

# *Algebra & Number Theory*

Volume 17  
2023  
No. 1

Correction à l'article Sous-groupe de Brauer invariant et  
obstruction de descente itérée

Yang Cao



# Correction à l'article Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée

Yang Cao

Volume 14:8 (2020), 2151–2183

Le paragraphe 2 de l'article dans l'en-tête utilise un énoncé sur la formule de Künneth de degré 2 publié par Skorobogatov et Zarhin en 2014. Il a été remarqué que cet énoncé n'est pas correct. Nous corrigeons notre paragraphe 2, le seul affecté par cette erreur.

Section 2 of the article in the header uses a statement on Künneth's formula in degree 2 published by Skorobogatov and Zarhin in 2014. It has been pointed out that this statement is incorrect. We correct our Section 2, the only one affected by the error.

Tous les résultats de [Cao 2020] sont corrects sauf certains résultats du paragraphe 2. La proposition 2.2 ainsi que les corollaires 2.4 et 2.7 sont corrects, et ce sont les seuls résultats que nous utilisons dans le reste de l'article. Mais la formule de Künneth de degré 2 (proposition 2.6) n'est pas valide. Sa démonstration repose sur [Skorobogatov et Zarhin 2014, Proposition 2.2], qui n'est pas vraie : voir la remarque 1.2 du correctif de cet article pour un contre-exemple. Plus précisément, le morphisme noté par  $- \circ -$  dans le premier diagramme commutatif de la preuve de [Cao 2020, corollaire 2.3] n'est pas un isomorphisme. De ce fait, il y a des erreurs dans le corollaire 2.3 et donc dans le lemme 2.5 et la proposition 2.6. Dans ce corrigendum, nous corrigeons les énoncés [Cao 2020, proposition 2.6] (remplacé par le [théorème 2.1](#) ci-dessous) et aussi la démonstration de [Cao 2020, corollaire 2.7] (remplacé par le [corollaire 2.2](#) ci-dessous). De plus, dans le livre récent de Colliot-Thélène et Skorobogatov [2021], les auteurs corrigent aussi la formule de Künneth de [Skorobogatov et Zarhin 2014] en utilisant la méthode de l'auteur tirée de ce corrigendum (voir [Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021, §5.7.3]).

Dans toute cette note,  $k$  est un corps quelconque,  $k_s$  une clôture séparable de  $k$  et  $\Gamma_k := \text{Gal}(k_s/k)$ . Sauf mention explicite du contraire, une variété est une  $k$ -variété. Fixons un entier  $n \geq 2$  avec  $\text{char}(k) \nmid n$ . Soient  $U, V$  deux  $k$ -variétés géométriquement intègres. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 U \times_k V & \xrightarrow{p_2} & V \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow q_2 \\
 U & \xrightarrow{q_1} & \text{Spec } k
 \end{array} \tag{0-1}$$

MSC2020: 14G12.

Mots-clefs: Hasse principle, Brauer–Manin obstruction.

### 1. Rappels

Nous rappelons la notion de torseur universel de  $n$ -torsion, la formule de Künneth générale et l'homomorphisme  $\varepsilon$  dans [Skorobogatov et Zarhin 2014, §5] et dans [Cao 2020, (2-9)].

Soit  $X$  une  $k$ -variété géométriquement intègre. Soit  $S_X$  un  $k$ -groupe fini commutatif tel que  $n \cdot S_X = 0$  et que  $S_X^* := \text{Hom}_{k_s}(S_X, \mu_n) \cong H^1(X_{k_s}, \mu_n)$  comme  $\Gamma_k$ -modules. Pour la notion de *torseur universel de  $n$ -torsion pour  $X$* , nous renvoyons à [Cao 2020, définition 2.1]. La propriété fondamentale d'un torseur universel de  $n$ -torsion est la proposition 1.1 ci-dessous.

