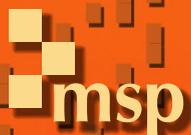


Algebra & Number Theory

Volume 17
2023
No. 3

Morphismes de périodes et cohomologie syntomique

Sally Gilles



Morphismes de périodes et cohomologie syntomique

Sally Gilles

On commence par donner la version géométrique d'un résultat de Colmez et Nizioł établissant un théorème de comparaison entre les cycles proches p -adiques arithmétiques et la cohomologie des faisceaux syntomiques. La construction locale de cet isomorphisme utilise la théorie des (φ, Γ) -modules et s'obtient en réduisant l'isomorphisme de périodes à un théorème de comparaison entre des cohomologies d'algèbres de Lie. En appliquant ensuite la méthode des « coordonnées plus générales » utilisée par Bhatt, Morrow et Scholze, on construit un isomorphisme global. On peut notamment déduire de ce théorème la conjecture semi-stable de Fontaine et Jannsen. Ce résultat a également été prouvé par (entre autres) Tsuji, via l'application de Fontaine et Messing, et par Česnavičius et Koshikawa, qui généralisent la preuve de la conjecture cristalline de Bhatt, Morrow et Scholze. On utilise l'application construite précédemment pour montrer que le morphisme de périodes de Tsuji est égal à celui de Česnavičius et Koshikawa.

We start by giving the geometric version of a result of Colmez and Nizioł establishing a comparison theorem between p -adic arithmetic nearby cycles and syntomic sheaf cohomology. The local construction of this isomorphism uses (φ, Γ) -modules and is obtained by reducing the period isomorphism to a comparison theorem between cohomologies of Lie algebras. Then, applying Bhatt, Morrow and Scholze's "more general coordinates" method, we construct a global isomorphism. We can deduce from this theorem the semistable conjecture of Fontaine and Jannsen. This result was also proved, among others, by Tsuji, using Fontaine and Messing's map, and by Česnavičius and Koshikawa, who generalize the proof of Bhatt, Morrow and Scholze's crystalline conjecture. We use the previously constructed mapping to show that Tsuji's period morphism is equal to the one of Česnavičius and Koshikawa.

1. Introduction	604
2. Cohomologie syntomique et résultat local	612
3. Anneaux de périodes	617
4. Passage de R_{cris}^+ à $R^{[u,v]}$	622
5. Utilisation des (φ, Γ) -modules	628
6. Cohomologie de Galois	636
7. Comparaison locale avec l'application de Fontaine–Messing	638
8. Résultat global	642
9. Comparaison des morphismes de périodes	651
Remerciements	664
Bibliographie	664

MSC2020 : primary 11S25, 14F20, 14F30, 14F40; secondary 14G22.

Mots-clefs : syntomic cohomology, period morphism, p -adic cohomology, p -adic Hodge theory.

1. Introduction

Les morphismes de périodes permettent de décrire la cohomologie étale p -adique de variétés algébriques à l'aide de formes différentielles et rendent ainsi possible son calcul. Plusieurs constructions de tels morphismes existent. Tsuji [1999], par exemple, établit que l'application de Fontaine et Messing [1987] (aussi décrite dans [Kato 1994]) définit un quasi-isomorphisme, en degrés bornés, entre les cycles proches p -adiques et la cohomologie étale p -adique de la variété rigide associée à un schéma à réduction semi-stable. Tsuji déduit de ce résultat une preuve de la conjecture semi-stable de Fontaine et Jannsen qui relie la cohomologie p -adique de la variété à sa cohomologie de Hyodo–Kato (telle qu'elle est définie dans [Beilinson 2013]). Une autre preuve de la conjecture semi-stable, généralisant la preuve de la conjecture cristalline de Bhatt, Morrow et Scholze (voir [Bhatt et al. 2018]), a été donnée par Česnavičius et Koshikawa [2019]. Ce travail comporte deux parties : dans un premier temps, on donne une preuve différente du résultat de Tsuji en construisant un nouveau morphisme de périodes (qui est la version géométrique de celui de Colmez et Nizioł [2017]). On utilise ensuite cette construction pour montrer que l'application de Fontaine et Messing et le morphisme de Bhatt, Morrow et Scholze sont égaux.

1A. Énoncé des principaux théorèmes. Décrivons plus précisément les résultats obtenus. On fixe p un nombre premier. Soit \mathcal{O}_K un anneau de valuation discrète complet, de corps de fraction K de caractéristique 0 et de corps résiduel parfait k de caractéristique p . On note ϖ une uniformisante de K , $\mathcal{O}_F := W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt associé à k et $F = \text{Frac}(\mathcal{O}_F)$ (avec $e := [K : F]$). Soit \bar{K} la clôture algébrique de K et $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ la clôture intégrale de \mathcal{O}_K dans \bar{K} . Enfin, on note C le corps complet algébriquement clos $\hat{\bar{K}}$ et \mathcal{O}_C son anneau de valuation.

On note \mathcal{O}_K^\times le schéma formel $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ muni de la log-structure donnée par son point fermé et \mathcal{O}_F^0 le schéma formel $\text{Spf}(W(k))$ muni de la log-structure $(\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_F, 1 \mapsto 0)$. On considère \mathfrak{X} un log-schéma formel à réduction semi-stable, log-lisse sur \mathcal{O}_K^\times . On note $Y := \mathfrak{X}_k$ sa fibre spéciale, $\bar{\mathfrak{X}} := \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ et $\bar{Y} := \bar{\mathfrak{X}}_{\bar{k}}$. Soit $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}}$ dans $D(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^1$ et $\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}$ dans $D((\bar{Y})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ les faisceaux syntomiques arithmétique et géométrique. On note $\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}$ (respectivement $\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}$) le lieu de \mathfrak{X}_K (respectivement de \mathfrak{X}_C) où la structure logarithmique est triviale, et i et j (respectivement \bar{i} et \bar{j}) les morphismes² $Y \hookrightarrow \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_{K,\text{tr}} \dashrightarrow \mathfrak{X}$ (respectivement $\bar{Y} \hookrightarrow \bar{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X}_{C,\text{tr}} \dashrightarrow \bar{\mathfrak{X}}$). Enfin, soit $\mathbb{Z}_p(r)' := \frac{1}{a(r)!p^{a(r)}}\mathbb{Z}_p(r)$, $r = a(r)(p-1) + b(r)$ avec $0 \leq b(r) \leq p-2$.

Théorème 1.1. *Pour tout $0 \leq k \leq r$, il existe un p^N -isomorphisme³*

$$\alpha_{r,n}^0 : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}) \rightarrow \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$$

où N est un entier qui dépend de p et de r , mais pas de \mathfrak{X} ni de n .

Notons $\alpha_{r,n}^{\text{FM}} : \mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}} \rightarrow i^* Rj_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{K,\text{tr}}}$ (respectivement $\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}} \rightarrow \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$) l'application de Fontaine–Messing arithmétique (respectivement géométrique). Tsuji [1999, Theorem 0.4] montre

1. Où $D(Y_{\text{ét}}, A)$ est la catégorie dérivée des faisceaux de A -modules sur le site étale de Y , pour un anneau A .
2. Les morphismes j et \bar{j} n'existent pas au niveau des espaces, mais on dispose bien de morphismes de topoi Rj_* et $R\bar{j}_*$.
3. On appelle p^N -isomorphisme, un morphisme dont le noyau et le conoyau sont tués par p^N .

le théorème 1.1 dans le cas où \mathfrak{X} est un schéma à réduction semi-stable sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ en prouvant que l’application de Fontaine–Messing fournit le p^N -isomorphisme voulu. Pour cela, il commence par se ramener au cas $n = 1$ par dévissage. En multipliant le faisceau syntomique (respectivement le faisceau de cycle proche) par t avec $t = \log([\varepsilon])$, où $\varepsilon \in \mathcal{O}_C^b$ est un système de racine p -ième de l’unité (respectivement par ζ_p), il se ramène au cas $k = r$. Il utilise ensuite une description des faisceaux $\mathcal{H}^r(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{x}})$ via des applications symboles qu’il compare avec celle de $\bar{i}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C, \text{tr}}}$ donnée par Bloch et Kato [1986] dans le cas de la bonne réduction, puis étendue à la réduction semi-stable par Hyodo [1988].

Colmez et Nizioł [2017] prouvent la version arithmétique du théorème ci-dessus, c’est-à-dire :

Théorème 1.2 [Colmez et Nizioł 2017, Theorem 1.1]. *Pour tout $0 \leq k \leq r$, l’application*

$$\alpha_{r,n}^{\text{FM}} : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{x}}) \rightarrow i^* R^k j_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C, \text{tr}}}$$

est un p^N -isomorphisme pour une constante N qui dépend de e , p et de r , mais pas de \mathfrak{X} ni de n .

Pour cela, ils construisent un p^N -quasi-isomorphisme local qu’ils comparent ensuite à la définition locale de l’application de Fontaine–Messing. Le théorème 1.1 peut ensuite se déduire du théorème 1.2 en passant à la limite sur les extensions finies L de K . Une nouvelle preuve du résultat de Colmez et Nizioł a récemment été donnée dans [Antieau et al. 2022] dans le cas où \mathfrak{X} est propre et lisse sur \mathcal{O}_K .

On prouve ici le théorème 1.1 directement. On commence par montrer un résultat local semblable à celui de Colmez et Nizioł. On considère R la complétion p -adique d’une algèbre étale sur

$$R_{\square} := \mathcal{O}_C \left\{ X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}$$

(pour a, b, c et d des entiers tels que $a + b + c = d$). On note $D = \{X_{a+b+1} \cdots X_d = 0\}$ le diviseur à l’infini et $\bar{R}[1/p]$ l’extension maximale de $R[1/p]$ non ramifiée en dehors de D . Soit $G_R = \text{Gal}(\bar{R}[1/p]/R[1/p])$.⁴ On relève ensuite R en une algèbre R_{inf}^+ sur

$$R_{\text{inf}, \square}^+ := \mathbb{A}_{\text{inf}} \left\{ X, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{[\varpi^b]}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}$$

(où $\varpi^b \in \mathcal{O}_C^b$ est un système de racines p -ièmes de ϖ), on définit⁵ $R_{\text{cris}}^+ := R_{\text{inf}}^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}$. Ici $\text{Spf}(R)$ est muni de la log-structure donnée par la fibre spéciale et le diviseur à l’infini et $\text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}})$ ainsi que $\text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{inf}})$ sont munis des log-structures usuelles décrites dans [Česnavičius et Koshikawa 2019, § 1.6] (voir la section 2B2 ci-dessous). On s’intéresse au complexe syntomique donné par la fibre homotopique

$$\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) := [F^r \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^{\bullet} \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^{\bullet}]$$

où φ est le Frobenius sur R_{cris}^+ qui étend celui de $R_{\text{inf}, \square}^+$ donné par le Frobenius usuel sur \mathbb{A}_{inf} et par $\varphi(X_i) = X_i^p$. Le complexe $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)$ calcule alors la cohomologie syntomique de $\text{Spf}(R)$. On note $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)_n$ sa réduction modulo p^n . On a le résultat local suivant :

4. On utilise ici la notation Gal pour désigner le groupe des automorphismes de $\bar{R}[1/p]$ qui fixent $R[1/p]$.

5. Ici le produit tensoriel est complété pour la topologie p -adique.

Théorème 1.3. *Il existe des p^N -quasi-isomorphismes*

$$\begin{aligned}\alpha_r^0 : \tau_{\leq r} \operatorname{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)), \\ \alpha_{r,n}^0 : \tau_{\leq r} \operatorname{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)_n &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)),\end{aligned}$$

où N est une constante qui ne dépend que de r .

Les applications ci-dessus sont notamment utilisées par Colmez et Nizioł [2021a] pour donner une interprétation « géométrique » des morphismes de périodes, i.e., voir les théorèmes de comparaison entre les cohomologies étale et syntomique comme des théorèmes de comparaison entre les C -points d’espaces de Banach–Colmez. Cela leur permet ensuite d’étendre le théorème de comparaison semi-stable à des variétés rigides analytiques plus générales dans [Colmez et Nizioł 2021b].

Si \mathfrak{X} est propre sur \mathcal{O}_K , on déduit du théorème 1.1 que α_r^0 induit un quasi-isomorphisme Frobenius et G_K -équivariant, qui préserve la filtration après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}, \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} &\cong H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}},\end{aligned}$$

où $R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \cong R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0)_{\mathbb{Q}}$. Par les résultats de Tsuji et de Colmez–Nizioł, le morphisme α_r^{FM} induit, lui aussi, un isomorphisme $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ entre les mêmes objets. Enfin, Česnavičius et Koshikawa [2019], donnent une troisième construction d’un tel isomorphisme $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ (qui étend la construction de Bhatt et al. [2018]). Dans la seconde partie de cet article, on montre :

Théorème 1.4. *Les morphismes $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ et $\tilde{\alpha}^0$ d’une part et $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ et $\tilde{\alpha}^0$ d’autre part sont égaux. En particulier, $\tilde{\alpha}^{\text{FM}} = \tilde{\alpha}^{\text{CK}}$.*

Ce dernier théorème étend les résultats de Nizioł [2009; 2020], dans lesquels elle prouve l’égalité entre les morphismes de périodes de [Faltings 2002; Beilinson 2013; Nizioł 2008]. La preuve de Nizioł fait intervenir la h -topologie et sa méthode ne s’applique pas au morphisme $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$, puisque dans leur définition, Česnavičius et Koshikawa n’autorisent pas de diviseur horizontal. L’unicité est ici obtenue en comparant « à la main » les constructions locales des morphismes de périodes. Cela est possible car, localement, $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est construit en utilisant des complexes de Koszul similaires à ceux qui interviennent dans la construction de $\tilde{\alpha}^0$. La principale différence est que la définition de [Česnavičius et Koshikawa 2019] utilise le foncteur de décalage $L\eta_{\mu}$ (i.e., les termes des complexes sont multipliés par des puissances de $\mu = [\varepsilon] - 1$) alors que dans le cas de $\tilde{\alpha}^0$ les complexes sont multipliés par des puissances de $t = \log([\varepsilon])$.

La définition de Fontaine et Messing et celle de Bhatt et al. ont chacune leurs propres avantages. Le morphisme de périodes construit par Bhatt et al. et par Česnavičius et Koshikawa est, par exemple, plus adapté pour travailler au niveau intégral. Ce résultat d’unicité permet ainsi d’obtenir pour l’application de Bhatt et al. les propriétés déjà connues pour l’application de Fontaine et Messing (notamment, la compatibilité aux applications symboles).

1B. Preuve du théorème 1.3. Nous expliquons dans un premier temps comment construire le p^N -quasi-isomorphisme local. On part du complexe $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)$. On commence par « changer la convergence » des éléments de R_{cris}^+ . Pour $0 < u < v$, on définit l'anneau $\mathbb{A}^{[u]}$ (respectivement $\mathbb{A}^{[u,v]}$) comme la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[[\beta]/p]$ (respectivement de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[p/[\alpha], [\beta]/p]$) pour β un élément de \mathcal{O}_C^b de valuation $1/u$ (respectivement α et β des éléments de \mathcal{O}_C^b de valuation $1/v$ et $1/u$). Pour des valeurs de u et de v convenables, on déduit de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\text{cris}} \xrightarrow{1-\varphi/p^r} \mathbb{A}_{\text{cris}} \rightarrow 0 \quad (1)$$

où $t^{\{r\}} := \frac{t^r}{a(r)!p^{a(r)}}$, des suites p^{6r} -exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}^{[u]} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathbb{A}^{[u]} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}^{[u,v]} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathbb{A}^{[u,v]} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

On définit⁶ $R^{[u]} := R_{\text{inf}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u]}$ et $R^{[u,v]} := R_{\text{inf}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]}$, et pour $S \in \{R^{[u]}, R^{[u,v]}\}$, on pose $C(S, r) := [F^r \Omega_S^* \xrightarrow{p^r-\varphi} \Omega_S^*]$. Les suites exactes (2) ci-dessus permettent alors de montrer les $p^{N_1 r}$ -quasi-isomorphismes⁷

$$\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \cong C(R^{[u]}, r) \cong C(R^{[u,v]}, r).$$

En plongeant $R^{[u]}$ et $R^{[u,v]}$ dans des anneaux de périodes $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]}$ et $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ (construits de manière similaire à $\mathbb{A}^{[u]}$ et $\mathbb{A}^{[u,v]}$ en utilisant \bar{R} au lieu de \mathcal{O}_C), on les munit d'une action du groupe de Galois G_R . On note $\mathbb{A}_R^{[u]}$ et $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ leurs images respectives par ce plongement. On se place ensuite dans une base de Ω_R^1 pour écrire le complexe $C(R^{[u,v]}, r)$ sous la forme d'un complexe de Koszul $\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]})$. La multiplication par $t = \log([\varepsilon]) \in \mathbb{A}_{\text{cris}}$ (où $\varepsilon \in \mathcal{O}_C^b$ est un système de racines p -ièmes de l'unité) permet de se débarrasser de la filtration en transformant l'action des différentielles en une action de l'algèbre de Lie du groupe $\Gamma_R = \text{Gal}(R_\infty[1/p]/R[1/p]) \cong \mathbb{Z}_p^d$ avec $R_\infty := (\varinjlim_m R_m)^\wedge$ et

$$R_m := \left(\mathcal{O}_C \left\{ X^{1/p^m}, \frac{1}{(X_1 \cdots X_a)^{1/p^m}}, \frac{\varpi^{1/p^m}}{(X_{a+1} \cdots X_{a+b})^{1/p^m}} \right\} \right) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_C} R.$$

C'est à cette étape qu'il est nécessaire de tronquer les complexes en degré r pour garder des isomorphismes. Finalement, on a la suite de $p^{N_2 r}$ -quasi-isomorphismes⁸

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)). \quad (3)$$

Soit R_{inf}^+ la complétion p -adique de $R_{\text{inf}}^+[1/[\varpi^b]]$ et \mathbb{A}_R son image dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\bar{R}^b)$. On montre ensuite qu'on a un quasi-isomorphisme $\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \cong \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R)$. Pour cela, on passe par l'intermédiaire d'un anneau $\mathbb{A}_R^{(0,v)+}$, construit à partir de l'anneau

$$\mathbb{A}_R^{(0,v)+} := \left\{ x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n \in \mathbb{A}_{\text{inf}} \mid x_n \in \mathcal{O}_C^b, v_{\mathcal{O}_C^b}(x_n) + \frac{n}{v} \geq 0 \text{ et } v_{\mathcal{O}_C^b}(x_n) + \frac{n}{v} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\},$$

6. Les produits tensoriels sont complétés pour la topologie p -adique.

7. Pour un $N_1 \in \mathbb{N}$.

8. Pour un $N_2 \in \mathbb{N}$.

et on utilise ψ , un inverse à gauche du Frobenius φ . Enfin, des arguments de descente presque étale et de décomplétion permettent d'obtenir un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}})$$

et la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\bar{R}} \rightarrow 0$ montre que le complexe $\mathrm{Kos}(\varphi, G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}})$ calcule la cohomologie galoisienne $R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p)$. En résumé, le morphisme construit est

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathrm{syn}}(R, r) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Syn}(R_{\mathrm{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u,v]}, r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xleftarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)). \end{aligned} \quad (4)$$

Remarque 1.5. La construction du morphisme local dans le cas arithmétique traité dans [Colmez et Nizioł 2017] est similaire à celle décrite ci-dessus. Il existe cependant quelques différences que nous soulignons ici. Dans le cas où $\mathrm{Spf}(R)$ est défini sur \mathcal{O}_K , on ne dispose plus du quasi-isomorphisme $R\Gamma_{\mathrm{cris}}(R/\mathcal{O}_F) \cong R\Gamma_{\mathrm{cris}}(R/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}})$ qui nous permet de travailler avec l'anneau R_{cris}^+ . Au lieu de cela, Colmez et Nizioł écrivent R comme le quotient d'une \mathcal{O}_F -algèbre log-lisse $R_{\mathfrak{w}}^+$. Cela nécessite l'introduction d'une variable supplémentaire X_0 : on définit $R_{\mathfrak{w}}^+$ comme le relevé étale de R sur

$$\mathcal{O}_F \left\{ X_0, X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{X_0}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}.$$

Le rôle de l'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ (respectivement $\mathbb{A}^{[u]}$ et $\mathbb{A}^{[u,v]}$) est joué par l'anneau $r_{\mathfrak{w}}^+ := \mathcal{O}_F[[X_0]]$ (respectivement par l'anneau $r_{\mathfrak{w}}^{[u]}$ des fonctions analytiques sur F qui convergent sur le disque $v_p(X_0) \geq u/e$, et par l'anneau $r_{\mathfrak{w}}^{[u,v]}$ des fonctions analytiques sur F qui convergent sur la couronne $v/p \geq v_p(X_0) \geq u/e$). On perd, dans le cas géométrique, cette interprétation des anneaux en termes de séries de Laurent.

