport au recouvrement  $\mathcal{U}$  sera notée  $\check{H}^*(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$  et le complexe de cochaînes sera noté  $\check{C}^*(X, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ . Pour toutes ces théories cohomologiques, quand  $U \subset X$  est un ouvert de  $X$ , la cohomologie à support dans le complémentaire de  $U$  sera notée  $H^*(X, U)$ . Si  $\Lambda$  est un groupe cyclique d'ordre  $N$  premier à  $p$  et  $\bar{X} = X \widehat{\otimes} C$ , le morphisme de Kummer sera noté  $\kappa : \mathcal{O}^*(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \Lambda_X)$  et  $\bar{\kappa} : \mathcal{O}^*(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\bar{X}, \Lambda_{\bar{X}})$  sera la restriction de  $\mathcal{O}^*(\bar{X}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\bar{X}, \Lambda_{\bar{X}})$ .

Enfin, nous noterons  $\llbracket a, b \rrbracket := [a, b] \cap \mathbb{Z}$  quand  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. Dans tout le reste de l'article, les espaces rigides analytiques et les affinoïdes seront supposés « à la Tate ». Ce cadre sera largement suffisant pour nos applications.



## 1. L'espace des hyperplans $K$ -rationnels

On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des hyperplans  $K$ -rationnels dans  $\mathbb{P}^d$ . L'ensemble  $\mathcal{H}$  est profini, car il s'identifie à  $\mathbb{P}^d(K)$ .

Définissons maintenant quelques données relatives à l'ensemble  $\mathcal{H}$ . Si  $a = (a_0, \dots, a_d) \in C^{d+1} \setminus \{0\}$ , alors  $l_a$  désignera l'application

$$b = (b_0, \dots, b_d) \in C^{d+1} \mapsto \langle a, b \rangle := \sum_{0 \leq i \leq d} a_i b_i.$$

Ainsi  $\mathcal{H}$  s'identifie à  $\{\ker(l_a), a \in K^{d+1} \setminus \{0\}\}$  et à  $\mathbb{P}^d(K)$ .

**Remarque 1.1.** L'application précédente permet d'identifier un hyperplan dans  $\mathcal{H}$  à sa droite orthogonale par dualité. Nous confondrons alors toujours un élément de  $\mathcal{H}$  à sa droite associée. Dans la section suivante, nous attacherons des espaces rigides à certaines parties de  $\mathcal{H}$  et nous pourrons décrire explicitement leur géométrie et leur combinatoire uniquement grâce aux relations linéaires sur  $\mathcal{O}_K$  entre les générateurs unimodulaires de ces droites.

Le vecteur  $a = (a_i)_i \in C^{d+1}$  est dit unimodulaire si  $|a|_\infty := \max(|a_i|) = 1$ . L'application  $a \mapsto H_a := \ker(l_a)$  induit une bijection entre le quotient de l'ensemble des vecteurs unimodulaires  $a \in K^{d+1}$  par l'action évidente de  $\mathcal{O}_K^*$  et l'ensemble  $\mathcal{H}$ .

Pour  $a \in K^{d+1}$  unimodulaire et  $n \geq 1$ , on considère l'application  $l_a^{(n)}$  définie comme

$$b \in (\mathcal{O}_C/\varpi^n)^{d+1} \mapsto \langle a, b \rangle \in \mathcal{O}_C/\varpi^n$$

et on note

$$\mathcal{H}_n = \{\ker(l_a^{(n)}), a \in K^{d+1} \setminus \{0\} \text{ unimodulaire}\} \simeq \mathbb{P}^d(\mathcal{O}_K/\varpi^n).$$

Alors  $\mathcal{H} = \varprojlim_n \mathcal{H}_n$  et chaque  $\mathcal{H}_n$  est fini.

Soit  $a \in K^{d+1}$  unimodulaire et  $z \in \mathbb{P}^d(C)$ . La quantité  $|l_a(b)|$  ne dépend pas du choix du représentant unimodulaire  $b$  de  $z$ , et ne dépend que de la classe de  $a$  dans  $\mathbb{P}^d(K)$ . Cela permet de définir les tubes fermés et ouverts de rayon  $\varepsilon > 0$  autour de l'hyperplan  $H = \ker(l_{a_H}) \in \mathcal{H}$  par

$$\bar{H}(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{P}^d(C), |l_{a_H}(z)| \leq \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{H}(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{P}^d(C), |l_{a_H}(z)| < \varepsilon\}.$$

Les extensions des scalaires par  $L$  seront notées  $\bar{H}(\varepsilon)_L$  et  $\overset{\circ}{H}(\varepsilon)_L$  et les complémentaires dans  $\mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d$  seront  $\bar{H}(\varepsilon)_L^c$  et  $\overset{\circ}{H}(\varepsilon)_L^c$ . Il est à noter que  $\bar{H}(|\varpi|^n)$  et  $\overset{\circ}{H}(|\varpi|^n)$  ne dépendent que de la classe de  $H$  dans  $\mathcal{H}_n$  et  $\mathcal{H}_{n+1}$ , respectivement. <sup>3</sup>

**Remarque 1.2.** Dans la définition des tubes ouverts ou fermés, nous procédons à une renormalisation lorsque nous évaluons  $|l_a(z)|$  sur un représentant unimodulaire de  $z$ . Ce dernier dépend du choix de

3. Cela découle du fait que pour deux vecteurs  $a_1, a_2$ , on a l'identité  $|l_{a_1}(z) - l_{a_2}(z)| \leq |a_1 - a_2|_\infty |z|_\infty$ . En particulier, les inégalités  $|l_{a_1}(z)| \leq \varepsilon$  et  $|l_{a_2}(z)| \leq \varepsilon$  (resp.  $|l_{a_1}(z)| < \varepsilon$  et  $|l_{a_2}(z)| < \varepsilon$ ) sont vérifiées pour les mêmes vecteurs unimodulaires  $z$  si  $|a_1 - a_2|_\infty \leq \varepsilon$  (resp.  $|a_1 - a_2|_\infty < \varepsilon$ ).

coordonnées initiales. Toutefois, les changements de variables dans  $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$  permutent les tubes de même rayon. Plus précisément, si  $g \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ , alors  $g \cdot \overline{H}(\varepsilon) = \overline{(gH)}(\varepsilon)$ .

## 2. Géométrie des arrangements

**2A. Définitions et exemples.** Pour toute collection  $\mathcal{A}$  de parties de  $\mathbb{P}_{\mathrm{rig},K}^d$ , on note

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_{\mathrm{rig},K}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \quad \text{et} \quad \mathrm{Uni}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_{\mathrm{rig},K}^d \setminus \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Dans le cas général, ces constructions n'admettent pas forcément de structure naturelle d'espaces rigides analytiques. Toutefois, c'est le cas lorsque  $\mathcal{A}$  est fini et constitué de parties fermées. Nous nous intéresserons dans la suite de l'article aux exemples suivants (où  $\mathcal{A}$  est possiblement infini) pour lesquels une telle structure d'espace rigide existe.

**Définition 2.1.** Une collection  $\mathcal{A}$  de parties de  $\mathbb{P}_{\mathrm{rig},K}^d$  est appelée

- *arrangement algébrique* ou *algébrique généralisé* (d'hyperplans  $K$ -rationnels) si  $\mathcal{A}$  est, respectivement, un sous-ensemble fini ou fermé de  $\mathcal{H}$ ;
- *arrangement tubulaire ouvert* ou *fermé d'ordre  $n$*  si  $\mathcal{A}$  est, respectivement, une famille finie de voisinages tubulaires *fermés*  $\overline{H}(|\varpi|^n)$  ou *ouverts*  $\overset{\circ}{H}(|\varpi|^n)$  avec  $H \in \mathcal{H}$ .

**Remarque 2.2.** (1) Pour simplifier l'exposition, nous avons choisi d'étudier les arrangements pour des hyperplans  $K$ -rationnels pour  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Certaines de ces constructions peuvent s'étendre à des corps  $K$  beaucoup plus généraux. Par exemple, les arrangements tubulaires (ouverts ou fermés) peuvent être définis sur n'importe quel corps complet. Toutefois, les arguments que nous allons présenter se servent de manière cruciale de l'existence de fibrations dont la construction, que nous rappelons dans la [section 2B](#), nécessite de supposer  $K$  de valuation discrète. Pour le cas des arrangements algébriques généralisés, il est nécessaire d'imposer en plus la finitude du corps résiduel de  $K$  pour que les  $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$  soient bien des espaces rigides (voir la [note 4](#) et le troisième point de cette remarque). En caractéristique positive, ces constructions peuvent être transportées mutatis mutandis modulo les hypothèses précédentes sur  $K$ . En revanche, certains résultats d'annulation cohomologique que nous allons énoncer ne peuvent être prouvés dans ce cadre grâce aux méthodes de l'article. Nous renvoyons à la [remarque 3.4](#) pour une discussion plus précise.

(2) Se donner un arrangement tubulaire ouvert ou fermé d'ordre  $n$  revient à se donner une partie (finie)<sup>4</sup> de  $\mathcal{H}_n$  ou de  $\mathcal{H}_{n+1}$ , respectivement.

(3) Si  $m > n$ , tout arrangement tubulaire ouvert (ou fermé) d'ordre  $m$  induit un arrangement tubulaire ouvert (ou fermé) d'ordre  $n$ , appelé sa projection. Plus précisément, la projection d'un arrangement défini par une collection de voisinages tubulaires  $(\overline{H}(|\varpi|^m))_{H \in I}$  est l'arrangement défini par la collection de

4. L'hypothèse de finitude est ici redondante sous les conditions que nous avons imposées sur le corps  $K$ , car  $\mathcal{H}_n$  est fini pour tout  $n$ . Cette propriété n'est plus vraie si on raisonne sur un corps plus général dont le corps résiduel peut être infini ou peut ne pas être de valuation discrète.



voisinages tubulaires  $(\overline{H}(|\varpi|^n))_{H \in I}$ . Cela revient à considérer la projection d'une partie de  $\mathcal{H}_m$  ou de  $\mathcal{H}_{m+1}$  sur  $\mathcal{H}_n$  ou sur  $\mathcal{H}_{n+1}$ , respectivement. Cette construction s'étend bien sûr au cas d'un arrangement algébrique ou algébrique généralisé.<sup>5</sup>

(4) Une famille d'arrangements tubulaires  $(\mathcal{A}_n)_n$  telle que l'ordre de  $\mathcal{A}_n$  soit  $n$  est dite compatible si, pour tout  $m > n$ ,  $\mathcal{A}_n$  est la projection de  $\mathcal{A}_m$ . Si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$  est un arrangement algébrique généralisé, on construit par projection deux familles compatibles d'arrangements tubulaires ouverts ou fermés  $(\mathcal{A}_n)_n$  par projection. Cette construction a pour intérêt de fournir un recouvrement croissant  $\text{Int}(\mathcal{A}) = \bigcup_n \text{Int}(\mathcal{A}_n)$  pour les arrangements algébriques généralisés  $\mathcal{A}$ .

(5) Les constructions  $\text{Int}(\mathcal{A})$  (et  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  lorsque  $\mathcal{A}$  est fini) possèdent des structures naturelles d'espaces rigides analytiques sur  $K$ . Le seul cas non trivial est celui d'un arrangement algébrique généralisé, qui découle du point précédent.

(6) Plus précisément, l'espace  $\text{Int}(\mathcal{A})$  est un affinoïde ou quasi Stein si  $\mathcal{A}$  est un arrangement tubulaire fermé ou ouvert, respectivement.

**Exemple 2.3.** L'espace symétrique de Drinfeld  $\mathbb{H}_K^d$  est l'arrangement d'hyperplans généralisé  $\text{Int}(\mathcal{H})$ .

Nous allons définir le rang d'un arrangement  $\mathcal{A}$ , qui permettra de décrire la géométrie de  $\text{Uni}(\mathcal{A})$ .

**Définition 2.4.** Nous donnons la notion de rang pour des parties finies de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{H}_n$ . D'après la deuxième observation de la [remarque 2.2](#), cela induit une notion de rang pour les arrangements algébriques et tubulaires ouverts ou fermés.

- Si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ , on se donne, pour tout  $H \in \mathcal{A}$ , un vecteur  $a_H$  unimodulaire tel que  $H = \ker(l_{a_H})$ . On pose  $\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{rg}_{\mathcal{O}_K}(\sum_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_K a_H)$ .
- Si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_n$ , on se donne, pour tout  $H$  dans  $\mathcal{A}$ , un vecteur  $a_H$  unimodulaire dans  $\mathcal{O}_K^{d+1}/\varpi^n \mathcal{O}_K^{d+1}$  tel que  $H = \ker(l_{a_H})$  et  $\tilde{a}_H$  un relevé dans  $\mathcal{O}_K^{d+1}$ . On écrit<sup>6</sup>

$$\sum_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_K \tilde{a}_H = \bigoplus_{i=0}^d \varpi^{\alpha_i} \mathcal{O}_K e_i$$

pour  $(e_i)$  une base de  $\mathcal{O}_K^{d+1}$  bien choisie. On pose alors  $\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{card}\{i : \alpha_i < n\}$ . Cette quantité ne dépend pas des choix des  $a_H$  et de leur relevé. Intuitivement, le rang correspond à  $\text{rg}(\mathcal{A}) = \text{rg}_{\mathcal{O}_K/\varpi^n \mathcal{O}_K}(\sum_{H \in \mathcal{A}} (\mathcal{O}_K/\varpi^n \mathcal{O}_K) a_H)$ .

**2B. La suite spectrale associée à un arrangement.** Dorénavant, pour tout arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$ , nous verrons  $\text{Int}(\mathcal{A})$  et  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  comme des  $L$ -espaces analytiques par extension des scalaires. Si  $H$  désigne la cohomologie de de Rham ou la cohomologie d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur le site étale ou analytique, on a

$$E_1^{-r,s} = \bigoplus_{(H_i)_{0 \leq i \leq r} \in \mathcal{A}^{r+1}} H^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \text{Uni}(\{H_i\})) \Rightarrow H^{s-r}(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \text{Int}(\mathcal{A})), \quad (1)$$

5. Dans le cas des arrangements algébriques généralisés, il est nécessaire de demander à ce que  $K$  soit de valuation discrète et de corps résiduel fini pour que les projections d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  forment bien une famille finie de voisinages tubulaires.

6.  $\alpha_i$  peut être infini et dans ce cas on adopte la convention  $\varpi^\infty = 0$ .

où  $\mathcal{A}$  est un arrangement algébrique tubulaire d'ordre  $n$  ouvert ou fermé et  $H(X, Y)$  représente la cohomologie de  $X$  à support dans  $X \setminus Y$ , par un argument général de suites spectrales (voir section 2, proposition 6 et lemme 7 de [Schneider et Stuhler 1991] ainsi que les discussions qui précèdent).

Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement (algébrique, tubulaire ouvert ou fermé) et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  non vide de cardinal  $r + 1$ . Nous allons donc chercher à décrire la géométrie de  $\text{Uni}(\mathcal{B})$  suivant si  $\mathcal{A}$  est algébrique, tubulaire ouvert ou fermé. Si  $r = 0$ ,  $\text{Uni}(\mathcal{B})$  devient un espace affine dans le cas algébrique, une boule ouverte dans le cas tubulaire ouvert et une boule fermée dans le cas tubulaire fermé.

Supposons maintenant  $r \neq 0$  et posons  $t + 1 = \text{rg}(\mathcal{B})$ . Par hypothèse, on a  $t \neq 0$ . Nous allons construire en suivant [Schneider et Stuhler 1991, § 1, Proposition 6] une fibration  $f : \text{Uni}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t$ . Les fibres seront des espaces affines dans le cas algébrique, des boules ouvertes dans le cas tubulaire ouvert et des boules fermées dans le cas tubulaire fermé. Pour chaque  $H_i \in \mathcal{B}$ , choisissons un vecteur unimodulaire de  $K^{d+1}$  de la même manière que dans la définition 2.4 et écrivons  $M := \sum_{0 \leq i \leq r} \mathcal{O}_K a_i \subset M_0 := \sum_{0 \leq i \leq d} \mathcal{O}_K e_i$  où  $(e_i)$  est la base canonique de  $K^{d+1}$ . Réalisons un changement de base similaire à la définition 2.4 (licite d'après la remarque 1.2) pour obtenir des entiers positifs croissants  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq d}$  tels que  $\alpha_0 = 0$  et obtenir une décomposition  $M = \sum_{0 \leq i \leq d} \varpi^{\alpha_i} \mathcal{O}_K e_i \subset M_0 = \sum_{0 \leq i \leq d} \mathcal{O}_K e_i$ . On a alors les descriptions suivantes de  $\text{Uni}(\mathcal{B})$ , avec la convention que pour la suite on choisit un représentant unimodulaire de chaque point  $[b_0, \dots, b_d]$ , i.e., tel que  $\max_{0 \leq i \leq d} |b_i| = 1$  :

- Dans le cas algébrique,

$$\text{Uni}(\mathcal{B}) = Z_t^d := \{z = [b_0, \dots, b_d] \in \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d, \exists i \leq t, b_i \neq 0\}.$$

- Dans le cas tubulaire fermé, posons  $\beta = (\beta_i)_{0 \leq i \leq t} = (n - \alpha_i)_{0 \leq i \leq t}$  et notons

$$\text{Uni}(\mathcal{B}) = X_t^d(\beta) := \{z = [b_0, \dots, b_d] \in \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d, \exists i \leq t, |b_i| \geq |\varpi|^{\beta_i}\}.$$

- Dans le cas tubulaire ouvert, posons  $\gamma = (\gamma_i)_{0 \leq i \leq t} = (n + 1 - \alpha_i)_{0 \leq i \leq t}$  et notons

$$\text{Uni}(\mathcal{B}) = Y_t^d(\gamma) := \{z = [b_0, \dots, b_d] \in \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d, \exists i \leq t, |b_i| > |\varpi|^{\gamma_i}\}.$$

La flèche  $f$  donnée par  $[b_0, \dots, b_d] \mapsto [b_0, \dots, b_t]$  induit bien des fibrations<sup>7</sup>  $X_t^d(\beta) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t$ ,  $Y_t^d(\gamma) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t$  ainsi que  $Z_t^d \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t$ . Soient  $\mathcal{V}(\beta) = \{V(\beta)_i\}$ ,  $\mathring{\mathcal{V}}(\gamma) = \{\mathring{V}(\gamma)_i\}$  et  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  les recouvrements admissibles de  $\mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t$ , où

$$\begin{aligned} V(\beta)_i &= \left\{ z = [z_0, \dots, z_t] \in \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t, \forall j \leq t, \left| \frac{z_j}{\varpi^{\beta_j}} \right| \geq \left| \frac{z_i}{\varpi^{\beta_i}} \right| \right\}, \\ \mathring{V}(\gamma)_i &= \left\{ z = [z_0, \dots, z_t] \in \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t, \forall j \leq t, \left| \frac{z_j}{\varpi^{\gamma_j}} \right| \geq \left| \frac{z_i}{\varpi^{\gamma_i}} \right| \right\}, \\ V_i &= \{z = [z_0, \dots, z_t] \in \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^t, z_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

7. La flèche  $f$  est bien définie sur ces espaces.

Alors,  $X_t^d(\beta) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  se trivialisent sur  $\mathcal{V}(\beta)$ , de même pour  $Y_t^d(\gamma) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  sur  $\mathring{\mathcal{V}}(\gamma)$  et  $Z_t^d \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  sur  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(\beta)_i) &\cong V(\beta)_i \times \mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i), \\ f^{-1}(\mathring{V}(\gamma)_i) &\cong \mathring{V}(\gamma)_i \times \mathring{\mathbb{B}}_L^{d-t}(-\gamma_i), \\ f^{-1}(V_i) &\cong V_i \times \mathbb{A}^{d-t}, \end{aligned}$$

par le biais de l'application

$$[z_0, \dots, z_d] \mapsto [z_0, \dots, z_t] \times \left( \frac{z_{t+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_d}{z_i} \right).$$

Appelons  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  le recouvrement adapté (au cas algébrique, tubulaire ouvert ou fermé) et  $F_i$  la fibre sur  $U_i$  (soit  $\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)$  pour les tubulaires fermés,  $\mathring{\mathbb{B}}_L^{d-t}(-\gamma_i)$  pour les tubulaires ouverts,  $\mathbb{A}^{d-t}$  dans le cas algébrique). La variable sur la base  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  sera notée  $z = [z_0, \dots, z_t]$ , et celle de la fibre,  $w = (w_1, \dots, w_{d-t})$ . Sur chaque intersection<sup>8</sup>  $U_{\{i,j\}}$ , l'application de transition rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_{\{i,j\}}) & \xrightarrow{\sim} & U_{\{i,j\}} \times F_i \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{Id} \times m_{z_i/z_j} \\ f^{-1}(U_{\{i,j\}}) & \xrightarrow{\sim} & U_{\{i,j\}} \times F_j \end{array}$$

où  $m_{z_i/z_j}$  est l'homothétie de rapport  $z_i/z_j$ . On écrira  $f^*(\mathcal{V}(\beta)) = \{f^{-1}(V(\beta)_i)\}$ ,  $f^*(\mathring{\mathcal{V}}(\gamma)) = \{f^{-1}(\mathring{V}(\gamma)_i)\}$ ,  $f^*(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V_i)\}$  les recouvrements de  $X_t^d(\beta)$ ,  $Y_t^d(\gamma)$ ,  $Z_t^d$  obtenus.