**Proposition 1.1** [Cao 2020, proposition 2.2]. *Soit  $\mathcal{T}_X$  un torseur universel de  $n$ -torsion pour  $X$ . Soit  $S$  un  $k$ -groupe fini commutatif tel que  $n \cdot S = 0$ . Alors, pour tout  $S$ -torseur  $Y$  sur  $X$ , il existe un unique homomorphisme  $\phi : S_X \rightarrow S$  tel que*

$$\phi_*([\mathcal{T}_X]) - [Y] \in \text{Im}(H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S)).$$

L'homomorphisme  $\phi$  dans la proposition 1.1 est appelé *le  $n$ -type de  $[Y]$* . Il induit un isomorphisme de  $\Gamma_k$ -modules

$$\tau_{X,S} : \text{Hom}_{k_s}(S_X, S) \rightarrow H^1(X_{k_s}, S), \quad \phi \mapsto \phi_*([\mathcal{T}_X]). \tag{1-1}$$

Par exemple,  $\tau_{X,\mu_n} : \text{Hom}_{k_s}(S_X, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{k_s}, \mu_n)$  est un isomorphisme.

Rappelons que  $H^1(X_{k_s}, S)$  est fini.

De plus, si  $X(k) \neq \emptyset$ , alors pour chaque  $x \in X(k)$  il existe alors un unique torseur universel de  $n$ -torsion  $\mathcal{T}_X$  pour  $X$  tel que  $x^*[\mathcal{T}_X] = 0 \in H^1(k, S_X)$  (voir [Cao 2020, p. 2157]).

Considérons le diagramme commutatif (0-1).

Rappelons la formule de Künneth dans [SGA 4 $_{1/2}$  1977]. Soit  $m$  un entier avec  $m \mid n$ . Soient  $D^-(k)$  et  $D^+(k)$  les catégories dérivées bornées respectivement à droite et à gauche de la catégorie des  $\mathbb{Z}/m$ -faisceaux étales sur le petit site de  $\text{Spec } k$ . Par abus de notation, pour un objet  $M$  de  $\text{Sh}(k)$ , on note  $M$  l'objet de  $D^+(k)$  représenté par le complexe qui consiste en  $M$  en degré 0.

Soient  $M, N$  deux  $k$ -groupes finis commutatifs tels que  $M(k_s), N(k_s)$  soient des  $\mathbb{Z}/m$ -modules plats. Alors  $M \otimes_{\mathbb{Z}/m}^L N = M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N$  et le cup-produit donne un quasi-isomorphisme ([SGA 4 $_{1/2}$  1977, Théorèmes de finitude, corollaire 1.11, p. 236] ou [Fu 2011, Corollary 9.3.5]), c'est-à-dire que

$$\cup : Rq_{1,*}M \otimes_{\mathbb{Z}/m}^L Rq_{2,*}N \cong R(q_1 \circ p_1)_*(M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N)$$

dans  $D^-(k)$ . Ceci induit le cup-produit [Fu 2011, Proposition 6.4.12]

$$\cup_j : \bigoplus_{r+s=j} R^r q_{1,*}M \otimes_{\mathbb{Z}/m} R^s q_{2,*}N \rightarrow \mathcal{H}^j(Rq_{1,*}M \otimes_{\mathbb{Z}/m}^L Rq_{2,*}N) \sim R^j(q_1 \circ p_1)_*(M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N).$$

Dans le cas où  $m = p$  est un nombre premier, puisque  $\mathbb{Z}/p$  est un corps, tout  $\mathbb{Z}/p$ -module est plat et  $- \otimes_{\mathbb{Z}/p}^L - = - \otimes_{\mathbb{Z}/p} -$ . Le cup-produit ci-dessus induit pour tout  $j$  un isomorphisme

$$\cup_j : \bigoplus_{r+s=j} R^r q_{1,*}M \otimes_{\mathbb{Z}/p} R^s q_{2,*}N \xrightarrow{\sim} R^j(q_1 \circ p_1)_*(M \otimes_{\mathbb{Z}/p} N). \tag{1-2}$$

Soit  $S$  un  $k$ -groupe fini commutatif avec  $n \cdot S = 0$ .