Travailler directement sur C permet aussi de simplifier la preuve lors du passage au complexe de Koszul. Dans le cas arithmétique, il existe deux manières différentes de plonger $R_{\mathfrak{w}}^{[u]}$, $R_{\mathfrak{w}}^{[u,v]}$ dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]}$, $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$: le plongement « de Kummer », qui envoie X_0 sur $[\mathfrak{w}^b]$, et le plongement « cyclotomique » par lequel X_0 s'envoie sur un élément $\pi_K \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\bar{K}^b)$ tel que $\bar{\pi}_K = (\mathfrak{w}_{K_m})_m$, où $(\mathfrak{w}_{K_m})_m$ est une suite compatible d'uniformisantes des extensions cyclotomiques K_m de K . Les quasi-isomorphismes (3) sont obtenus en utilisant le plongement cyclotomique, mais le Frobenius qui intervient alors diffère de celui apparaissant dans la définition du complexe syntomique (qui correspond, lui, au plongement de Kummer).

Une autre différence entre la preuve arithmétique et la preuve géométrique se trouve dans les propriétés de l'inverse à gauche ψ du Frobenius. Dans [Colmez et Nizioł 2017], par construction, il est topologiquement nilpotent sur le quotient $R_{\mathfrak{w}}^{[u,v]}/R_{\mathfrak{w}}^{[u]}$. Colmez et Nizioł utilisent notamment cette propriété pour montrer le quasi-isomorphisme $C(R_{\mathfrak{w}}^{[u]}, r) \cong C(R_{\mathfrak{w}}^{[u,v]}, r)$. Ce n'est plus le cas lorsqu'on travaille avec l'anneau $R^{[u,v]}$ mais en montrant que $\psi - 1$ est surjective sur $\mathbb{A}^{[u,v]}/\mathbb{A}^{[u]}$, on obtient le quasi-isomorphisme voulu.

Enfin, dans [Colmez et Nizioł 2017], du fait de cette variable supplémentaire X_0 , l'algèbre de Lie de Γ_R n'est pas commutative. Cette difficulté n'apparaît pas dans le cas géométrique.

1C. Quasi-isomorphisme global. Si \mathfrak{X} est un schéma formel à réduction semi-stable et propre sur \mathcal{O}_K , on montre que le morphisme local du théorème 1.3 se globalise en un p^N -quasi-isomorphisme

$$\alpha_r^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Pour faire cela, on applique la méthode utilisée par Bhatt et al. [2018] (et Česnavičius et Koshikawa [2019, §5]). L'idée est de construire, pour $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$ assez petit, une version fonctorielle des complexes intervenant en (4).

Pour \mathfrak{X} un schéma formel à réduction semi-stable, il existe une base $(\text{Spf}(R))$ de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C, \text{ét}}$, telle que pour chaque R on ait des ensembles finis non vides Σ et Λ tels qu'il existe une immersion fermée

$$\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) := \text{Spf}(\mathcal{O}_C \{X_{\sigma}^{\pm 1} \mid \sigma \in \Sigma\})$$

et pour chaque λ , une application étale

$$\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square}) := \text{Spf}\left(\mathcal{O}_C \left\{ X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, \frac{1}{X_{\lambda,1} \cdots X_{\lambda,a_{\lambda}}}, \frac{\varpi}{X_{\lambda,a_{\lambda}+1} \cdots X_{\lambda,d}} \right\}\right).$$

On note $\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square}) := \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) \times \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$. On construit alors une application

$$\alpha_{r, \Sigma, \Lambda} : \tau_{\leq r} \text{Kos}(\vartheta, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

de la même façon qu'en (4) en remplaçant R_{cris}^+ par $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$ défini sur $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$. On déduit ensuite du théorème 1.3 que $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}$ est un p^N -quasi-isomorphisme. On obtient des complexes fonctoriels en prenant la limite sur l'ensemble des données (Σ, Λ) comme ci-dessus. Un argument de descente cohomologique permet finalement d'obtenir le p^N -quasi-isomorphisme α_r^0 .

Remarque 1.6. Colmez et Nizioł [2017] construisent le p^N -quasi-isomorphisme localement, puis comparent ce morphisme à l'application de Fontaine–Messing, ce qui permet de montrer que l'application de Fontaine–Messing globale est un p^N -quasi-isomorphisme. Le même argument que celui que nous utilisons permettrait de montrer que le morphisme arithmétique admet, lui aussi, une définition globale. Il suffit de définir des anneaux $R_{\varpi, \Sigma, \Lambda}^+$, $R_{\varpi, \Sigma, \Lambda}^{[u]}$, ... de la même façon que nous le faisons ici.

1D. Preuve du théorème 1.4. On commence par comparer les morphismes

$$\tilde{\alpha}^0, \tilde{\alpha}^{\text{FM}} : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \cong H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}.$$

Pour cela, il suffit de montrer l'égalité des morphismes

$$\alpha_r^0, \alpha_r^{\text{FM}} : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Définissons $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{\text{PD}}$ et $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$, les anneaux log-PD-enveloppe complétés de $R_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ et de $R^{[u,v]} \otimes_{\mathbb{A}^{[u,v]}} \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$, respectivement. On note $C(G_R, M)$ le complexe des cochaines continues de G_R à valeurs dans M . Localement, α_r^{FM} est la composée des applications

$$\text{Kos}(\vartheta, \varphi, F^r R_{\text{cris}}^+) \rightarrow C(G_R, \text{Kos}(\vartheta, \varphi, F^r \mathbb{E}_{\bar{R}}^{\text{PD}})) \xleftarrow{\sim} C(G_R, \text{Kos}(\varphi, F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}))) \xleftarrow{\sim} C(G_R, \mathbb{Z}_p(r)),$$

où la deuxième flèche est un quasi-isomorphisme via le lemme de Poincaré

$$F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \xrightarrow{\sim} F^r \Omega_{F^r \mathbb{E}_{\bar{R}}^{\text{PD}}}$$

et la troisième flèche se déduit de la suite exacte (1). L'application α_r^0 est donnée par la composée (4). On montre qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K_{\varphi, \partial}(F^r R_{\text{cris}}^+) & \longrightarrow & C_G(K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{E}_{\bar{R}}^{\text{PD}})) & \longleftarrow & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}))) & \longleftarrow & C_G(\mathbb{Z}_p(r)) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C_G(K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u, v]})) & \longleftarrow & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u, v]})) & \longleftarrow & C_G(K_{\varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0, v]^+}(r))) & \longrightarrow & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\bar{R}})) \quad (5) \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u, v]}) & \xrightarrow{\tau_{\leq r}} & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u, v]}(r)) & \longleftarrow & K_{\Gamma, \varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0, v]^+}(r))) & \longrightarrow & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{\bar{R}}(r)) \end{array}$$

où, pour alléger, $C_G(\cdot)$ désigne les complexes de cochaînes et $K_{\varphi, \partial}(\cdot)$ la fibre homotopique de l'application $1 - \varphi$ sur les complexes de Koszul. On en déduit l'égalité locale. On prouve ensuite que le diagramme (5) est toujours valable pour les anneaux construits à partir des coordonnées (Σ, Λ) et en passant à la limite, on obtient l'égalité globale.

Il reste à comparer $\tilde{\alpha}^0$ et $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$. Pour les mêmes raisons, il suffit de montrer l'égalité des morphismes locaux. Celle-ci découle de leurs constructions. Le morphisme $\tilde{\alpha}^0$ s'obtient par la composée⁹

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}\left(R\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{Z}_p\right)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}\left(R\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{Z}_p(r)\right)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(R) \hat{\otimes}_F^L \mathbb{B}_{\text{st}}, \quad (6) \end{aligned}$$

où

$$l_{\text{cris}, \varpi}^{\text{B}} : R\Gamma_{\text{cris}}((R/p)/W(k)^0) \hat{\otimes}_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{cris}}((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}}^L \mathbb{B}_{\text{st}}^+$$

est le quasi-isomorphisme (qui dépend du ϖ choisi) de [Beilinson 2013, (1.18.5)]. Rappelons maintenant comment $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est défini. La preuve de [Česnavičius et Koshikawa 2019] passe par la construction d'un complexe $A\Omega_R \in D^+((\text{Spf}(R))_{\text{ét}}, \mathbb{A}_{\text{inf}})$ (voir le théorème 2.3 de leur article) qui vérifie

$$R\Gamma_{\text{ét}}\left(R\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{Z}_p\right) \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}^L \left(\mathbb{A}_{\text{inf}}\left[\frac{1}{\mu}\right]\right) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(R, A\Omega_R) \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \left(\mathbb{A}_{\text{inf}}\left[\frac{1}{\mu}\right]\right), \quad (7)$$

où $\mu = [\varepsilon] - 1 \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$. On obtient ensuite $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ en construisant un quasi-isomorphisme

$$\gamma_{\text{CK}} : Ru_*(\mathcal{O}_{(R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}}) \xrightarrow{\sim} A\Omega_R \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$$

9. Si M est un module muni d'une action d'un Frobenius φ , on note $M\{r\}$ le module M muni de l'action du Frobenius $p^r \varphi$. Voir la section Notations et conventions pour la définition de $-\hat{\otimes}^L-$ utilisée ici.

où $\mathcal{O}_{(R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}} \in ((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\text{log-cris}}$ désigne le faisceau structural sur le site cristallin et u est la projection $((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\text{log-cris}} \rightarrow (\text{Spf}(R))_{\text{ét}}$. Pour cela, Česnavičius et Koshikawa commencent par montrer qu'on peut calculer $A\Omega_R$ comme $L\eta_\mu R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty))$ où η_μ est le foncteur de décalage de Berthelot–Ogus [Bhatt et al. 2018]. Pour définir γ_{CK} , il reste à construire un quasi-isomorphisme entre $\text{Kos}(\partial, R_{\text{inf}}^+)$ et $\eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty)) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$. Ce passage entre la cohomologie d'une algèbre de Lie et la cohomologie de groupe est similaire à celui apparaissant dans la construction de α_r^0 , avec μ jouant le rôle de t , et c'est ce qui permet d'obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(R, A\Omega_R)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow{\sim \gamma_{\text{CK}}} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}\left(R\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{Z}_p(r)\right)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \xleftarrow{\sim \alpha_r^0} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \end{array} \quad (8)$$

Finalement, $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ est donnée par la composée

$$R\Gamma_{\text{ét}}\left(R\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{Z}_p\right)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim (7)} R\Gamma_{\text{ét}}(R, A\Omega_R)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow{\sim \gamma_{\text{CK}}} R\Gamma_{\text{cris}}(R/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow{\sim \overset{\text{B}}{\leftarrow} \underset{\sim}{\text{cris.}\varpi}} R\Gamma_{\text{HK}}(R) \widehat{\otimes}_F^L \mathbb{B}_{\text{st}}, \quad (9)$$

et le diagramme (8) permet d'obtenir l'égalité entre (9) et (6).

Notations et conventions. Pour N un entier, on dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est p^N -injective (respectivement p^N -surjective) si son noyau (respectivement son conoyau) est tué par p^N . Le morphisme f est un p^N -isomorphisme s'il est à la fois p^N -injectif et p^N -surjectif. La suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} 0$$

est p^N -exacte si i est p^N -injective, $\text{Im}(g) = p^N \ker(f)$ et g est p^N -surjective. On définit de même un p^N -quasi-isomorphisme comme étant une application $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ dans la catégorie dérivée qui induit un p^N -isomorphisme sur la cohomologie.

Dans tout l'article, on utilise les résultats de [Diao et al. 2019] sur les log-espaces adiques. On utilise en particulier que le foncteur usuel des schémas formels localement noethériens dans les espaces adiques s'étend en un foncteur pleinement fidèle des log-schémas formels localement noethériens dans la catégorie des log-espaces adiques localement noethériens [Diao et al. 2019, Proposition 2.2.22].

Si T est un topos et A un anneau, on note $\mathcal{D}^+(T, A)$ (respectivement $\mathcal{D}^+(A)$) l' ∞ -catégorie dérivée des faisceaux de A -modules sur T inférieurement bornés (respectivement l' ∞ -catégorie dérivée des A -modules). Les catégories homotopiques associées sont les catégories dérivées $D^+(T, A)$ et $D^+(A)$. Le foncteur dérivé $R\Gamma(-) : D^+(T, A) \rightarrow D^+(A)$ se relève en un foncteur $R\Gamma(-) : \mathcal{D}^+(T, A) \rightarrow \mathcal{D}^+(A)$. On note aussi $\mathbf{Fsc}(T, \mathcal{D}^+(A))$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{D}^+(A)$ sur T et on identifie les ∞ -catégories $\mathcal{D}^+(T, A)$ et $\mathbf{Fsc}(T, \mathcal{D}^+(A))$.

Si $f : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ est un morphisme de $\mathcal{D}^+(T, A)$, on note $[K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet] := \text{holim}(K^\bullet \rightarrow L^\bullet \leftarrow 0)$ la fibre d'homotopie de l'application f .

Pour $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et K^\bullet et L^\bullet des objets de $\mathcal{D}(A)$, on note

$$K^\bullet \widehat{\otimes}_A^L L^\bullet := \text{holim}_n((K^\bullet \otimes_A^L L^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad (K^\bullet)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_A^L B := (\text{holim}_n((K^\bullet \otimes_A^L B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p.$$

Plus généralement, si $J = (f_1, \dots, f_r)$ est un idéal finiment engendré de A , on définit le produit tensoriel dérivé complété pour la topologie J -adique :

$$\begin{aligned} K^\bullet \widehat{\otimes}_A^L L^\bullet &:= \text{holim}_n((K^\bullet \otimes_A^L L^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[f_1, \dots, f_r]/(f_1^n, \dots, f_r^n)), \\ (K^\bullet)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_A^L B &:= (\text{holim}_n((K^\bullet \otimes_A^L B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[f_1, \dots, f_r]/(f_1^n, \dots, f_r^n))) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p. \end{aligned}$$

Si G est un groupe qui agit sur un module M , on notera $R\Gamma(G, M)$ la cohomologie de groupe *continue* associée.

Si \mathcal{O}_K est un anneau de valuation discrète en caractéristique mixte $(0, p)$ et ϖ une uniformisante de \mathcal{O}_K , on dira respectivement qu'un schéma ou schéma formel est à *réduction semi-stable* sur \mathcal{O}_K s'il s'écrit localement pour la topologie étale $\text{Spec}(R)$ ou $\text{Spf}(R)$ avec R une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K \left[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right] \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}_K \left\{ X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\},$$

avec a, b et d des entiers tels que $a + b \leq d$. Enfin, si A est un anneau de valuation discrète, on notera A^\times le log-schéma formel $\text{Spf}(A)$ muni de la log-structure induite par son point fermé (appelée log-structure standard de A) : c'est la log-structure donnée par l'inclusion $A \setminus \{0\} \hookrightarrow A$. On notera A^0 le log-schéma formel $\text{Spf}(A)$ muni de la log-structure induite par $(\mathbb{N} \rightarrow A, 1 \mapsto 0)$.

2. Cohomologie syntomique et résultat local

Dans cette section, on commence par donner les définitions des faisceaux syntomiques arithmétique $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}}$ et géométrique $\mathcal{S}_n(r)_{\overline{\mathfrak{X}}}$. On décrit ensuite la forme locale de ces complexes.

2A. Définition de la cohomologie syntomique. On considère \mathfrak{X} un schéma formel à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K , i.e., localement \mathfrak{X} s'écrit $\text{Spf}(R)$ avec R la complétion d'une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K \left\{ X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}$$

avec a, b, c et d des entiers tels que $a + b + c = d$. On munit \mathfrak{X} de la log-structure donnée par $\mathcal{M} := \{g \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \mid g \text{ inversible en dehors de } D \cup \mathfrak{X}_k\}$ où D est le diviseur horizontal et on a alors que \mathfrak{X} est log-lisse sur \mathcal{O}_K^\times . On note $\mathfrak{X}_{K, \text{tr}}$ le lieu de \mathfrak{X}_K où la log-structure est triviale : si $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$ alors $\mathfrak{X}_{K, \text{tr}} = \text{Sp}(R_K) \setminus D_K$. On appelle i (respectivement j) l'immersion $\mathfrak{X}_k \hookrightarrow \mathfrak{X}$ (respectivement le morphisme de topoi étales $\mathfrak{X}_{K, \text{tr}, \text{ét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}}$) et $\bar{i} : \mathfrak{X}_{\bar{k}} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ (respectivement $\bar{j} : \mathfrak{X}_{C, \text{tr}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$) le changement de base associé. Enfin, pour n dans \mathbb{N} , on note \mathfrak{X}_n la réduction de \mathfrak{X} modulo p^n .

On note $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_n) := R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_n/W_n(k))$ la cohomologie cristalline absolue de \mathfrak{X}_n et $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}) := \text{holim}_n R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_n)$. On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n/W_n(k)}$ le faisceau structurel du site cristallin $(\mathfrak{X}_n/W_n(k))_{\text{cris}}$, $\mathcal{J}_n = \ker(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n/W_n(k)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n})$ et $\mathcal{J}_n^{[r]}$ sa r -ième puissance divisée. On définit ensuite

$$R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{[r]})_n := R\Gamma(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, Ru_{n*}\mathcal{J}_n^{[r]}) \quad \text{et} \quad R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{[r]}) := \text{holim}_n R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{[r]})_n$$

où u_n est la projection $(\mathfrak{X}_n/W_n(k))_{\text{cris}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}}$. On a alors les complexes syntomiques

$$R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}, r)_n := [R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{[r]})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_n)] \quad \text{et} \quad R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}, r) := \text{holim}_n R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}, r)_n,$$

où φ désigne le morphisme de Frobenius. Enfin, on note $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{X}}$ le faisceau de $\mathcal{D}^+((\mathfrak{X}_k)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ associé au préfaisceau $U \mapsto R\Gamma_{\text{syn}}(U, r)_n$.

On définit de même la version géométrique $\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}$ de ce faisceau (i.e., sur \mathcal{O}_C).