Dans le cas algébrique, les intersections d'éléments du recouvrement  $f^*(\mathcal{V})$  sont des produits de copies de  $\mathbb{A}^1$  et de  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ . Dans le cas tubulaire fermé, les intersections sur  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  sont des produits de polycouronnes et de polydisques fermés.

Remarquons que si  $t = d$  et  $X_d^d(\beta) = \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d$ , la famille des  $(X_t^d(\beta))_{\beta,m,t}$  contient les espaces projectifs. Enfin, il pourra être utile de renormaliser les variables de  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  et de les réécrire sous la forme

$$\tilde{z}_i = \frac{z_i}{\varpi \beta_i}.$$

**Exemple 2.5.** Pour illustrer les constructions précédentes, décrivons ici les affinoïdes  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  lorsque  $\mathcal{A}$  est un arrangement tubulaire fermé d'ordre  $n \geq 1$  avec  $|\mathcal{A}| = 2$ . Choisir  $\mathcal{A}$  revient à se donner deux hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  différents dans  $\mathcal{H}_{n+1}$ , ou par dualité, deux vecteurs unimodulaires  $a$  et  $b$  qui n'engendrent pas la même droite dans  $(\mathcal{O}_K/\varpi^{n+1})^{d+1}$ . Quitte à réaliser un changement de variables dans  $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$  (voir la [remarque 1.2](#)), on peut trouver une base  $(e_i)$  de  $\mathcal{O}_K^{d+1}$  telle que<sup>9</sup>

$$\begin{cases} e_0 = a, e_1 = b & \text{si } a \not\equiv b \pmod{\varpi}, \\ e_0 = a, e_0 + \varpi^k e_1 = b & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Pour tout recouvrement  $\{U_i\}_{i \in S}$  par des ouverts d'un espace rigide  $X$  et toute partie finie  $I \subset S$ , on pourra noter pour simplifier  $U_I := \bigcap_{i \in I} U_i$ .

9. Notons que  $k$  est le plus grand entier  $s$  tel que  $a \equiv b \pmod{\varpi^s}$  et est par conséquent strictement inférieur à  $n + 1$ .

Nous allons raisonner sur ce système de coordonnées.

Dans le premier cas,

$$\begin{aligned}\mathring{H}_a(|\varpi^n|)^c &= \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall j \leq d, |z_j| \leq |\varpi^{-n} z_0|\}, \\ \mathring{H}_b(|\varpi^n|)^c &= \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall j \leq d, |z_j| \leq |\varpi^{-n} z_1|\}.\end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Uni}(\mathcal{A}) = \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \exists i \leq 1, \forall j \leq d, |z_i| \geq |\varpi^n z_j|\} = X_1^d(n, n)$ . Sous cette présentation, le recouvrement  $V(\beta)$  avec  $\beta = (n, n)$  correspond au recouvrement  $\{\mathring{H}_a(|\varpi^n|)^c, \mathring{H}_b(|\varpi^n|)^c\}$ .

Dans le second cas,

$$\begin{aligned}\text{Uni}(\mathcal{A}) &= \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall j \leq d, |z_j| \leq |\varpi^{-n} z_0| \text{ ou } \forall j \leq d, |z_j| \leq |\varpi^{-n}(z_0 + \varpi^k z_1)|\} \\ &= \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall j \leq d, |z_0| \geq |\varpi^n z_j| \text{ ou } \forall j \leq d, |z_1| \geq |\varpi^{n-k} z_j|\} \\ &= X_1^d(n, n-k).\end{aligned}$$

En particulier,  $V(\beta)$  avec  $\beta = (n, n-k)$  est constitué des éléments

$$\begin{aligned}\mathring{H}_a(|\varpi^n|)^c &= \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall i \leq d, |z_i| \leq |\varpi^{-n} z_0|\}, \\ \mathring{H}_{e_1}(|\varpi^{k-n}|)^c &= \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall i \leq d, |z_i| \leq |\varpi^{n-k} z_1|\}.\end{aligned}$$

Notons que les vecteurs  $a$  et  $b$  jouent un rôle symétrique. En les échangeant, on obtient pour l'union la présentation

$$\text{Uni}(\mathcal{A}) = \{z \in \mathbb{P}^d(C) : \forall j \leq d, |z_0 + \varpi^k z_1| \geq |\varpi^n z_j| \text{ ou } \forall j \leq d, |z_1| \geq |\varpi^{n-k} z_j|\} = X_1^d(n, n-k).$$

Sous cette présentation, le recouvrement  $V(\beta)$  associé est alors constitué des éléments

$$\{\mathring{H}_b(|\varpi^n|)^c, \mathring{H}_{e_1}(|\varpi^{n-k}|)^c\}.$$

### 3. Énoncés et stratégies

Dans les énoncés ci-dessous, nous utiliserons systématiquement la topologie analytique. Nous allons prouver (voir le [théorème 4.9](#), le [lemme 4.10](#), ainsi que les [théorèmes 5.1](#), [5.6](#), et [7.1](#)) :

**Théorème 3.1.** (1) *Les espaces projectifs, les fibrations  $Z_t^d$ , les arrangements tubulaires fermés et les arrangements algébriques généralisés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathcal{O}^{(r)}$ -acycliques.*

(2) *Les sections globales de  $\mathcal{O}^{(r)}$  sur les arrangements algébriques généralisés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont constantes.*

(3) *La cohomologie de  $\mathcal{O}^{(r)}$  sur  $X_t^d(\beta)$  est concentrée en degrés 0 et  $t$ . Quand  $t \neq 0$ , les sections globales sont constantes et la cohomologie en degré  $t$  s'identifie au complété  $p$ -adique de*

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \geq t+1}} \mathbb{H}_{\text{zar}}^t(\mathbb{P}_{\text{zar}, \mathcal{O}_L}^t, \mathcal{O}(-|\alpha|)) \otimes \mathcal{O}_L^{(r)}.$$

Voir le [théorème 4.9](#), le [lemme 4.10](#), le [corollaire 5.14](#) et le [théorème 7.1](#) pour le résultat suivant :

**Théorème 3.2.** (1) *Les espaces projectifs, les fibrations  $X_t^d$ , les arrangements tubulaires fermés et les arrangements algébriques généralisés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathcal{O}^{**}$ -acycliques.*

(2) *Les sections globales de  $\mathcal{O}^{**}$  sur les arrangements algébriques généralisés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont constantes.*

(3) *La cohomologie de  $\mathcal{O}^{**}$  sur  $X_t^d(\beta)$  est concentrée en degrés 0 et  $t$ . Les sections globales sont constantes quand  $t \neq 0$ .*

Le résultat suivant est une combinaison des théorèmes 6.1, 6.7, 6.10 et 7.1.

**Théorème 3.3.** (1) *Les espaces projectifs vérifient*

$$H_{\text{an}}^k(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} L^* & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) *La fibration  $f : X_t^d(\beta) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  induit une décomposition en produit direct pour  $s > 0$  :*

$$H_{\text{an}}^*(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m) \cong H_{\text{an}}^*(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^{**}) \times H_{\text{an}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathbb{G}_m).$$

*De plus, les sections globales sont constantes quand  $t \neq 0$ .*

(3) *Les arrangements tubulaires fermés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathbb{G}_m$ -acycliques et*

$$\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) / L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A})) = \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0.$$

(4) *Les arrangements algébriques généralisés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathbb{G}_m$ -acycliques et*

$$\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) / L^* = \mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0.$$

Pour obtenir ces résultats, il faut d'abord calculer la cohomologie de  $\mathcal{O}^{(r)}$  sur  $X_t^d(\beta)$  (point 3 du [théorème 3.1](#)) grâce aux résultats d'acyclicité de [[van der Put 1982](#)] (voir également le [théorème 3.5](#)) et au calcul de la cohomologie de Čech sur le recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  (voir le [théorème 5.1](#)). Plus précisément, la fibration  $f$  permet de relier le complexe de Čech de  $X_t^d(\beta)$  aux complexes de  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  pour les faisceaux tordus  $\mathcal{O}^{(r)}(k)$  (point 1 du [théorème 3.1](#) et [corollaire 5.3](#) pour un énoncé plus fin). Le résultat se déduit de la cohomologie des faisceaux  $\mathcal{O}(k)$  sur les espaces projectifs algébriques sur  $\mathcal{O}_L$ .

Le résultat d'acyclicité pour les arrangements tubulaires fermés découle de l'annulation de la cohomologie de  $X_t^d(\beta)$  à partir du degré  $t + 1$  et de l'argument combinatoire du [lemme 5.7](#) qui remplace la suite spectrale (1).

Le transfert des énoncés sur  $\mathcal{O}^{(r)}$  à  $\mathcal{O}^{**}$  résulte de l'argument sur les logarithmes tronqués du [lemme 5.13](#). Pour le faisceau  $\mathbb{G}_m$ , on calcule encore la cohomologie de Čech des fibrations  $X_t^d(\beta)$  sur le recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ . Mais on a pour tout  $I \subset \llbracket 0, t \rrbracket$  une décomposition

$$\mathcal{O}^*(f^{-1}(V(\beta)_I)) = L^* \mathcal{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \times \left\langle \frac{z_i}{z_j} : i, j \in I \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$$

qui induit les décompositions de la cohomologie du point 2 du [théorème 3.3](#) (voir [théorème 6.1](#)) et celle des sections inversibles au [théorème 3.3](#) point 3 (voir [corollaire 5.14](#)). Nous notons aussi que le complexe

induit par les facteurs directs  $\langle z_i/z_j : i, j \in I \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$  est celui apparaissant en géométrie algébrique, ce qui permet d'établir le point 1 du [théorème 3.3](#) par comparaison. D'après ce qui précède, on sait que la cohomologie de  $X_t^d(\beta)$  s'annule à partir du degré  $t + 1$ , ce qui nous donne l'acyclicité des arrangements tubulaires fermés pour  $\mathbb{G}_m$ , toujours grâce au lemme combinatoire [5.7](#).

Pour ce qui est des arrangements algébriques généralisés  $\mathcal{A}$ , ils peuvent être approximés par des arrangements tubulaires fermés compatibles  $\mathcal{A}_n$  d'ordre  $n$ . On dispose pour tout  $s > 0$  de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \varprojlim_n \mathbb{H}_{\text{an}}^{s-1}(\text{Int}(\mathcal{A}_n), \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) \rightarrow \varprojlim_n \mathbb{H}_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}_n), \mathbb{G}_m) \rightarrow 0.$$

Le calcul dans le cas tubulaire fermé induit l'annulation de la cohomologie de  $\mathbb{G}_m$  pour  $s > 1$  et l'égalité  $\mathbb{H}_{\text{an}}^1(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) = \mathbb{R}^1 \varprojlim_n \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n))$ . Il s'agit alors de prouver  $\mathbb{R}^1 \varprojlim_n \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) = 0$ . D'après la décomposition au [théorème 3.3](#) point 3 et la [proposition 4.5](#), il suffit de trouver une constante  $c$  indépendante de  $n$  pour laquelle on a l'inclusion

$$\mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-c})).$$

Pour établir cette identité, on raisonne par récurrence sur le rang de  $\text{Int}(\mathcal{A}_n)$  et on se ramène à montrer (voir [corollaire 5.10](#) et [lemme 5.11](#) pour voir que cette condition est bien suffisante) que l'image de la flèche

$$\mathbb{H}_{\text{an}}^{\text{rg}(\mathcal{A}_n)-1}(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{an}}^{\text{rg}(\mathcal{A}_n)-1}(\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathcal{O}^{(r)})$$

est contenue dans  $\varpi \mathbb{H}_{\text{an}}^{\text{rg}(\mathcal{A}_n)-1}(\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathcal{O}^{(r)})$ . Grâce au [théorème 3.1](#) point 1, on peut voir ces groupes de cohomologie comme des sous-groupes des fonctions bornées de polycouronnes (voir [remarque 5.5](#)) dont les flèches de restriction sont explicites et bien comprises d'après le [lemme 4.2](#). Le résultat découle alors de ce cas particulier.

Étudier la cohomologie des arrangements tubulaires fermés via les espaces  $X_t^d(\beta)$  est semblable à la stratégie de [[Schneider et Stuhler 1991](#)]. Par exemple, le point 3 du [théorème 3.1](#) imite l'axiome d'homotopie de [[Schneider et Stuhler 1991](#), §2]. S'intéresser à  $\mathcal{O}^{(r)}$  puis à  $\mathcal{O}^{**}$  et enfin à  $\mathbb{G}_m$  rappelle la preuve de [[van der Put 1982](#), Theorem 3.25]. L'argument de passage à la limite s'inspire de [[Colmez et al. 2020a](#), section 1.2].

**Remarque 3.4.** — Tous les calculs sur la cohomologie de Čech qui apparaissent dans la preuve de ces résultats peuvent être réalisés quand  $K$  est de caractéristique  $p$ . Cette observation suggère que ces résultats peuvent aussi être vérifiés dans ce cadre. Toutefois, nous ne voyons pas comment adapter la preuve du lemme crucial [5.13](#) dans ce cas. En particulier, nous ne sommes pas en mesure d'établir un analogue du [théorème 3.2](#) ainsi que de sa conséquence le [théorème 3.3](#) en caractéristique  $p$ .

— Nous avons choisi de ne pas étudier les arrangements tubulaires ouverts, même si certains raisonnements semblent pouvoir être adaptés. En fait, ces arrangements peuvent s'écrire comme des unions croissantes d'arrangements tubulaires fermés où l'on s'est autorisé des ordres rationnels. Si l'on pouvait établir des résultats similaires pour ces généralisations (la combinatoire des unions est similaire dans ce cadre), on pourrait alors grâce à la suite exacte [\(8\)](#) montrer que la cohomologie des faisceaux étudiés est



concentrée en degrés 0 et 1. Un travail futur pourrait chercher à savoir si on a encore l'acyclicité pour les intersections des arrangements tubulaires ouverts lorsque le corps  $L$  est sphériquement clos.

Tous nos calculs utilisent de manière cruciale le résultat suivant de van der Put [1982, Theorems 3.10, 3.15, 3.25], décrivant la cohomologie de quelques affinoïdes simples.

**Théorème 3.5** (van der Put). *Les produits de polycouronnes et polydisques fermés<sup>10</sup> n'ont pas de cohomologie analytique en degré strictement positif pour*

- (1) *les faisceaux constants,*
- (2) *le faisceau  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,*
- (3) *le faisceau  $\mathcal{O}^+$  en dimension 1,*
- (4) *le faisceau  $\mathbb{G}_m$ .*

**Remarque 3.6.** Un théorème de Bartenwerfer [1982] affirme que les boules fermées sont aussi acycliques pour le faisceau  $\mathcal{O}^+$ , en toute dimension. Nous ne savons pas si ce résultat est encore vrai pour les couronnes (sauf en dimension 1, comme indiqué). Si c'était le cas, beaucoup des résultats à suivre pourraient aussi être énoncés pour  $\mathcal{O}^+$ .

#### 4. Cas des arrangements algébriques

Nous traitons d'abord le cas des arrangements algébriques. L'énoncé suivant est un analogue du corollaire 5.12 dans le cas particulier des polycouronnes où le résultat est direct. Pour sa généralisation au corollaire 5.12, nous nous ramenons à ce cas particulier grâce au point technique du corollaire 5.4. Une fois ce résultat établi, les méthodes dans le cas algébrique sont relativement similaires au cas algébrique généralisé.

**Lemme 4.1.** *On considère le produit de polycouronnes et de polydisques*

$$U = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{A}_{\text{rig}, L}^d : \forall i, |\varpi|^{-r_i} \geq |x_i| \geq |\varpi|^{s_i}\}$$

où  $(r_i)_i$  et  $(s_i)_i$  sont des entiers.<sup>11</sup> De même, on considère

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{A}_{\text{rig}, L}^d : \forall i, |\varpi|^{-r_i-1} \geq |x_i| \geq |\varpi|^{s_i+1}\}.$$

Alors, on a

$$\mathcal{O}^+(V) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^+(U).$$

*Démonstration.* La description des espaces  $U$  et  $V$  nous fournit un système de coordonnées commun  $(X_i)_i$ . La famille de monômes

$$\left( \prod_{i: v_i \geq 0} (\varpi^{r_i} X_i)^{v_i} \prod_{j: v_j < 0} \left( \frac{\varpi^{s_j}}{X_j} \right)^{-v_j} \right)_{v \in E}$$

10. Plus généralement, les polydisques généralisés au sens de [van der Put 1982, §3.9].

11. On s'autorisera  $s_i = \infty$  pour les facteurs isomorphes à une boule fermée.

forme une base de Banach <sup>12</sup> de  $\mathcal{O}(U)$  avec

$$E := \{v \in \mathbb{Z}^d : v_j \geq 0 \text{ si } s_j = \infty\}.$$

Il en est de même pour la famille

$$\left( \prod_{i:v_i \geq 0} (\varpi^{r_i+1} X_i)^{v_i} \prod_{j:v_j \leq 0} \left( \frac{\varpi^{s_j+1}}{X_j} \right)^{v_j} \right)_{v \in E}$$

sur  $\mathcal{O}(V)$ . Mais on remarque que pour tout  $v$  (avec  $|v| = \sum_j v_j$ ),

$$\prod_{i:v_i \geq 0} (\varpi^{r_i+1} X_i)^{v_i} \prod_{j:v_j \leq 0} \left( \frac{\varpi^{s_j+1}}{X_j} \right)^{v_j} = \varpi^{|v|} \prod_{i:v_i \geq 0} (\varpi^{r_i} X_i)^{v_i} \prod_{j:v_j \leq 0} \left( \frac{\varpi^{s_j}}{X_j} \right)^{v_j}.$$

Il est alors aisé de voir que si une section à puissance bornée de  $V$  n'a pas de terme constant, sa restriction est dans  $\varpi \mathcal{O}^+(U)$ .  $\square$

Nous avons une version relative de ce résultat :

**Lemme 4.2.** *Soit  $Y$  un affinoïde sur  $L$  et soient  $U, V$  les affinoïdes définis dans le lemme précédent. On a alors*

$$\mathcal{O}^+(Y \times V) \subset \mathcal{O}^+(Y) + \varpi \mathcal{O}^+(Y \times U).$$

*Démonstration.* C'est le même argument que pour le lemme 4.1 et cela s'obtient en comparant les développements uniques en série sur les deux espaces  $U, V$  :

**Lemme 4.3.** *Soit  $Y = \text{Sp}(A)$  un affinoïde réduit sur  $L$ , et soit  $U$  comme précédemment. Toute section de  $Y \times U$  admet une écriture unique*

$$\sum_v f_v Z^v \quad \text{avec } f_v \in \mathcal{O}(Y) \text{ et } \|f_v\|_Y \|Z^v\|_U \rightarrow 0$$

où la variable  $v$  parcourt l'ensemble des vecteurs <sup>13</sup> de  $\mathbb{Z}^d$  tels que  $v_i \geq 0$  quand  $s_i = \infty$ . De plus, la norme spectrale vérifie l'identité  $\|\sum_v f_v Z^v\|_{Y \times U} = \max_v \|f_v\|_Y \|Z^v\|_U$ .