Pour le diagramme (0-1), la formation des  $Rq_{2,*}(S)$  sur  $\text{Spec } k$  commute avec tout changement de base [SGA 4<sub>1/2</sub> 1977, Théorèmes de finitude, théorème 1.9 (ii), p. 236], et donc on obtient

$$Rp_{1,*}p_2^*(S) \cong q_1^*Rq_{2,*}(S). \tag{1-3}$$

En fait, pour appliquer ce théorème, on choisit  $X = V$ ,  $Y = S = \text{Spec } k$ ,  $S' = U$  pour les  $X, Y, S, S'$  dans [SGA 4<sub>1/2</sub> 1977, Théorèmes de finitude, théorème 1.9, p. 236].

Rappelons maintenant l'homomorphisme  $\varepsilon$  de Skorobogatov et Zarhin.

Supposons qu'il existe des torseurs universels de  $n$ -torsion  $\mathcal{T}_U$  pour  $U$  (sous le groupe  $S_U$ ) et  $\mathcal{T}_V$  pour  $V$  (sous le groupe  $S_V$ ). Skorobogatov et Zarhin [2014, §5] introduisent un homomorphisme

$$\varepsilon' : \text{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \rightarrow H^2(U \times V, S), \quad \phi \mapsto \phi_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]), \tag{1-4}$$

où  $\cup$  est le cup-produit  $H^1(U, S_U) \times H^1(V, S_V) \rightarrow H^2(U \times V, S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V)$ .

Dans le cas où  $S := M \otimes_{\mathbb{Z}/n} N \cong M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N$  (puisque  $m \mid n$ ), on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(S_U, M) \otimes_{\mathbb{Z}/n} \text{Hom}(S_V, N) & \xrightarrow{\xi} & \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, M \otimes_{\mathbb{Z}/n} N) & \xrightarrow{=} & \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \\ \cong \downarrow \tau_{U,M} \otimes \tau_{V,N} & & & & \downarrow \varepsilon' \\ H^1(U, M) \otimes_{\mathbb{Z}/n} H^1(V, N) & \xrightarrow{\cong} & H^1(U, M) \otimes_{\mathbb{Z}/m} H^1(V, N) & \xrightarrow{\cup_2} & H^2(U \times V, S) \end{array} \tag{1-5}$$

où  $\tau_{U,M} \otimes \tau_{V,N}$  est induit par (1-1) qui est donc un isomorphisme,  $\cup_2$  est induit par (1-2) et  $\xi(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 \otimes_{\mathbb{Z}/n} \phi_2$ .

Ce diagramme est commutatif, car pour tout  $\phi_1 \in \text{Hom}(S_U, M)$ ,  $\phi_2 \in \text{Hom}(S_V, N)$ , on a

$$\cup_2 \circ (\tau_{U,M} \otimes \tau_{V,N})(\phi_1, \phi_2) = \phi_{1,*}[\mathcal{T}_U] \cup \phi_{2,*}[\mathcal{T}_V] \stackrel{(1)}{=} (\phi_1 \otimes \phi_2)_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]) = \varepsilon'(\phi_1 \otimes \phi_2) = (\varepsilon' \circ \xi)(\phi_1, \phi_2),$$

où (1) découle du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(U, S_U) \times H^1(V, S_V) & \xrightarrow{\cup} & H^2(U \times V, S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V) \\ \downarrow \phi_{1,*} & & \downarrow \phi_{2,*} \\ H^1(U, M) \times H^1(V, N) & \xrightarrow{\cup} & H^2(U \times V, S) \end{array}$$

**Remarque 1.2.** Dans le cas où  $S = \mu_n$ , le  $\varepsilon'$  dans (1-4) est essentiellement le  $\varepsilon$  dans [Skorobogatov et Zarhin 2014, §5] et dans [Cao 2020, (2-9)]. Plus précisément,  $S_V^* := \text{Hom}_{k_s}(S_V, \mu_n)$  et

$$\varepsilon : \text{Hom}_k(S_U, S_V^*) \rightarrow H^2(U \times V, \mu_n), \quad \phi \mapsto \eta_*(\phi_*[\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]),$$

où  $\eta : S_V^* \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V \rightarrow \mu_n$  est le morphisme d'évaluation. Dans ce cas, on a

$$\varepsilon \circ \varphi = \varepsilon',$$

où  $\varphi : \text{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(S_U, \text{Hom}_{k_s}(S_V, \mu_n)) = \text{Hom}_k(S_U, S_V^*)$  est l'isomorphisme canonique induit par les foncteurs adjoints  $- \otimes_{\mathbb{Z}/p} S_V$  et  $\text{Hom}_{k_s}(S_V, -)$ .