Remarque 2.1. Dans la suite, on trouvera utile la description suivante, plus explicite, de la cohomologie syntomique. Considérons un log-schéma formel \mathfrak{X} à réduction semi-stable sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_C)$ et notons Y sa fibre spéciale. On choisit \mathfrak{U}^\bullet un hyper-recouvrement de \mathfrak{X} pour la topologie étale. Soit $\{Z_n^\bullet\}$ un système inductif de log-schémas log-lisses simpliciaux sur \mathbb{A}_{cris} tels qu'on ait des immersions fermées $\mathfrak{U}_n^s \hookrightarrow Z_n^s$ et des relèvements $\varphi_{Z_n^\bullet}$ du Frobenius. On note D_n^s la log-PD-enveloppe de \mathfrak{U}_n^s dans Z_n^s , $J_{D_n^s}$ l'idéal associé et $J_{D_n^s}^{[r]}$ sa r -ième puissance divisée. Pour chaque s , on définit le faisceau $\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{U}^s, Z^s, \varphi^s}$ de $D(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ par

$$\mathcal{S}_n(r)_{\mathfrak{U}^s, Z^s, \varphi^s} := [J_{D_n^s}^{[r-\bullet]} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^s}} \omega_{Z_n^s}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathcal{O}_{D_n^s} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^s}} \omega_{Z_n^s}^\bullet],$$

où $\omega_{Z_n^s}^\bullet$ est le complexe des log-différentielles de Z_n^s . On note $R\Gamma_{\text{syn}}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n$ l'hypercohomologie associée, utilisant ici la définition 6.10 de [Conrad 2003]. En particulier (voir le théorème 6.11 de ce dernier article), on a une suite spectrale

$$E_1^{p,q} := H_{\text{syn}}^q((\mathfrak{U}^p, Z^p, \varphi^p), r)_n \implies H_{\text{syn}}^{p+q}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n. \quad (10)$$

On note $\text{HRF}(\mathfrak{X})$ la catégorie dont les objets sont donnés par les triplets $(\mathfrak{U}^\bullet, \{Z_n^\bullet\}, \{\varphi_n^\bullet\})$ où $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ est un hyper-recouvrement et les $\{Z_n^\bullet\}$ et $\{\varphi_n^\bullet\}$ sont définis comme ci-dessus. On abrégera par \mathfrak{U}^\bullet un tel triplet. Un morphisme $(\mathfrak{U}^\bullet, \{Z_{\mathfrak{U},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{U},n}^\bullet\}) \rightarrow (\mathfrak{V}^\bullet, \{Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet\}, \{\varphi_{\mathfrak{V},n}^\bullet\})$ de $\text{HRF}(\mathfrak{X})$ est une paire $(u : \mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{V}^\bullet, \tilde{u}_n : Z_{\mathfrak{U},n}^\bullet \rightarrow Z_{\mathfrak{V},n}^\bullet)$ telle que, pour tout s , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_{\mathfrak{U},n}^s & \xrightarrow{\tilde{u}_n} & Z_{\mathfrak{V},n}^s \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{U}^s & \xrightarrow{u} & \mathfrak{V}^s \end{array}$$

commute, et telle que les \tilde{u}_n commutent avec les φ_n^s . Il est alors possible de considérer la limite hocolim $_{\text{HRF}(\mathfrak{X})} R\Gamma_{\text{syn}}((\mathfrak{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n$; les morphismes de transition sont des quasi-isomorphismes. Comme le morphisme $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ est de descente cohomologique (voir [Conrad 2003, Exemple 6.9]), on

a un quasi-isomorphisme [Conrad 2003, Corollary 7.11]

$$R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}, r)_n \xrightarrow{\sim} \text{hocolim}_{\text{HRF}(\mathfrak{X})} R\Gamma_{\text{syn}}((\mathcal{U}^\bullet, Z^\bullet, \varphi^\bullet), r)_n, \quad (11)$$

et cette colimite est filtrée.

2B. Résultat local. On va supposer $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \text{Spf}(R)$.

2B1. Résultat préliminaire. La proposition suivante est donnée dans [Colmez et Nizioł 2017, §2.1]. On l'utilise pour définir un morphisme de Frobenius sur les anneaux utilisés. On considère $\lambda : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ un morphisme d'anneaux topologiques et Λ'_1 la complétion d'une Λ_1 -algèbre étale

$$\Lambda'_1 := \Lambda_1\{Z_1, \dots, Z_s\}/(Q_1, \dots, Q_s)$$

avec $J := (\partial Q_j / \partial Z_i)_{1 \leq i, j \leq s}$ inversible.

Notation. Pour $F = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s} a_{\mathbf{k}} Z^{\mathbf{k}}$ une série dans un anneau $\Lambda_1\{Z\}$, on note F^λ la série $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s} \lambda(a_{\mathbf{k}}) Z^{\mathbf{k}}$.

Proposition 2.2 [Colmez et Nizioł 2017, Proposition 2.1 et Remark 2.2]. *On suppose qu'il existe Z_λ dans Λ_2^s et I un idéal de Λ_2 tels que Λ_2 est séparé et complet pour la topologie I -adique et tels que les coordonnées de $Q^\lambda(Z_\lambda)$ sont dans I . Alors l'équation $Q^\lambda(Y) = 0$ admet une unique solution dans $Z_\lambda + I^s$ et on peut étendre λ de manière unique à Λ'_1 .*

2B2. Modèles locaux. On munit $\text{Spf}(\mathcal{O}_C)$ de la log-structure standard $\mathcal{O}_C \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathcal{O}_C$ et on note \mathcal{O}_C^\times ce log-schéma formel. On note

$$R_\square := \mathcal{O}_C \left\{ X, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}$$

où $X = (X_1, \dots, X_d)$ et on considère R la complétion p -adique d'une algèbre étale sur R_\square . On munit $\text{Spf}(R_\square)$ et $\text{Spf}(R)$ de la structure logarithmique induite par la fibre spéciale et le diviseur $D := \{X_{a+b+1} \cdots X_d = 0\}$.

Remarque 2.3. Les log-structures décrites ci-dessus ne sont pas fines, mais de la même façon que dans [Česnavičius et Koshikawa 2019], on peut, via un changement de base, se ramener à des log-structures fines, et de cette façon, travailler avec les log-structures précédentes comme si elles étaient fines. Plus précisément, munissons $\text{Spf}(\mathcal{O}_C)$ et $\text{Spf}(R)$ des log-structures fines suivantes (voir [Česnavičius et Koshikawa 2019, §1.6]) :

- Sur $\text{Spf}(R)$, on considère la log-structure donnée par la carte

$$\mathbb{N}^{d-a} \rightarrow \Gamma(\text{Spf}(R), \mathcal{O}_{\text{Spf}(R)})$$

donnée par $(n_i) \mapsto \prod_{a+1 \leq i \leq d} X_i^{n_i}$ sur \mathbb{N}^{d-a} .

- Sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_C)$, on considère la log-structure donnée par la carte

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_C, \quad n \mapsto \varpi^n.$$

Les changements de base le long des applications

$$\mathbb{N}^{d-a} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(R)} \cap \bar{J}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}(R[1/p]) \setminus D_C}^*), (n_i) \mapsto X_i^{n_i} \quad \text{et} \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_C \setminus \{0\}, n \mapsto \varpi^n$$

permettent de retrouver les log-structures précédentes. La plupart des propriétés des morphismes de log-schémas (formels) étant stables par changement de base, on se ramène de cette façon à des log-structures fines.

Si, pour tout $n \geq 0$, on munit \mathcal{O}_C/p^n et R/p^n des log-structures induites, alors R/p^n est log-lisse sur \mathcal{O}_C/p^n , de sorte que le complexe des log-différentielles $\Omega_{(R/p^n)/(\mathcal{O}_C/p^n)}^i$ est le \mathcal{O}/p^n -module engendré par les dX_i/X_i pour $1 \leq i \leq d$.

On considère les anneaux de Fontaine $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et on rappelle qu'on a les éléments

$$\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathcal{O}_C^b,$$

où ζ_{p^n} désigne une racine primitive p^n -ième de l'unité, ainsi que

$$\mu = [\varepsilon] - 1 \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}, \quad \xi = \frac{\mu}{\varphi^{-1}(\mu)} \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}, \quad t = \log(1 + \mu) \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}.$$

On a une application surjective $\theta : \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ de noyau engendré par ξ . On note $F^r \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ la filtration sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ donnée par les puissances divisées de ξ .

On munit $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ de la log-structure associée à la pré-log-structure

$$\mathcal{O}_C^b \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}, \quad x \mapsto [x],$$

et les $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}/p^n$ de la log-structure tirée en arrière. En fait, cette log-structure est l'unique log-structure sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}/p^n$ qui étend celle de \mathcal{O}_C/p^n ; voir [Beilinson 2013, § 1.17]. Enfin, on munit $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ de la log-structure venant de celle de $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$.

On définit

$$R_{\mathrm{inf}, \square}^+ := \mathbb{A}_{\mathrm{inf}} \left\{ X, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{[\varpi^b]}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}.$$

L'anneau $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$ est complet pour la topologie (p, ξ) -adique. On va relever $R_{\square} \rightarrow R$ en un morphisme étale $R_{\mathrm{inf}, \square}^+ \rightarrow R_{\mathrm{inf}}^+$. Pour cela, on écrit $R := R_{\square} \{Z_1, \dots, Z_s\} / (Q_1, \dots, Q_s)$ avec $\det(\partial Q_j / \partial Z_i)$ inversible dans R . Soient \tilde{Q}_j des relevés des Q_j dans $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$. On note R_{inf}^+ la complétion (p, ξ) -adique de

$$R_{\mathrm{inf}, \square}^+ [Z_1, \dots, Z_s] / (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_s)$$

et $\det(\partial \tilde{Q}_j / \partial Z_i)$ est inversible dans $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$ (car il l'est modulo ξ et $R_{\mathrm{inf}, \square}^+$ est ξ -adiquement complet).

On note $R_{\mathrm{cris}, \square}^+$ et R_{cris}^+ les anneaux $R_{\mathrm{inf}, \square}^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et $R_{\mathrm{inf}}^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$, où les produits tensoriels sont complétés pour la topologie p -adique. L'anneau R_{cris}^+ admet une filtration donnée par $F^r R_{\mathrm{cris}}^+ := R_{\mathrm{inf}}^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} F^r \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spf}(R) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}}^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(R_{\square}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris},\square}^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \end{array}$$

On définit une log-structure sur $\mathrm{Spf}(R_{\mathrm{inf},\square}^+)$ et $\mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris},\square}^+)$ en ajoutant à la log-structure venant respectivement de $\mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}})$ et $\mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}})$ le diviseur à l'infini $\{X_{a+b+1} \cdots X_d = 0\}$. On munit R_{inf}^+ et R_{cris}^+ de la log-structure venant respectivement de $R_{\mathrm{inf},\square}^+$ et $R_{\mathrm{cris},\square}^+$.

Comme ci-dessus, on a alors que les complexes des log-différentielles de R_{inf}^+ et de R_{cris}^+ sur $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ sont, respectivement, le $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ -module et le $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ -module engendrés par les dX_i/X_i pour $1 \leq i \leq d$.

On note R_{inf} et R_{cris} les complétions p -adiques de $R_{\mathrm{inf}}^+[1/[\varpi^b]]$ et de $R_{\mathrm{cris}}^+[1/[\varpi^b]]$.

2B3. Complexe syntomique local. On va commencer par prouver une version locale du théorème 1.1. On suppose donc que \mathfrak{X} s'écrit $\mathrm{Spf}(R_0)$ avec R_0 la complétion p -adique d'une algèbre étale sur

$$\mathcal{O}_K \left\{ X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}$$

et on écrit $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} := \mathrm{Spf}(R)$. Dans la suite, on note

$$R_{\square} := \mathcal{O}_C \left\{ X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\}.$$

On utilise les log-structures définies dans la partie précédente.

Via les quasi-isomorphismes montrés par Beilinson [2013, (1.18.1)],

$$\begin{aligned} R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}_n/W_n(\bar{k}))_{\mathrm{cris}}, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}_n/\mathbb{A}_{\mathrm{cris},n})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{F}), \\ R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}/W(\bar{k}))_{\mathrm{cris}}, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{F}), \end{aligned} \tag{12}$$

on obtient que la cohomologie cristalline absolue de $\bar{\mathfrak{X}}_n$ et sa filtration en degré r sont calculées par les complexes $R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}_n/\mathbb{A}_{\mathrm{cris},n})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O})$ et $R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}_n/\mathbb{A}_{\mathrm{cris},n})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]})$. Comme $\tilde{\mathfrak{X}} := \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}}^+)$ est un relèvement log-lisse de \mathfrak{X} sur $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et que $\mathfrak{X} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}$ est exacte, on obtient des quasi-isomorphismes naturels

$$R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}_n/\mathbb{A}_{\mathrm{cris},n})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}) \cong \Omega_{R_{\mathrm{cris},n}^+}^{\bullet} \quad \text{et} \quad R\Gamma((\bar{\mathfrak{X}}_n/\mathbb{A}_{\mathrm{cris},n})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}) \cong F^r \Omega_{R_{\mathrm{cris},n}^+}^{\bullet},$$

où $R_{\mathrm{cris},n}^+$ est la réduction modulo p^n de R_{cris}^+ et

$$F^r \Omega_{R_{\mathrm{cris},n}^+}^{\bullet} := F^r R_{\mathrm{cris},n}^+ \rightarrow F^{r-1} \Omega_{R_{\mathrm{cris},n}^+}^1 \rightarrow F^{r-2} \Omega_{R_{\mathrm{cris},n}^+}^2 \rightarrow \cdots.$$

En particulier, $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^{[r]}) \cong F^r \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^\bullet$ et $R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}) \cong \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^\bullet$, et on en déduit que $R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)$ et $R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n$ sont calculés par les complexes

$$\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) := [F^r \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet] \quad \text{et} \quad \text{Syn}(R_{\text{cris},n}^+, r) := [F^r \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\text{cris},n}^+}^\bullet].$$

Soit \bar{R} l'extension maximale de R telle que $\bar{R}[1/p]/R[1/p]$ est non ramifiée en dehors de D . On note $G_R := \text{Gal}(\bar{R}[1/p]/R[1/p])$ le groupe des automorphismes de $\bar{R}[1/p]$ qui fixent $R[1/p]$. Le but des sections suivantes est de montrer la version géométrique du théorème 4.14 de [Colmez et Nizioł 2017] :

Théorème 2.4. *Il existe des p^N -quasi-isomorphismes*

$$\begin{aligned} \alpha_r^0 : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)), \\ \alpha_{r,n}^0 : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R_{\text{cris},n}^+, r)_n &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)), \end{aligned}$$

où N est une constante qui ne dépend que de r .

Remarque 2.5. On verra plus loin que ce résultat implique le théorème global 1.1. Dans le cas où $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} := \text{Spf}(R)$ n'a pas de diviseur horizontal, la cohomologie de Galois $R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r))$ calcule la cohomologie étale $R\Gamma_{\text{ét}}(\text{Sp}(R[1/p]), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, car l'affinoïde $\text{Spa}(R[1/p], R)$ est un espace $K(\pi, 1)$ pour les coefficients de torsion (voir [Scholze 2013, Theorem 4.9]). Quand le diviseur horizontal n'est pas trivial, le résultat a été prouvé par Colmez et Nizioł [2017, §5.1.4] dans le cas arithmétique. La preuve est identique pour le cas géométrique et on obtient

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)) \cong R\Gamma_{\text{ét}}\left(\text{Sp}\left(R\left[\frac{1}{p}\right]\right) \setminus D_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)\right).$$

3. Anneaux de périodes

Dans cette partie, R est un anneau comme à la section 2B2 et on suppose de plus que $\text{Spf}(R)$ est connexe. Pour la preuve du théorème 2.4, on a besoin de définir une notion d'anneaux de périodes ($\mathbb{A}_{\text{inf}}, \mathbb{A}_{\text{cris}}, \dots$) sur \bar{R} et R . Les suites exactes prouvées dans les sections suivantes joueront notamment un rôle important dans la suite.

3A. Définitions des anneaux. On reprend ici la construction des anneaux de périodes donnée dans [Colmez et Nizioł 2017, §2.4].

3A1. *Les anneaux $\mathbb{E}_{\bar{R}}, \mathbb{A}_{\bar{R}}$ et $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$.* La complétion p -adique $\widehat{\bar{R}}$ de \bar{R} est une algèbre perfectoïde et on peut définir les anneaux

$$\mathbb{E}_{\bar{R}}^+ := \varprojlim_{x \rightarrow \varphi(x)} (\widehat{\bar{R}}/p), \quad \mathbb{A}_{\bar{R}}^+ := W(\mathbb{E}_{\bar{R}}^+), \quad \mathbb{E}_{\bar{R}} = \mathbb{E}_{\bar{R}}^+ \left[\frac{1}{[p^b]} \right], \quad \mathbb{A}_{\bar{R}} = W(\mathbb{E}_{\bar{R}}).$$

On rappelle qu'on a les éléments

$$\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathbb{E}_{\bar{R}}^+, \quad \mu = [\varepsilon] - 1 \in \mathbb{A}_{\bar{R}}^+, \quad \xi = \frac{\mu}{\varphi^{-1}(\mu)} \in \mathbb{A}_{\bar{R}}^+.$$

On définit $v_E : \mathbb{E}_{\bar{R}} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ par $v_E(x_0, x_1, x_2, \dots) = v_p(x_0)$. On a (voir [Andreatta et Iovita 2008, §2.4]) :

- (1) $v_E(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$.
- (2) $v_E(xy) \geq v_E(x) + v_E(y)$.
- (3) $v_E(x + y) \geq \min(v_E(x), v_E(y))$ avec égalité si $v_E(x) \neq v_E(y)$.
- (4) $v_E(\varphi(x)) = pv_E(x)$.

On définit un morphisme surjectif

$$\theta : \mathbb{A}_{\bar{R}}^+ \rightarrow \widehat{\bar{R}}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k [x_k] \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k x_k^{(0)},$$

où $[\cdot] : \mathbb{E}_{\bar{R}} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}$ est le morphisme de relèvement et $x_k = (x_k^{(0)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$. On a de plus que le noyau de θ est principal et engendré par ξ (ou par $\xi_0 := p - [p^b]$).

On peut aussi munir $\mathbb{A}_{\bar{R}}$ de la topologie faible dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les $U_{n,h} := p^n \mathbb{A}_{\bar{R}} + \mu^h \mathbb{A}_{\bar{R}}$.

On définit $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ comme la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^+[\xi^k/k!, k \in \mathbb{N}]$ et on le munit de la filtration $F^\bullet \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ où $F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ est l'idéal de $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ engendré par les $\xi^k/k!$ pour $k \geq r$. Posons

$$t = \log(1 + \mu) \in \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}).$$

On définit $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+(\bar{R}) = \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})[1/p]$ et $\mathbb{B}_{\text{cris}}(\bar{R}) = \mathbb{B}_{\text{cris}}^+(\bar{R})[1/t]$ et on les munit de la filtration induite de celle de \mathbb{A}_{cris} . Soient $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{R}) = \varprojlim_r \mathbb{B}_{\text{cris}}^+(\bar{R})/F^r \mathbb{B}_{\text{cris}}^+(\bar{R})$ et $\mathbb{B}_{\text{dR}}(\bar{R}) = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{R})[1/t]$. On munit ces anneaux de la filtration donnée par les puissances de ξ . On note ensuite $\mathbb{B}_{\text{st}}^+(\bar{R}) := \mathbb{B}_{\text{cris}}^+(\bar{R})[u]$ où u est une variable. On étend l'action du Frobenius φ en posant $\varphi(u) = pu$. On définit une application de monodromie $N : \mathbb{B}_{\text{st}}^+(\bar{R}) \rightarrow \mathbb{B}_{\text{st}}^+(\bar{R})$ par $N = -d/du$. On a un plongement $\mathbb{B}_{\text{st}}^+(\bar{R}) \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{R})$ donné par $u \mapsto u_{\varpi} := \log([\varpi^b]/\varpi)$ et qui permet d'induire l'action de G_K à $\mathbb{B}_{\text{st}}^+(\bar{R})$. Enfin, on note $\mathbb{B}_{\text{st}}(\bar{R}) = \mathbb{B}_{\text{cris}}(\bar{R})[u_{\varpi}]$, l'anneau de périodes semi-stable.