*Démonstration.* On commence par établir deux identités classiques sur  $\ell_\infty^0(\mathcal{O}_L)$ . Donnons-nous une  $\mathcal{O}_L$ -algèbre plate normée complète, alors les flèches naturelles <sup>14</sup>  $\ell_\infty^0(\mathcal{O}_L) \rightarrow \ell_\infty^0(B)$  et  $\ell_\infty^0(B) \rightarrow$

12. Rappelons ici cette notion. Pour cela, considérons  $A$  une  $L$ -algèbre (ou une  $\mathcal{O}_L$ -algèbre) normée complète et  $\ell_\infty^0(A)$  l'ensemble des suites à valeurs dans  $A$  dont le terme général tend vers 0 muni de la norme  $\|(a_n)_n\|_\infty := \max_n |a_n|$ . Une base de Banach d'un  $A$ -module normé complet  $M$  est une famille  $(e_n)_n \in M^{\mathbb{N}}$  telle que l'application  $(a_n)_n \in \ell_\infty^0(A) \mapsto \sum a_n e_n \in M$  est bien définie et réalise une isométrie entre les espaces  $\ell_\infty^0(A)$  et  $M$ .

13. C'est-à-dire que  $v \in E$  en reprenant les notations de la preuve du lemme 4.1.

14. Décrivons la topologie sur le module  $B[1/\varpi]$ . Étant donné une norme sur  $B$  définissant la topologie sur cette algèbre, celle-ci peut être prolongée de manière unique en une norme sur  $B[1/\varpi]$  qui vérifie la relation  $\|b\|_{B[1/\varpi]} = |\varpi^{-k}| \|b \varpi^k\|_B$  pour  $b \in \varpi^{-k} B \subset B[1/\varpi]$  (ne dépend pas de  $k$ ). Cela permet de définir la topologie sur  $B[1/\varpi]$  où toute base de voisinage de 0 dans  $B$  définit aussi une base de voisinage de 0 dans  $B[1/\varpi]$ . La complétude de  $B[1/\varpi]$  se déduit alors de celle de  $B$ .

$\ell_\infty^0(B[1/\varpi])$  induisent des isomorphismes

$$\ell_\infty^0(\mathcal{O}_L) \widehat{\otimes} B \cong \ell_\infty^0(B) \quad \text{et} \quad \ell_\infty^0\left(B\left[\frac{1}{\varpi}\right]\right) \cong \ell_\infty^0(B)\left[\frac{1}{\varpi}\right]. \quad (2)$$

Nous commençons par le deuxième. Vus comme des sous-groupes de  $B[1/\varpi]^{\mathbb{N}}$ , on a une inclusion évidente entre les modules  $\ell_\infty^0(B)[1/\varpi] \subset \ell_\infty^0(B[1/\varpi])$ . Prouvons celle en sens opposé. Une suite  $(u_n)_n$  dont le terme général tend vers 0 dans  $B[1/\varpi]$  est à valeurs dans  $B$  à partir d'un certain rang  $N_0$ . En particulier, on peut trouver un entier  $k$  assez grand tel que  $\varpi^k u_n \in B$  pour  $n \leq N_0$  et  $(\varpi^k u_n)_n \in \ell_\infty^0(B)$ , ce qui prouve l'inclusion voulue.

Intéressons-nous maintenant à la première identité. On a une flèche naturelle  $\ell_\infty^0(\mathcal{O}_L) \otimes B \rightarrow \ell_\infty^0(B)$  et nous voulons montrer que c'est un isomorphisme lorsqu'on complète. Les suites à support fini  $\ell^c(\mathcal{O}_L) \subset \ell_\infty^0(\mathcal{O}_L)$  et  $\ell^c(B) \subset \ell_\infty^0(B)$  forment des sous-groupes denses qui vérifient  $\ell^c(B) \cong \ell^c(\mathcal{O}_L) \otimes B$  et cet isomorphisme s'étend par continuité.

Revenons à la situation de l'énoncé. Par hypothèse de réduction sur  $Y$ ,  $A^+$  est un anneau de définition<sup>15</sup> de  $A$ . Ainsi, on a

$$\mathcal{O}(Y \times U) = (A^+ \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}^+(U)) \left[ \frac{1}{p} \right].$$

Les identités (2) montrent qu'une base de Banach de  $\mathcal{O}^+(U)$  définit aussi une base de Banach sur  $\mathcal{O}(Y \times U)$ . On en déduit l'existence et l'unicité de l'écriture en somme voulue.

Prouvons l'égalité pour la norme spectrale. D'après la discussion précédente, développons une section sous la forme<sup>16</sup>  $f = \sum_\nu f_\nu Z^\nu / \|Z^\nu\|$  et appelons  $\pi : Y \times U \rightarrow Y$  la projection. Pour tout  $y \in Y(C)$ , la norme spectrale sur  $\pi^{-1}(y)$  est donnée par  $\max_\nu (|f_\nu(y)|)$ ; voir le cas d'un corps. La norme spectrale totale vérifie  $\|f\|_{Y \times U} = \max_y \|f\|_{\pi^{-1}(y)} = \max_y \max_\nu (|f_\nu(y)|) = \max_\nu (|f_\nu|)$  et on en déduit l'égalité voulue.  $\square$

Nous avons aussi un résultat similaire pour les fonctions inversibles des couronnes relatives.

**Lemme 4.4.** *Soient  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(s_i)_{i \in I}$  et  $(r_i)_{i \in I}$  des nombres rationnels tels que  $s_i \geq r_i$  pour tout  $i$ ,  $\mathrm{Sp}(A)$  un  $L$ -affinoïde réduit et connexe, et soit  $D$  la polycouronne*

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}_L^n : |\varpi|^{s_i} \leq |x_i| \leq |\varpi|^{r_i} \text{ si } i \in I\}.$$

Alors

$$\mathcal{O}^*(D \times \mathrm{Sp}(A)) = \mathcal{O}^*(\mathrm{Sp}(A)) \mathcal{O}^{**}(D \times \mathrm{Sp}(A)) \times \langle x_i : i \in I \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}.$$

*Le résultat reste vrai si la polycouronne  $D$  est ouverte.*

*Démonstration.* Supposons vrai le cas d'une couronne fermée et montrons le résultat dans le cas d'une couronne ouverte. On se donne un recouvrement croissant  $D = \bigcup_n D_n$  par des couronnes fermées, et on

15. C'est-à-dire que  $A^+$  est une  $\mathcal{O}_L$ -algèbre topologique plate et  $p$ -adiquement complète telle que  $A$  est homéomorphe à  $A^+[1/\varpi]$  (voir note 14 pour la topologie sur  $A^+[1/\varpi]$ ).

16. On rappelle l'égalité  $\|Z^\nu\| = \prod_{i:\nu_i \geq 0} \varpi^{\nu_i r_i} \prod_{j:\nu_j < 0} \varpi^{-\nu_j s_j}$  pour  $\nu \in E$ .

note pour simplifier  $D_A = \text{Sp } A \times D$  (idem pour  $D_{n,A}$ ). On a alors par hypothèse que

$$\mathcal{O}^*(D_A) = \bigcap_n \mathcal{O}^*(D_{n,A}) = \left( \bigcap_n A^* \mathcal{O}^{**}(D_{n,A}) \right) \times \langle x_i : i \in I \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}.$$

Il s'agit d'établir  $\bigcap_n A^* \mathcal{O}^{**}(D_{n,A}) = A^* \mathcal{O}^{**}(D_A)$ .

Prenons  $u$  dans cette intersection et écrivons  $u = \lambda_n(1 + h_n)$  dans chaque  $A^* \mathcal{O}^{**}(D_{n,A})$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $n > n_0$ , on observe que

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_0}} = \frac{1 + h_{n_0}}{1 + h_n} \in \mathcal{O}^{**}(D_{n_0,A}) \cap A^* = A^{**},$$

donc  $u/\lambda_{n_0} = (\lambda_n/\lambda_{n_0})(1 + h_n) \in \bigcap_n \mathcal{O}^{**}(D_{n,A}) = \mathcal{O}^{**}(D_A)$  et ainsi  $u \in \lambda_{n_0} \mathcal{O}^{**}(D_A)$ . L'autre inclusion étant claire, on en déduit le résultat pour les couronnes ouvertes.

On suppose maintenant la couronne  $D$  fermée. Par récurrence sur  $n = \dim D$ , on se ramène au cas  $n = 1$  et à la distinction  $I = \{1\}$  ou  $I = \emptyset$ . En effet, en dimension supérieure,  $D$  se décompose comme un produit de couronnes fermées  $D = D' \times D''$  obtenu en projetant sur la dernière coordonnée pour  $D''$ , et sur les autres pour  $D'$ . On a, par hypothèse de récurrence sur  $D''$ ,

$$\mathcal{O}^*(D_A) = \mathcal{O}^*(D'_A) \mathcal{O}^{**}(D_A) \times \langle x_i : i \in I \cap \{n\} \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}.$$

Par hypothèse de récurrence pour  $D'$ , on a  $\mathcal{O}^*(D'_A) = A^* \mathcal{O}^{**}(D'_A) \times \langle x_i : i \in I \text{ et } i < n \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$ . On en déduit le résultat voulu.

Supposons  $\dim D = 1$  et notons  $x$  la variable sur  $D$ . Commençons par le cas où  $A$  est une extension complète du corps  $L$ . Étant donné une fonction  $f$  inversible sur  $D_A$ , on peut trouver, d'après [Fresnel et van der Put 2004, Corollary 2.2.4], une fraction rationnelle  $g$  n'ayant aucun pôle ni zéro sur  $D_A(\hat{A}) \subset \hat{A}$  telle que  $f/g \in \mathcal{O}^{**}(D_A)$ . Il est alors suffisant de prouver l'existence d'un entier relatif  $k$  et d'une constante  $\lambda \in A^*$  telle que  $(g/\lambda x^k) \in \mathcal{O}^{**}(D_A)$ . Écrivons  $g$  en un produit de monômes  $c \prod_{m \in M} (x - m)^{\alpha_m}$  avec  $M \subset \hat{A}$ , et décomposons l'ensemble en  $M = M^+ \amalg M^-$  avec

$$M^+ = \{m \in M : |m| > |\varpi|^{r_1}\} \quad \text{et} \quad M^- = \{m \in M : |m| < |\varpi|^{s_1}\}.$$

Comme le groupe de Galois absolu de  $A$  agit par isométrie sur  $\hat{A}$ , on a  $\prod_{m \in M^+} m^{\alpha_m} \in A$ . De plus, on observe les relations

$$\begin{aligned} (x - m)/(-m) &= 1 - x/m \in \mathcal{O}^{**}(D_{\hat{A}}) \quad \text{si } m \in M^+, \\ (x - m)/x &= 1 - m/x \in \mathcal{O}^{**}(D_{\hat{A}}) \quad \text{si } m \in M^-. \end{aligned}$$

On pose alors  $k := \sum_{m \in M^-} \alpha_m$  et  $c \prod_{m \in M^+} (-m)^{\alpha_m} \in A$  de telle manière que

$$\frac{g}{\lambda x^k} \in \mathcal{O}^{**}(D_{\hat{A}}) \cap \mathcal{O}(D_A) = \mathcal{O}^{**}(D_A),$$

ce qui établit le cas d'un corps.

Revenons au cas général et montrons qu'il découle du cas particulier des corps. Soit  $u$  une section inversible de  $D_A$ , alors pour tout  $z \in \mathrm{Sp}(A)$  on a une décomposition

$$u(z) = \lambda_z(1 + h_z)x^{\beta_z} \in \mathcal{O}^*(\mathrm{Sp}(K(z)) \times D) = \mathcal{O}^*(D_z) \quad (3)$$

avec  $\lambda_z \in K(z)^*$ ,  $h_z \in \mathcal{O}^{++}(D_z)$  et  $\beta_z \in \mathbb{Z}$ . Si  $I = \emptyset$ , on a  $\beta_z = 0$  pour tout  $z$ . Sinon, nous montrons que la fonction  $z \mapsto \beta_z$  est continue sur  $\mathrm{Sp} A$ , d'où localement constante. Soit  $z_0 \in \mathrm{Sp} A$  fixé, quitte à multiplier  $u$  par  $x^{-\beta_{z_0}}$ , on peut supposer  $\beta_{z_0} = 0$ . On écrit  $u$  comme une somme grâce au [lemme 4.3](#), soit

$$a_0 + \sum_{v>0} a_v \left(\frac{x}{\varpi^r}\right)^v + \sum_{v>0} a_{-v} \left(\frac{\varpi^s}{x}\right)^v = a_0 + \tilde{u}$$

avec  $a_v \rightarrow 0$  pour le filtre des parties finies. Si  $I = \emptyset$ , on a  $a_v = 0$  si  $v < 0$ . Notons que la décomposition  $\sum_v a_v(z_0)x^v = \lambda_{z_0}(1 + h_{z_0})$  entraîne

$$a_0(z_0) \in \lambda_{z_0}K(z_0)^{**} \quad \text{et} \quad a_v(z_0) \in \lambda_{z_0}K(z_0)^{++} \quad (4)$$

pour tout  $v \neq 0$ . On peut trouver un voisinage affinoïde  $U$  de  $z_0$  dans  $\mathrm{Sp} A$  où  $\lambda_{z_0}$  se relève en un élément inversible  $\tilde{\lambda} \in \mathcal{O}^*(U)$ . Soit  $N > 0$  tel que  $a_v \in \tilde{\lambda}\mathcal{O}^{++}(U)$  pour tout  $|v| > N$ , et on fixe  $\varepsilon < 1$  dans  $p^{\mathbb{Q}}$  tel que  $|a_0(z_0)/\lambda_{z_0} - 1| \leq \varepsilon$  et  $|a_v(z_0)/\lambda_{z_0}| \leq \varepsilon$  pour tout  $|v| \leq N$ . Considérons l'ouvert affinoïde  $V$  de  $U$  donné par

$$V := \left\{ z \in U : \left| \frac{a_0(z)}{\tilde{\lambda}} - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{a_v(z)}{\tilde{\lambda}} \right| \leq \varepsilon \quad \forall |v| \leq N \right\}.$$

Alors  $z_0 \in V$  pour  $\varepsilon$  assez proche de 1 d'après (4). On a dans ce cas  $a_0 \in \mathcal{O}^*(V)$  avec  $|a_0|_V = |\tilde{\lambda}|$ , et  $a_v/\tilde{\lambda}$  de même que  $a_v/a_0$  sont dans  $\mathcal{O}^{++}(V)$  pour tout  $v \in \mathbb{Z}$ . On en déduit que la restriction de  $u$  à la couronne  $D_V = V \times D$  s'écrit sous la forme  $u = a_0(1 + \tilde{u}/a_0)$  avec  $a_0 \in \mathcal{O}^*(V)$  et  $\tilde{u}/a_0 \in \mathcal{O}^{++}(D_V)$ . Cela montre, par unicité de  $\beta_z$  dans (3), que pour tout  $z \in V$  on a  $\beta_z = 0$  comme voulu. Ainsi,  $z \mapsto \beta_z$  est constante sur les ouverts d'un recouvrement admissible, et donc constante par connexité de  $\mathrm{Sp} A$ .

Supposons maintenant que  $\beta_z = 0$  pour tout  $z \in \mathrm{Sp} A$ . L'argument précédent montre que pour tout  $z \in \mathrm{Sp} A$ , on a  $a_0(z) \neq 0$  et  $\tilde{u}/a_0(z) \in \mathcal{O}^{++}(D_z)$ . Donc, on a  $a_0 \in A^*$  et  $\tilde{u}/a_0 \in \mathcal{O}^{++}(D_A)$ , ce qui donne la décomposition voulue,

$$u = a_0 \left( 1 + \frac{\tilde{u}}{a_0} \right) \in A^* \mathcal{O}^{**}(D_A). \quad \square$$

Le résultat intermédiaire au [lemme 4.2](#) est utile au vu du point technique général suivant.

**Proposition 4.5.** *Soit  $X = \bigcup_n U_n = \bigcup_n \mathrm{Sp}(A_n)$  une réunion croissante de  $L$ -affinoïdes. Supposons l'existence d'une constante  $c$  indépendante de  $n$  telle que*

$$\mathcal{O}^+(U_{n+c}) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^+(U_n). \quad (5)$$

Alors les sections globales des faisceaux  $\mathcal{O}^+$ ,  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$  et  $L^* \mathcal{O}^{**}$  sont constantes et on a

$$\mathbf{R}^1 \varprojlim_n \mathcal{F}(U_n) = 0$$

pour  $\mathcal{F} = \mathcal{O}^+, \mathcal{O}^{(r)}, \mathcal{O}^{**}, L^* \mathcal{O}^{**}$ .

Avant de montrer ce résultat clé, commençons par quelques commentaires sur les hypothèses de l'énoncé et sur les foncteurs dérivés de la limite projective. La preuve sera en fait une application du lemme plus général 4.7.

Il est utile d'observer que les conclusions de la proposition sont encore vraies quand on remplace le faisceau  $\mathcal{O}^+$  par  $\mathcal{O}^{++}$  et  $\mathcal{O}_L$  par  $\mathfrak{m}_L$  dans l'équation (5). En fait, cela découle de l'observation suivante.

**Proposition 4.6.** *Soit  $X = \bigcup_n U_n = \bigcup_n \text{Sp}(A_n)$  une réunion croissante de  $L$ -affinoïdes. Soit  $c$  un entier et  $0 < r$ , on a alors les implications*

$$\begin{aligned} \forall n > 0, \mathcal{O}^+(U_{n+c}) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^+(U_n) &\Rightarrow \forall n > 0, \mathcal{O}^{(r)}(U_{n+2c}) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(U_n), \\ \forall n > 0, \mathcal{O}^{(r)}(U_{n+c}) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(U_n) &\Rightarrow \forall n > 0, \mathcal{O}^+(U_{n+2c}) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^+(U_n). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Les preuves des deux implications sont quasiment identiques et nous ne traiterons que la première. De plus, quitte à multiplier par une puissance de  $\varpi$ , on peut supposer que  $|\varpi| < r \leq 1$ .

Prenons  $f$  dans  $\mathcal{O}^{(r)}(U_{n+2c})$  et donc dans  $\mathcal{O}^+(U_{n+2c})$  par hypothèses sur  $r$ . En appliquant deux fois l'hypothèse, on a la chaîne d'inclusions

$$\mathcal{O}^+(U_{n+2c}) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^+(U_{n+c}) \subset \mathcal{O}_L + \varpi^2 \mathcal{O}^+(U_n) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(U_n).$$

Ainsi, la fonction  $f$  s'écrit  $f = \lambda + \varpi \tilde{f}$  avec  $\tilde{f} \in \mathcal{O}^{(r)}(U_n)$  et  $\lambda \in \mathcal{O}_L$ . En particulier,  $\lambda = f - \varpi \tilde{f} \in \mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}^{(r)}(U_n) = \mathcal{O}_L^{(r)}$  et on en déduit la décomposition voulue.  $\square$

Décrivons les quelques propriétés des foncteurs dérivés de la limite projective que nous allons utiliser. Pour  $A$  un anneau, <sup>17</sup>  $I$  un ensemble ordonné filtré, la catégorie des systèmes projectifs en  $A$ -modules indexés par  $I$  est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs (voir [Jensen 1972, paragraphe 1]), et le foncteur « limite projective » admet des foncteurs dérivés à droite que l'on notera  $\mathbf{R}^i \varprojlim_{j \in I}$ .