Ceci est valide, car pour tout  $\phi \in \text{Hom}_k(S_U, S_V^*)$ , on a  $\varphi^{-1}(\phi) = \eta \circ (\phi \otimes \text{id}_{S_V})$  et donc

$$\varepsilon(\phi) = \eta_*(\phi_*[\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]) = \eta_*((\phi \otimes \text{id}_V)_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V])) = \varphi^{-1}(\phi)_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]) = (\varepsilon' \circ \varphi^{-1})(\phi).$$

## 2. Théorème principal

Voici la version correcte de la formule de Künneth de degré 2, qui remplace [Cao 2020, proposition 2.6].

**Théorème 2.1.** *Supposons que  $k$  est séparablement clos. Soient  $U, V$  deux  $k$ -variétés géométriquement intègres et  $S$  un  $\mathbb{Z}/n$ -module fini (vu comme un  $k$ -groupe commutatif). Considérons le diagramme (0-1) et l'homomorphisme  $\varepsilon'$  dans (1-4) ci-dessus. Alors on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} \psi^1(S) &: H^1(U, S) \oplus H^1(V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^1(U \times V, S), \\ \psi^2(S) &: H^2(U, S) \oplus H^2(V, S) \oplus \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*, \varepsilon')} H^2(U \times V, S), \end{aligned}$$

et un homomorphisme injectif  $\psi^3(S) : H^3(U, S) \oplus H^3(V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^3(U \times V, S)$ .

*Démonstration.* Puisque  $k$  est séparablement clos,  $U(k) \neq \emptyset$  et  $V(k) \neq \emptyset$ . Fixons deux points  $u \in U(k)$ ,  $v \in V(k)$ . L'existence des sections

$$l_v : U \times v \rightarrow U \times V, \quad l_u : u \times V \rightarrow U \times V$$

de  $p_1, p_2$  impliquent que l'homomorphisme  $(p_1^*, p_2^*) : H^i(U, S) \oplus H^i(V, S) \rightarrow H^i(U \times V, S)$  est injectif et scindé pour tout  $i \geq 1$ . Soit

$$H_{\text{prim}}^2(S) := \text{Ker}(H^2(U \times V, S) \xrightarrow{(l_v^*, l_u^*)} H^2(U, S) \oplus H^2(V, S)).$$

Puisque  $[\mathcal{T}_U]|_u = 0$ ,  $[\mathcal{T}_V]|_v = 0$ , on a  $l_u^* \circ \varepsilon' = 0$  et  $l_v^* \circ \varepsilon' = 0$ , et donc  $\text{Im}(\varepsilon') \subset H_{\text{prim}}^2(S)$ .

Considérons la suite spectrale  $E_2^{i,j} = R^i q_{1,*} R^j p_{1,*}(S) \Rightarrow H^{i+j}(U \times V, S)$ . On a :

(i) Par définition, l'homomorphisme

$$H^i(U, S) = R^i q_{1,*}(S) = E_2^{i,0} \rightarrow H^i(U \times V, S)$$

est exactement  $p_1^* : H^i(U, S) \rightarrow H^i(U \times V, S)$ , qui est injectif et scindé.

(ii) Puisque

$$R p_{1,*}(S) = R p_{1,*} p_2^*(S) \stackrel{(1-3)}{\cong} q_1^* R q_{2,*}(S) = q_1^* R \Gamma(V, S), \quad (2-1)$$

tout  $R^j p_{1,*}(S)$  est le faisceau constant  $H^j(V, S)$ . La composition

$$H^j(V, S) \rightarrow H^j(U \times V, S) \rightarrow E_2^{0,j} = q_{1,*}(H^j(V, S)) = H^j(V, S)$$

est l'identité, puisqu'elle est l'identité sur  $u \times V$ . Donc  $H^j(U \times V, S) \rightarrow E_2^{0,j}$  est surjectif et scindé.