3A2. Les anneaux $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v]}$, $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]}$ et $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$. Pour $0 < u \leq v$, on définit les anneaux suivants :

- $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]}$, la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^+[[\beta]/p]$ pour β un élément de $\mathbb{E}_{\bar{R}}^+$ avec $v_E(\beta) = 1/u$.
- $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$, la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^+[p/[\alpha], [\beta]/p]$ pour α et β des éléments de $\mathbb{E}_{\bar{R}}^+$ avec $v_E(\alpha) = 1/v$ et $v_E(\beta) = 1/u$.
- $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v]}$:= $\{x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n \in \mathbb{A}_{\bar{R}} \mid x_n \in \mathbb{E}_{\bar{R}}, v_E(x_n) + n/v \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$.

On définit une application $w_v : \mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v]}$ $\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par

$$w_v(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0, \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} (v v_E(x_n) + n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note ensuite $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)+}$ l'ensemble des éléments x de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)}$ tels que $w_v(x) \geq 0$. L'anneau $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)}$ est séparé et complet pour la topologie induite par w_v ; la preuve est identique à celle d'[Andreata et Brinon 2008, proposition 4.2].

Si $v \geq 1 \geq u$, on a des injections

$$\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{R}), \quad \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{R}), \quad \mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{R}),$$

ce qui nous permet de définir des filtrations sur ces trois anneaux.

On note $\mathbb{A}^{[u]}$, $\mathbb{A}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}^{(0,v)}$ les anneaux précédents obtenus pour $R = \mathcal{O}_C$.

Proposition 3.1. *Supposons $u \leq 1 \leq v$. L'idéal $p^r F^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ est inclus dans $\xi^r \mathbb{A}^{[u,v]} = \xi_0^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ où $\xi_0 := p - [p^b]$.*

Démonstration. On rappelle d'abord (voir [Tsuji 1999, Lemma A2.13]) qu'on a

$$\mathbb{A}_{\text{inf}} \cap (\xi^r \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) = \xi^r \mathbb{A}_{\text{inf}} = \xi_0^r \mathbb{A}_{\text{inf}}. \quad (13)$$

Soit maintenant x dans $F^r \mathbb{A}^{[u,v]} = (\xi^r \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) \cap \mathbb{A}^{[u,v]}$. Par définition de $\mathbb{A}^{[u,v]}$, on peut écrire

$$x = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{p^n}{[\alpha^n]} + \sum_{n \geq 0} b_n \frac{[\beta^n]}{p^n}$$

avec $v_{\mathbb{E}}(\alpha) = \frac{1}{v}$ et $v_{\mathbb{E}}(\beta) = \frac{1}{u}$ et (a_n) et (b_n) des suites de \mathbb{A}_{inf} qui tendent vers 0. Pour simplifier, on note

$$A := \sum_{n \geq 0} a_n \frac{p^n}{[\alpha^n]} \quad \text{et} \quad B := \sum_{n \geq 0} b_n \frac{[\beta^n]}{p^n}.$$

On montre d'abord que $p^r A$ est dans $\mathbb{A}_{\text{inf}} + \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$. On a $\frac{p}{[\alpha]} = \frac{1}{1 + \frac{\xi_0}{p}} [\alpha']$ avec $v_{\mathbb{E}}(\alpha') = 1 - \frac{1}{v} \geq 0$. D'où, dans \mathbb{B}_{dR}^+ ,

$$p^r \frac{p}{[\alpha]} = p^r \cdot \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) \cdot [\alpha'] = \left(\sum_{0 \leq n < r} (-1)^n \xi_0^n p^{r-n} \right) \cdot [\alpha'] + \xi_0^r \cdot \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+r} \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) \cdot [\alpha'],$$

c'est-à-dire

$$p^r \frac{p}{[\alpha]} = a + \xi_0^r \frac{(-1)^r}{1 + \frac{\xi_0}{p}} [\alpha'] = a + \xi_0^r \cdot (-1)^r \cdot \frac{p}{[\alpha]} \quad \text{avec } a \in \mathbb{A}_{\text{inf}}.$$

On en déduit le résultat.

Montrons ensuite que $p^r B$ est dans $\xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$. Comme pour le point précédent, on a $\frac{[\beta]}{p} = (1 + \frac{\xi_0}{p}) [\beta']$ avec $v_{\mathbb{E}}(\beta') = \frac{1}{u} - 1 \geq 0$. On peut alors écrire

$$B = \sum_{n \geq 0} b'_n [(\beta')^n] \frac{\xi_0^n}{p^n} \quad \text{avec } b'_n \in \mathbb{A}_{\text{inf}},$$

et on peut supposer que ξ_0 ne divise pas b'_n dans \mathbb{A}_{inf} .

Mais \mathbb{B}_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète dont l'idéal maximal est donné par ξ : on note v_ξ sa valuation. Par hypothèse, on a $v_\xi(B) \geq r$. De plus, en utilisant (13), on voit que

$$v_\xi \left(b'_n [(\beta')^n] \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) = n,$$

et donc $b'_n = 0$ pour tout $n < r$. On a alors

$$p^r B = p^r \cdot \left(\sum_{n \geq r} b'_n [(\beta')^n] \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) = \xi_0^r \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b'_{n+r} [(\beta')^{n+r}] \frac{\xi_0^n}{p^n} \right) \in \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}.$$

On obtient que $p^r x = p^r A + p^r B$ est dans $\mathbb{A}_{\text{inf}} + \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$, écrivons-le $x_0 + \xi^r \tilde{x}$ avec $x_0 \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$ et $\tilde{x} \in \mathbb{A}^{[u,v]}$. On a $x_0 = p^r x - \xi^r \tilde{x}$ est dans $\xi^r \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ et comme x_0 est aussi dans \mathbb{A}_{inf} , via (13), on obtient que x_0 est dans $\xi^r \mathbb{A}_{\text{inf}}$.

Finalement, on obtient que $p^r x$ est dans $\xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ et donc $p^r F^r \mathbb{A}^{[u,v]} \subseteq \xi^r \mathbb{A}^{[u,v]}$. \square

On utilisera plus loin le résultat suivant :

Proposition 3.2 [Colmez et Nizioł 2017, §2.4.2]. *On a les inclusions suivantes :*

$$(1) \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \subseteq \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]} \text{ si } u \geq \frac{1}{p-1}.$$

$$(2) \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \supseteq \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]} \text{ si } u \leq \frac{1}{p}.$$

3B. Suites exactes fondamentales. On rappelle ici les différentes suites exactes fondamentales vérifiées par les anneaux de périodes définis précédemment.

3B1. Suites exactes pour les anneaux $\mathbb{A}_{\bar{R}}$ et $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)+}$.

Théorème 3.3 [Andreatta et Iovita 2008, Proposition B.1]. *On a les suites exactes*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\bar{R}} \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)+} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v/p)+} \rightarrow 0. \quad (15)$$

Remarque 3.4. De la même façon on a une suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^+ \xrightarrow{1-\varphi} \mathbb{A}_{\bar{R}}^+ \rightarrow 0$.

3B2. Suite exacte pour l'anneau \mathbb{A}_{cris} . Pour r dans \mathbb{N} , on écrit $r = a(r)(p-1) + b(r)$ avec $0 \leq b(r) \leq p-2$ et on note $t^{\{r\}} := t^r / (a(r)! p^{a(r)})$. Alors, comme on a

$$\frac{t^r}{a(r)! p^{a(r)}} = t^{b(r)} \left(\frac{t^{p-1}}{p} \right)^{[a(r)]}$$

et que t^{p-1}/p est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$, on obtient que $t^{\{r\}}$ est dans $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$.

Théorème 3.5 [Tsuji 1999, Theorem A3.26]. *Pour tout $r \geq 0$, on a la suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \xrightarrow{1-\varphi/p^r} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \rightarrow 0. \quad (16)$$

3B3. Suites exactes pour les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$. Colmez et Nizioł [2017] ont montré que des résultats similaires sont vérifiés par les anneaux $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}$.

Théorème 3.6 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.23]. Soit u tel que $\frac{p-1}{p} \leq u \leq 1$.

(1) On a une suite p^{2r} -exacte si $p > 2$ (ou p^{3r} -exacte si $p = 2$)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]}/F^r \rightarrow 0. \quad (17)$$

(2) On a une suite p^{2r} -exacte

$$0 \rightarrow (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \rightarrow 0. \quad (18)$$

(3) On a une suite p^{4r} -exacte si $p > 2$ (ou p^{5r} -exacte si $p = 2$)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u]} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Théorème 3.7 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.23]. Soient u et v tels que $\frac{p-1}{p} \leq u \leq 1 \leq v$.

(1) On a une suite p^{3r} -exacte si $p > 2$ (ou p^{4r} -exacte si $p = 2$)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}/F^r \rightarrow 0. \quad (20)$$

(2) On a une suite p^{2r} -exacte

$$0 \rightarrow (\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]} \rightarrow 0. \quad (21)$$

(3) On a une suite p^{5r} -exacte si $p > 2$ (ou p^{6r} -exacte si $p = 2$)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]} \rightarrow 0. \quad (22)$$

3C. Anneaux de convergence et morphisme de Frobenius. On considère les anneaux

$$R^{[u]} := \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+, \quad R^{[u,v]} := \mathbb{A}^{[u,v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+, \quad R^{(0,v)+} := \mathbb{A}^{(0,v)+} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$$

où les produits tensoriels sont complétés pour la topologie (p, ξ) -adique. On définit les filtrations

$$R^{[u]} := F^r \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+, \quad R^{[u,v]} := F^r \mathbb{A}^{[u,v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+, \quad R^{(0,v)+} := F^r \mathbb{A}^{(0,v)+} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+.$$

On rappelle qu'on avait

$$R_{\text{cris}, \square}^+ := \mathbb{A}_{\text{cris}} \left\{ X, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{[\varpi^b]}{X_{a+1} \cdots X_{a+b}} \right\} \quad \text{et} \quad R_{\text{cris}}^+ := \mathbb{A}_{\text{cris}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$$

et que R_{inf} et R_{cris} sont les complétions p -adiques de $R_{\text{inf}}^+[1/[\varpi^b]]$ et $R_{\text{cris}}^+[1/[\varpi^b]]$.

Si φ est le Frobenius sur \mathbb{A}_{inf} , on étend φ à $R_{\text{inf}, \square}^+$ en posant $\varphi(X_i) = X_i^p$ pour i dans $\{1, \dots, d\}$. On utilise ensuite la proposition 2.2 pour l'étendre à R_{inf}^+ (prendre $\Lambda_1 = R_{\text{inf}, \square}^+$, $\Lambda_2 = \Lambda_1' = R_{\text{inf}}^+$, $Z_\varphi = Z^p$ et $I = (p)$).

On définit φ sur $\mathbb{A}^{[u]}$, $\mathbb{A}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}^{(0,v)+}$ par

$$\varphi\left(\frac{p}{[\alpha]}\right) = \frac{p}{[\alpha^p]}, \quad \varphi\left(\frac{[\beta]}{p}\right) = \frac{[\beta^p]}{p}, \quad \varphi\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n^p] p^n$$

et on étend φ à $R^{[u]}$, $R^{[u,v]}$, $R^{(0,v)+}$ et R_{cris}^+ . On a alors

$$\varphi(R^{[u]}) = R^{[u/p]}, \quad \varphi(R^{[u,v]}) = R^{[u/p, v/p]}, \quad \varphi(R^{(0,v)+}) = R^{(0, v/p)+}.$$

On note ψ l'inverse de φ sur \mathbb{A}_{inf} . On va étendre ψ aux anneaux R_{inf} , R_{inf}^+ , R_{cris} , R_{cris}^+ , $R^{[u]}$, $R^{[u,v]}$ et $R^{(0,v)+}$.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ avec α_i dans $\{0, \dots, p-1\}$, on note

$$u_\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d}$$

et pour j dans $\{1, \dots, d\}$,

$$\partial_j = X_j \frac{\partial}{\partial X_j}.$$

La même preuve que [Colmez et Nizioł 2017, §2.2.7] donne le lemme et le corollaire suivants :

Lemme 3.8 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.7]. *Tout élément x de R_{inf}/p s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{\alpha} c_{\alpha}(x)$ avec $c_{\alpha}(x) = x_{\alpha}^p u_{\alpha}$ pour un x_{α} dans R_{inf}/p .*

De plus, si x est dans R_{inf}^+/p alors $c_{\alpha}(x)$ et x_0 sont dans R_{inf}^+/p .

Corollaire 3.9 [Colmez et Nizioł 2017, Corollary 2.8]. *Tout élément x de R_{inf} s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{\alpha} c_{\alpha}(x)$ avec $c_{\alpha}(x) = \varphi(x_{\alpha}) u_{\alpha}$ pour un x_{α} dans R_{inf} .*

De plus, si x est dans R_{inf}^+ alors x_0 est dans R_{inf}^+ et $\partial_j c_{\alpha}(x) - \alpha_j c_{\alpha}(x) \in p R_{\text{inf}}^+$.

On définit alors ψ sur R_{inf}^+ par $\psi(x) = \varphi^{-1}(c_0(x))$. L'application ψ n'est pas un morphisme d'anneaux, mais on a $\psi \circ \varphi(x) = x$ et plus généralement, $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ pour x et y dans R_{inf}^+ .

On étend ensuite ψ à R_{inf} , R_{cris} , R_{cris}^+ , $R^{[u]}$, $R^{[u,v]}$ et $R^{(0,v)+}$ et on obtient des applications surjectives

$$\psi : R^{[u]} \rightarrow R^{[pu]}, \quad R^{[u,v]} \rightarrow R^{[pu, pv]}, \quad R^{(0,v)+} \rightarrow R^{(0, pv)+}.$$

Remarque 3.10. Comme dans [Colmez et Nizioł 2017], on peut voir que les applications $x \mapsto c_{\alpha}(x)$ donnent des décompositions

$$S = \bigoplus_{\alpha} S_{\alpha} \quad \text{et} \quad S^{\psi=0} = \bigoplus_{\alpha \neq 0} S_{\alpha}$$

pour $S \in \{R_{\text{inf}}, R_{\text{inf}}^+, R_{\text{cris}}, R_{\text{cris}}^+, R^{[u]}, R^{[u,v]}, R^{(0,v)+}\}$. On a de plus $\partial_j = \alpha_j$ sur S_{α}/pS_{α} .

4. Passage de R_{cris}^+ à $R^{[u,v]}$

Soit R comme dans la section précédente. La première étape dans la preuve du théorème 2.4 est de construire un quasi-isomorphisme entre le complexe $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r)$ et un complexe $C(R^{[u,v]}, r)$ défini à partir de l'anneau $R^{[u,v]}$.

Dans cette partie, on suppose $u \geq 1/(p-1)$ de telle sorte que $\mathbb{A}_{\text{cris}} \subseteq \mathbb{A}^{[u]} \subseteq \mathbb{A}^{[u,v]}$. Si $S = R^{[u]}$ (respectivement $R^{[u,v]}$), on écrit $S' = R^{[u]}$ (respectivement $R^{[u,v/p]}$) et $S'' = R^{[pu]}$ (respectivement $R^{[pu,v]}$) et on note Ω_S^\bullet le complexe des log-différentielles de S sur $\mathbb{A}^{[u]}$ (respectivement $\mathbb{A}^{[u,v]}$). Pour i dans $\{1, \dots, d\}$, on note $J_i = \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_i \leq d\}$ et $\omega_i = dX_i/X_i$. Si \mathbf{j} est dans J_i , on écrit $\omega_{\mathbf{j}} = \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_i}$. La filtration $F^r \Omega_S^i$ est le sous- S -module de Ω_S^i engendré par $F^r S \cdot \omega_{\mathbf{j}}$, soit

$$F^r \Omega_S^i = \bigoplus_{\mathbf{j} \in J_i} F^r S \cdot \omega_{\mathbf{j}}.$$

On étend φ à Ω_S^i par

$$\varphi \left(\sum_{\mathbf{j} \in J_i} f_{\mathbf{j}} \omega_{\mathbf{j}} \right) = \sum_{\mathbf{j} \in J_i} \varphi(f_{\mathbf{j}}) \omega_{\mathbf{j}}.$$

On définit ensuite le complexe $C(S, r) := [F^r \Omega_S^\bullet \xrightarrow{p^r - p^r \varphi} \Omega_{S'}^\bullet]$. Enfin, on étend ψ à Ω_S^i en posant $\psi(\sum_{\mathbf{j} \in J_i} f_{\mathbf{j}} \omega_{\mathbf{j}}) = \sum_{\mathbf{j} \in J_i} \psi(f_{\mathbf{j}}) \omega_{\mathbf{j}}$ et on note $C^\psi(S, r) := [F^r \Omega_S^\bullet \xrightarrow{p^r \psi - p^r} \Omega_{S''}^\bullet]$.

Le p^{10r} -quasi-isomorphisme $\tau_{\leq r} C(R_{\text{cris}}^+, r) \rightarrow \tau_{\leq r} C(R^{[u,v]}, r)$ (voir (23) ci-dessous) s'obtient de manière similaire à son analogue arithmétique [Colmez et Nizioł 2017, Section 3.2]. Les principales différences viennent du fait qu'on ne dispose pas de la variable arithmétique X_0 qui permet de donner une interprétation des anneaux considérés en termes de séries de Laurent (sur l'anneau $W(k)$) ou de définir ψ de telle sorte à ce qu'il soit « suffisamment » topologiquement nilpotent. La démonstration se fait en trois parties. On montre dans un premier temps qu'on a un p^{8r} -quasi-isomorphisme $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$. Contrairement au cas arithmétique, si f est un élément de $R^{[u]}$, on n'a pas, a priori, une décomposition $f = f_1 + f_2$ avec f_1 dans $F^r R^{[u]}$ et f_2 tel que $p^r f_2$ est dans R_{inf}^+ (voir [Colmez et Nizioł 2017, Remark 2.6]) : au lieu de cela, on utilise ici la p^{2r} -exactitude de la suite (17) (voir lemme 4.2). L'étape suivante consiste à passer du complexe $C(R^{[u]}, r)$ au complexe $C^\psi(R^{[u]}, r)$. Enfin, on montre que l'inclusion $R^{[u]} \hookrightarrow R^{[u,v]}$ induit un p^{2r} -quasi-isomorphisme sur les complexes tronqués $\tau_{\leq r} C^\psi(S, r)$. La preuve diffère ici de celle de [Colmez et Nizioł 2017] dans la mesure où la série $\sum_{n \geq 1} \psi^n(x)$ pour x dans $R^{[u,v]}/R^{[u]}$ ne converge pas nécessairement pour notre définition de ψ . Il reste vrai, cependant, $\psi - 1$ est surjective sur $\mathbb{A}^{(0,v]+}$, ce qui permet de conclure (voir lemme 4.7).

4A. Disque de convergence. On commence par montrer qu'il existe un p^{10r} -quasi-isomorphisme $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$. La preuve du lemme suivant est identique à celle du cas arithmétique.