Dans toute la suite, nous n'étudierons que des systèmes projectifs sur  $I = \mathbb{N}$ . Un des résultats les plus importants dans ce cas est l'annulation de la plupart des foncteurs dérivés [Jensen 1972, théorème 2.2] :

$$\forall i \geq 2, \mathbf{R}^i \varprojlim_n = 0. \quad (6)$$

On peut de plus calculer le premier foncteur dérivé (d'après [Jensen 1972, remarque après le théorème 2.2]) et ce dernier s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \varprojlim_n M_n \rightarrow \prod_n M_n \xrightarrow{\delta} \prod_n M_n \rightarrow \mathbf{R}^1 \varprojlim_n M_n \rightarrow 0 \quad (7)$$

avec  $\delta((m_n)_n) = (m_n - \varphi_{n+1}(m_{n+1}))_n$ , où  $\varphi_{n+1} : M_{n+1} \rightarrow M_n$  est une des fonctions de transition du système projectif. Par abus, les éléments de  $\prod_n M_n$  seront appelés cocycles et ceux dans  $\text{Im } \delta$  seront des cobords.

17. Au vu de la propriété d'invariance décrite dans [Jensen 1972, remarque 1.10], on pourra toujours supposer  $A = \mathbb{Z}$ .



Précisons la situation dans laquelle nous allons appliquer ces résultats. Prenons  $X$  un espace rigide,  $\mathcal{U} = \{U_n\}$  un recouvrement admissible croissant par des ouverts affinoïdes et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ . En explicitant le complexe de Čech sur ce recouvrement, on obtient grâce à la suite exacte (7) les identifications

$$\check{H}^0(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \varprojlim_n \mathcal{F}(U_n) \quad \text{et} \quad \check{H}^1(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathbb{R}^1 \varprojlim_n \mathcal{F}(U_n).$$

On peut aussi exprimer la cohomologie de  $X$  en fonction de celle des ouverts  $U_n$ . Plus précisément, la composition des foncteurs  $\Gamma$  et  $\varprojlim_n$  nous fournit une suite spectrale

$$E_2^{i,j} = \mathbb{R}^i \varprojlim_n H_{\text{an}}^j(U_n, \mathcal{F}|_{U_n}) \Rightarrow H_{\text{an}}^{i+j}(X, \mathcal{F})$$

qui dégénère d'après le résultat d'annulation (6). On obtient une suite exacte pour tout  $s$  (avec pour convention  $H_{\text{an}}^{-1}(U_n, \mathcal{F}|_{U_n}) = 0$ ) :

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \varprojlim_n H_{\text{an}}^{s-1}(U_n, \mathcal{F}|_{U_n}) \rightarrow H_{\text{an}}^s(X, \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_n H_{\text{an}}^s(U_n, \mathcal{F}|_{U_n}) \rightarrow 0. \quad (8)$$

Comme dans le raisonnement précédent, on peut encore interpréter cette suite exacte comme résultant de la dégénérescence de la suite spectrale de Čech sur le recouvrement  $\mathcal{U}$  grâce à (6).

Nous allons maintenant prouver l'annulation de  $\mathbb{R}^1 \varprojlim_n M_n$  pour des systèmes projectifs  $(M_n)_n$  particuliers.

**Lemme 4.7.** *Soit une suite décroissante de groupes abéliens complets  $(G_n)_n$  dont la topologie est induite par des bases de voisinage formées de sous-groupes ouverts  $(G_n^{(i)})_i$  avec  $G_n = G_n^{(0)}$ . Supposons  $G_{n+1}^{(i)} \subset G_n^{(i)}$  pour tous  $i, n$  (en particulier, les inclusions sont continues).*

*S'il existe un sous-groupe  $H \subset \bigcap_n G_n$  fermé dans chaque  $G_n$  (i.e.,  $H = \bigcap_i H + G_n^{(i)}$  pour tout  $n$ ) vérifiant*

$$G_{n+c}^{(i)} \subset H + G_n^{(i+1)} \quad (9)$$

*pour une constante  $c$  indépendante de  $i$  et  $n$ , alors*

$$\bigcap_n G_n = \varprojlim_n G_n = H \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^1 \varprojlim_n G_n = 0.$$

*Démonstration.* On veut déterminer  $\varprojlim_n G_n$  et donc établir l'inclusion  $\bigcap_n G_n \subset H$ , l'autre étant vérifiée par hypothèse. D'après (9), on vérifie aisément par récurrence l'inclusion  $G_{cn} \subset H + G_0^{(n)}$  pour tout  $n$ , d'où

$$\bigcap_n G_{cn} \subset \bigcap_n H + G_0^{(n)} = H$$

par hypothèse de fermeture de  $H$ .

Calculons maintenant le groupe  $\mathbb{R}^1 \varprojlim_n G_n$ . Prenons un cocycle  $(f_n)_n$  et montrons que c'est un cobord. Toujours d'après (9), on peut trouver par récurrence une suite<sup>18</sup>  $(h_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n, k$  et

18. Il suffit de montrer l'inclusion  $G_{n+kc+r}^{(i)} \subset G_n^{(i+k)} + H$ . Comme on a l'inclusion  $G_{n+r}^{(i+k)} \subset G_n^{(i+k)}$ , on peut supposer  $r = 0$ . Quand  $k = 1$ , le résultat est exactement l'hypothèse (9). Supposons, pour tous  $i$  et  $n$ , le résultat vrai pour un entier  $k$  fixé,

$r < c$ , on a

$$f_{n+kc+r} - h_{n+kc+r} \in G_n^{(k)}.$$

Dans ce cas, la somme  $\sum_{m \geq n} f_m - h_m$  converge dans  $G_n$  pour tout entier  $n$  et vérifie

$$\delta\left(\left(\sum_{m \geq n} f_m - h_m\right)_n\right) = (f_n)_n - (h_n)_n.$$

Donnons-nous  $\tilde{h}_0 \in H$  et construisons par récurrence une suite  $(\tilde{h}_n)_n$  telle que  $\tilde{h}_{n+1} = \tilde{h}_n - h_n$ , i.e.,  $\delta((\tilde{h}_n)_n) = (h_n)_n$ . On en déduit que  $(f_n)_n$  est en fait le cobord  $\delta((\sum_{m \geq n} f_m - h_m)_n + (\tilde{h}_n)_n)$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.5.* Les constantes  $\mathcal{F}(U_n) \cap L$  forment des fermés de  $\mathcal{F}(U_n)$  pour  $\mathcal{F} = \mathcal{O}^+, \mathcal{O}^{(r)}, \mathcal{O}^{**}, L^* \mathcal{O}^{**}$ . Les suites décroissantes  $(\mathcal{O}^+(U_n))_n$  et  $(\mathcal{O}^{(r)}(U_n))_n$  de groupes topologiques vérifient clairement l'inclusion (9) et la proposition 4.6 par hypothèse. Montrons que c'est encore le cas pour les suites  $(L^* \mathcal{O}^{**}(U_n))_n$  et  $(\mathcal{O}^{**}(U_n))_n$ . Raisonnons uniquement pour le second, le premier s'en déduira aisément. Soit  $1 + \varpi^k f$  avec  $f \in \mathcal{O}^{++}(U_n)$ , on peut trouver une constante  $\lambda \in \mathfrak{m}_L$  telle que  $f - \lambda \in \varpi \mathcal{O}^{++}(U_{n-1})$ . Alors, on a

$$\frac{1 + \varpi^k f}{1 + \varpi^k \lambda} = 1 + \varpi^k \frac{f - \lambda}{1 + \varpi^k \lambda} \in 1 + \varpi^{k+1} \mathcal{O}^{++}(U_{n-1}).$$

La proposition 4.5 est alors une conséquence directe du lemme précédent.  $\square$

La base canonique  $(e_i)_{0 \leq i \leq d}$  de  $K^{d+1}$  définit une collection de  $d + 1$  hyperplans  $V^+(z_i) \subset \mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d$  et on note  $\mathcal{B}$  l'arrangement algébrique  $\{V^+(z_i)\}_{0 \leq i \leq r}$ .

**Corollaire 4.8.** *L'espace  $\text{Int}(\mathcal{B})$  défini plus haut est acyclique pour les faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$  et  $\mathbb{G}_m$ . Les sections globales de  $\mathcal{O}^+$  et  $\mathcal{O}^{**}$  sont constantes et*

$$\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{B})) = L^* \times T$$

avec  $T = \langle z_i/z_0 : 1 \leq i \leq r \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$ .

*Démonstration.* On voit cet arrangement d'hyperplans comme le produit  $(\mathbb{A}_{\text{rig}, L}^1 \setminus \{0\})^r \times \mathbb{A}_{\text{rig}, L}^{d-r}$ . On le recouvre par  $(X_n)_n$  où, en posant  $x_i = z_i/z_0$ ,

$$X_n = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{A}_{\text{rig}, L}^d : \forall i \leq r, |\varpi|^{-n} \geq |x_i| \geq |\varpi|^n, \forall j \geq r+1, |\varpi|^{-n} \geq |x_j|\}.$$

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \varprojlim_{\text{an}} H_{\text{an}}^{s-1}(X_n, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{B}), \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_{\text{an}} H_{\text{an}}^s(X_n, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

on a alors une chaîne d'inclusions

$$G_{n+(k+1)c}^{(i)} \subset G_{n+kc}^{(i+1)} + H \subset G_n^{(i+k+1)} + H$$

(par (9) pour la première et par hypothèse de récurrence pour la seconde), ce qui termine l'argument.

Mais  $\text{Int}(\mathcal{B}) = \bigcup_n X_n$  est un recouvrement admissible constitué de produits de polycouronnes et polydisques, chacun des termes est acyclique pour les faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$  et  $\mathbb{G}_m$  d'après le [théorème 3.5](#), d'où, pour  $s > 0$ ,

$$\varprojlim H_{\text{an}}^s(X_n, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{et} \quad H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{B}), \mathcal{F}) = R^1 \varprojlim H_{\text{an}}^{s-1}(X_n, \mathcal{F}).$$

Grâce au [lemme 4.2](#), on peut appliquer la [proposition 4.5](#) et on en déduit l'énoncé pour les faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}$  et  $\mathcal{O}^{**}$ . On obtient aussi l'annulation de la cohomologie de  $\mathbb{G}_m$  en degré supérieur ou égal à 2.

D'après le [lemme 4.4](#), on a une décomposition en produits directs du système projectif<sup>19</sup>  $(\mathcal{O}^*(X_n))_n$ , c'est-à-dire

$$(\mathcal{O}^*(X_n))_n = (L^* \mathcal{O}^{**}(X_n))_n \times (T)_n.$$

Ainsi  $\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{B})) = \varprojlim_n L^* \mathcal{O}^{**}(X_n) \times \varprojlim_n T = L^* \times T$  (en utilisant la [proposition 4.5](#)) et

$$\text{Pic}_L(\text{Int}(\mathcal{B})) = R^1 \varprojlim_n L^* \mathcal{O}^{**}(X_n) \times R^1 \varprojlim_n T = 0. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section :

**Théorème 4.9.** *Les arrangements algébriques sont  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$ -acycliques et les sections globales sont constantes.*

**Lemme 4.10.** *Les fibrations  $Z_t^d$  sont acycliques pour  $\mathcal{O}^{(r)}$  et  $\mathcal{O}^{**}$ , et les sections globales sont constantes.*

*Démonstration.* On raisonne sur la suite spectrale de Čech pour le recouvrement  $f^*(\mathcal{V})$  de  $Z_t^d$ . D'après le [corollaire 4.8](#), chaque intersection est  $\mathcal{O}^{(r)}$ -acyclique et on se ramène à calculer la cohomologie de Čech sur le recouvrement  $f^*(\mathcal{V})$  qui est isomorphe à  $\check{C}^\bullet(Z_t^d, f^*(\mathcal{V}), \mathcal{O}_L^{(r)})$ . Mais le nerf du recouvrement est le simplexe standard  $\Delta^t$  de dimension  $t$ , qui est contractile. Ceci montre l'annulation de la cohomologie en degré supérieur ou égal à 1. On obtient aussi aisément que  $\mathcal{O}^{(r)}(Z_t^d) = \mathcal{O}_L^{(r)}$ . On raisonne de même pour  $\mathcal{O}^{**}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.9.* D'après le [lemme 4.10](#) et l'identification  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d = Z_d^d$ , la flèche d'inclusion  $Z_t^d \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d$  induit alors des isomorphismes

$$H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathcal{O}^{(r)}) \cong H_{\text{an}}^s(Z_t^d, \mathcal{O}^{(r)})$$

pour tout  $s$  positif. D'où l'annulation de  $H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, Z_t^d, \mathcal{O}^{(r)})$ . Alors la suite spectrale (1) dégénère et on obtient  $H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \text{Int}(\mathcal{A}), \mathcal{O}^{(r)}) = 0$  pour tout  $s$ . Ce qui se traduit par

$$H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathcal{O}^{(r)}) = \begin{cases} \mathcal{O}_L^{(r)} & \text{si } s = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On raisonne de même pour  $\mathcal{O}^{**}$ .  $\square$

19. Où  $T$  est vu comme un système projectif constant.

## 5. Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathcal{O}^{(r)}$

**5A. Cohomologie des fibrations  $X_t^d(\beta)$ .** Nous allons chercher à déterminer la cohomologie des espaces  $X_t^d(\beta)$ . Commençons par faire quelques rappels sur les faisceaux localement libres de rang 1 sur  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  et  $\mathbb{P}_{\text{zar},L}^t$ . Dans le cas algébrique, ils sont décrits par les faisceaux tordus  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},L}^t}^t(k)$  avec  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ . Ce faisceau se trivialisait sur le recouvrement usuel  $\mathcal{V}$  et les fonctions de transition font commuter le diagramme<sup>20</sup> suivant (voir [note 8](#) pour la notation  $V_{\{i,j\}}$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},L}^t}^t(k)|_{V_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{V_i}|_{V_{\{i,j\}}} \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow m_{(\tilde{z}_i/\tilde{z}_j)^{-k}} \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},L}^t}^t(k)|_{V_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{V_j}|_{V_{\{i,j\}}} \end{array} \quad (10)$$

En géométrie rigide, on peut encore définir les faisceaux tordus  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^t(k)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^+(k)$  (version à puissance bornée) et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^{(r)}(k)$  grâce aux mêmes morphismes de transition :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^+(k)|_{V(\beta)_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{V(\beta)_i}^+|_{V(\beta)_{\{i,j\}}} \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow m_{(\tilde{z}_i/\tilde{z}_j)^{-k}} \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^+(k)|_{V(\beta)_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{V(\beta)_j}^+|_{V(\beta)_{\{i,j\}}} \end{array}$$

On rappelle que l'on a bien  $\tilde{z}_i/\tilde{z}_j \in \mathcal{O}^+(V(\beta)_{\{i,j\}})$ . On construit grâce à un diagramme similaire  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^t(k)$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^{(r)}(k)$ . D'après GAGA (voir aussi [théorème 6.1](#) pour une démonstration plus élémentaire), les  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^t(k)$  sont les seuls faisceaux localement libres de rang 1. Nous pouvons aussi définir ces faisceaux tordus sur les fibrations  $X_t^d(\beta)$  en tirant en arrière par  $f$ , i.e.,  $\mathcal{O}_{X_t^d(\beta)}^t(k) = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^t(k)$ ,  $\mathcal{O}_{X_t^d(\beta)}^+(k) = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^+(k)$  et  $\mathcal{O}_{X_t^d(\beta)}^{(r)}(k) = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^{(r)}(k)$ . L'un des points techniques de l'argument du [lemme 6.5](#) permettra de montrer que  $\mathcal{O}_{X_t^d(\beta)}^t(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^t(k)|_{X_t^d(\beta)}$ .

Dans le cas algébrique, la cohomologie de Zariski de ces faisceaux tordus est connue et peut être trouvée dans [[Hartshorne 1977](#), Theorem 5.1, Section III] par exemple. Pour tout anneau  $A$  et pour  $k$  un entier, la cohomologie de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},A}^t}^t(k)$  est concentrée en degré 0 si  $k$  est positif et en degré  $t$  si  $k$  est strictement négatif. Plus précisément, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} H_{\text{zar}}^0(\mathbb{P}_{\text{zar},A}^t, \mathcal{O}^t(k)) &\cong A[T_0, \dots, T_t]_k \quad \text{si } k \text{ est positif,} \\ H_{\text{zar}}^t(\mathbb{P}_{\text{zar},A}^t, \mathcal{O}^t(k)) &\cong \left( \frac{1}{T_0 \dots T_t} A \left[ \frac{1}{T_0}, \dots, \frac{1}{T_t} \right] \right)_k \quad \text{si } k \text{ est négatif,} \end{aligned}$$

où  $A[T_0, \dots, T_t]_k$  désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $k$ .

On se propose de calculer la cohomologie de  $\mathcal{O}^{(r)}$  des fibrations  $X_t^d(\beta)$ . Plus précisément, nous souhaitons montrer :

20. Dans ce qui suit, on note aussi  $\tilde{z}$  la variable sur  $\mathbb{P}_{\text{zar},A}^t$ , i.e.,  $\mathbb{P}_{\text{zar},A}^t = \text{Proj}(A[\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_t])$ .