(iii) D'après (1-1),  $E_2^{1,1} = H^1(U, H^1(V, S)) \cong \text{Hom}(S_U, \text{Hom}(S_V, S)) \cong \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)$ , qui est un groupe fini. Ainsi  $|E_2^{1,1}| = |\text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)|$ .

D'après (i) et (ii),

$$H^1(U \times V, S) \cong E_2^{1,0} \oplus E_2^{0,1}, H^2(U \times V, S) \cong E_2^{2,0} \oplus E_2^{0,2} \oplus E_2^{1,1},$$

et, dans ces sommes directes,  $(p_1^*, p_2^*)$  induit les isomorphismes  $H^j(U, S) \oplus H^j(V, S) \cong E_2^{j,0} \oplus E_2^{0,j}$  pour  $j = 1, 2$ . Alors  $H_{\text{prim}}^2(S) \cong E_2^{1,1}$  et, d'après (iii),  $|\text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)| = |H_{\text{prim}}^2(S)|$ . Ainsi  $\varepsilon' : \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \rightarrow H_{\text{prim}}^2(S)$  est un isomorphisme si et seulement si  $\varepsilon'$  est injectif.

On a donc montré :

(iv)  $\psi^1(S)$  est un isomorphisme et  $\psi^3(S)$  est injectif.

(v)  $\psi^2(S)$  est un isomorphisme si et seulement si  $\psi^2(S)$  est injectif, si et seulement si  $\varepsilon'$  est injectif.

Dans le cas où  $|S|$  est un nombre premier  $p$ , on a  $S \cong \mathbb{Z}/p$  et on considère le diagramme (1-5) avec  $M \cong N \cong \mathbb{Z}/p$ . Dans ce diagramme,  $\xi$  est un isomorphisme et, d'après (1-2),  $\cup_2$  est injectif. Alors  $\varepsilon'$  est injectif et, d'après (v),  $\psi^2(S)$  est un isomorphisme.

Dans le cas général, par récurrence sur  $|S|$ , on peut supposer que  $\psi^2(S')$  est un isomorphisme pour tout  $\mathbb{Z}/n$ -module fini  $S'$  avec  $|S'| < |S|$ . Alors, si  $|S|$  n'est pas un nombre premier, il existe une suite exacte  $0 \rightarrow S_1 \rightarrow S \rightarrow S_2 \rightarrow 0$  de  $\mathbb{Z}/n$ -modules finis avec  $S_1, S_2 \neq 0$ . Ceci induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S_1) \rightarrow \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \rightarrow \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S_2)$$

et donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(U, S_2) \oplus H^1(V, S_2) & \xrightarrow{f_1} & F(S_1) & \longrightarrow & F(S) & \longrightarrow & F(S_2) \\ \downarrow \psi^1(S_2) & & \downarrow \psi^2(S_1) & & \downarrow \psi^2(S) & & \downarrow \psi^2(S_2) \\ H^1(U \times V, S_2) & \longrightarrow & H^2(U \times V, S_1) & \longrightarrow & H^2(U \times V, S) & \longrightarrow & H^2(U \times V, S_2) \end{array}$$

où  $F(S) := H^2(U, S) \oplus H^2(V, S) \oplus \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)$  et  $f_1$  est la composition

$$H^1(U, S_2) \oplus H^1(V, S_2) \xrightarrow{(\partial_U, \partial_V, 0)} H^2(U, S_1) \oplus H^2(V, S_1) \oplus \text{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S_1) = F(S_1).$$

Puisque  $|S_1|, |S_2| < |S|$ , par récurrence,  $\psi^2(S_1), \psi^2(S_2)$  sont des isomorphismes. D'après (iv),  $\psi^1(S_2)$  est un isomorphisme. Par (v) et le lemme des cinq,  $\psi^2(S)$  est injectif et donc un isomorphisme, ce qui établit le théorème.  $\square$

Soient  $U, V$  deux variétés géométriquement intègres sur  $k$ . On considère le diagramme commutatif (0-1) ci-dessus. Soit  $S$  un  $k$ -groupe fini commutatif avec  $n \cdot S = 0$ .