Lemme 4.1 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 3.1]. *Soit f dans $R^{[u]}$ tel que $f = \sum_{n \geq N} x_n [\beta]^n / p^n$ pour un N dans \mathbb{N} et soit s dans \mathbb{Z} . Si $N \geq s/(p-1)$, alors il existe g dans $R^{[u]}$ tel que $f = (1 - p^{-s} \varphi)(g)$.*

Comme dans [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 3.2], on utilise le lemme ci-dessus pour montrer les isomorphismes suivants :

Lemme 4.2. *Soient r dans \mathbb{N} et u et u' des réels tels que $1/(p-1) \leq u \leq 1$ et $u' \leq u \leq pu'$. Alors :*

- (1) *L'application $p^r - p^i \varphi$ induit un p^{5r} -isomorphisme $F^r \Omega_{R^{[u]}}^i / F^r \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{R^{[u]}}^i / \Omega_{R_{\text{cris}}^+}^i$.*
- (2) *L'application $p^r - p^i \varphi$ induit un p^{5r} -isomorphisme $F^r \Omega_{R^{[u]}}^i / F^r \Omega_{R^{[u']}}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{R^{[u]}}^i / \Omega_{R^{[u']}}^i$.*

Démonstration. Comme on a $\varphi(\omega_j) = \omega_j$ pour j dans J_i , il suffit de montrer que $p^r - p^i \varphi$ induit un p^{4r} -isomorphisme $F^r R^{[u]}/F^r R_{\text{cris}}^+ \xrightarrow{\sim} R^{[u]}/R_{\text{cris}}^+$ (respectivement $F^r R^{[u]}/F^r R^{[u']} \xrightarrow{\sim} R^{[u]}/R^{[u']}$). On note $A = R^{[u']}$ ou R_{cris}^+ et $B = R^{[u]}$.

On montre d'abord la p^r -injectivité. Soit f dans $F^r B$ tel que $(p^r - p^i \varphi)(f)$ est dans A . Il suffit de voir que $p^r f$ est dans A : c'est bien le cas, car $p^r f = (p^r - p^i \varphi)(f) + p^i \varphi(f)$ et $\varphi(B) \subseteq A$.

Il reste à voir que l'application est p^{5r} -surjective. Soit f dans B . On peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec

$$f_1 = \sum_{n < N} x_n \frac{[\beta]^n}{p^n} \quad \text{et} \quad f_2 = \sum_{n \geq N} x_n \frac{[\beta]^n}{p^n}$$

où $N = \lfloor (r-i)/(p-1) \rfloor$ et $x_n \in R_{\text{inf}}^+$ tend vers 0 à l'infini. On a alors que $p^r f_1$ est dans A . Par le lemme précédent, il existe g dans B tel que $f_2 = (1 - p^{i-r} \varphi)(g)$. En utilisant la suite p^{3r} -exacte (17), c'est-à-dire

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(r) \rightarrow (\mathbb{A}^{[u]})^{\varphi=p^r} \rightarrow \mathbb{A}^{[u]}/F^r \rightarrow 0,$$

on remarque que pour tout élément y de $\mathbb{A}^{[u]}$ on a $p^{3r} y = y_1 + y_2$ avec y_1 dans $(\mathbb{A}^{[u]})^{\varphi=p^r}$ et y_2 dans $F^r \mathbb{A}^{[u]}$. Mais on a un p^r -isomorphisme

$$(\mathbb{A}_{\text{cris}})^{\varphi=p^r} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^{[u]})^{\varphi=p^r},$$

et donc $p^r y_1$ est dans \mathbb{A}_{cris} (respectivement dans $\mathbb{A}^{[u']}$).

Comme $R^{[u]} = \mathbb{A}^{[u]} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$, on peut donc écrire $p^{3r} g = g_1 + g_2$ avec $p^r g_1$ dans A et g_2 dans $F^r B$. On obtient

$$p^{5r} f = p^{5r} f_1 + (p^r - p^i \varphi)(p^r g_1 + p^r g_2),$$

et donc, modulo A , on a $p^{4r} f = (p^r - p^i \varphi)(p^r g_2)$, ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 4.3. *Pour u et u' comme précédemment, on a :*

- (1) L'injection $R_{\text{cris}}^+ \subseteq R^{[u]}$ induit un p^{10r} -quasi-isomorphisme $C(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$.
- (2) L'injection $R^{[u']} \subseteq R^{[u]}$ induit un p^{10r} -quasi-isomorphisme $C(R^{[u']}, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u]}, r)$.

4B. Passage de φ à ψ . On rappelle qu'on a $C^\psi(R^{[u]}, r) := [F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet]$.

Lemme 4.4 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 3.4]. *On a un quasi-isomorphisme $C(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} C^\psi(R^{[u]}, r)$ donné par le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} & \Omega_{R^{[u]}}^\bullet \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \psi \\ F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet \end{array}$$

Remarque 4.5. La preuve du lemme est identique à celle donnée dans [Colmez et Nizioł 2017]. On montre de la même façon que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} & \Omega_{R^{[u,v/p]}}^\bullet \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \psi \\ F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu,v]}}^\bullet \end{array}$$

induit un quasi-isomorphisme $C(R^{[u,v]}, r) \xrightarrow{\sim} C^\psi(R^{[u,v]}, r)$.

4C. Anneaux de convergence. On passe maintenant de l'anneau $R^{[u]}$ à $R^{[u,v]}$.

Lemme 4.6. Soient u et v tels que $1/(p-1) \leq u \leq 1 \leq v$. Alors on a un p^r -isomorphisme

$$F^r R^{[u,v]} / F^r R^{[u]} \xrightarrow{\sim} R^{[u,v]} / R^{[u]}.$$

Démonstration. Comme on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\{x \in \mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]} \mid p^n x = 0\} = \{x \in \mathbb{A}^{(0,v)+} / \mathbb{A}_{\text{inf}} \mid p^n x = 0\} = 0,$$

on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{A}^{[u]} / p^n \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]} / p^n \rightarrow (\mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]}) / p^n \rightarrow 0.$$

Pour tout $m \geq 1$, on a de plus que R_{inf}^+ / p^m est plat sur $\mathbb{A}_{\text{inf}} / p^m$ et donc la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{A}^{[u]} / p^n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}} / p^m} R_{\text{inf}}^+ / p^m \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]} / p^n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}} / p^m} R_{\text{inf}}^+ / p^m \rightarrow (\mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]}) / p^n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}} / p^m} R_{\text{inf}}^+ / p^m \rightarrow 0$$

est exacte (on peut supposer $m \geq n$). On obtient finalement que, pour tout n et m , la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{A}^{[u]} / p^n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ / p^m \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]} / p^n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ / p^m \rightarrow (\mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]}) / p^n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ / p^m \rightarrow 0$$

est exacte. En prenant la limite sur (n, m) et en utilisant que les systèmes projectifs vérifient la condition de Mittag-Leffler, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow R^{[u]} \rightarrow R^{[u,v]} \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ \rightarrow 0.$$

Comme $F^r R^? = F^r \mathbb{A}^? \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$ pour $? \in \{[u], [u, v]\}$, le même raisonnement donne une suite exacte

$$0 \rightarrow F^r R^{[u]} \rightarrow F^r R^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}^{[u,v]} / F^r \mathbb{A}^{[u]} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ \rightarrow 0.$$

On obtient

$$F^r R^{[u,v]} / F^r R^{[u]} \cong F^r \mathbb{A}^{[u,v]} / F^r \mathbb{A}^{[u]} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ \quad \text{et} \quad R^{[u,v]} / R^{[u]} \cong \mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$$

et il suffit de montrer le résultat pour $R = \mathcal{O}_C$.

Comme $\mathbb{A}^{[u,v]}$ est la complétion de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[p/[\alpha], [\beta]/p]$ et $\mathbb{A}^{[u]}$ est celle de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[[\beta]/p]$, il suffit de montrer que $p^r(p/[\alpha])$ est dans l'image : c'est le cas (voir la preuve de la proposition 3.1) puisqu'on a

$$\frac{p}{[\alpha]} = \left(1 + \frac{[p^b]-p}{p}\right)^{-1} [\alpha'] \quad \text{avec } v_p(\alpha') = 1 - \frac{1}{v}. \quad \square$$

On peut maintenant montrer la version géométrique du lemme 3.6 de [Colmez et Nizioł 2017].

Lemme 4.7. *L'inclusion $R^{[u]} \hookrightarrow R^{[u,v]}$ induit un p^{2r} -quasi-isomorphisme*

$$\tau_{\leq r} C\psi(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} C\psi(R^{[u,v]}, r).$$

Démonstration. L'application est induite par

$$\begin{array}{ccc} F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet & \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} & \Omega_{R^{[pu,v]}}^\bullet \end{array}$$

Pour montrer qu'on a un p^{2r} -quasi-isomorphisme $\tau_{\leq r} C\psi(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} C\psi(R^{[u,v]}, r)$, il suffit de voir qu'on a un p^{2r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r}(F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^\bullet / F^r \Omega_{R^{[u]}}^\bullet) \xrightarrow{p^r \psi - p^\bullet} \tau_{\leq r}(\Omega_{R^{[pu,v]}}^\bullet / \Omega_{R^{[pu]}}^\bullet).$$

On va prouver :

- (1) Pour tout $i \leq r$, $F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^i / F^r \Omega_{R^{[u]}}^i \xrightarrow{p^r \psi - p^i} \Omega_{R^{[pu,v]}}^i / \Omega_{R^{[pu]}}^i$ est un p^{2r} -isomorphisme.
- (2) Pour $i = r + 1$, le morphisme $p^r \psi - p^{r+1} : F^r \Omega_{R^{[u,v]}}^{r+1} / F^r \Omega_{R^{[u]}}^{r+1} \rightarrow \Omega_{R^{[pu,v]}}^{r+1} / \Omega_{R^{[pu]}}^{r+1}$ est p^{2r} -injectif.

Prouvons le point (1). Soit $i \leq r$. Comme on a $\psi(\sum_{j \in J_i} f_j \omega_j) = \sum_{j \in J_i} \psi(f_j) \omega_j$, on se ramène à prouver que $p^r \psi - p^i : F^r R^{[u,v]} / F^r R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]} / R^{[pu]}$ est un p^r -isomorphisme. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que $p^r \psi - p^i : R^{[u,v]} / R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]} / R^{[pu]}$ est un p^r -isomorphisme.

Pour $i < r$, $p^s \psi - 1$ avec $s = r - i$ est inversible d'inverse $-(1 + p^s \psi + p^{2s} \psi^2 + \dots)$ et donc $p^r \psi - p^i$ est un p^r -isomorphisme. Il reste à voir le cas $i = r$: on va montrer que $(\psi - 1) : R^{[u,v]} / R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]} / R^{[pu]}$ est un isomorphisme.

Comme dans la preuve du lemme 4.6, on peut écrire

$$R^{[u,v]} / R^{[u]} = \mathbb{A}^{[u,v]} / \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+ \cong \mathbb{A}^{(0,v)+} / \mathbb{A}_{\text{inf}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+.$$

Si x est un monôme $aX_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d}$ de R_{inf}^+ avec $a \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq 0$ alors, par construction de ψ , $(\psi^k(x))_k$ tend vers 0 et la série $x + \psi(x) + \psi^2(x) + \dots$ converge. Il suffit donc de vérifier que $\psi - 1$ est un isomorphisme de $\mathbb{A}^{(0,v)+} / \mathbb{A}_{\text{inf}}$ dans lui-même.

L'injectivité se déduit des suites exactes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\text{inf}} \xrightarrow{\psi-1} \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}^{(0,v)/p} \xrightarrow{\psi-1} \mathbb{A}^{(0,v)+} \rightarrow 0$$

obtenues à partir des suites exactes (14) et (15).

Montrons la surjectivité. Soit x dans $\mathbb{A}^{(0,v]^+}$. Comme $(1 - \psi)$ est surjective de \mathbb{A} dans \mathbb{A} , il existe y dans \mathbb{A} tel que $x = (1 - \psi)(y)$. On va montrer que $\psi(y)$ est dans $\mathbb{A}^{(0,v]^+}$ (et on aura en particulier que $y = x + \psi(y)$ est dans $\mathbb{A}^{(0,v]^+}$).

Écrivons $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n$ et $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} [y_n] p^n$. On a l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [x_n] p^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} ([y_n] - [y_n^{1/p}]) p^n.$$

On veut montrer que $v(v_{\mathbb{E}}(y_n)/p) + n$ tend vers l'infini et que $v_{\mathbb{E}}(y_n) \geq -pn/v$. Il suffit de vérifier que $v_{\mathbb{E}}(y_n) \geq -n/v$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on aura alors

$$v_{\mathbb{E}}(y_n) \geq \frac{-n}{v} > \frac{-pn}{v} \quad \text{et} \quad v \frac{v_{\mathbb{E}}(y_n)}{p} + n \geq \frac{p-1}{p} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Pour $n = 0$, on a $x_0 = y_0 - y_0^{1/p}$. Si $v_{\mathbb{E}}(y_0) < 0$ alors $v_{\mathbb{E}}(y_0) < v_{\mathbb{E}}(y_0^{1/p})$ et $v_{\mathbb{E}}(y_0) = v_{\mathbb{E}}(x_0) \geq 0$, ce qui est une contradiction. Donc $v_{\mathbb{E}}(y_0) \geq 0$.

Soit n dans \mathbb{N} . Supposons que pour tout $i \leq n$, $v_{\mathbb{E}}(y_i) \geq -n/v$. Dans \mathbb{A} , on a

$$\begin{aligned} & -([x_{n+1}] - [y_{n+1}] + [y_{n+1}^{1/p}]) p^{n+1} \\ & = \left(\sum_{i \leq n} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{1/p}]) p^i \right) + p^{n+2} \left(\sum_{i \geq n+2} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{1/p}]) p^{i-(n+2)} \right). \end{aligned}$$

En divisant par p^{n+1} et en projetant dans C^b , on obtient que $x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{1/p}$ est l'image de

$$\frac{1}{p^{n+1}} \sum_{i \leq n} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{1/p}]) p^i$$

dans C^b . Mais par hypothèse de récurrence, $[\alpha^n] (\sum_{i \leq n} ([x_i] - [y_i] + [y_i^{1/p}]) p^i) \in \mathbb{A}^+ \cap p^{n+1} \mathbb{A} = p^{n+1} \mathbb{A}^+$, donc $\alpha^n (x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{1/p})$ est dans \mathcal{O}^b . On obtient

$$v_{\mathbb{E}}(x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{1/p}) \geq \frac{-n}{v}.$$

Si $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) \geq v_{\mathbb{E}}(x_{n+1})$ ou $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) \geq 0$, on a fini. Si $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) < v_{\mathbb{E}}(x_{n+1})$ et $v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) < 0$, alors

$$v_{\mathbb{E}}(y_{n+1}) = v_{\mathbb{E}}(x_{n+1} - y_{n+1} + y_{n+1}^{1/p}) \geq \frac{-n}{v} \geq \frac{-(n+1)}{v}.$$

On obtient finalement que $\psi - 1$ est un isomorphisme.

Montrons maintenant le point (2). Par le lemme précédent, il suffit de montrer que $p^r \psi - p^{r+1} : R^{[u,v]}/R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]}/R^{[pu]}$ est p^r -injectif. On va montrer que $\psi - p : R^{[u,v]}/R^{[u]} \rightarrow R^{[pu,v]}/R^{[pu]}$ est injectif et par le même argument que ci-dessus, cela revient à montrer que

$$\psi - p : \mathbb{A}^{(0,v]^+} / \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow \mathbb{A}^{(0,v]^+} / \mathbb{A}_{\text{inf}}$$

est aussi injectif.

Comme $\varphi \circ (\psi - p) = 1 - p\varphi$ et que $1 - p\varphi$ est bijectif sur \mathbb{A}_{inf} (d'inverse $1 + p\varphi + p^2\varphi^2 + \dots$), il suffit de vérifier que

$$1 - p\varphi : \mathbb{A}^{(0,v]^+} \rightarrow \mathbb{A}^{(0,v/p]^+}$$

est injectif.

Soit x dans $\mathbb{A}^{(0,v]^+}$ tel que $(1 - p\varphi)(x) = 0$. Alors, pour tout entier k ,

$$\left(\sum_{n \leq k} p^n \varphi^n \right) (1 - p\varphi)(x) = 0$$

et on obtient

$$x = p^{k+1} \varphi^{k+1}(x) \in (p^{k+1} \mathbb{A}^{(0,v/p^{k+1}]^+}) \subset p^{k+1} \mathbb{A}.$$

Donc

$$x \in \bigcap_{k \geq 0} (p^k \mathbb{A}) = 0. \quad \square$$

Ceci termine la démonstration.

Le résultat suivant se déduit des quasi-isomorphismes des lemmes 4.4, 4.7 et de la remarque 4.5.

Corollaire 4.8. *Si $pu \leq v$, on a un p^{2r} -quasi-isomorphisme*

$$\tau_{\leq r} C(R^{[u]}, r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} C(R^{[u,v]}, r).$$

En combinant les résultats de ces deux sections, on obtient un p^{12r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} C(R_{\text{cris}}^+, r) \rightarrow \tau_{\leq r} C(R^{[u,v]}, r). \quad (23)$$

5. Utilisation des (φ, Γ) -modules

On suppose toujours R comme à la section 2B2, avec $\text{Spf}(R)$ connexe. Dans cette section, on définit un isomorphisme $R^{[u,v]} \cong \mathbb{A}_R^{[u,v]}$, où $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ est un anneau muni d'une action du groupe de Galois G_R . Cela va permettre de construire un quasi-isomorphisme entre le complexe $C(R^{[u,v]}, r)$ de la section précédente et un complexe de (φ, Γ) -modules $\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]})$ qui intervient dans le calcul de la cohomologie de Galois.

Comme dans [Colmez et Nizioł 2017, §4], la preuve se fait en deux étapes. Premièrement, en divisant par des puissances de t , on transforme l'action des différentielles ∂_i en une action d'une algèbre de Lie, $\text{Lie } \Gamma_R$: cela permet de se débarrasser de la filtration (c'est possible par le lemme 5.3 ci-dessous). On utilise ensuite que les opérateurs τ_i qui sont définis dans le paragraphe suivant et qui traduisent l'action du groupe Γ_R sur l'anneau $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ sont topologiquement nilpotents (pour la topologie μ -adique) pour passer de $\text{Lie } \Gamma_R$ à Γ_R .

- Remarque 5.1.** (1) Colmez et Nizioł [2017] ne travaillent pas ici avec leur complexe original, soit $\text{Kum}(R_{\varpi}^{[u,v]}, r)$, mais avec un complexe quasi-isomorphe $\text{Cycl}(R_{\varpi}^{[u,v]}, r)$. Ce changement de complexe correspond à un changement de la variable *arithmétique* X_0 par une variable *cyclotomique* T sur laquelle on peut définir une action de Γ_R . Dans notre cas, les deux complexes sont confondus.
- (2) Dans [Colmez et Nizioł 2017], du fait de la variable supplémentaire T , l'algèbre de Lie obtenue n'est pas commutative. Ce n'est pas le cas ici.

5A. Plongement dans les anneaux de périodes. Pour chaque i de $\{1, \dots, d\}$, on choisit un élément $X_i^b = (X_i, X_i^{1/p}, \dots)$ dans $\mathbb{E}_{\bar{R}}$ et on définit un plongement de $R_{\text{inf}, \square}^+$ dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^+$ en envoyant X_i sur $[X_i^b]$. On étend le plongement à

$$R_{\text{inf}}^+ \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^+, \quad R_{\text{cris}}^+ \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}), \quad R^{[u]} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]}, \quad R^{[u,v]} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}, \quad R^{(0,v)+} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v)+}.$$

On note \mathbb{A}_R (respectivement \mathbb{A}_R^+ , $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$, \mathbb{A}_R^\star) l'image de R_{inf} (respectivement R_{inf}^+ , R_{cris}^+ , R^\star pour $\star \in \{[u], [u, v], (0, v)+\}$) par ce plongement. On peut alors définir une action du groupe G_R sur ces anneaux.