**Théorème 5.1.** — *La cohomologie à coefficients dans  $\mathcal{O}^{(r)}(k)$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  est concentrée en degré 0 si  $k$  est positif et en degré  $t$  si  $k$  est strictement négatif. De même, la cohomologie des fibrations  $X_t^d(\beta)$  est concentrée en degrés 0 et  $t$ .*

— *Plus précisément, on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{an}}^0(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^{(r)}(k)) &\cong \mathcal{O}_L^{(r)} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbf{H}_{\text{zar}}^0(\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t, \mathcal{O}(k)) \cong \mathcal{O}_L^{(r)}[T_0, \dots, T_t]_k, \\ \mathbf{H}_{\text{an}}^t(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^{(r)}(k)) &\cong \mathcal{O}_L^{(r)} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbf{H}_{\text{zar}}^0(\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t, \mathcal{O}(k)) \cong \left( \frac{1}{T_0 \dots T_t} \mathcal{O}_L^{(r)} \left[ \frac{1}{T_0}, \dots, \frac{1}{T_t} \right] \right)_k. \end{aligned}$$

De plus, pour  $r \leq r'$ , les flèches suivantes sont injectives pour  $s \geq 0$  :

$$\mathbf{H}_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^{(r)}(k)) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^{(r')}(k)).$$

— *On dispose d'isomorphismes*

$$\mathbf{H}_{\text{an}}^0(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^{(r)}(k)) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \leq k}} \mathbf{H}_{\text{an}}^0(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^{(r)}(k - |\alpha|));$$

en particulier, les sections globales des faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}(k)$  sont nulles si  $k < 0$  et s'identifient à  $\mathcal{O}_L^{(r)}$  si  $k = 0$ . Enfin,  $\mathbf{H}_{\text{an}}^t(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^{(r)}(k))$  est isomorphe au complété  $p$ -adique de

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \geq t+1+k}} \mathbf{H}_{\text{an}}^t(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^{(r)}(k - |\alpha|)).$$

*Démonstration.* Les intersections d'éléments des recouvrements  $\mathcal{V}(\beta)$  et  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  sont des produits de polycouronnes et de polydisques fermés dont les polyrayons sont dans  $|L^*|$ . Ainsi, on se ramène à calculer la cohomologie de Čech sur les recouvrements  $\mathcal{V}(\beta)$  et  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  (voir [théorème 3.5](#)). De plus, pour toute section non nulle  $h$  de  $\mathcal{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$  ou de  $\mathcal{O}^{(r)}(f^{-1}(V(\beta)_I))$  (voir [note 8](#) pour la notation), il existe une constante  $\lambda \in \mathcal{O}_L^{(r)}$  telle que  $h/\lambda$  soit de norme 1. On en déduit que  $\mathcal{O}^{(r)}(V(\beta)_I) = \mathcal{O}^+(V(\beta)_I) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L^{(r)}$  ou que  $\mathcal{O}^{(r)}(f^{-1}(V(\beta)_I)) = \mathcal{O}^+(f^{-1}(V(\beta)_I)) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L^{(r)}$ , respectivement. Donc

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}^{(r)}(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) &= \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}^+(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L^{(r)}, \\ \check{\mathcal{C}}^\bullet(X_t^d(\beta); \mathcal{O}^{(r)}(k), \mathcal{V}(\beta)) &= \check{\mathcal{C}}^\bullet(X_t^d(\beta); \mathcal{O}^+(k), \mathcal{V}(\beta)) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L^{(r)}. \end{aligned}$$

Par platitude, on obtient les isomorphismes au niveau des groupes de cohomologie

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{H}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}^{(r)}(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) &= \check{\mathbf{H}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}^+(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L^{(r)}, \\ \check{\mathbf{H}}^*(X_t^d(\beta); \mathcal{O}^{(r)}(k), \mathcal{V}(\beta)) &= \check{\mathbf{H}}^*(X_t^d(\beta); \mathcal{O}^+(k), \mathcal{V}(\beta)) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L^{(r)}, \end{aligned}$$

et l'injectivité des inclusions quand  $r$  varie. Le reste de cette section sera consacré au calcul de ces groupes de cohomologie de Čech sur  $\mathcal{O}^+$ . Cela repose sur le lemme général suivant :

**Lemme 5.2.** *Soit  $\mathcal{C}^\bullet$  un complexe constitué de  $\mathbb{Z}_p$ -modules plats tel que  $\mathbf{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)$  est sans  $p$ -torsion pour tout  $j$ . On a alors un isomorphisme naturel  $\mathbf{H}^j(\widehat{\mathcal{C}^\bullet}) \simeq \widehat{\mathbf{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)}$  où les complétions considérées sont réalisées suivant la topologie  $p$ -adique.*

*Démonstration.* Soit  $A^j = \text{Im}(d^{j-1} : \mathcal{C}^{j-1} \rightarrow \mathcal{C}^j)$  et  $B^j = \ker(d^j : \mathcal{C}^j \rightarrow \mathcal{C}^{j+1})$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow A^j \rightarrow B^j \rightarrow H^j(\mathcal{C}^\bullet) \rightarrow 0$ , d'où l'exactitude de  $0 \rightarrow A^j/p^n \rightarrow B^j/p^n \rightarrow H^j(\mathcal{C}^\bullet)/p^n \rightarrow 0$ , car  $H^j(\mathcal{C}^\bullet)$  est sans  $p$ -torsion, par hypothèse. Par Mittag-Leffler, on obtient encore une suite exacte  $0 \rightarrow \widehat{A}^j \rightarrow \widehat{B}^j \rightarrow \widehat{H}^j(\mathcal{C}^\bullet) \rightarrow 0$ . Il suffit donc de montrer que  $\widehat{A}^j = \text{Im}(\widehat{d}^{j-1} : \widehat{\mathcal{C}}^{j-1} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}^j)$  et  $\widehat{B}^j = \ker(\widehat{d}^j : \widehat{\mathcal{C}}^j \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}^{j+1})$ . Comme  $\mathcal{C}^{j+1}$  (et donc  $A^{j+1}$ ) est sans  $p$ -torsion, on a l'exactitude de la suite  $0 \rightarrow B^j/p^n \rightarrow \mathcal{C}^j/p^n \rightarrow A^{j+1}/p^n \rightarrow 0$ , d'où celle de

$$0 \rightarrow B^j/p^n \rightarrow \mathcal{C}^j/p^n \rightarrow \mathcal{C}^{j+1}/p^n,$$

car on a montré que  $A^{j+1}/p^n \rightarrow B^{j+1}/p^n \rightarrow \mathcal{C}^{j+1}/p^n$  est injective. En passant à la limite projective dans les deux suites précédentes, on obtient  $\widehat{B}^j = \ker \widehat{d}^j$  et  $\widehat{A}^{j+1} \cong \widehat{\mathcal{C}}^j / \widehat{B}^j = \widehat{\mathcal{C}}^j / \ker \widehat{d}^j \cong \text{Im } \widehat{d}^j$ .  $\square$

**Corollaire 5.3.** *La cohomologie de Čech de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^+}^+(k)$  sur le recouvrement  $V(\beta)$  est concentrée en degré 0 si  $k$  est positif et en degré  $t$  si  $k$  est strictement négatif. Plus précisément, on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} \check{H}^0(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^+(k), V(\beta)) &\cong \mathcal{O}_L[T_0, \dots, T_t]_k \quad \text{si } k \text{ est positif,} \\ \check{H}^t(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathcal{O}^+(k), V(\beta)) &\cong \left( \frac{1}{T_0 \cdots T_t} \mathcal{O}_L \left[ \frac{1}{T_0}, \dots, \frac{1}{T_t} \right] \right)_k \quad \text{si } k \text{ est négatif.} \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après la description des fonctions analytiques de norme spectrale au plus 1 sur un polydisque ou une polycouronne, le complexe  $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^+}^+(k), \mathcal{V}(\beta))$  est la complétion  $p$ -adique du complexe  $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t; \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^+}^+(k), \mathcal{V})$ . Le [lemme 5.2](#) montre alors que les groupes de cohomologie de  $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^+}^+(k), \mathcal{V}(\beta))$  s'identifient aux complétés  $p$ -adiques des groupes de cohomologie  $H_{\text{zar}}^*(\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t; \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^+}^+(k))$ . Comme ces derniers sont de type fini sur  $\mathcal{O}_L$ , la complétion est en fait inutile, ce qui permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 5.4.** *Soit  $k$  un entier. La cohomologie de Čech de  $\mathcal{O}^+(k)$  sur  $X_t^d(\beta)$  pour le recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  est concentrée en degrés 0 et  $t$ . De plus on dispose d'isomorphismes*

$$\check{H}^0(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^+(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \leq k}} H_{\text{zar}}^0(\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t, \mathcal{O}(k - |\alpha|));$$

*en particulier, les sections globales des faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}(k)$  sont nulles si  $k < 0$  et sont constantes si  $k = 0$ . Enfin,  $\check{H}^t(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^+(k), f^*(\mathcal{V}(\beta)))$  est isomorphe au complété  $p$ -adique de*

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \geq t+1+k}} H_{\text{zar}}^t(\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t, \mathcal{O}(k - |\alpha|)).$$

*Démonstration.* Pour tout  $i \in I \subset \llbracket 0, t \rrbracket$  fixé, on a une trivialisatoin  $f^{-1}(V(\beta)_I) \cong V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)$  (voir [note 8](#) pour la notation  $V(\beta)_I$ ). D'après le [lemme 4.3](#), tout  $\lambda_I \in \mathcal{O}^+(k)(f^{-1}(V(\beta)_I))$  admet une écriture unique qui dépend du choix de l'élément  $i$ ,

$$\lambda_I = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t}} \lambda_{I,\alpha}^{(i)}(z) \left( \frac{w^{(i)}}{w - \beta_i} \right)^\alpha, \quad (11)$$



où  $z = [z_0, \dots, z_t]$  désigne la variable de  $V(\beta)_I$  vu comme un ouvert de  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$ ,  $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_{d-t}^{(i)})$  est la variable de  $\mathbb{B}^{d-t}(-\beta_i)$ , les sections  $\lambda_{I,\alpha}^{(i)}$  sont dans  $\mathcal{O}^+(k)(V(\beta)_I)$  et tendent vers 0  $p$ -adiquement. On déduit de cette décomposition le fait que le complexe de Čech  $\mathcal{O}_{X_t^d(\beta)}^+(k)$  sur le recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  est la complétion de la somme directe  $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t}} \mathcal{C}_\alpha^\bullet$  où chaque complexe  $\mathcal{C}_\alpha^\bullet$  est défini par

$$\mathcal{C}_\alpha^s := \bigoplus_{|I|=s+1} \left( \frac{w^{(i)}}{\varpi^{-\beta_i}} \right)^\alpha \mathcal{O}^+(k)(V(\beta)_I).$$

D'après le [lemme 5.2](#), il suffit de voir que la cohomologie des complexes  $\mathcal{C}_\alpha^\bullet$  coïncide avec celle des faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{zar},\mathcal{O}_L}^t}(k - |\alpha|)$ . Expliquons comment exhiber un tel isomorphisme. La relation  $w^{(i)}/\varpi^{-\beta_i} = (\tilde{z}_j/\tilde{z}_i)(w^{(j)}/\varpi^{-\beta_j})$  induit l'identité  $\lambda_{I,\alpha}^{(i)} = (\tilde{z}_i/\tilde{z}_j)^{k-|\alpha|} \lambda_{I,\alpha}^{(j)}$  et on peut voir  $\lambda_{I,\alpha} := (\lambda_{I,\alpha}^{(i)})_{i \in I}$  comme un élément de  $\mathcal{O}^+(k - |\alpha|)(V(\beta)_I)$ . On en déduit alors pour tout  $\alpha$  l'isomorphisme

$$\mathcal{C}_\alpha^\bullet \cong \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t; \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t}^+(k - |\alpha|), \mathcal{V}(\beta)).$$

Le résultat est alors une conséquence du [corollaire 5.3](#). □

**Remarque 5.5.** En fixant une trivialisatoin  $f^{-1}(V(\beta)_I) \cong V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i) = \mathbb{B}_{V(\beta)_I}^{d-t}(-\beta_i)$  pour  $i \in I = \llbracket 0, t \rrbracket$ , on peut considérer le groupe  $\check{H}^t(X_t^d(\beta); \mathcal{O}^+, f^*(\mathcal{V}))$  comme un facteur direct de  $\mathcal{O}^+(\mathbb{B}_{V(\beta)_I}^{d-t}(-\beta_i))/\mathcal{O}^+(V(\beta)_I)$ .

**5B. Cohomologie des complémentaires de tubes d'hyperplans.** Nous pouvons maintenant déterminer la cohomologie de  $\mathcal{O}^{(r)}$  d'un arrangement  $\mathcal{A}$  tubulaire fermé d'ordre  $n$ . Nous souhaitons établir :

**Théorème 5.6.** *Les arrangements tubulaires fermés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathcal{O}^{(r)}$ -acycliques.*

Cela découle du principe général suivant :

**Lemme 5.7.** *Soit  $X$  un  $L$ -espace analytique et  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  une famille d'ouverts de  $X$ . Soit  $H$  une théorie cohomologique vérifiant la suite exacte longue de Mayer–Vietoris tel que pour toute famille finie  $J \subset I$ , les unions  $\bigcup_{i \in J} U_i$  n'ont pas de cohomologie en degré supérieur ou égal à  $|J|$ . Sous ces hypothèses, toutes les intersections finies non vides  $\bigcap_{i \in J} U_i$  sont acycliques pour la cohomologie  $H$ .*

Il est à noter que d'après le [théorème 5.1](#), les complémentaires des voisinages tubulaires ouverts d'hyperplans vérifient les hypothèses pour  $H$ , la cohomologie analytique à coefficients dans  $\mathcal{O}^{(r)}$ . En effet, pour  $\mathcal{A}$  un arrangement tubulaire fermé, la cohomologie d'un espace de la forme  $\text{Uni}(\mathcal{B})$ , avec  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , s'annule en degré supérieur ou égal à  $\text{rg}(\mathcal{B}) \leq |\mathcal{B}|$ .

**Remarque 5.8.** Notons que pour appliquer le [lemme 5.7](#), nous avons seulement utilisé le fait que la cohomologie des fibrations  $X_t^d(\beta)$  était concentrée entre les degrés 0 et  $t$ . Cette propriété se déduit directement du [théorème 3.5](#) par comparaison avec la cohomologie de Čech sur le recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ . Nous pouvons alors nous passer du calcul explicite de ces groupes qui constituent le cœur technique de la preuve du [théorème 5.1](#). Toutefois, la description qui en découle servira de manière cruciale dans la preuve du [lemme 5.11](#).

*Démonstration.* On peut supposer que  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$  et on raisonne par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 1$  étant évident. Supposons que le résultat est vrai pour  $n - 1$ . Il suffit de démontrer l'acyclicité de  $Y = \bigcap_{i=1}^n U_i$  (les autres intersections étant traitées par l'hypothèse de récurrence). Notons  $V_i = U_i \cap U_n$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$  et observons que  $Y = V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}$ . Il suffit donc (grâce à l'hypothèse de récurrence) de montrer que la cohomologie de  $\bigcup_{i \in J} V_i$  s'annule en degré supérieur ou égal à  $|J|$  quand  $J \subset \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . Soit donc  $k \geq |J|$  et  $V^J = \bigcup_{i \in J} V_i = U^J \cap U_n$ , où  $U^J = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Une partie de la suite de Mayer–Vietoris s'écrit

$$H^k(U^J \cup U_n) \rightarrow H^k(U^J) \oplus H^k(U_n) \rightarrow H^k(V^J) \rightarrow H^{k+1}(U^J \cup U_n).$$

Puisque  $k + 1 \geq |J \cup \{n\}|$ , le terme  $H^{k+1}(U^J \cup U_n)$  s'annule par hypothèse, et il en est de même de  $H^k(U_n)$  et  $H^k(U^J)$ , donc aussi de  $H^k(V^J)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Nous pouvons aussi tirer des informations importantes sur les sections globales à puissances bornées des arrangements  $\text{Int}(\mathcal{A})$ . Nous commencerons par ce lemme général.

**Lemme 5.9.** *Soit  $X$  un espace analytique,  $\mathcal{F}$  un faisceau en groupes abéliens et  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  une famille d'ouverts de  $X$  tel que toute intersection finie<sup>21</sup>  $U_I$  est  $\mathcal{F}$ -acyclique. Dans ce cas, on a*

$$\mathcal{F}(U_I) = \sum_{J \in E_I} r_{J,I}(\mathcal{F}(U_J)),$$

où  $E_I = \{J \subset I : J \neq \emptyset \text{ et } H_{\text{an}}^{|J|-1}(\bigcup_{j \in J} U_j, \mathcal{F}) \neq 0\}$  et  $r_{J,I} : \mathcal{F}(U_J) \rightarrow \mathcal{F}(U_I)$  est la flèche de restriction.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le cardinal de  $I$ . Le résultat est trivial quand ce dernier vaut 1. Fixons  $I$  et supposons le résultat pour toute partie stricte de  $I$ . Si  $H_{\text{an}}^{|I|-1}(\bigcup_{i \in I} U_i, \mathcal{F}) \neq 0$ , c'est tautologique, car  $I \in E_I$ . Sinon, on a par hypothèse

$$H_{\text{an}}^{|I|-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i, \mathcal{F}\right) = \check{H}^{|I|-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i, \{U_i : i \in I\}, \mathcal{F}\right) = \mathcal{F}(U_I) / \sum_{i \in I} r_{I \setminus \{i\}, I}(\mathcal{F}(U_{I \setminus \{i\}})) = 0.$$

Mais par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{i \in I} r_{I \setminus \{i\}, I}(\mathcal{F}(U_{I \setminus \{i\}})) = \sum_{i \in I} \sum_{J \in E_{I \setminus \{i\}}} r_{J, I \setminus \{i\}}(\mathcal{F}(U_J)) = \sum_{J \in E_I} r_{J, I}(\mathcal{F}(U_J)),$$

car  $E_I = \bigcup_{i \in I} E_{I \setminus \{i\}}$ . Le résultat s'en déduit.  $\square$

**Corollaire 5.10** (décomposition en éléments simples). *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement tubulaire fermé, on a*

$$\mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A})) = \sum_{\substack{B \subset \mathcal{A} \\ |\mathcal{B}| = \text{rg}(\mathcal{B}) < d+1}} \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{B})).$$

21. Voir [note 8](#) pour la notation  $U_I$ .

*Démonstration.* On reprend les notations du lemme précédent. On remarque l'identité<sup>22</sup>  $E_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} : |\mathcal{B}| = \text{rg}(\mathcal{B}) < d + 1\}$  d'après le [corollaire 5.4](#) et on conclut.  $\square$

**Lemme 5.11.** *Soit  $\mathcal{A}_n$  un arrangement tubulaire fermé d'ordre  $n > d$  et  $\mathcal{A}_{n-d}$  la restriction de  $\mathcal{A}_n$  d'ordre  $n - d$ . On a l'inclusion*

$$\mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-d})).$$

*Démonstration.* D'après le résultat précédent, on peut supposer  $|\mathcal{A}_n| = \text{rg}(\mathcal{A}_n) < d + 1$ . On raisonne par récurrence sur  $t = \text{rg}(\mathcal{A}_n) - 1$ . Plus précisément, nous montrons que pour tout arrangement tubulaire fermé  $\mathcal{B}_m$  d'ordre  $m$  quelconque vérifiant  $\text{rg}(\mathcal{B}_m) \leq t + 1$ , on a l'inclusion  $\mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{B}_m)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{B}_{m-(t+1)}))$ .

Quand  $t = 0$ , cela découle du cas de la boule qui a été traité au [lemme 4.1](#). Supposons l'énoncé vrai pour  $t - 1$  et montrons le résultat pour l'arrangement  $\mathcal{A}_n$  de rang  $t + 1$ . Notons  $\mathcal{A}_{n-1}$  la projection de  $\mathcal{A}_n$  d'ordre  $n - 1$ . On a des recouvrements naturels  $\text{Uni}(\mathcal{A}_n) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}_n} \mathring{H}(|\varpi|^n)^c$  et  $\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}_n} \mathring{H}(|\varpi|^{n-1})$  de cardinal<sup>23</sup>  $t + 1$  que l'on notera  $\mathcal{A}_n^c$  et  $\mathcal{A}_{n-1}^c$ .

Les intersections d'éléments de  $\mathcal{A}_n^c$  ou de  $\mathcal{A}_{n-1}^c$  sont  $\mathcal{O}^{(r)}$ -acycliques d'après le [théorème 5.6](#) et on peut calculer la cohomologie des espaces  $\text{Uni}(\mathcal{A}_n)$  et  $\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1})$  via les complexes de Čech sur ces recouvrements. Ces derniers sont concentrés entre les degrés 0 et  $t$ , on en déduit un isomorphisme<sup>24</sup>  $H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}) \cong \check{C}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}, \mathcal{A}_n^c) / \delta(\check{C}^{t-1}(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}, \mathcal{A}_n^c))$  (idem pour  $\mathcal{A}_{n-1}$ ). De plus, ces deux recouvrements sont compatibles avec l'inclusion  $\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}) \subset \text{Uni}(\mathcal{A}_n)$ , d'où une flèche entre les complexes de Čech qui induit le morphisme fonctoriel  $H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}) \xrightarrow{\varphi^{(r)}} H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathcal{O}^{(r)})$ . En explicitant ces complexes, on obtient un diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_n \setminus \{a\})) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) & \longrightarrow & H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_{n-1}} \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1} \setminus \{a\})) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1})) & \longrightarrow & H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathcal{O}^{(r)}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (12)$$

On veut montrer

$$\text{Im}(\varphi^{(r)}) \subset \varpi H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathcal{O}^{(r)}). \quad (13)$$

Quand  $\text{rg}(\mathcal{A}_{n-1}) < \text{rg}(\mathcal{A}_n)$ , l'inclusion est triviale, car  $H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathcal{O}^{(r)}) = 0$ .

Si  $\text{rg}(\mathcal{A}_{n-1}) = \text{rg}(\mathcal{A}_n)$ , on a des isomorphismes compatibles

$$\text{Uni}(\mathcal{A}_n) \cong X_t^d(\beta) \quad \text{et} \quad \text{Uni}(\mathcal{A}_n) \cong X_t^d(\tilde{\beta})$$

22. Notons que lorsque l'on a l'égalité  $|\mathcal{B}| = \text{rg}(\mathcal{B}) = d + 1$ , on a  $\text{Uni}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\text{ng}, L}^d$  qui est  $\mathcal{O}^{(r)}$ -acyclique d'après le [corollaire 5.3](#).