Si  $U(k) \neq \emptyset$ , alors il existe un tore universel de  $n$ -torsion pour  $U$ . Un point  $u \in U(k)$  induit  $u^* : R_{q_1, *S} \rightarrow S$  et un morphisme surjectif  $u^* : H^i(U, S) \rightarrow H^i(k, S)$  pour tout  $i$ . Notons

$$H_u^i(U, S) := \text{Ker}(H^i(U, S) \xrightarrow{u^*} H^i(k, S)).$$

**Corollaire 2.2.** *Sous les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que  $U(k) \neq \emptyset$ , et qu'il existe des toiseurs universels de  $n$ -torsion  $\mathcal{T}_U, \mathcal{T}_V$  comme ci-dessus. Soit  $u \in U(k)$ . Alors, pour tout  $k$ -groupe fini commutatif  $S$  avec  $n \cdot S = 0$ , on a un isomorphisme*

$$H_u^2(U, S) \oplus H^2(V, S) \oplus \mathrm{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*, \varepsilon')} H^2(U \times V, S).$$

*Démonstration.* Considérons le morphisme dans  $D^+(k)$

$$\psi := (p_1^* + p_2^*, u^* + 0) : Rq_{1,*}S \oplus Rq_{2,*}S \rightarrow (R(q_1 \circ p_1)_*S) \oplus S.$$

D'après le [théorème 2.1](#), le cône  $C_\psi$  de  $\psi$  est dans  $D^{\geq 2}(k)$  et la composition

$$\mathrm{Hom}_{k_s}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{\varepsilon'|_{k_s}} H^2(U_{k_s} \times V_{k_s}, S) = \mathcal{H}^2(R(q_1 \circ p_1)_*S) \rightarrow \mathcal{H}^2(C_\psi) \quad (2-2)$$

est un isomorphisme. Ceci induit une suite exacte

$$0 \rightarrow H_u^2(U, S) \oplus H^2(V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^2(U \times V, S) \rightarrow H^0(k, \mathcal{H}^2(C_\psi)).$$

D'après (2-2), la composition

$$\mathrm{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{\varepsilon'} H^2(U \times V, \mu_n) \rightarrow H^0(k, \mathcal{H}^2(C_\psi))$$

est un isomorphisme, d'où le résultat. □

Le [corollaire 2.2](#) et la [remarque 1.2](#) donnent directement [[Cao 2020](#), corollaire 2.7].

**Remarque 2.3.** Lv [[2020](#)] utilise [[Cao 2020](#), proposition 2.6] pour établir son lemme 3.3. Dans sa démonstration, cette proposition 2.6 peut être remplacée par le [théorème 2.1](#) ci-dessus. Donc tous les résultats de [[Lv 2020](#)] restent corrects (sauf le lemme 3.2).

## Bibliographie

- [Cao 2020] Y. Cao, “Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée”, *Algebra Number Theory* **14**:8 (2020), 2151–2183. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The Brauer–Grothendieck group*, *Ergebnisse der Math.* (3) **71**, Springer, 2021. [MR](#) [Zbl](#)
- [Fu 2011] L. Fu, *Étale cohomology theory*, Nankai Tracts in Mathematics **13**, World Sci., Hackensack, NJ, 2011. [MR](#) [Zbl](#)
- [Lv 2020] C. Lv, “A note on the Brauer group and the Brauer–Manin set of a product”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **52**:5 (2020), 932–941. [MR](#) [Zbl](#)
- [SGA 4]<sub>2</sub> [1977] P. Deligne, *Cohomologie étale* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie), *Lecture Notes in Math.* **569**, Springer, 1977. [MR](#) [Zbl](#)
- [Skorobogatov et Zarhin 2014] A. N. Skorobogatov et Y. G. Zarhin, “The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16**:4 (2014), 749–769. Corrigé à [https://www.ma.ic.ac.uk/~anskor/corrigendum\\_final.pdf](https://www.ma.ic.ac.uk/~anskor/corrigendum_final.pdf). [MR](#) [Zbl](#)