On considère

$$R_m^\square := \mathcal{O}_C \left\{ X^{1/p^m}, \frac{1}{(X_1 \cdots X_a)^{1/p^m}}, \frac{\varpi^{1/p^m}}{(X_{a+1} \cdots X_{a+b})^{1/p^m}} \right\}$$

et on note R_∞^\square la complétion p -adique de $\varinjlim R_m^\square$. Soient R_m et R_∞ les complétés p -adiques $R_m^\square \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_C} R$ et $R_\infty^\square \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_C} R$.

On rappelle que $G_R := \text{Gal}(\bar{R}[1/p]/R[1/p])$. On note

$$\Gamma_R := \text{Gal}\left(R_\infty^\square \left[\frac{1}{p}\right] / R^\square \left[\frac{1}{p}\right]\right) = \text{Gal}\left(R_\infty \left[\frac{1}{p}\right] / R \left[\frac{1}{p}\right]\right)$$

le groupe des automorphismes de $R_\infty[1/p]$ qui fixent $R[1/p]$. On a $\Gamma_R \cong \mathbb{Z}_p^d$.

De plus, comme G_R agit sur $\mathbb{A}_{\bar{R}}$ (resp. $\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ et $\mathbb{A}_{\bar{R}}^\star$), il agit sur \mathbb{A}_R (resp. $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$ et \mathbb{A}_R^\star) via Γ_R . Si on choisit des générateurs topologiques $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ de Γ_R , cette action est donnée par

$$\gamma_k([X_k^b]) = [\varepsilon][X_k^b] \quad \text{et} \quad \gamma_j([X_k^b]) = [X_k^b] \quad \text{si } j \neq k.$$

Remarque 5.2. On note $\tau_j := \gamma_j - 1$. Précisons l'action des τ_j sur \mathbb{A}_R^+ . Comme les γ_j agissent trivialement sur \mathbb{A}_{inf} , on obtient que $\tau_j(R_{\text{inf}, \square}^+) \subseteq \mu R_{\text{inf}, \square}^+$. En utilisant la proposition 2.2 pour $\lambda = \gamma_j$, $I = (\mu)$ et $Z_\lambda = Z$, on obtient que $\gamma_j(Z)$ est dans $Z + (\mu)$ et en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{A}_R^+ \cong R_{\text{inf}}^+$, on en déduit que $\tau_j(\mathbb{A}_R^+) \subseteq \mu \mathbb{A}_R^+$.

Comme on a $R^{[u,v]} = \mathbb{A}^{[u,v]} \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} R_{\text{inf}}^+$, on a le même résultat pour $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$.

5B. Passage des (φ, ∂) -modules aux (φ, Γ) -modules. On commence par montrer le lemme suivant. Comme pour les preuves précédentes, on ne dispose pas ici de l'interprétation des anneaux $R^{[u]}$ et $R^{[u,v]}$ en anneaux de séries de Laurent. La démonstration se fait en travaillant directement avec les anneaux de périodes et en utilisant la description de la filtration $F^r \mathbb{A}^{[u,v]}$ donnée à la proposition 3.1.

Lemme 5.3. Soit $v/p < 1 < v$ et $u \geq 1/(p-1)$. Alors, l'application¹⁰ $f \mapsto t^r f$ induit des p^{3r} -isomorphismes $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v/p]} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v/p]}$.

Démonstration. Montrons d'abord la p^{3r} -surjectivité de $t^r : \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$. D'après la proposition 3.1, si y est un élément de $F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$, $p^r y$ s'écrit $\xi^r x$ avec x dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$: il suffit donc de voir que t divise $p^2 \xi$ dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$. On écrit

$$\mu = \tilde{u}_0 t \quad \text{avec} \quad \tilde{u}_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)! p^{\tilde{a}(n)}}{n!} t^{\{n-1\}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{a}(n) = a(n) & \text{si } b(n) \neq 0, \\ \tilde{a}(n) = a(n) - 1 & \text{si } b(n) = 0, \end{cases}$$

et on en déduit que μ et t engendrent les mêmes idéaux dans \mathbb{A}_{cris} (voir [Fontaine 1994, §5.2.4]). Il suffit alors de vérifier que μ divise $p^2 \xi$. Mais, par définition, $\xi = \mu/\mu_1$ avec $\mu_1 = \varphi^{-1}(\mu)$: on va montrer que p^2/μ_1 est dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$.

Pour cela, on montre d'abord que $\mu = u_0[\bar{\mu}]$ avec u_0 unité de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v/p]^+}$. On suit la preuve d'Andreatta et Brinon [2008, proposition 4.2 (d)]. En utilisant que $\varphi(\mu) = (\mu+1)^p - 1$, on vérifie qu'on a

$$\mu = [\varepsilon] - 1 = [\bar{\mu}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \dots \quad \text{avec} \quad v_{\mathbb{E}}(\alpha_n) \geq v_{\mathbb{E}}(\varepsilon^{1/p^n} - 1) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}.$$

Si on écrit $\alpha_n = \bar{\mu} a_n$ avec a_n dans \mathbb{E} , on a

$$v_{\mathbb{E}}(a_n) \geq \frac{1-p^n}{p^{n-1}(p-1)} = -\sum_{k=0}^{n-1} p^{k-n+1}.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $(v/p)v_{\mathbb{E}}(a_n) + n \geq 0$. En notant $u_0 = 1 + p[a_1] + p^2[a_2] + \dots$, on obtient $w_{v/p}(u_0 - 1) > 0$, donc $w_{v/p}(u_0) = 0$ et u_0 est une unité de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v/p]^+}$.

On montre de même que $\mu_1 = u_1[\bar{\mu}_1]$ avec u_1 unité de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v]^+}$ (et donc aussi de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v/p]^+}$). On en déduit

$$\frac{p^2}{\mu_1} = \frac{p^2}{[\bar{\mu}_1]} u_1^{-1} \quad \text{avec} \quad w_v\left(\frac{p^2}{[\bar{\mu}_1]}\right) = \frac{-v}{(p-1)} + 2 > \frac{-p}{p-1} + 2 \geq 0,$$

et on obtient le résultat voulu.

La p^{3r} -surjectivité de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v/p]} \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v/p]}$ s'obtient de la même façon.

On vérifie ensuite la p^{3r} -injectivité. Soit f dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ tel que $t^r f = 0$, on veut montrer $p^{3r} f = 0$. Par ce qu'on a vu plus haut, $\mu^r f = 0 = [\bar{\mu}]^r u_0^r f$ avec u_0 unité de $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v/p]^+}$, donc $[\bar{\mu}]^r f = 0$. Enfin, on peut écrire $p^2 = [\bar{\mu}] \cdot x$ avec x dans $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v/p]^+}$: on a donc

$$p^{3r} f = (px[\bar{\mu}])^r f = 0. \quad \square$$

Remarque 5.4. On suppose $v/p < 1 < v$ et $u \geq 1/(p-1)$.

(1) On en déduit qu'on a un p^{3r} -isomorphisme $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]} \xrightarrow{\sim} F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ (et $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v/p]} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v/p]}$).

10. Bien définie, car on a $t \in \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}) \subset \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u]}$.

(2) La même preuve montre que le morphisme $f \mapsto t^{r+1}f$ de $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]} \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]} \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]}$ est $p^{2(r+1)}$ -injectif.

(3) On va montrer que les applications précédentes induisent des p^{6r} -isomorphismes

$$\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}/p^n \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}/p^n \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]}/p^n \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]}/p^n.$$

Pour cela, notons $A = \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ (respectivement $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]}$) et $B = F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ (respectivement $\mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]}$) et montrons que $x \mapsto t^r x$ induit un p^{6r} -isomorphisme de A/p^n dans B/p^n . La surjectivité découle du lemme précédent de manière évidente. Montrons la p^{6r} -injectivité : soit x dans A tel que $t^r x = p^n y$ pour y dans B . On a ensuite $p^{3r} t^r x = p^n (p^{3r} y) = p^n (t^r z)$ avec z dans A (on utilise ici la p^{3r} -surjectivité). Ainsi $t^r (p^{3r} x - p^n z)$ est nul et on déduit que $p^{3r} (p^{3r} x - p^n z) = 0$. On obtient que $p^{6r} x$ est nul modulo $p^n A$ et donc que t^r est p^{6r} -injective modulo p^n .

Dans la suite, pour simplifier, on note $S = \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v]}$ et $S' = \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u,v/p]}$. On rappelle qu'on a choisi $(\gamma_j)_{1 \leq j \leq d}$ des générateurs topologiques de $\Gamma_R \cong \mathbb{Z}_p^d$ et, pour $1 \leq i \leq d$, on définit $\partial_i := X_i(\partial/\partial X_i)$ et $J_i := \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_i \leq d\}$.

On note $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. Pour tout g de G_K , on a $g \cdot t = \chi(g)t$. Si on note $S(r)$ l'anneau S muni de l'action de G_K tordue par χ^r , on obtient que la multiplication par t^r induit une application Galois-invariante $S(r) \rightarrow S$.

On définit les complexes

$$\begin{aligned} \text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) &:= S(r) \xrightarrow{(\gamma_j-1)} S(r)^{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow S(r)^{J_d}, \\ \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r)) &:= [\text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\Gamma_R, S'(r))], \\ \text{Kos}(\partial, F^r S) &:= F^r S \xrightarrow{(\partial_j)} (F^{r-1} S)^{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow (F^{r-d} S)^{J_d}, \\ \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S) &:= [\text{Kos}(\partial, F^r S) \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \text{Kos}(\partial, S')]. \end{aligned}$$

On a $C(S, r) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \partial, S)$, et en utilisant l'isomorphisme $R^{[u,v]} \xrightarrow{\sim} A_{\overline{R}}^{[u,v]}$, on obtient $C(S, r) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)$.

Le but est maintenant de prouver la proposition suivante (voir [Colmez et Nizioł 2017, Proposition 4.2] pour l'analogie arithmétique) :

Proposition 5.5. (1) Il existe un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S).$$

(2) Il existe un p^{58r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r))_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)_n,$$

où $(\cdot)_n$ désigne la réduction modulo p^n .

Pour montrer cela, on définit $\nabla_j := t \partial_j$ et on considère l’algèbre de Lie associée au groupe Γ_R , $\text{Lie } \Gamma_R$. Alors $\text{Lie } \Gamma_R$ est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang d , engendré par les ∇_j pour $1 \leq j \leq d$. On note

$$\begin{aligned} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) &:= S(r) \xrightarrow{(\nabla_j)} S(r)^{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow S(r)^{J_d}, \\ \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) &:= [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r))]. \end{aligned}$$

Lemme 5.6. (1) Il existe un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S).$$

(2) De même, il existe un p^{58r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r))_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)_n.$$

Démonstration. On rappelle qu’on note $S = \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ et $S' = \mathbb{A}_R^{[u,v/p]}$. Comme dans [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 4.4], on déduit du lemme 5.3 et des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} S(r) & \xrightarrow{(\nabla_j)} & S(r)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S(r)^{J_r} \longrightarrow S(r)^{J_{r+1}} \longrightarrow \dots \\ \downarrow t^r & & \downarrow t^r & & & & \downarrow t^r \\ F^r S & \xrightarrow{(\nabla_j)} & (F^r S)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (F^r S)^{J_r} \longrightarrow (F^r S)^{J_{r+1}} \longrightarrow \dots \\ \uparrow t^0 & & \uparrow t^1 & & & & \uparrow t^r \\ F^r S & \xrightarrow{(\partial_j)} & (F^{r-1} S)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S^{J_r} \longrightarrow S^{J_{r+1}} \longrightarrow \dots \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} S'(r) & \xrightarrow{(\nabla_j)} & S'(r)^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S'(r)^{J_r} \longrightarrow S'(r)^{J_{r+1}} \longrightarrow \dots \\ \downarrow t^r & & \downarrow t^r & & & & \downarrow t^r \\ S' & \xrightarrow{(\nabla_j)} & (S')^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S')^{J_r} \longrightarrow (S')^{J_{r+1}} \longrightarrow \dots \\ \uparrow t^0 & & \uparrow t^1 & & & & \uparrow t^r \\ S' & \xrightarrow{(\partial_j)} & (S')^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S')^{J_r} \longrightarrow (S')^{J_{r+1}} \longrightarrow \dots \end{array}$$

qu’on a des p^{14r} -quasi-isomorphismes

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, F^r S) \quad \text{et} \quad \tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, S').$$

En effet, par le lemme, les flèches verticales du haut sont des p^{3r} -isomorphismes et on obtient donc un p^{6r} -quasi-isomorphisme entre les deux premiers complexes. De la même façon, les flèches du bas sont des p^{3r} -isomorphismes en degré inférieur à r . En degré $(r + 1)$, d’après la remarque 5.4, le morphisme $S \xrightarrow{t^{r+1}} F^r S$ est p^{4r} -injectif et on en déduit le p^{8r} -quasi-isomorphisme entre les complexes tronqués.

Comme on a

$$\begin{aligned} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) &:= [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r))], \\ \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S) &:= [\text{Kos}(\partial, F^r S) \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \text{Kos}(\partial, S')], \end{aligned}$$

on obtient un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S)$$

induit par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) & \xrightarrow{1-\varphi} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \\ \downarrow & & \downarrow p^r \\ \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) & \xrightarrow{p^r(1-\varphi)} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \\ \downarrow t^r & & \downarrow t^r \\ \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, F^r S) & \xrightarrow{p^r-\varphi} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S') \\ \uparrow t^\bullet & & \uparrow t^\bullet \\ \text{Kos}(\partial, F^r S) & \xrightarrow{p^r-p^\bullet\varphi} & \text{Kos}(\partial, S') \end{array} \tag{24}$$

Le résultat modulo p^n s'obtient de la même façon, en utilisant le dernier point de la remarque 5.4. \square

Remarque 5.7. En degré supérieur à $r + 1$, les flèches du bas dans le diagramme ci-dessus ne sont plus surjectives et, sans la troncation, on perd le quasi-isomorphisme entre la deuxième et la troisième ligne.

Lemme 5.8. *Il existe un quasi-isomorphisme*

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_R, S(r)).$$

Démonstration. La preuve est semblable à celle de [Colmez et Nizioł 2017, Proposition 4.5]. On va construire une application $\beta : \text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) \rightarrow \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r))$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} S(r) & \xrightarrow{(\gamma_j-1)} & S(r)^{J_1} & \longrightarrow & S(r)^{J_2} & \longrightarrow & \dots \\ \text{Id} \downarrow & & \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \\ S(r) & \xrightarrow{(\nabla_j)} & S(r)^{J_1} & \longrightarrow & S(r)^{J_2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

soit commutatif, et qui induit le quasi-isomorphisme voulu.

On rappelle qu'on a noté $\tau_j := \gamma_j - 1$.

Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ les coefficients des séries formelles

$$\frac{\log(1+X)}{X} = 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots \quad \text{et} \quad \frac{X}{\log(1+X)} = 1 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots .$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, on pose

$$s_j := 1 + a_1 \tau_j + a_2 \tau_j^2 + \dots \quad \text{et} \quad s_j^{-1} := 1 + b_1 \tau_j + b_2 \tau_j^2 + \dots .$$

En utilisant la remarque 5.2, on voit que pour x dans $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$, les séries $s_j(x)$ et $s_j^{-1}(x)$ convergent dans $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$.

Considérons maintenant les applications $\beta_i : S(r)^{J_i} \rightarrow S(r)^{J_i}$ avec $\beta_i((a_j)_{j \in J_i}) = (s_{j_1} \cdots s_{j_i}(a_j))_{j \in J_i}$. Par ce qu'on vient de voir, les β_i sont bien définies et sont des isomorphismes.

Il reste à voir que le diagramme commute. Mais on a

$$(s_{j_1} \cdots s_{j_i} \tau_{j_i} \cdots \tau_{j_1}) = (s_{j_1} \cdots s_{j_{i-1}} \nabla_{j_i} \tau_{j_{i-1}} \cdots \tau_{j_1}) = \dots = (\nabla_{j_1} \cdots \nabla_{j_i})$$

car ∇_j et τ_j commutent (comme on a tordu l'action par χ).

Enfin, en remarquant que $\beta \circ \varphi = \varphi \circ \beta$, on obtient que l'application β nous donne bien le quasi-isomorphisme cherché. □

Remarque 5.9. La convergence des séries s_j et s_j^{-1} se déduit ici directement de la définition de l'action des τ_j sur $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$. Dans [Colmez et Nizioł 2017], du fait de la variable supplémentaire T , la preuve de cette convergence est plus technique et s'obtient, là encore, par des considérations sur des séries de Laurent ; voir [Colmez et Nizioł 2017, §2.5.3].

La proposition 5.5 se déduit ensuite des deux précédents lemmes.

5C. Changement d'anneau. Pour terminer, on passe de l'anneau $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$ à \mathbb{A}_R .

Lemme 5.10. *L'inclusion $\mathbb{A}_R^{(0,v)+} \hookrightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ induit un quasi-isomorphisme*

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v)+}(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)).$$

Démonstration. L'idée est la même que dans [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 4.8] : on vérifie que $1 - \varphi : \mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v/p]} / \mathbb{A}_R^{(0,v/p)+}$ est un isomorphisme. Comme on a un isomorphisme entre $\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}$ et $\mathbb{A}_R^{[u,v/p]} / \mathbb{A}_R^{(0,v/p)+}$, on peut voir $1 - \varphi$ comme un endomorphisme de $\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}$.

On a de plus

$$\varphi \left(\frac{[\beta]^n}{p^n} \right) = \frac{[\beta]^{pn}}{p^n} = p^{(p-1)n} \frac{[\beta]^{pn}}{p^{pn}}.$$

On en déduit que $\varphi(\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}) \subseteq p \cdot (\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+})$ et par itération,

$$\varphi^k(\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}) \subseteq p^k \cdot (\mathbb{A}_R^{[u,v]} / \mathbb{A}_R^{(0,v)+}).$$

On obtient que φ est topologiquement nilpotent et $(1 - \varphi)$ inversible. □

Pour $S = \mathbb{A}_R, \mathbb{A}_R^{(0,v)+}$, on note $\text{Kos}(\psi, \Gamma_R, S) := [\text{Kos}(\Gamma_R, S) \xrightarrow{\psi^{-1}} \text{Kos}(\Gamma_R, S)]$.

Remarque 5.11. Dans [Colmez et Nizioł 2017], l'anneau $\mathbb{A}_R^{(0,v)+}$ n'est pas stable par ψ et il est nécessaire de multiplier $\mathbb{A}_R^{(0,v)+}$ par une constante π_i^{-l} dans la définition de $\text{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v)+})$.

Lemme 5.12. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}) & \xrightarrow{1-\varphi} & \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v/p]^{+}}) \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \psi \\ \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}) & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}) \end{array}$$

induit un quasi-isomorphisme $\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, S) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\psi, \Gamma_R, S)$.

Démonstration. Le raisonnement est semblable à celui de la preuve du lemme 4.4 : comme ψ est surjective, il suffit de vérifier que $\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v/p]^{+}})^{\psi=0}$ est acyclique. On utilise la décomposition de la remarque 3.10 et on est ramené à prouver que $\text{Kos}(\Gamma_R, \varphi(\mathbb{A}_R^{(0,v/p]^{+}})u_\alpha)$ est acyclique pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq 0$.

Soit alors k tel que $\alpha_k \neq 0$. On peut supposer que $k = d$. Pour simplifier, on pose $M_\alpha = \varphi(\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}})u_\alpha$. On note $J'_i := \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq d-1\}$ et on écrit $\text{Kos}(\Gamma_R, M_\alpha)$ comme le complexe

$$\begin{array}{ccccccc} M_\alpha & \xrightarrow{(\tau_j)_{j \neq d}} & (M_\alpha)^{J'_1} & \longrightarrow & (M_\alpha)^{J'_2} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \tau_d & & \downarrow \tau_d & & \downarrow \tau_d & & \\ M_\alpha & \xrightarrow{(\tau_j)_{j \neq d}} & (M_\alpha)^{J'_1} & \longrightarrow & (M_\alpha)^{J'_2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On va montrer que τ_d est bijective sur M_α . Comme M_α est p -adiquement complet, il suffit de montrer la surjectivité modulo p .