23. Nous nous autorisons des répétitions dans le deuxième recouvrement.

24. Ici,  $\delta$  désigne la différentielle du complexe  $\check{C}^\bullet(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)}, \mathcal{A}_n^c)$ .

avec  $\tilde{\beta} := \beta - (1, \dots, 1)$ . D'après la [remarque 5.5](#),  $H_{\text{an}}^t(\text{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathcal{O}^{(r)})$  est un facteur direct de

$$\mathcal{O}^{(r)}(\mathbb{B}_{V(\beta)_I}^{d-t}(-\beta_i)) / \mathcal{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$$

pour  $I = \llbracket 0, t \rrbracket$ ,  $i \in I$  fixé (idem pour  $\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1})$ ). De plus, la flèche  $\varphi^{(r)}$  est induite (notons l'égalité  $V(\beta)_I = V(\tilde{\beta})_I$ ) par la restriction naturelle

$$\mathcal{O}^{(r)}(\mathbb{B}_{V(\beta)_I}^{d-t}(-\beta_i)) / \mathcal{O}^{(r)}(V(\beta)_I) \rightarrow \mathcal{O}^{(r)}(\mathbb{B}_{V(\beta)_I}^{d-t}(-(\beta_i - 1))) / \mathcal{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$$

et l'image de  $\varphi^{(r)}$  est contenue dans  $\varpi \mathcal{O}^{(r)}(\mathbb{B}_{V(\beta)_I}^{d-t}(-(\beta_i - 1))) / \mathcal{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$  d'après le [lemme 4.2](#), ce qui entraîne (13).

D'après (12) et (13), on obtient, pour toute fonction  $f \in \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_n))$ , une décomposition dans  $\mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1}))$

$$f = \sum_{a \in \mathcal{A}_{n-1}} f_a + g$$

avec  $f_a \in \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1} \setminus \{a\}))$  et  $g \in \varpi \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1}))$ . Comme  $\text{rg}(\mathcal{A}_{n-1} \setminus \{a\}) < \text{rg}(\mathcal{A}_n)$ , on a par hypothèse de récurrence

$$f_a \in \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-1-t} \setminus \{a\})) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathcal{O}^{(r)}(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-(t+1)})),$$

ce qui établit le résultat. □

**Corollaire 5.12.** *Soit  $\mathcal{A}_n$  un arrangement tubulaire fermé d'ordre  $n > 2d$  et  $\mathcal{A}_{n-2d}$  la projection de  $\mathcal{A}_n$  d'ordre  $n - 2d$ . On a l'inclusion*

$$\mathcal{O}^+(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathcal{O}^+(\text{Int}(\mathcal{A}_{n-2d})).$$

*Démonstration.* Cela découle de la [proposition 4.6](#) et du [lemme 5.11](#). □

**5C. Cohomologie analytique à coefficients dans  $1 + \mathcal{O}^{++} = \mathcal{O}^{**}$ .** Nous allons maintenant nous intéresser aux faisceaux  $1 + \mathcal{O}^{++}$  et démontrer un théorème d'acyclicité semblable au [théorème 5.6](#). Le résultat suivant est le point clé de cette section. C'est une application du logarithme tronqué qui permet d'étudier  $1 + \mathcal{O}^{++}$  par le biais de  $\mathcal{O}^{(r)}$ . Ce résultat a été énoncé par Van der Put [1982] (voir § 3.26, remarque en fin de page 195). Nous allons donner les détails de la preuve.

**Lemme 5.13.** *Soit  $X$  un espace rigide quasi compact.*

- (1) *Si  $X$  est  $\mathcal{O}^{(r)}$ -acyclique pour tout  $0 < r \leq 1$ , alors  $X$  est  $1 + \mathcal{O}^{++}$ -acyclique.*
- (2) *Si la cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $\mathcal{O}^{(r)}$  est concentrée en degrés 0 et  $t$  pour tout  $0 < r \leq 1$ , et la flèche naturelle  $H_{\text{an}}^t(X, \mathcal{O}^{(r)}) \rightarrow H_{\text{an}}^t(X, \mathcal{O}^{(r')})$  est injective pour  $r' \geq r$ , alors la cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $1 + \mathcal{O}^{++}$  est concentrée en degrés 0 et  $t$ .*

*Démonstration.* On suppose que la cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $\mathcal{O}^{(r)}$  est concentrée en degrés 0 et  $t$  pour tout  $r > 0$ , et la flèche naturelle  $H_{\text{an}}^t(X, \mathcal{O}^{(r)}) \rightarrow H_{\text{an}}^t(X, \mathcal{O}^{(r')})$  est injective pour  $r' \geq r$ . Le

premier point s'en déduit quand  $t = 0$ . Soit  $s \notin \{0, t\}$ , on veut l'annulation de la cohomologie de  $1 + \mathcal{O}^{++}$  en degré  $s$ . Remarquons que  $1 + \mathcal{O}^{++} = \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} 1 + \mathcal{O}^{(r)}$ , donc (par quasi-compacité),

$$H_{\text{an}}^s(X; 1 + \mathcal{O}^{++}) = \varinjlim_{r \rightarrow 1^-} H_{\text{an}}^s(X; 1 + \mathcal{O}^{(r)}).$$

On fixe  $r < 1$ . On a la suite exacte

$$0 \rightarrow 1 + \mathcal{O}^{(r^2)} \rightarrow 1 + \mathcal{O}^{(r)} \rightarrow \mathcal{O}^{(r)} / \mathcal{O}^{(r^2)} \rightarrow 0$$

où la surjection est donnée par  $(1 + x) \mapsto x$ . Par hypothèse,  $\mathcal{O}^{(r)} / \mathcal{O}^{(r^2)}$  a une cohomologie analytique concentrée en degrés 0 et  $t$  d'après la suite exacte<sup>25</sup>

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{(r^2)} \rightarrow \mathcal{O}^{(r)} \rightarrow \mathcal{O}^{(r)} / \mathcal{O}^{(r^2)} \rightarrow 0.$$

On a donc une surjection

$$H_{\text{an}}^s(X; 1 + \mathcal{O}^{(r^2)}) \rightarrow H_{\text{an}}^s(X; 1 + \mathcal{O}^{(r)}). \quad (14)$$

Il suffit de prouver que  $H_{\text{an}}^s(X; 1 + \mathcal{O}^{(r)}) = 0$  pour  $r$  petit. Si  $r < |p|$  et  $\|x\| < r$ , alors pour tout  $n$ , on a<sup>26</sup>

$$\left\| \frac{x^n}{n!} \right\| < \|x\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{x^n}{n} \right\| < \|x\|.$$

Les séries usuelles du logarithme et de l'exponentielle sont bien définies et vérifient

$$\|\exp(x) - 1\| = \|\log(1 + x)\| = \|x\|$$

et elles induisent des morphismes inverses l'un de l'autre,

$$\exp : \mathcal{O}^{(r)} \xrightarrow{\sim} 1 + \mathcal{O}^{(r)} \quad \text{et} \quad \log : 1 + \mathcal{O}^{(r)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{(r)},$$

d'où l'annulation de  $H_{\text{an}}^s(X; 1 + \mathcal{O}^{(r)})$  par hypothèse.  $\square$

Les théorèmes 5.1 et 5.6 et les corollaires 5.3 et 5.4 de la section 5 permettent d'appliquer directement ce résultat et d'obtenir (on utilise partout la topologie analytique) :

**Corollaire 5.14.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (1) *Les arrangements tubulaires fermés  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathcal{O}^{**}$ -acycliques.*
- (2) *Les espaces projectifs  $\mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d$  sont  $\mathcal{O}^{**}$ -acycliques.*
- (3) *La cohomologie des fibrations  $X_t^d(\beta)$  pour le faisceau  $\mathcal{O}^{**}$  est concentrée en degrés 0 et  $t$ .*

Le résultat précédent nous permet d'appliquer le lemme 5.9 pour obtenir une version multiplicative de la décomposition en éléments simples du corollaire 5.10.

25. Il est à noter que nous avons utilisé l'hypothèse d'injectivité de  $H_{\text{an}}^t(X, \mathcal{O}^{(r)}) \rightarrow H_{\text{an}}^t(X, \mathcal{O}^{(r')})$  pour montrer l'annulation de  $H_{\text{an}}^{t-1}(X; 1 + \mathcal{O}^{(r)})$ .

26. Justifions la première inégalité. Par hypothèse, on a supposé que  $p^{1+\varepsilon}$  divisait  $x$  pour  $\varepsilon$  un rationnel assez petit et on rappelle l'identité  $v_p(n!) = (n - s_p(n))/(p-1) \leq n-1$  avec  $s_p(n)$  la somme des chiffres dans l'écriture de  $n$  en base  $p$ , d'où  $\|x^{n-1}/n!\| < 1$ . On en déduit alors  $\|x^n/n!\| < \|x\|$ .

**Corollaire 5.15** (décomposition en éléments simples). *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement tubulaire fermé, on a*

$$\mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A})) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ |\mathcal{B}| = \text{rg}(\mathcal{B}) < d+1}} \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{B})).$$

## 6. Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathbb{G}_m$

**6A. Cohomologie des fibrations  $X_t^d(\beta)$ .** Nous souhaitons montrer le théorème suivant :

**Théorème 6.1.** *Soient  $s \geq 1$  et  $t \geq 1$ . Les fonctions inversibles de  $X_t^d(\beta)$  sont constantes et l'application  $f^*$  en cohomologie donnée par la fibration  $f : X_t^d(\beta) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  induit une décomposition*

$$H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m) \cong H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^{**}) \times H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathbb{G}_m). \quad (15)$$

*De plus, l'inclusion  $\iota : X_t^d(\beta) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d$  induit une bijection entre  $H_{\text{an}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$  et le facteur direct  $H_{\text{an}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathbb{G}_m)$ . Enfin, pour tout corps  $F$ , on a une identification*

$$H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathbb{G}_m) = H_{\text{zar}}^s(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } s = 1, \\ \{0\} & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

**Corollaire 6.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement tubulaire fermé. La cohomologie analytique à coefficients dans  $\mathbb{G}_m$  de  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  s'annule en degré supérieur ou égal à  $\text{rg}(\mathcal{A})$ .*

*Démonstration du théorème 6.1.* D'après le théorème 3.5 point 4, les recouvrements  $\mathcal{V}(\beta)$  et  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  ont des intersections  $\mathbb{G}_m$ -acycliques et on se ramène à calculer la cohomologie de Čech sur ces recouvrements. Pour toute intersection  $V(\beta)_I$ , on fixe une trivialisations  $f^{-1}(V(\beta)_I) \cong V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_{i_0})$  pour  $i_0 \in I$  et on a, d'après le lemme 4.4,

$$\mathcal{O}^*(V(\beta)_I) = L^* \mathcal{O}^{**}(V(\beta)_I) \times T_I^{(t)}$$

et

$$\mathcal{O}^*(f^{-1}(V(\beta)_I)) = L^* \mathcal{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \times T_I^{(t)},$$

où  $T_I^{(t)} = \langle \tilde{z}_i / \tilde{z}_j : i, j \in I \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \subset \langle \tilde{z}_i / \tilde{z}_j : i, j \in \llbracket 0, t \rrbracket \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$ .

Introduisons le complexe  $(C^i(T_{\bullet}^{(t)}))_{0 \leq i \leq t} := (\bigoplus_{I \subset \llbracket 0, t \rrbracket : |I|=i+1} T_I^{(t)})_i$  avec pour différentielles les sommes alternées des inclusions. C'est un facteur direct du complexe de Čech  $\check{C}^*(X_t^d(\beta); \mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta)))$  et on en déduit un isomorphisme

$$\check{H}^s(X_t^d(\beta); \mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong \check{H}^s(X_t^d(\beta); L^* \mathcal{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \times H^s(C^*(T_{\bullet}^{(t)})). \quad (16)$$

Nous allons, dans la suite de l'argument, calculer les deux termes apparaissant dans ce produit direct. Commençons par la cohomologie du complexe  $C^*(T_{\bullet}^{(t)})$ .

**Proposition 6.3.** *On a pour tout corps  $F$*

$$H_{\text{zar}}^s(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t; \mathbb{G}_m) \cong H^s(C^*(T_{\bullet}^{(t)})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } s = 1, \\ \{0\} & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Nous allons procéder en calculant  $H_{\text{zar}}^s(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t; \mathbb{G}_m)$  de deux manières différentes. Dans un premier temps, nous utiliserons la suite exacte (17) (voir plus bas) pour donner une expression explicite à ces groupes de cohomologie. Puis, nous étudierons la cohomologie de Čech de  $\mathbb{G}_m$  sur le recouvrement standard  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  de l'espace projectif pour relier  $H_{\text{zar}}^s(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t; \mathbb{G}_m)$  à la cohomologie du complexe  $\mathcal{C}^*(T_{\bullet}^t)$ . (Cet argument pourrait être vu comme un analogue algébrique de la décomposition (16).)

Pour réaliser ces deux étapes, nous allons rappeler quelques propriétés du foncteur des diviseurs de Cartier. Nous renvoyons à [Hartshorne 1977, Section II.6; Görtz et Wedhorn 2010, Chapter 11, Sections 11.9–11.14] pour leur étude sur un schéma localement factoriel. Nous aurons seulement besoin ici du cas où l'espace considéré  $X = \text{Spec}(A)$  est affine de sections globales factorielles où la situation est beaucoup plus simple. Appelons  $S$  l'ensemble des éléments irréductibles dans  $A$  à un inversible près et, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , appelons  $S(U)$  les éléments  $f$  de  $S$  tels que  $V(f)$  ne rencontre pas  $U$ . Intéressons-nous (la propriété de recollement étant claire) au faisceau

$$\text{Div} : U \subset X \mapsto \mathbb{Z}[S(U)].$$

Les ouverts standards  $D(f) = \text{Spec}(A[1/f])$  de  $X$  sont encore affines de sections globales factorielles et l'ensemble des éléments irréductibles dans  $A$  à un inversible près est  $S$  privé des facteurs irréductibles de  $f$ , à savoir  $S(D(f))$ . Si on note  $\mathcal{K}_X = \text{Frac}(A)$  les fractions rationnelles sur  $X$ , on en déduit l'identité

$$\text{Div}(D(f)) = \mathcal{K}_X / \mathcal{O}^*(D(f))$$

par factorialité de  $A[1/f]$ . Comme les ouverts standards forment une base de voisinage de  $X$ , on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{K}_X \rightarrow \text{Div} \rightarrow 0. \quad (17)$$

De plus,  $\text{Div}$  est flasque par construction et le faisceau constant  $\mathcal{K}_X$  l'est aussi par irréductibilité de  $X$ .

Revenons à notre cas d'étude. Le recouvrement standard  $\mathcal{V}$  de l'espace projectif est constitué d'ouverts affines dont les sections globales sont factorielles. On peut construire comme dans la discussion précédente le faisceau  $\text{Div}$  sur chacun de ces ouverts  $V_i \in \mathcal{V}$ , et ces derniers se recollent sur l'espace projectif tout entier, car chaque  $V_i \cap V_j$  est encore affine de sections factorielles. Par recollement, on obtient encore une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t} \xrightarrow{\pi} \text{Div} \rightarrow 0$$

où les faisceaux  $\mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t}$  et  $\text{Div}$  sont encore flasques;<sup>27</sup> ils n'ont pas de cohomologie en degré strictement positif. Par suite exacte longue, on en déduit les égalités

$$\begin{aligned} H_{\text{zar}}^s(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t; \mathbb{G}_m) &= 0 \quad \text{si } s \geq 2, \\ H_{\text{zar}}^1(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t; \mathbb{G}_m) &= \text{Div}(\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t) / \pi(\mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{zar},F}^t}) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

27. C'est une notion locale.



Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les sections globales de  $\text{Div}$  sur l'espace projectif s'identifient au module libre sur  $\mathbb{Z}$  engendré par les éléments irréductibles de  $K[z_0, \dots, z_d]$  à une unité près et que  $\pi(\mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{zar}, F}^t})$  s'identifie au sous-ensemble des éléments de masse totale nulle. L'isomorphisme ci-dessus est alors induit par le degré.

On relie maintenant  $H_{\text{zar}}^*(\mathbb{P}_{\text{zar}, F}^t; \mathbb{G}_m)$  à  $H^*(\mathcal{C}^*(T_{\bullet}^t))$ . On voit chaque intersection  $V_I := \bigcap_{i \in I} V_i$  comme le spectre d'un anneau factoriel et on déduit de (17), soit

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{K}_{V_I} \rightarrow \text{Div} \rightarrow 0,$$

que chaque intersection  $V_I$  est  $\mathbb{G}_m$ -acyclique.<sup>28</sup> En particulier, on peut calculer  $H_{\text{zar}}^*(\mathbb{P}_{\text{zar}, F}^t; \mathbb{G}_m)$  via la cohomologie de Čech sur le recouvrement  $\mathcal{V}$  qui admet la décomposition

$$\check{H}^s(\mathbb{P}_{\text{zar}, F}^t; \mathbb{G}_m, \mathcal{V}) = \check{H}^s(\mathbb{P}_{\text{zar}, F}^t; F^*, \mathcal{V}) \times H^s(\mathcal{C}^*(T_{\bullet}^t)) = H^s(\mathcal{C}^*(T_{\bullet}^t)).$$

La dernière égalité s'obtient par contractibilité du nerf de  $\mathcal{V}$ , ce qui termine l'argument.  $\square$

Étudions maintenant le terme  $\check{H}^s(X_t^d(\beta); L^* \mathcal{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta)))$  et décrivons un peu plus précisément le complexe de Čech associé. Pour toute partie  $I$ , on a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow 1 + \mathfrak{m}_L \rightarrow L^* \times \mathcal{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \rightarrow L^* \mathcal{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \rightarrow 1,$$

d'où une suite exacte au niveau des complexes de Čech sur le recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  et une suite exacte longue entre les cohomologies associées. Comme le nerf du recouvrement  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  est contractile, on a,<sup>29</sup> pour  $s \geq 1$ ,

$$\check{H}^s(X_t^d(\beta); 1 + \mathfrak{m}_L, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = \check{H}^s(X_t^d(\beta); L^*, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = 0.$$

On en déduit une suite d'isomorphismes

$$\check{H}^s(X_t^d(\beta); L^* \mathcal{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong \check{H}^s(X_t^d(\beta); \mathcal{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^{**}),$$

où le dernier isomorphisme s'obtient par acyclicité des polycouronnes (théorème 3.5 point 2 et lemme 5.13).

Revenons à la cohomologie des fibrations. Dans le cas particulier où  $t = d$  et  $f = \text{Id}$ , on traite alors le cas de l'espace projectif. D'après (16), le corollaire 5.14 point 2 et la proposition 6.3, on a pour  $s \geq 1$  des isomorphismes

$$H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig}, L}^d; \mathbb{G}_m) \cong H^s(\mathcal{C}^*(T_{\bullet}^d)) = \begin{cases} L^* & \text{si } s = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } s = 1, \\ \{0\} & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

**Remarque 6.4.** L'identification ci-dessus entre les groupes de degré 1 est explicite en termes de fibrés en droite. On voit que la famille de fonctions inversibles  $(\tilde{z}_i^k / \tilde{z}_j^k)_{0 \leq i, j \leq d}$  apparaissant dans le diagramme

28. En degré 1, nous avons utilisé l'égalité  $\text{Div}(V_I) = \mathcal{K}_X / \mathcal{O}^*(V_I)$  qui découle de la construction de  $\text{Div}$ .

29. Pour  $s \geq 1$ , cet argument prouve aussi l'annulation de  $\check{H}^s(X_t^d(\beta); A, f^*(\mathcal{V}(\beta)))$  pour tout faisceau constant  $A$ , ce qui établit  $H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta); A) = 0$  par le théorème 3.5. Enfin, grâce au lemme 5.7, nous obtenons pour tout arrangement tubulaire  $\mathcal{A}$  l'annulation  $H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), A)$ .

(10) forme un cocycle dans  $\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(d)})$ . Cela prouve que l'isomorphisme  $\mathbb{Z} \cong \text{Pic}(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d)$  est donné par  $k \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d}(k)$ .