Communicated by Bjorn Poonen

Received 2021-12-02

Revised 2022-03-07

Accepted 2022-04-11

[yangcao1988@ustc.edu.cn](mailto:yangcao1988@ustc.edu.cn)

*School of Mathematical Sciences,  
University of Science and Technology of China, Hefei, China*

# Algebra & Number Theory

[msp.org/ant](http://msp.org/ant)

## EDITORS

### MANAGING EDITOR

Antoine Chambert-Loir  
Université Paris-Diderot  
France

### EDITORIAL BOARD CHAIR

David Eisenbud  
University of California  
Berkeley, USA

## BOARD OF EDITORS

Jason P. Bell	University of Waterloo, Canada	Philippe Michel	École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Bhargav Bhatt	University of Michigan, USA	Martin Olsson	University of California, Berkeley, USA
Frank Calegari	University of Chicago, USA	Irena Peeva	Cornell University, USA
J-L. Colliot-Thélène	CNRS, Université Paris-Saclay, France	Jonathan Pila	University of Oxford, UK
Brian D. Conrad	Stanford University, USA	Anand Pillay	University of Notre Dame, USA
Samit Dasgupta	Duke University, USA	Bjorn Poonen	Massachusetts Institute of Technology, USA
Hélène Esnault	Freie Universität Berlin, Germany	Victor Reiner	University of Minnesota, USA
Gavril Farkas	Humboldt Universität zu Berlin, Germany	Peter Sarnak	Princeton University, USA
Sergey Fomin	University of Michigan, USA	Michael Singer	North Carolina State University, USA
Edward Frenkel	University of California, Berkeley, USA	Vasudevan Srinivas	Tata Inst. of Fund. Research, India
Wee Teck Gan	National University of Singapore	Shunsuke Takagi	University of Tokyo, Japan
Andrew Granville	Université de Montréal, Canada	Pham Huu Tiep	Rutgers University, USA
Ben J. Green	University of Oxford, UK	Ravi Vakil	Stanford University, USA
Christopher Hacon	University of Utah, USA	Akshay Venkatesh	Institute for Advanced Study, USA
Roger Heath-Brown	Oxford University, UK	Melanie Matchett Wood	Harvard University, USA
János Kollár	Princeton University, USA	Shou-Wu Zhang	Princeton University, USA
Michael J. Larsen	Indiana University Bloomington, USA		

## PRODUCTION

[production@msp.org](mailto:production@msp.org)

Silvio Levy, Scientific Editor

---

See inside back cover or [msp.org/ant](http://msp.org/ant) for submission instructions.

---

The subscription price for 2023 is US \$485/year for the electronic version, and \$705/year (+\$65, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.


---

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

---

ANT peer review and production are managed by EditFLOW<sup>®</sup> from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**  
nonprofit scientific publishing

<http://msp.org/>

© 2023 Mathematical Sciences Publishers



# Algebra & Number Theory

Volume 17 No. 1 2023

---

Cohomologie analytique des arrangements d'hyperplans DAMIEN JUNGER	1
Distinction inside L-packets of $SL(n)$ U. K. ANANDAVARDHANAN and NADIR MATRINGE	45
Multiplicities of jumping numbers SWARAJ PANDE	83
A classification of the weak Lefschetz property for almost complete intersections generated by uniform powers of general linear forms MATS BOIJ and SAMUEL LUNDQVIST	111
A classification of modular compactifications of the space of pointed elliptic curves by Gorenstein curves SEBASTIAN BOZLEE, BOB KUO and ADRIAN NEFF	127
On unipotent radicals of motivic Galois groups PAYMAN ESKANDARI and V. KUMAR MURTY	165
Support theory for Drinfeld doubles of some infinitesimal group schemes ERIC M. FRIEDLANDER and CRIS NEGRON	217
Correction à l'article Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée YANG CAO	261