On a $\gamma_d \cdot u_\alpha = (\bar{\mu} + 1)^{\alpha_d} u_\alpha$ et donc, pour y dans $(\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}/p)$,

$$(\gamma_d - 1) \cdot (\varphi(y)u_\alpha) = \varphi(\bar{\mu}_1 G(y))u_\alpha$$

avec $\bar{\mu}_1 = \varphi^{-1}(\bar{\mu})$ et $G(y) = (1 + \bar{\mu}_1)^{\alpha_d} \bar{\mu}_1^{-1} (\gamma_d - 1)y + \bar{\mu}_1^{-1} ((1 + \bar{\mu}_1)^{\alpha_d} - 1)y$. Mais l'action de $(\gamma_d - 1)$ est triviale modulo $\bar{\mu}$ (car, modulo $\bar{\mu}$, $\varepsilon = 1$) et comme $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1^p$, on obtient que, modulo $\bar{\mu}_1$, $G(y) = \alpha_d y$. On a alors que l'application $\varphi \circ G : (\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}/p) \rightarrow (\mathbb{A}_R^{(0,v/p]^{+}}/p)$ est surjective modulo $\bar{\mu}$ et comme $(\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}/p)$ est $\bar{\mu}$ -complet, on en déduit que $\varphi \circ G$ est surjective et que $(\gamma_d - 1)$ est surjective sur M_α . □

Lemme 5.13. *L'inclusion $\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}} \hookrightarrow \mathbb{A}_R$ induit un quasi-isomorphisme*

$$\text{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R).$$

Démonstration. Comme dans [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 4.12], il suffit de voir que $1 - \psi : \mathbb{A}_R/\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}} \rightarrow \mathbb{A}_R/\mathbb{A}_R^{(0,v]^{+}}$ est un isomorphisme. De la même façon que dans la preuve du lemme 4.7, en remarquant que $1 + \psi + \psi^2 + \dots$ converge sur les monômes, on se ramène à montrer le résultat pour l'anneau $\mathbb{A}/\mathbb{A}^{(0,v]^{+}}$. Mais on a montré au lemme 4.7 que $1 - \psi$ était surjective de $\mathbb{A}^{(0,v]^{+}}$ dans lui-même et on obtient donc que $1 - \psi$ est un isomorphisme sur le quotient. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 5.14. *On a un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R).$$

Enfin, en combinant tous les résultats de cette section, on obtient :

Proposition 5.15. *Il existe un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)).$$

Remarque 5.16. On peut montrer également que l'inclusion $\mathbb{A}_R^+ \hookrightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}$ induit un quasi-isomorphisme $\mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^+(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r))$. En effet, par ce qu'on vient de voir, il reste à vérifier que l'inclusion $\mathbb{A}_R^+ \hookrightarrow \mathbb{A}_R^{(0,v]^+}$ donne un quasi-isomorphisme $\mathrm{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}(\psi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{(0,v]^+})$. Pour cela, il suffit de prouver que $1 - \psi : \mathbb{A}_R^{(0,v]^+} / \mathbb{A}_R^+ \rightarrow \mathbb{A}_R^{(0,v]^+} / \mathbb{A}_R^+$ est un isomorphisme, ce qui est montré dans la preuve du lemme 4.7.

6. Cohomologie de Galois

Soit R comme dans les sections précédentes. Pour terminer la preuve du théorème de comparaison locale 2.4, il reste à voir qu'on a un quasi-isomorphisme $R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R) \cong R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}})$. Ce résultat s'obtient via des arguments classiques de descente presque étale et de décomplétion.

6A. Calcul de la cohomologie de Galois. Le but de cette partie est de montrer qu'on a un quasi-isomorphisme

$$[R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{1-\varrho} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))] \leftarrow \sim R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)). \quad (25)$$

Comme la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{A}_{\bar{R}} \xrightarrow{1-\varrho} \mathbb{A}_{\bar{R}} \rightarrow 0$$

donne un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \xrightarrow{\sim} [R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r)) \xrightarrow{1-\varrho} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r))],$$

il suffit de vérifier qu'on a un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r)).$$

Soit \tilde{R}_∞ la clôture intégrale de R dans la sous- $R[1/p]$ -algèbre de $\bar{R}[1/p]$ engendrée pour $m \geq 1$ par les $X_{a+b+1}^{1/m}, \dots, X_d^{1/m}$ et pour $n \geq 1$ par les $X_1^{1/p^n}, \dots, X_d^{1/p^n}$. La même preuve que dans [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 5.8] donne :

Proposition 6.1. \bar{R} est l'extension maximale de \tilde{R}_∞ telle que $\bar{R}[1/p] / \tilde{R}_\infty[1/p]$ est étale.

On note $\mathbb{E}_{\tilde{R}_\infty}$ le tilt de la complétion de \tilde{R}_∞ , $\mathbb{A}_{\tilde{R}_\infty} = W(\mathbb{E}_{\tilde{R}_\infty})$ et $\tilde{\Gamma}_R := \mathrm{Gal}(\hat{\tilde{R}}_\infty[1/p] / R[1/p])$. Enfin, soit $H_R := \ker(G_R \rightarrow \tilde{\Gamma}_R)$. On déduit de la proposition précédente le résultat suivant, le raisonnement étant identique à celui de [Andreatta et Brinon 2008, §2; Andreatta et Iovita 2008, Appendix A; Colmez 2003] :

Proposition 6.2 [Colmez et Nizioł 2017, Proposition 4.13]. (1) *Pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(H_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}) = 0$. En particulier, on a un quasi-isomorphisme*

$$R\Gamma(\tilde{\Gamma}_R, \mathbb{A}_{\tilde{R}_\infty}(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r)).$$

(2) *Il existe un quasi-isomorphisme*

$$R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\tilde{\Gamma}_R, \mathbb{A}_{\tilde{R}_\infty}(r)).$$

Dans la suite, on note μ_H le morphisme $R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}(r)) \rightarrow R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}(r))$. On passe de l'anneau \mathbb{A}_{R_∞} à \mathbb{A}_R via un argument de décomplétion (voir [Andreatta et Iovita 2008, Theorem A.14; Kedlaya et Liu 2016]) :

Proposition 6.3 [Colmez et Nizioł 2017, Proposition 4.13]. *On a un quasi-isomorphisme*

$$\mu_\infty : R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}(r)).$$

6B. Comparaison avec le complexe syntomique. On peut maintenant montrer le théorème suivant :

Théorème 6.4. *Il existe une constante N indépendante de R telle qu'on a des p^{Nr} -quasi-isomorphismes*

$$\begin{aligned} \alpha_r : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R, r) &\rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)), \\ \alpha_{r,n} : \tau_{\leq r} \text{Syn}(R, r)_n &\rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)). \end{aligned}$$

Démonstration. On vient de voir qu'on avait un quasi-isomorphisme

$$[R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)) \xrightarrow{1-\varphi} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))] \leftarrow \sim R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Mais $R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))$ est calculé par le complexe $\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_R(r))$ et on a un quasi-isomorphisme naturel

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)).$$

D'après la proposition 5.5, on a un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}),$$

et en utilisant le quasi-isomorphisme de la proposition 5.15,

$$\text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_R, \mathbb{A}_R(r)),$$

on en déduit un p^{30r} -quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}).$$

Enfin, en utilisant l'isomorphisme naturel $\mathbb{A}_R^{[u,v]} \cong R^{[u,v]}$ et le p^{12r} -quasi-isomorphisme $\text{Syn}(R_{\text{cris}}^+, r) \xrightarrow{\sim} C(R^{[u,v]}, r)$ établi dans la section 4, on obtient le p^{Nr} -quasi-isomorphisme α_r (avec $N = 42$). La même démonstration donne un p^{Nr} -quasi-isomorphisme $\alpha_{r,n}$ pour $N = 70$. \square

7. Comparaison locale avec l'application de Fontaine–Messing

Dans cette partie, on montre que le morphisme de périodes local construit dans la section précédente est égal à l'application de Fontaine–Messing modulo une certaine puissance de p . Une fois la construction du morphisme établie, la preuve est très similaire à celle du cas arithmétique [Colmez et Nizioł 2017, §4.7]. On suppose toujours $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(R)$ connexe.

7A. Anneaux $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD}$ et lemmes de Poincaré. On rappelle ici la définition de $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ et $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD}$ donnée dans [Colmez et Nizioł 2017, §2.6] et les lemmes de Poincaré vérifiés par ces anneaux.

7A1. Définition des anneaux SA . Dans cette section, S désignera l'anneau R_{cris}^+ (respectivement $R^{[u,v]}$) et A désignera $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\bar{R})$ ou $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ (respectivement $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$ ou $\mathbb{A}_R^{[u,v]}$). On a donc un morphisme injectif continu $\iota : S \rightarrow A$ et, si B désigne l'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ (respectivement $\mathbb{A}^{[u,v]}$), on note $f : S \otimes_B A \rightarrow A$ le morphisme tel que $f(x \otimes y) = \iota(x)y$.

On note SA la log-PD-enveloppe complétée de $S \otimes_B A \rightarrow A$ par rapport à $\ker(f)$. Plus explicitement, si $V_j = (X_j \otimes 1)/(1 \otimes \iota(X_j))$ pour $1 \leq j \leq d$, alors SA est la complétion p -adique de $S \otimes_B A$ à laquelle on ajoute tous les $(x \otimes 1 - 1 \otimes \iota(x))^{[k]}$ pour x dans S et les $(V_j - 1)^{[k]}$. On munit SA d'une filtration en définissant $F^r SA$ comme l'adhérence de l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$x_1 x_2 \prod_{1 \leq j \leq d} (V_j - 1)^{[k_j]},$$

où x_1 est dans $F^{r_1} S$, x_2 est dans $F^{r_2} A$ et $r_1 + r_2 + \sum_{j=1}^d k_j \leq r$.

Proposition 7.1 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.36]. (1) *Tout x de SA s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{\mathbf{k}=(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d} x_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d (1 - V_j)^{[k_j]}, \quad (26)$$

avec $x_{\mathbf{k}}$ dans A qui tend vers 0 quand \mathbf{k} tend vers l'infini.

(2) *De plus,*

$$x = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} x_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d (1 - V_j)^{[k_j]} \in F^r SA \quad \text{si et seulement si } x_{\mathbf{k}} \in F^{r-|\mathbf{k}|} A \text{ pour tout } \mathbf{k}.$$

On définit les anneaux suivants :

- $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$) pour $S = R_{\mathrm{cris}}^+$ (resp. $R^{[u,v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ (resp. $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$).
- $\mathbb{E}_{R_{\infty}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{R_{\infty}}^{[u,v]}$) pour $S = R_{\mathrm{cris}}^+$ (resp. $R^{[u,v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\infty})$ (resp. $\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{[u,v]}$).
- $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]}$) pour $S = R_{\mathrm{cris}}^+$ (resp. $R^{[u,v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\bar{R})$ (resp. $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]}$).

On déduit de la proposition 7.1 les inclusions $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD} \subseteq \mathbb{E}_{R_{\infty}}^{PD} \subseteq \mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD}$ (et de même avec l'exposant $[u, v]$).

On peut maintenant étendre les actions de G_R et de φ à ces anneaux :

Proposition 7.2 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.40]. Si $SA = \mathbb{E}_M^{PD}$ (respectivement $\mathbb{E}_M^{[u,v]}$) pour $M \in \{R, R_\infty, \bar{R}\}$, on note $SA' = \mathbb{E}_M^{PD}$ (respectivement $\mathbb{E}_M^{[u,v/p]}$). Alors :

- (1) φ s'étend de manière unique en un morphisme continu $SA \rightarrow SA'$.
- (2) L'action de G_R s'étend de manière unique à une action continue sur SA qui commute avec φ , et $\mathbb{E}_{R_\infty}^\star$ (pour $\star \in \{PD, [u, v]\}$) est l'ensemble des points fixes de \mathbb{E}_R^\star par le sous-groupe $\Gamma_R \subseteq G_R$.

7A2. Lemmes de Poincaré. On considère maintenant le complexe

$$F^r \Omega_{SA/A}^\bullet := F^r SA \rightarrow F^{r-1} SA \otimes_{SA} \Omega_{SA/A}^1 \rightarrow F^{r-2} SA \otimes_{SA} \Omega_{SA/A}^2 \rightarrow \dots$$

Proposition 7.3 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.37]. Le morphisme $F^r A \rightarrow F^r \Omega_{SA/A}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. La preuve est identique à celle de Colmez et Nizioł. □

Pour simplifier les notations, on note $R_1 := R^{[u,v]}$ et $R_2 := \mathbb{A}_R^{[u,v]}$. On a des plongements $\iota_i : R^{[u,v]} \rightarrow R_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. On note ensuite R_3 la log-PD-enveloppe complétée de $R_1 \otimes_{\mathbb{A}^{[u,v]}} R_2$ pour $\iota_2 \circ \iota_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$ (et donc $R_3 = \mathbb{E}_R^{[u,v]}$). On pose $X_{ij} := \iota_i(X_j)$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, \dots, d\}$. Soient

$$\Omega_i^1 = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{Z} \frac{dX_{ij}}{X_{ij}}, \quad \Omega_3^1 = \Omega_1^1 \oplus \Omega_2^1, \quad \Omega_i^n = \bigwedge^n \Omega_i^1,$$

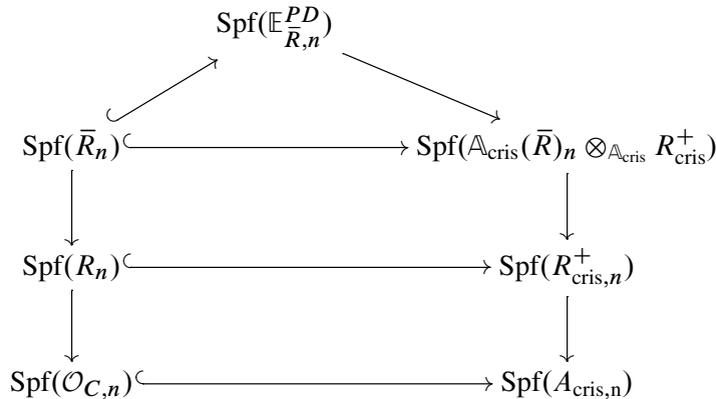
et

$$F^r \Omega_{R_i}^\bullet := F^r R_i \rightarrow F^{r-1} R_i \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_i^1 \rightarrow F^{r-2} R_i \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega_i^2 \rightarrow \dots$$

Lemme 7.4 [Colmez et Nizioł 2017, Lemma 3.11]. Les applications $F^r \Omega_{R_1}^\bullet \rightarrow F^r \Omega_{R_3}^\bullet$ et $F^r \Omega_{R_2}^\bullet \rightarrow F^r \Omega_{R_3}^\bullet$ sont des quasi-isomorphismes.

7B. Application de Fontaine–Messing. On note $\mathbb{E}_{\bar{R},n}^{PD}$ la réduction modulo p^n de $\mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD}$, et alors $\mathbb{E}_{\bar{R},n}^{PD}$ est la log-PD-enveloppe de $\text{Spec}(\bar{R}_n) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris},n}} R_{\text{cris}}^+)$.

On a le diagramme commutatif suivant :



On définit le complexe syntomique $\text{Syn}(\bar{R}, r)_n := [F^r \Omega_{\mathbb{F}_{R,n}^{PD}}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{\mathbb{F}_{R,n}^{PD}}^\bullet]$.

La suite p^r -exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n(r)' \rightarrow F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n \rightarrow 0$$

donne un p^r -quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)') \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, [F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n])$$

et, par la proposition 7.3, on a

$$R\Gamma(G_R, [F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n \xrightarrow{p^r - \varphi} \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})_n]) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G_R, [F^r \Omega_{E_{R,n}^{PD}}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{E_{R,n}^{PD}}^\bullet]).$$

On peut alors définir l'application de Fontaine–Messing

$$\alpha_{r,n}^{\text{FM}} : \text{Syn}(R, r)_n \rightarrow R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}/p^n(r)').$$

On dit que deux morphismes f et g sont p^N -égaux (avec N une constante) si le morphisme induit par $f - g$ sur les groupes de cohomologie est tué par p^N . On obtient la version géométrique du théorème 4.16 de [Colmez et Nizioł 2017].

Théorème 7.5. *Il existe une constante N qui ne dépend que de p et de r telle que l'application de Fontaine–Messing α_r^{FM} (respectivement $\alpha_{r,n}^{\text{FM}}$) est p^N -égale à l'application α_r^0 (respectivement $\alpha_{r,n}^0$) donnée par le théorème 6.4.*

Démonstration. On reprend les mêmes notations que dans [Colmez et Nizioł 2017, Theorem 4.16], c'est-à-dire :

- C_G et C_Γ désignent respectivement les complexes de cochaînes continues de G et de Γ .
- $K_\varphi(F^r S) := [F^r S \xrightarrow{p^r - \varphi} S']$ (et donc $K_\varphi(S) := [S \xrightarrow{1 - \varphi} S']$).
- $K_{\varphi, \partial}(F^r S) := \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r S) = [\text{Kos}(\partial, F^r S) \xrightarrow{p^r - p^\bullet \varphi} \text{Kos}(\partial, S')]$.
- $K_{\varphi, \Gamma}(F^r S) := \text{Kos}(\varphi, \Gamma, F^r S) = [\text{Kos}(\Gamma, F^r S) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\Gamma, S')]$.
- $K_{\varphi, \Gamma, \partial}(F^r S) := [\text{Kos}(\Gamma, F^r \Omega_S^\bullet) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\Gamma, \Omega_{S'}^\bullet)]$.
- $K_{\varphi, \text{Lie } \Gamma}(F^r S) := [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, F^r S) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, S')]$.
- $K_{\varphi, \text{Lie } \Gamma, \partial}(F^r S) := [\text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, F^r \Omega_S^\bullet) \xrightarrow{p^r - \varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, \Omega_{S'}^\bullet)]$.