Dans le cas général, on voit que la fibration  $f$  identifie les facteurs directs isomorphes à  $\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(d)})$  dans les complexes  $\check{\mathcal{C}}^\bullet(X_t^d(\beta); \mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta)))$  et  $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d; \mathbb{G}_m, \mathcal{V}(\beta))$ . La décomposition (16) devient

$$H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m) \cong H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta), \mathcal{O}^{**}) \times H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$$

pour  $s \geq 1$ . En degré 0, on a

$$\mathcal{O}^*(X_t^d(\beta)) = \check{H}^0(X_t^d(\beta); L^* \mathcal{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = L^* \mathcal{O}^{**}(X_t^d(\beta)) = L^*,$$

car  $H^0(\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(t)})) = 0$  (voir [proposition 6.3](#)) et  $\mathcal{O}^{**}(X_t^d(\beta)) = 1 + \mathfrak{m}_L$  (voir [corollaire 5.4](#)).

Nous terminons l'argument en caractérisant l'image de  $H_{\text{an}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$  dans  $H_{\text{an}}^*(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m)$  dans la décomposition (16).

**Lemme 6.5.** *L'inclusion  $\iota : X_t^d(\beta) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d$  induit un isomorphisme de  $H_{\text{an}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$  sur le facteur direct  $H_{\text{an}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$  de  $H_{\text{an}}^*(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer l'isomorphisme en degré 1, car les groupes en degrés supérieurs sont nuls et les sections constantes sont identifiées en degré 0. On rappelle que l'espace

$$X_t^d(\beta) = \{z = [z_0, \dots, z_d] \in \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \exists i \leq t, \forall j \leq d, |z_i| \geq |\varpi|^{b_i} |z_j|\}$$

admet un recouvrement

$$X_t^d(\beta) = \bigcup_{i \leq t} \{z = [z_0, \dots, z_d] \in \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \tilde{z}_i \neq 0 \text{ et } \forall j \leq t, |\tilde{z}_i| \geq |\tilde{z}_j|\} = \bigcup_{i \leq t} f^*(V(\beta))_i.$$

De plus, on a pour  $0 \leq i \leq d$  la famille d'ouverts

$$V_i := \{z = [z_0, \dots, z_d] \in \mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \tilde{z}_i \neq 0\}$$

qui recouvre l'espace projectif tout entier et qui vérifie  $f^*(V(\beta))_i \subset V_i$ . La famille de fonctions inversibles

$$\left( \frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j} \right)_{0 \leq i, j \leq d} \in \prod_{i, j} \mathcal{O}^*(V_i \cap V_j) = \check{\mathcal{C}}^1(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m, \mathcal{V})$$

définit un cocycle et correspond donc à un fibré en droite sur  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d$ . D'après la [remarque 6.4](#), la classe de ce fibré engendre  $H_{\text{an}}^1(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$ . Par compatibilité des recouvrements  $f^*(\mathcal{V}(\beta))$  et  $\mathcal{V}$ , la restriction de cette classe à  $X_t^d(\beta)$  est donnée par le cocycle

$$\left( \frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j} \right)_{0 \leq i, j \leq t} \in \prod_{i, j} \mathcal{O}^*(f^*(V(\beta))_i \cap f^{-1}(V(\beta))_j) = \check{\mathcal{C}}^1(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta)))$$

qui, toujours par la [remarque 6.4](#), engendre le facteur direct  $H_{\text{an}}^1(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m)$  de  $H_{\text{an}}^1(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m)$ . Ceci conclut l'argument.  $\square$

**Remarque 6.6.** On a en fait montré un résultat plus fort; on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{an}}^s(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m) & \xleftarrow{\iota^*} & H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d, \mathbb{G}_m) \\
 \uparrow f^* & & \searrow \sim \\
 H_{\text{an}}^s(\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t, \mathbb{G}_m) & & \varphi^*
 \end{array}$$

où  $\varphi$  est le morphisme de  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  dans  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^d$  donné par  $[z_0, \dots, z_t] \mapsto [z_0, \dots, z_t, 0, \dots, 0]$ . Par contre, les morphismes au niveau des espaces ne commutent pas.

Ainsi tous les points ont été démontrés.  $\square$

**6B. Cohomologie des arrangements tubulaires fermés.** Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{G}_m$  pour les arrangements tubulaires fermés et ainsi donner l'un des résultats principaux de cet article.

**Théorème 6.7.** *Pour tout arrangement tubulaire fermé  $\mathcal{A}$ , les intersections  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sont  $\mathbb{G}_m$ -acycliques.*

*Démonstration.* On peut appliquer le [lemme 5.7](#), car la cohomologie des unions  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  à coefficients dans  $\mathbb{G}_m$  s'annule en degré supérieur ou égal à  $\text{rg}(\mathcal{A})$  d'après le [corollaire 6.2](#) où  $\text{rg}(\mathcal{A}) \leq |\mathcal{A}|$ .  $\square$

Nous avons aussi un résultat de structure pour les fonctions inversibles d'un arrangement tubulaire fermé. Nous aurons besoin de quelques notations.

**Définition 6.8.** Si  $S$  est un ensemble fini et  $A$  est un anneau, on note le sous-ensemble  $A[S]^0 \subset A[S]$  du module libre sur  $A$  engendré par  $S$  constitué des éléments de masse totale nulle. <sup>30</sup>

**Remarque 6.9.** Si  $\mathcal{A}$  est un arrangement tubulaire fermé, nous faisons le choix d'un système de représentants des éléments de  $\mathcal{A}$  par des éléments de  $\mathcal{H}$  puis par des vecteurs unimodulaires que l'on voit comme des formes linéaires  $(l_a)_{a \in \mathcal{A}}$ . Cela permet d'identifier  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0$  au sous-groupe de  $\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}))$

$$\left\langle \frac{l_a(z)}{l_b(z)} : a, b \in \mathcal{A} \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}.$$

**Théorème 6.10.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement tubulaire fermé. On a un isomorphisme*

$$\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) / L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A})) \simeq \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0.$$

**Remarque 6.11.** Le théorème précédent montre plus précisément que la composée

$$\mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0 \subset \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) \twoheadrightarrow \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) / L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}))$$

ne dépend pas du choix du système de représentants et est un isomorphisme.

30. C'est-à-dire les éléments  $\sum_{s \in S} a_s \delta_s$  tels que  $\sum_{s \in S} a_s = 0$ .

*Démonstration.* Comme dans la [remarque 6.9](#), pour tout voisinage tubulaire  $a \in \mathcal{A}$ , on fixe une forme linéaire  $l_a$  représentée par un vecteur unimodulaire encore noté  $a$  telle que  $a = \ker(l_a)(|\varpi^n|)$ .

On introduit un faisceau  $T$  grâce aux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}^{**} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m/\mathcal{O}^{**} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow L^*/(1 + \mathfrak{m}_L) \rightarrow \mathbb{G}_m/\mathcal{O}^{**} \rightarrow T \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'après le [théorème 6.1](#), les flèches naturelles  $H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{O}^{**}) \rightarrow H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m)$  sont injectives et les espaces  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  sont acycliques pour les faisceaux constants ([note 29](#)). On en déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned} H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m/\mathcal{O}^{**}) &= \frac{H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m)}{H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{O}^{**})} = \begin{cases} L^*/(1 + \mathfrak{m}_L) & \text{si } s = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } s = 1 \text{ et } |\mathcal{A}| \neq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), T) &= \frac{H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m/\mathcal{O}^{**})}{H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), L^*/(1 + \mathfrak{m}_L))} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } s = 1 \text{ et } |\mathcal{A}| \neq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où l'acyclicité des espaces  $\text{Int}(\mathcal{A})$  pour les faisceaux  $\mathbb{G}_m/\mathcal{O}^{**}$  et  $T$  par le [lemme 5.7](#). En particulier, la cohomologie à coefficients dans  $T$  de  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  peut se calculer grâce au complexe de Čech sur le recouvrement  $\mathcal{A}^c$  constitué des complémentaires des voisinages tubulaires  $a \in \mathcal{A}$ . On sait aussi que  $\mathcal{O}^{**}$  et les faisceaux constants (voir [note 29](#)) n'ont pas de cohomologie en degré supérieur ou égal à 1 sur  $\text{Int}(\mathcal{A})$ , d'où les égalités

$$(\mathbb{G}_m/\mathcal{O}^{**})(\text{Int}(\mathcal{A})) = \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}))/\mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A})) \quad \text{et} \quad T(\text{Int}(\mathcal{A})) = \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}))/L^*\mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A})).$$

Nous chercherons à décrire les sections globales de  $T$  sur  $\text{Int}(\mathcal{A})$ . Montrons par récurrence sur  $|\mathcal{A}|$  que la flèche décrite dans la [remarque 6.11](#) est un isomorphisme

$$T(\text{Int}(\mathcal{A})) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0.$$

Le reste de l'argument consiste à relier les sections de  $T$  sur  $\text{Int}(\mathcal{A})$  aux groupes  $H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), T)$ .

Quand  $|\mathcal{A}| = 1$ , l'espace  $\text{Int}(\mathcal{A})$  est une boule et on a directement  $\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) = L^*\mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}))$ .

Pour  $|\mathcal{A}| = 2$ , on note  $l_a, l_b$  les deux formes linéaires associées. La suite exacte de Mayer–Vietoris établit un isomorphisme  $T(\text{Int}(\mathcal{A})) \cong H_{\text{an}}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), T) \cong \mathbb{Z}$ . De plus, d'après la discussion précédente, la flèche surjective  $\mathbb{G}_m \rightarrow T$  induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) & \xlongequal{\quad} & \check{C}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{A}^c, \mathbb{G}_m) & \twoheadrightarrow & H_{\text{an}}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}))/L^*\mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A})) & \xlongequal{\quad} & \check{C}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{A}^c, T) & \xlongequal{\quad} & H_{\text{an}}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), T) \end{array}$$

Il suffit de prouver que  $l_a/l_b$  engendre  $\text{Pic}(\text{Uni}(\mathcal{A})) = H_{\text{an}}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m)$ . En suivant l'[exemple 2.5](#), on peut trouver un changement de variables tel que

$$\begin{cases} a = e_0, b = e_1 \text{ ou} \\ a = e_0, b = e_0 + \varpi^k e_1 \text{ avec } 0 < k < n. \end{cases}$$

Dans le premier cas, on a  $\text{Uni}(\mathcal{A}) \cong X_1^d(n, n)$  et les recouvrements  $\mathcal{V}(n, n)$  et  $\mathcal{A}^c$  coïncident. Mais d'après la [remarque 6.4](#), on a directement<sup>31</sup>  $\check{H}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{V}(n, n), \mathbb{G}_m) = (l_a/l_b)^{\mathbb{Z}}$ . Dans le second cas, on introduit l'ouvert  $U \subset \text{Uni}(\mathcal{A})$  (noté  $\check{H}_{e_1}^{\circ}(|\varpi^{n-k}|)^c$  dans l'[exemple 2.5](#)) défini par

$$U = \{z \in \mathbb{P}^d(C) : |z_i| \leq |\varpi^{n-k} z_1|\}.$$

Il suit que si on échange  $a$  et  $b$ , on a deux isomorphismes de  $\text{Uni}(\mathcal{A})$  vers  $X_1^d(n, n-k)$  et donc deux recouvrements  $\mathcal{V}(n, n-k)^{(1)} = \{a^c, U\}$  et  $\mathcal{V}(n, n-k)^{(2)} = \{b^c, U\}$ . Les cohomologies de Čech sur ces deux recouvrements sont bien comprises grâce à la [proposition 6.3](#) et à la [remarque 6.4](#), et on a

$$\check{H}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{V}(n, n-k)^{(1)}, \mathbb{G}_m) = \left(\frac{l_a}{l_{e_1}}\right)^{\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \check{H}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{V}(n, n-k)^{(2)}, \mathbb{G}_m) = \left(\frac{l_b}{l_{e_1}}\right)^{\mathbb{Z}}.$$

Le triplet  $(l_a/l_b, l_b/l_{e_1}, l_{e_1}/l_a)$  définit un 1-cocycle sur le recouvrement  $\{a^c, b^c, U\}$  dont l'image engendre  $\check{H}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{V}(n, n-k)^{(1)}, \mathbb{G}_m)$  d'après l'équation qui précède. Sa projection  $(l_a/l_b, l_b/l_{e_1}, l_{e_1}/l_a) \mapsto l_a/l_b$  sur la cohomologie sur le recouvrement  $\mathcal{A}^c$  engendre ainsi encore

$$\check{H}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{A}^c, \mathbb{G}_m) = H_{\text{an}}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m),$$

ce qui conclut l'argument.

Si  $|\mathcal{A}| = 3$ , on se donne encore  $l_a, l_b, l_c$  des formes linéaires associées aux voisinages tubulaires. Étudions le complexe  $\check{C}^{\bullet}(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{A}^c, T) = \check{C}^{\bullet}$  qui calcule les groupes  $H_{\text{an}}^s(\text{Uni}(\mathcal{A}), T)$ . Quand  $s \neq 1$ , tous ces groupes ainsi que  $\check{C}^3$  sont nuls et on obtient l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow H_{\text{an}}^1(\text{Uni}(\mathcal{A}), T) \rightarrow \check{C}^1/\delta(\check{C}^0) \rightarrow \check{C}^2 \rightarrow 0. \quad (18)$$

On a  $\check{C}^2 = T(\text{Int}(\mathcal{A}))$  mais aussi, d'après les cas de cardinal 1 et 2, les identités

$$\begin{aligned} \check{C}^0 &= T(\text{Int}(\{a\})) \times T(\text{Int}(\{b\})) \times T(\text{Int}(\{c\})) = 0, \\ \check{C}^1 &= T(\text{Int}(\{b, c\})) \times T(\text{Int}(\{c, a\})) \times T(\text{Int}(\{a, b\})) = \left(\frac{l_b}{l_c}\right)^{\mathbb{Z}} \times \left(\frac{l_c}{l_a}\right)^{\mathbb{Z}} \times \left(\frac{l_a}{l_b}\right)^{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

En remplaçant les termes précédents dans la suite exacte (18), on obtient

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \left(\frac{l_b}{l_c}\right)^{\mathbb{Z}} \times \left(\frac{l_c}{l_a}\right)^{\mathbb{Z}} \times \left(\frac{l_a}{l_b}\right)^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\beta} T(\text{Int}(\mathcal{A})) \rightarrow 0,$$

avec  $\beta$  le produit des trois termes. Il suffit maintenant de prouver que  $\text{Im } \alpha = \ker \beta$  coïncide avec le sous-groupe  $G$  engendré par le triplet  $(l_b/l_c, l_c/l_a, l_a/l_b)$ . On a clairement l'inclusion  $G \subset \ker \beta$ . Le

31. On peut aussi utiliser le fait que  $\text{Int}(\mathcal{A})$  est ici une polycouronne et déduire le résultat du [lemme 4.4](#).

quotient  $\ker \beta/G$  est de torsion<sup>32</sup> et s'injecte dans le groupe  $(l_b/l_c)^{\mathbb{Z}} \times (l_c/l_a)^{\mathbb{Z}} \times (l_a/l_b)^{\mathbb{Z}}/G$  qui est sans torsion. On en déduit l'annulation de  $\ker \beta/G = 0$  ainsi que les isomorphismes  $T(\text{Int}(\mathcal{A})) \cong (l_b/l_c)^{\mathbb{Z}} \times (l_c/l_a)^{\mathbb{Z}} \times (l_a/l_b)^{\mathbb{Z}}/G \cong \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0$ .

Maintenant  $|\mathcal{A}| \geq 4$ , et supposons le résultat pour tout arrangement tubulaire  $\mathcal{B}$  tel que  $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$ . On note encore  $\check{C}^\bullet$  le complexe  $\check{C}^\bullet(\text{Uni}(\mathcal{A}), \mathcal{A}^c, T)$ . On connaît l'annulation des groupes de cohomologie  $H_{\text{an}}^{|\mathcal{A}|-1}(\text{Uni}(\mathcal{A}), T) = H_{\text{an}}^{|\mathcal{A}|-2}(\text{Uni}(\mathcal{A}), T) = 0$ , d'où une suite exacte

$$\check{C}^{|\mathcal{A}|-3} \rightarrow \check{C}^{|\mathcal{A}|-2} \rightarrow \check{C}^{|\mathcal{A}|-1} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Mais par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \check{C}^{|\mathcal{A}|-3} &= \bigoplus_{c,d \in \mathcal{A}} T(\text{Int}(\mathcal{A} \setminus \{c, d\})) = \bigoplus_{c,d \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c, d\}]^0, \\ \check{C}^{|\mathcal{A}|-2} &= \bigoplus_{c \in \mathcal{A}} T(\text{Int}(\mathcal{A} \setminus \{c\})) = \bigoplus_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c\}]^0. \end{aligned}$$

En remplaçant ces deux termes et en observant que  $\check{C}^{|\mathcal{A}|-1} = T(\text{Int}(\mathcal{A}))$ , la suite exacte (19) devient

$$\bigoplus_{c,d \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c, d\}]^0 \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c\}]^0 \rightarrow T(\text{Int}(\mathcal{A})) \rightarrow 0.$$

Il reste à établir l'isomorphisme  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0 \cong \text{Coker}(\varphi)$ . Chaque fraction  $l_a/l_b$  peut se voir dans  $\mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c, d\}]^0$  ou  $\mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c\}]^0$  pour  $a, b, c, d \in \mathcal{A}$  distincts. Pour les distinguer, nous introduisons la notation

$$\left(\frac{l_a}{l_b}\right)^{(c,d)} \in \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c, d\}]^0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{l_a}{l_b}\right)^{(c)} \in \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c\}]^0.$$

Chacune des familles  $((l_a/l_b)^{(c,d)})_{a,b,c,d \in \mathcal{A}}$ ,  $((l_a/l_b)^{(c)})_{a,b,c \in \mathcal{A}}$  engendre  $\bigoplus_{c,d \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c, d\}]^0$  et  $\bigoplus_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c\}]^0$ , respectivement. Le groupe  $\text{Im}(\varphi)$  est engendré par les éléments  $\varphi((l_a/l_b)^{(c,d)}) = (l_a/l_b)^{(c)}(l_b/l_a)^{(d)}$ . Ainsi, la flèche

$$\bigoplus_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\mathcal{A} \setminus \{c\}]^0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0, \quad \left(\frac{l_a}{l_b}\right)^{(c)} \mapsto \frac{l_a}{l_b},$$

induit l'isomorphisme  $\text{Coker}(\varphi) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0$  voulu. □

## 7. Étude des arrangements algébriques généralisés

**Théorème 7.1.** *Si  $\mathcal{A}$  est un arrangement algébrique généralisé, alors  $\text{Int}(\mathcal{A})$  est acyclique pour les faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$  et  $\mathbb{G}_m$  en topologie analytique. Les sections sur  $\text{Int}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{O}^+$ ,  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$  sont constantes et on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow L^* \rightarrow \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0 \rightarrow 0.$$

32. C'est un quotient de  $\mathbb{Z}$  par un sous-groupe non trivial.

*Démonstration.* Considérons la famille  $(\mathcal{A}_n)_n$  d'arrangements tubulaires fermés compatible définie dans la [remarque 2.2](#). On obtient alors un recouvrement croissant de  $\text{Int}(\mathcal{A}) = \bigcup \text{Int}(\mathcal{A}_n)$  qui en fait un espace analytique quasi Stein. Si  $\mathcal{F}$  est l'un des faisceaux  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$ ,  $\mathbb{G}_m$ , on a la suite exacte

$$0 \rightarrow R^1 \varprojlim_n H_{\text{an}}^{s-1}(\text{Int}(\mathcal{A}_n), \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_n H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}_n), \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Par acyclicité des arrangements tubulaires d'hyperplans (voir le [théorème 5.6](#), le [corollaire 5.14](#) et le [théorème 6.10](#)), on a

$$H_{\text{an}}^s(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathcal{F}) = \begin{cases} \varprojlim_n \mathcal{F}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) & \text{si } s = 0, \\ R^1 \varprojlim_n \mathcal{F}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) & \text{si } s = 1, \\ 0 & \text{si } s \geq 2. \end{cases}$$

On peut appliquer la [proposition 4.5](#) grâce au point technique du [corollaire 5.12](#) pour obtenir l'acyclicité de  $\text{Int}(\mathcal{A})$  pour  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$ . On en déduit aussi la description des sections globales de  $\mathcal{O}^+$ ,  $\mathcal{O}^{(r)}$ ,  $\mathcal{O}^{**}$ , ce qui donne en particulier une autre démonstration de [[Berkovich 1995a](#), Lemma 3].

Pour  $\mathbb{G}_m$ , on a ([théorème 6.10](#)) une suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \rightarrow (L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)))_n \rightarrow (\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n)))_n \rightarrow (\mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0)_n \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur  $\varprojlim_n$ , on obtient une suite exacte longue

$$0 \rightarrow L^* \rightarrow \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) \rightarrow \mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0 \rightarrow R^1 \varprojlim_n L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) \rightarrow R^1 \varprojlim_n \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) \rightarrow R^1 \varprojlim_n \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0.$$

On a  $R^1 \varprojlim_n L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) = R^1 \varprojlim_n \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0 = 0$  d'après la surjectivité de  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}_{n+1}]^0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0$  et la [proposition 4.5](#). Donc

$$\text{Pic}_L(\text{Int}(\mathcal{A})) = R^1 \varprojlim_n \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) = 0$$

et la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow L^* \rightarrow \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) \rightarrow \mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0 \rightarrow 0. \quad \square$$

## 8. Quelques commentaires sur la cohomologie étale et de de Rham des arrangements d'hyperplans

**8A. Cohomologie étale  $l$ -adique et de de Rham.** En appliquant la suite exacte de Kummer, on obtient d'après les [théorèmes 6.7](#), [6.10](#) et [7.1](#) :

**Corollaire 8.1.** *Soit  $m$  un entier. On a les diagrammes suivants.*

(1) *Si  $\mathcal{A}_n$  est un arrangement tubulaire fermé et  $m$  est premier à  $p$  :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n))/L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) & \xrightarrow{\kappa} & H_{\text{ét}}^1(\text{Int}(\mathcal{A}_n), \mu_m)/\kappa(L^*) \\ \uparrow & & \wr \uparrow \\ \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0 \end{array}$$



(2) Si  $\mathcal{A}$  est un arrangement algébrique généralisé :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}))/L^* & \xrightarrow{\kappa} & H_{\text{ét}}^1(\text{Int}(\mathcal{A}), \mu_m)/\kappa(L^*) \\ \uparrow & & \wr \uparrow \\ \mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0 \end{array}$$

*Démonstration.* Dans les deux cas, le groupe de Picard de  $\text{Int}(\mathcal{A})$  est trivial, d'où on obtient par la suite de Kummer l'isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^1(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) / (\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})))^m.$$

Dans le second cas, la suite exacte du [théorème 7.1](#) devient

$$0 \rightarrow L^*/(L^*)^m \rightarrow \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})) / (\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A})))^m \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0 \rightarrow 0,$$

car  $\mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0$  est sans  $m$ -torsion. L'argument se termine en identifiant  $L^*/(L^*)^m$  et  $\kappa(L^*)$ .

On raisonne de manière similaire dans le premier cas en étudiant la suite exacte

$$0 \rightarrow L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) / (L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)))^m \rightarrow \mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) / (\mathcal{O}^*(\text{Int}(\mathcal{A}_n)))^m \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]^0 \rightarrow 0.$$

Mais  $\mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n))$  est  $m$ -divisible quand  $m$  est premier à  $p$ , car la série formelle  $(X-1)^{1/m}$  converge sur  $\mathcal{O}^{++}(\text{Int}(\mathcal{A}_n))$ . On obtient la suite d'identifications qui conclut la preuve :

$$L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)) / (L^* \mathcal{O}^{**}(\text{Int}(\mathcal{A}_n)))^m \cong L^*/(L^*)^m \cong \kappa(L^*). \quad \square$$

**Proposition 8.2.** Soit  $n$  un entier,  $\mathcal{A}$  un arrangement tubulaire ouvert d'hyperplans d'ordre  $n$  et  $\tilde{\mathcal{A}}$  sa projection fermée d'ordre  $n-1$ . Alors l'inclusion  $\text{Int}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \text{Int}(\mathcal{A})$  induit un isomorphisme au niveau des groupes de cohomologie de de Rham, <sup>33</sup> et de même pour la cohomologie étale  $l$ -adique pour  $L = C = \hat{K}$ .

*Démonstration.* Écrivons  $H$  l'une des deux cohomologies considérées (avec  $L = C$  pour la cohomologie étale  $l$ -adique). La suite spectrale (1) calculant  $H$  pour l'arrangement  $\mathcal{A}$  ou  $\tilde{\mathcal{A}}$  sera notée  $E_j^{-r,s}(\mathcal{A})$  ou  $E_j^{-r,s}(\tilde{\mathcal{A}})$ , respectivement. Nous allons les comparer pour établir le résultat.

Considérons  $\mathcal{B}$  une partie de  $\mathcal{A}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  sa projection dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . On a  $\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg}(\tilde{\mathcal{B}}) = t+1$ . Alors il existe  $\beta \in \mathbb{N}^{t+1}$  tel que  $\text{Uni}(\mathcal{B}) \cong Y_t^d(\beta)$  et  $\text{Uni}(\tilde{\mathcal{B}}) \cong X_t^d(\beta)$ . Les deux cohomologies  $H$  vérifient l'axiome d'homotopie, i.e., pour tout espace analytique  $X$ , on a des isomorphismes induits par les projections naturelles (voir l'axiome d'homotopie à la propriété I, §2, page 55 de [Schneider et Stuhler 1991]) pour la boule ouverte. Pour la boule fermée, on obtient

$$H^*(X \times \mathbb{B}) \cong H^*(X) \cong H^*(X \times \mathring{\mathbb{B}}),$$

voir la formule Künneth [Grosse-Klönne 2002, Lemma 3, page 74] ou [Grosse-Klönne 2004a, Proposition 3.3] en de Rham et [Berkovich 1996, Lemma 3.3] en  $l$ -adique. Ainsi, les fibrations induisent des

33. Tous les groupes de cohomologie de de Rham sont calculés sur le site surconvergent. Notons que cette notion coïncide avec la cohomologie usuelle dans le cas tubulaire ouvert où les espaces sont partiellement propres.

isomorphismes entre la cohomologie de  $\mathbb{P}_{\text{rig},L}^t$  et celles de  $Y_t^d(\beta)$ ,  $X_t^d(\beta)$  compatibles par commutativité du diagramme suivant, où la flèche horizontale est l'inclusion naturelle :

$$\begin{array}{ccc} X_t^d(\beta) & \longrightarrow & Y_t^d(\beta) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{P}_{\text{rig},L}^t & \end{array}$$

Par somme directe, on obtient un isomorphisme entre les suites spectrales, d'où le résultat.  $\square$

**8B. Cohomologie étale  $p$ -adique des arrangements algébriques d'hyperplans.** Ici,  $L = C$  et on verra  $\text{Int}(\mathcal{A})$  comme un  $C$ -espace analytique par extension des scalaires pour  $\mathcal{A}$  un arrangement d'hyperplans  $K$ -rationnels.

**Proposition 8.3.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement algébrique  $K$ -rationnel, on a un isomorphisme canonique*

$$H_{\text{ét}}^*(\text{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{Q}_p) \otimes C \cong H_{\text{dR}}^*(\text{Int}(\mathcal{A})).$$

**Remarque 8.4.** Le résultat récent [Colmez et al. 2021, Theorem 5.1] semble suggérer que l'on a encore le résultat pour les arrangements algébriques généralisés.

*Démonstration.* Appelons  $E_j^{-r,s}(\text{ét})$  et  $E_j^{-r,s}(\text{dR})$  les suites spectrales calculant respectivement la cohomologie étale  $p$ -adique et la cohomologie de de Rham. Nous allons exhiber un isomorphisme canonique  $E_j^{-r,s}(\text{ét}) \otimes C \rightarrow E_j^{-r,s}(\text{dR})$ . Considérons alors une union  $\text{Uni}(\mathcal{B})$  et écrivons-la  $Z_t^d$ . Nous allons montrer

$$H_{\text{ét}}^*(Z_t^d, \mathbb{Q}_p) \otimes C \cong H_{\text{dR}}^*(Z_t^d).$$

Appelons  $\Lambda$  le faisceau constant  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ . D'après un résultat de Berkovich [1995b, Lemma 2.2], pour tout espace analytique  $S$ , tout entier  $m$  et  $\phi : \mathbb{A}_{\text{rig},S}^m \rightarrow S$ , on a  $R^i \phi_* \Lambda_{\mathbb{A}_{\text{rig},S}^m} = 0$  pour  $i \geq 1$ . On a alors, par la suite spectrale de Leray, pour toute intersection  $f^{-1}(V_I)$  de  $f^*(\mathcal{V})$ ,  $R\psi_* \Lambda_{f^{-1}(V_I)} = R\psi_* \Lambda_{V_I}$ , où  $\psi : X \rightarrow \text{Sp}(C)$  pour tout  $C$ -espace analytique  $X$ . Par Čech, on obtient que  $R\psi_* \Lambda_{Z_t^d} = R\psi_* \Lambda_{\mathbb{P}_{\text{rig},C}^t}$ , d'où un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^i(Z_t^d, \mathbb{Q}_p) \cong H_{\text{ét}}^i(\mathbb{P}_{\text{rig},C}^t, \mathbb{Q}_p).$$

De plus, d'après [de Jong et van der Put 1996, Theorem 7.3.2], on a un isomorphisme canonique  $H_{\text{ét}}^i(\mathbb{P}_{\text{rig},C}^t, \mathbb{Q}_p) \cong H_{\text{ét}}^i(\mathbb{P}_{\text{zar},C}^t, \mathbb{Q}_p)$ . Par étude du cas algébrique, on en déduit que  $H_{\text{ét}}^*(\mathbb{P}_{\text{rig},C}^t, \mathbb{Q}_p) \otimes C$  est engendré en tant que  $C$ -algèbre graduée par l'image du faisceau tordu  $\mathcal{O}(1)$  par l'application de Kummer  $\text{Pic}(\mathbb{P}_{\text{rig},C}^t) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\mathbb{P}_{\text{rig},C}^t, \mathbb{Q}_p)$ . On construit alors un isomorphisme en identifiant les classes logarithmiques. Ces morphismes commutent bien aux différentielles de la suite spectrale. On en déduit le résultat à la convergence.  $\square$

## Remerciements

Le présent travail a été en grande partie réalisé durant ma thèse à l'ENS de Lyon, et a pu bénéficier de la relecture attentive de mes maîtres de thèse Vincent Pilloni et Gabriel Dospinescu qui ont beaucoup apporté à la clarté et à la rigueur de l'exposition. Je leur en suis très reconnaissant. Je tenais aussi à remercier Najmuddin Fakhruddin pour m'avoir suggéré la preuve de la [proposition 6.3](#), Sophie Morel pour les discussions sur les travaux de Lütkebohmert et les évaluateurs pour leurs précieux conseils. Enfin, le support « logistique » réalisé par Sally Gilles et Juan Esteban Rodriguez Camargo ont rendu possible cet article.

## Bibliographie

- [Bartenwerfer 1982] W. Bartenwerfer, “Die strengen metrischen Kohomologiegruppen des Einheitspolyzylinders verschwinden”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **44**:1 (1982), 101–106. [MR](#) [Zbl](#)
- [Berkovich 1993] V. G. Berkovich, “Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), 5–161. [MR](#) [Zbl](#)
- [Berkovich 1995a] V. G. Berkovich, “The automorphism group of the Drinfeld half-plane”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321**:9 (1995), 1127–1132. [MR](#)
- [Berkovich 1995b] V. G. Berkovich, “On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces”, *Israel J. Math.* **92**:1-3 (1995), 45–59. [MR](#) [Zbl](#)
- [Berkovich 1996] V. G. Berkovich, “Vanishing cycles for formal schemes, II”, *Invent. Math.* **125**:2 (1996), 367–390. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez et al. 2020a] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł, “Cohomologie  $p$ -adique de la tour de Drinfeld: le cas de la dimension 1”, *J. Amer. Math. Soc.* **33**:2 (2020), 311–362. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez et al. 2020b] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł, “Cohomology of  $p$ -adic Stein spaces”, *Invent. Math.* **219**:3 (2020), 873–985. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez et al. 2021] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł, “Integral  $p$ -adic étale cohomology of Drinfeld symmetric spaces”, *Duke Math. J.* **170**:3 (2021), 575–613. [MR](#) [Zbl](#)
- [Drinfeld 1976] V. G. Drinfeld, “Coverings of  $p$ -adic symmetric regions”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **10**:2 (1976), 29–40. En russe; traduit en anglais dans *Funct. Anal. Appl.* **10**:2 (1976), 107–115. [MR](#) [Zbl](#)
- [Fresnel et van der Put 2004] J. Fresnel et M. van der Put, *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics **218**, Birkhäuser, Boston, 2004. [MR](#) [Zbl](#)
- [Gekeler 2020] E.-U. Gekeler, “Invertible functions on nonarchimedean symmetric spaces”, *Algebra Number Theory* **14**:9 (2020), 2481–2504. [MR](#) [Zbl](#)
- [Görtz et Wedhorn 2010] U. Görtz et T. Wedhorn, *Algebraic geometry, I: Schemes with examples and exercises*, Vieweg & Teubner, Wiesbaden, Allemagne, 2010. [MR](#) [Zbl](#)
- [Grosse-Klönne 2002] E. Grosse-Klönne, “Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis”, *Duke Math. J.* **113**:1 (2002), 57–91. [MR](#) [Zbl](#)
- [Grosse-Klönne 2004a] E. Große-Klönne, “De Rham cohomology of rigid spaces”, *Math. Z.* **247**:2 (2004), 223–240. [MR](#) [Zbl](#)
- [Grosse-Klönne 2004b] E. Grosse-Klönne, “Integral structures in automorphic line bundles on the  $p$ -adic upper half plane”, *Math. Ann.* **329**:3 (2004), 463–493. [MR](#) [Zbl](#)
- [Hartshorne 1977] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, New York-Heidelberg, 1977. [MR](#) [Zbl](#)
- [Jensen 1972] C. U. Jensen, *Les foncteurs dérivés de  $\varprojlim$  et leurs applications en théorie des modules*, Lecture Notes in Mathematics **254**, Springer, Berlin-New York, 1972. [MR](#) [Zbl](#)

- [de Jong et van der Put 1996] J. de Jong et M. van der Put, “Étale cohomology of rigid analytic spaces”, *Doc. Math.* **1** (1996), 1–56. [MR](#) [Zbl](#)
- [Junger 2022a] D. Junger, “Cohomologie de de Rham du revêtement modéré de l’espace de Drinfeld”, prépublication, 2022. [arXiv 2204.06363](#)
- [Junger 2022b] D. Junger, “Équations pour le premier revêtement de l’espace symétrique de Drinfeld”, prépublication, 2022. [arXiv 2202.01018](#)
- [Junger 2022c] D. Junger, “Un autre calcul des fonctions inversibles sur l’espace symétrique de Drinfeld”, prépublication, 2022. [arXiv 2111.10274](#)
- [van der Put 1982] M. van der Put, “Cohomology on affinoid spaces”, *Compositio Math.* **45**:2 (1982), 165–198. [MR](#) [Zbl](#)
- [Raynaud 1974] M. Raynaud, “Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$ ”, *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974), 241–280. [MR](#) [Zbl](#)
- [Schneider et Stuhler 1991] P. Schneider et U. Stuhler, “The cohomology of  $p$ -adic symmetric spaces”, *Invent. Math.* **105**:1 (1991), 47–122. [MR](#) [Zbl](#)
- [Teitelbaum 1989] J. Teitelbaum, “On Drinfeld’s universal formal group over the  $p$ -adic upper half plane”, *Math. Ann.* **284**:4 (1989), 647–674. [MR](#) [Zbl](#)
- [Teitelbaum 1990] J. Teitelbaum, “Geometry of an étale covering of the  $p$ -adic upper half plane”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **40**:1 (1990), 68–78. [MR](#) [Zbl](#)
- [Teitelbaum 1993] J. T. Teitelbaum, “Modular representations of  $\mathrm{PGL}_2$  and automorphic forms for Shimura curves”, *Invent. Math.* **113**:3 (1993), 561–580. [MR](#) [Zbl](#)

Communicated by Michael Rapoport

Received 2020-11-11    Revised 2022-01-17    Accepted 2022-03-17

[djunger@uni-muenster.de](mailto:djunger@uni-muenster.de)

*Mathematisches Institut / Mathematics Münster, Fachbereich Mathematik  
und Informatik, Universität Münster, Münster, Germany*

# Algebra & Number Theory

[msp.org/ant](http://msp.org/ant)

## EDITORS

### MANAGING EDITOR

Antoine Chambert-Loir  
Université Paris-Diderot  
France

### EDITORIAL BOARD CHAIR

David Eisenbud  
University of California  
Berkeley, USA

## BOARD OF EDITORS

Jason P. Bell	University of Waterloo, Canada	Philippe Michel	École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Bhargav Bhatt	University of Michigan, USA	Martin Olsson	University of California, Berkeley, USA
Frank Calegari	University of Chicago, USA	Irena Peeva	Cornell University, USA
J-L. Colliot-Thélène	CNRS, Université Paris-Saclay, France	Jonathan Pila	University of Oxford, UK
Brian D. Conrad	Stanford University, USA	Anand Pillay	University of Notre Dame, USA
Samit Dasgupta	Duke University, USA	Bjorn Poonen	Massachusetts Institute of Technology, USA
Hélène Esnault	Freie Universität Berlin, Germany	Victor Reiner	University of Minnesota, USA
Gavril Farkas	Humboldt Universität zu Berlin, Germany	Peter Sarnak	Princeton University, USA
Sergey Fomin	University of Michigan, USA	Michael Singer	North Carolina State University, USA
Edward Frenkel	University of California, Berkeley, USA	Vasudevan Srinivas	Tata Inst. of Fund. Research, India
Wee Teck Gan	National University of Singapore	Shunsuke Takagi	University of Tokyo, Japan
Andrew Granville	Université de Montréal, Canada	Pham Huu Tiep	Rutgers University, USA
Ben J. Green	University of Oxford, UK	Ravi Vakil	Stanford University, USA
Christopher Hacon	University of Utah, USA	Akshay Venkatesh	Institute for Advanced Study, USA
Roger Heath-Brown	Oxford University, UK	Melanie Matchett Wood	Harvard University, USA
János Kollár	Princeton University, USA	Shou-Wu Zhang	Princeton University, USA
Michael J. Larsen	Indiana University Bloomington, USA		

## PRODUCTION

[production@msp.org](mailto:production@msp.org)

Silvio Levy, Scientific Editor

---

See inside back cover or [msp.org/ant](http://msp.org/ant) for submission instructions.

---

The subscription price for 2023 is US \$485/year for the electronic version, and \$705/year (+\$65, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.


---

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

---

ANT peer review and production are managed by EditFLOW<sup>®</sup> from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**  
nonprofit scientific publishing

<http://msp.org/>

© 2023 Mathematical Sciences Publishers

# Algebra & Number Theory

Volume 17 No. 1 2023

---

Cohomologie analytique des arrangements d'hyperplans DAMIEN JUNGER	1
Distinction inside L-packets of $SL(n)$ U. K. ANANDAVARDHANAN and NADIR MATRINGE	45
Multiplicities of jumping numbers SWARAJ PANDE	83
A classification of the weak Lefschetz property for almost complete intersections generated by uniform powers of general linear forms MATS BOIJ and SAMUEL LUNDQVIST	111
A classification of modular compactifications of the space of pointed elliptic curves by Gorenstein curves SEBASTIAN BOZLEE, BOB KUO and ADRIAN NEFF	127
On unipotent radicals of motivic Galois groups PAYMAN ESKANDARI and V. KUMAR MURTY	165
Support theory for Drinfeld doubles of some infinitesimal group schemes ERIC M. FRIEDLANDER and CRIS NEGRON	217
Correction à l'article Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée YANG CAO	261