Le théorème se déduit alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_{\varphi,\partial}(F^r R_{\text{cris}}^+) & \longrightarrow & C_G(K_{\varphi,\partial}(F^r \mathbb{E}_{\bar{R}}^{PD})) & \xleftarrow{\sim} & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}))) & \xleftarrow{\sim} & C_G(\mathbb{Z}_p(r)) \\
 \downarrow \tau_{\leq r} \wr & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow (22) & \downarrow (15) \wr \\
 K_{\varphi,\partial}(F^r R^{[u,v]}) & \longrightarrow & C_G(K_{\varphi,\partial}(F^r \mathbb{E}_{\bar{R}}^{[u,v]})) & \xleftarrow{\sim} & C_G(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u,v]})) & \xleftarrow{t^r} & C_G(K_{\varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}^{(0,v]^+}(r))) \longrightarrow C_G(K_{\varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}(r))) \\
 & & \uparrow \mu_H & & \uparrow \mu_H & & \uparrow \mu_H \wr \\
 & & C_{\Gamma}(K_{\varphi,\partial}(F^r \mathbb{E}_{R_{\infty}}^{[u,v]})) & \xleftarrow{\sim} & C_{\Gamma}(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_{R_{\infty}}^{[u,v]})) & \xleftarrow{t^r} & C_{\Gamma}(K_{\varphi}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^{(0,v]^+}(r))) \longrightarrow C_{\Gamma}(K_{\varphi}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}(r))) \\
 & & \uparrow \mu_{\infty} & & \uparrow \mu_{\infty} & & \uparrow \mu_{\infty} \wr \\
 & & C_{\Gamma}(K_{\varphi,\partial}(F^r \mathbb{E}_R^{[u,v]})) & \xleftarrow{\sim} & C_{\Gamma}(K_{\varphi}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]})) & \xleftarrow{t^r} & C_{\Gamma}(K_{\varphi}(\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}(r))) \longrightarrow C_{\Gamma}(K_{\varphi}(\mathbb{A}_R(r))) \\
 & & \wr & & \wr & & \wr \\
 & & K_{\varphi,\Gamma,\partial}(F^r \mathbb{E}_R^{[u,v]}) & \xleftarrow{\sim} & K_{\varphi,\Gamma}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xleftarrow{t^r} & K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_R^{(0,v]^+}(r)) \xrightarrow{\sim} K_{\varphi,\Gamma}(\mathbb{A}_R(r)) \\
 & & \wr & & \wr & & \downarrow 5.8 \wr \\
 & & K_{\varphi,\text{Lie } \Gamma,\partial}(F^r \mathbb{E}_R^{[u,v]}) & \xleftarrow{\sim} & K_{\varphi,\text{Lie } \Gamma}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xleftarrow{\sim} & K_{\varphi,\text{Lie } \Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \\
 & & \uparrow t^{\bullet} & & \uparrow t^{\bullet}, \tau_{\leq r}, 5.6 \wr & & \wr \\
 & & K_{\varphi,\partial}(F^r \mathbb{E}_R^{[u,v]}) & \xleftarrow{\sim} & K_{\varphi,\partial}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & & \\
 \text{lemme 7.4} \wr & & & & & &
 \end{array}$$

Les flèches horizontales de la quatrième colonne vers la troisième sont données par les compositions d'applications

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\Gamma_R, S'(r)) & & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{1-\varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Kos}(\Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{p^r(1-\varphi)} \text{Kos}(\Gamma_R, S'(r)) & \text{et} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S(r)) \xrightarrow{p^r(1-\varphi)} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S'(r)) \\
 \downarrow t^r & & \downarrow t^r \\
 \text{Kos}(\Gamma_R, F^r S) \xrightarrow{p^r-\varphi} \text{Kos}(\Gamma_R, S') & & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, F^r S) \xrightarrow{p^r-\varphi} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, S')
 \end{array}$$

Le passage de la troisième à la quatrième ligne se fait en utilisant le quasi-isomorphisme entre les complexes de Koszul et la cohomologie de groupe. □

8. Résultat global

À partir de maintenant, on se place dans le cas où il n'y a plus de diviseur à l'infini. Plus précisément, on suppose que localement \mathfrak{X} s'écrit $\mathrm{Spf}(R_0)$ avec $R_0^\square \rightarrow R_0$ la complétion d'un morphisme étale et

$$R_0^\square := \mathcal{O}_K \left\{ X_1, \dots, X_d, \frac{1}{X_1 \cdots X_a}, \frac{\varpi}{X_{a+1} \cdots X_d} \right\}$$

(pour $a, d \in \mathbb{N}$). On suppose $\mathrm{Spf}(R_0)$ connexe. On rappelle que $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ est muni de la log-structure donnée par son point fermé et \mathfrak{X} de celle donnée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \cap (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[1/p])^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 8.1. *Les applications locales du théorème 6.4 se globalisent en des morphismes*

$$\begin{aligned} \alpha_r^0 &: \tau_{\leq r} R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)'), \\ \alpha_{r,n}^0 &: \tau_{\leq r} R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'). \end{aligned}$$

De plus, ces morphismes sont des p^{Nr} -isomorphismes pour une constante N universelle.

En particulier, on a le résultat suivant ([Colmez et Nizioł 2017, Corollary 5.12]) :

Corollaire 8.2. *Si \mathfrak{X} est un log-schéma formel propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K , alors pour $k \leq r$, le p^{Nr} -isomorphisme ci-dessus induit un isomorphisme*

$$\alpha_{r,k}^0 : H_{\mathrm{syn}}^k(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)).$$

Démonstration. Par définition de la limite homotopique, si A^\bullet désigne le complexe $R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)$ (respectivement $R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$) et A_n^\bullet sa réduction modulo p^n (respectivement $R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'),$ alors on a un triangle distingué

$$A^\bullet \rightarrow \prod_n A_n^\bullet \rightarrow \prod_n A_n^\bullet \rightarrow A^\bullet[1]$$

où l'application $\prod_n A_n^\bullet \rightarrow \prod_n A_n^\bullet$ est donnée par $(k_n) \mapsto (k_n - \psi_{n+1}(k_{n+1}))$ (où $\psi_{n+1} : A_{n+1}^\bullet \rightarrow A_n^\bullet$ sont les morphismes associés au système projectif (A_n^\bullet)).

Par le théorème 8.1, pour tout n et $k \leq r$, on a un p^{Nr} -isomorphisme $H^k R\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \xrightarrow{\sim} H^k R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)').$ En écrivant la suite exacte longue associée au triangle distingué ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \prod_n H_{\mathrm{syn}}^{k-1}(r)_n & \longrightarrow & H_{\mathrm{syn}}^k(r) & \longrightarrow & \prod_n H_{\mathrm{syn}}^k(r)_n \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ \cdots & \longrightarrow & \prod_n H_{\mathrm{ét}}^{k-1}(r)_n & \longrightarrow & H_{\mathrm{ét}}^k(r) & \longrightarrow & \prod_n H_{\mathrm{ét}}^k(r)_n \longrightarrow \cdots \end{array}$$

où pour simplifier on a noté $H_{\text{syn}}^k(r)_n := H^k R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n$, $H_{\text{syn}}^k(r) := H^k R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)$ et de même pour la cohomologie étale. On tensorise ensuite par \mathbb{Q}_p pour obtenir, pour tout $k \leq r$, un isomorphisme

$$\alpha_{r,k}^0 : H_{\text{syn}}^k(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^k(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)). \quad \square$$

Remarque 8.3. Dans [Tsuji 1999], pour obtenir un morphisme compatible avec les applications symboles, une normalisation par un facteur p^{-r} est nécessaire (voir (3.1.12) et la proposition 3.2.4 (3) de cet article pour la compatibilité avec les applications symboles). Cette normalisation n'apparaît pas ici car le morphisme au niveau entier qu'on utilise n'est pas exactement égal à celui de Tsuji, mais est obtenu en tordant celui-ci par un facteur p^r .

Revenons à la preuve du théorème 8.1. On a construit le morphisme α_r^0 localement, il suffit de montrer qu'on peut le globaliser. Pour cela on utilise la méthode de Česnavičius et Koshikawa [2019, §5] (qui généralise celle de [Bhatt et al. 2018]).

On se place dans le cas où $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \text{Spf}(R)$. On suppose que les intersections de deux composants irréductibles de la fibre spéciale $\text{Spec}(R \otimes_{\mathcal{O}_C} k)$ sont non vides (en particulier, $\text{Spf}(R)$ est connexe) et qu'il existe une immersion fermée

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} \rightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) \times_{\mathcal{O}_C} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spf} R_{\lambda}^{\square} \quad (27)$$

telle que :

- (i) $R_{\Sigma}^{\square} := \mathcal{O}_C \{X_{\sigma}^{\pm 1} \mid \sigma \in \Sigma\}$ avec Σ un ensemble fini.
- (ii) $R_{\lambda}^{\square} := \mathcal{O}_C \{X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, 1/(X_{\lambda,1} \cdots X_{\lambda,a_{\lambda}}), \varpi/(X_{\lambda,a_{\lambda}+1} \cdots X_{\lambda,d})\}$ où $\lambda \in \Lambda$ avec Λ fini.
- (iii) $\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square})$ est une immersion fermée.
- (iv) $\text{Spf}(R) \rightarrow \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$ est étale pour tout λ dans Λ .

En particulier, pour tout λ dans Λ , chaque composante irréductible de la fibre spéciale $\text{Spec}(R \otimes k)$ est donnée par un unique $(t_{\lambda,i})$ pour $a_{\lambda} + 1 \leq i \leq d$.

On choisit des éléments $\{u_{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ (respectivement $\{u_{\lambda,i}\}_{1 \leq i \leq d}$ avec $\lambda \in \Lambda$) tels qu'on ait une application $X_{\sigma} \mapsto u_{\sigma}$ de R_{Σ}^{\square} dans R (respectivement $X_{\lambda,i} \mapsto u_{\lambda,i}$ de R_{λ}^{\square} dans R).

Dans la suite on note $\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$ le produit $\text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square}) \times_{\mathcal{O}_C} \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$.

Comme dans la section 2B2, on munit chaque $\text{Spf}(R_{\lambda}^{\square})$ de la log-structure donnée par la fibre spéciale et on munit $\text{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$ et $\text{Spf}(R)$ des log-structures induites.

Remarque 8.4. On peut toujours trouver une base de $\mathfrak{X}_{\text{ét}}$ telle qu'on ait de telles immersions. Soit x un point de \mathfrak{X} . Si x est dans le lieu lisse de \mathfrak{X} alors localement $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ s'écrit $\text{Spf}(\hat{A})$ avec A de type fini sur \mathcal{O}_C et donc il existe une immersion fermée $\text{Spec}(A) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_C[X_1, \dots, X_n])$. On recouvre ensuite $\text{Spec}(\mathcal{O}_C[X_1, \dots, X_n])$ par une union de tores et on obtient que localement $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ s'écrit $\text{Spf}(R)$ tel qu'il existe une immersion fermée $\text{Spf}(R) \hookrightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma}^{\square})$ avec Σ un ensemble fini.

Si maintenant x n'est plus dans le lieu lisse de \mathfrak{X} , alors $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$ s'écrit localement $\mathrm{Spf}(R_\lambda)$ pour une \mathcal{O}_C -algèbre R_λ telle qu'on ait une application étale $R_\lambda^\square \rightarrow R_\lambda$ avec

$$R_\lambda^\square := \mathcal{O}_C \left\{ X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, \frac{1}{X_{\lambda,1} \cdots X_{\lambda,a_\lambda}}, \frac{\varpi}{X_{\lambda,a_\lambda+1} \cdots X_{\lambda,d}} \right\}$$

et telle que x est donné par $(X_{\lambda,a_\lambda+1} \cdots X_{\lambda,d})$. Si on localise en x , on obtient une immersion fermée dans un tore formel $\mathrm{Spf}(R_\Sigma^\square)$.

Remarque 8.5. (1) Pour un tel R , si $R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square$ et $R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$ vérifient les conditions ci-dessus avec $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ et $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, on note $f_1^2 : R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square \rightarrow R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$ l'application induite par $X_\sigma \mapsto X_\sigma$ et $X_{\lambda,i} \mapsto X_{\lambda,i}$ pour σ dans Σ_1 , λ dans Λ_1 et i dans $\{1, \dots, d\}$. L'ensemble des $R_{\Sigma, \Lambda}^\square$ muni des applications ainsi définies forme alors un système inductif filtrant. Il est inductif, car si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma_3$ et $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \Lambda_3$, on a $f_1^3 = f_2^3 \circ f_1^2$. Vérifions qu'il est filtrant. Par définition du système, pour $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ et $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, f_1^2 est la seule application de $R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square$ dans $R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$. Considérons à présent deux anneaux $R_{\Sigma_1, \Lambda_1}^\square$ et $R_{\Sigma_2, \Lambda_2}^\square$ vérifiant (27) pour R . On note $\Sigma_3 := \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ et $\Lambda_3 = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$. Alors (Σ_3, Λ_3) vérifie les conditions (27) pour R et les deux morphismes f_1^3 et f_2^3 sont bien définis.

(2) Maintenant si $f : R \rightarrow R'$ est un morphisme étale tel qu'on ait une immersion fermée $\mathrm{Spf}(R') \rightarrow \mathrm{Spf}(R_{\Sigma', \Lambda'}^\square)$, on note $\tilde{\Sigma} := \Sigma \sqcup \Sigma'$ et $\tilde{\Lambda} = \Lambda \sqcup \Lambda'$. Alors $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda})$ vérifie les conditions (27) pour R' : comme $R \rightarrow R'$ est étale, $R_\lambda^\square \rightarrow R'$ est étale pour tout λ de $\tilde{\Lambda}$. On a de plus une surjection $R_{\tilde{\Sigma}}^\square \rightarrow R'$ donnée par

$$\begin{cases} X_\sigma \mapsto f(u_\sigma) & \text{pour } \sigma \in \Sigma, \\ X_{\sigma'} \mapsto u_{\sigma'} & \text{pour } \sigma' \in \Sigma', \end{cases}$$

et telle qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_{\Sigma'}^\square & \longrightarrow & R_{\tilde{\Sigma}}^\square \end{array}$$

On obtient alors un morphisme de $R_{\Sigma, \Lambda}^\square \rightarrow R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^\square$ et de $\varinjlim_{(\Sigma, \Lambda)} R_{\Sigma, \Lambda}^\square \rightarrow \varinjlim_{(\Sigma', \Lambda')} R_{\Sigma', \Lambda'}^\square$ (où la première limite est prise sur l'ensemble des (Σ, Λ) qui vérifient (27) pour R , et la seconde limite sur l'ensemble des (Σ', Λ') qui vérifient (27) pour R').

8A. Construction du quasi-isomorphisme $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}$. On travaille localement. Supposons que $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \mathrm{Spf}(R)$ avec R tel qu'il existe des immersions comme en (27).

On va définir un anneau $R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}$ en suivant la construction de [Česnavičius et Koshikawa 2019, §5.22]. Notons $\mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma, \Lambda}^\square))$ le produit des

$$\mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_\lambda^\square)) := \mathrm{Spf} \left(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}} \left\{ X_{\lambda,1}, \dots, X_{\lambda,d}, \frac{1}{X_{\lambda,1} \cdots X_{\lambda,a_\lambda}}, \frac{[\varpi^b]}{X_{\lambda,a_\lambda+1} \cdots X_{\lambda,d}} \right\} \right)$$

et de $\mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma}^{\square})) := \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\{X_{\sigma}^{\pm 1} \mid \sigma \in \Sigma\})$. Comme précédemment, $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ est muni de la log-structure induite par $x \mapsto [x]$ de $\mathcal{O}^b \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$. Les $\mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\lambda}^{\square}))$ sont munis de la log-structure associée à

$$\mathbb{N}^{d-a_{\lambda}} \sqcup_{\mathbb{N}} (\mathcal{O}^b \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$$

qui envoie (n_i) sur $\prod_{a_{\lambda}+1 \leq i \leq d} X_i^{n_i}$ et $x \in \mathcal{O}^b$ sur $[x] \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$, le morphisme $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{d-a_{\lambda}}$ est l'application diagonale et $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}^b \setminus \{0\}$ est donnée par $m \mapsto [\varpi^b]^m$. Comme dans la remarque 2.3, on peut se ramener à des log-structures fines par changement de base [Česnavičius et Koshikawa 2019, §5.9] et de cette façon $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$ est log-lisse sur $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$.

On a une immersion fermée

$$\mathrm{Spec}(R/p) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square}))$$

et pour $m, n \geq 1$, on peut construire une log-PD-enveloppe [Česnavičius et Koshikawa 2019, §5.22; Beilinson 2013, §1.3] :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spec}(R_{\Sigma, \Lambda, n, m}^{\mathrm{PD}}) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathrm{Spec}(R/p) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})/(p^n, \xi^m)) \end{array}$$

En fait, pour m suffisamment grand (tel que $\xi^m \in p^n \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$), $R_{\Sigma, \Lambda, n, m}^{\mathrm{PD}}$ s'identifie à la log-PD-enveloppe de

$$\mathrm{Spec}(R/p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})/p^n) \quad \text{sur} \quad \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_C/p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}/p^n).$$

Notons $R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\mathrm{PD}}$ cette log-PD-enveloppe (indépendante de m). On a $R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\mathrm{PD}}/p^{n-1} = R_{\Sigma, \Lambda, n-1}^{\mathrm{PD}}$ et on obtient un schéma formel p -adique $\mathrm{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}})$ tel qu'on ait une factorisation

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathrm{Spec}(R/p) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})) \end{array}$$

où $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square}) := \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}} \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})$ (le produit tensoriel est complété pour la topologie p -adique).

On a un morphisme de Frobenius sur $R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}$ venant de celui de R/p . On étend de même les applications différentielles $\partial_{\sigma} = d/(d \log(X_{\sigma}))$ et $\partial_{\lambda, i} = d/(d \log(X_{\lambda, i}))$ à $R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}$. On a de plus une factorisation

$$\mathrm{Spec}(R/p) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(R) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}).$$

Le but de cette partie est de construire un p^{Nr} -quasi-isomorphisme

$$\alpha_{r, \Sigma, \Lambda} : \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r))$$

avec N qui ne dépend ni de Σ , Λ , ni de R .

On considère les anneaux

$$R_{\Sigma, \Lambda}^{[u]} = \mathbb{A}^{[u]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}} R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}, \quad R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]} = \mathbb{A}^{[u, v]} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}} R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}, \quad R_{\Sigma, \Lambda}^{(0, v)^+} = \mathbb{A}^{(0, v)^+} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}} R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$$

où les produits tensoriels sont complétés pour la topologie p -adique.

L'application $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD} \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$ induit alors un morphisme sur les complexes de Koszul

$$\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \rightarrow \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}). \quad (28)$$

Soient $R_{\Sigma, \infty}^{\square}$ et $R_{\lambda, \infty}^{\square}$ les complétions p -adiques des anneaux

$$\varinjlim_n \mathcal{O}_C \{X_{\sigma}^{\pm 1/p^n} \mid \sigma \in \Sigma\} \quad \text{et} \quad \varinjlim_n \mathcal{O}_C \left\{ X_{\lambda, 1}^{1/p^n}, \dots, X_{\lambda, d}^{1/p^n}, \frac{1}{(X_{\lambda, 1} \cdots X_{\lambda, a_{\lambda}})^{1/p^n}}, \frac{\varpi^{1/p^n}}{(X_{\lambda, a_{\lambda}+1} \cdots X_{\lambda, d})^{1/p^n}} \right\}.$$

On note $R_{\Sigma, \Lambda, \infty}^{\square}$ le produit tensoriel des anneaux précédents, $R_{\Sigma, \Lambda, \infty} := R_{\Sigma, \Lambda, \infty}^{\square} \widehat{\otimes}_{R_{\Sigma, \Lambda}^{\square}} R$, et on note $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})$, $\mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]}$, $\mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u]}$ les anneaux associés. Enfin, on considère les groupes

$$\Gamma_{\Sigma} := \text{Gal}\left(R_{\Sigma, \infty}^{\square} \left[\frac{1}{p}\right] / R_{\Sigma}^{\square} \left[\frac{1}{p}\right]\right) \cong \mathbb{Z}_p^{\Sigma}, \quad \Gamma_{\lambda} := \text{Gal}\left(R_{\lambda, \infty}^{\square} \left[\frac{1}{p}\right] / R_{\lambda}^{\square} \left[\frac{1}{p}\right]\right) \cong \mathbb{Z}_p^d,$$

et

$$\Gamma_{\Sigma, \Lambda} := \Gamma_{\Sigma} \times \prod_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_{\lambda}.$$

Si $(\gamma_{\sigma})_{\sigma}$ et $(\gamma_{\lambda, i})_{1 \leq i \leq d}$ sont des générateurs topologiques de Γ_{Σ} et de Γ_{λ} , les actions de Γ_{Σ} et Γ_{λ} sur R_{Σ}^{\square} et R_{λ}^{\square} sont données par

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma}(X_{\sigma}) &= [\varepsilon]X_{\sigma} & \text{et} & & \gamma_{\sigma}(X_{\sigma'}) &= X_{\sigma'} & \text{si } \sigma' \neq \sigma, \\ \gamma_{\lambda, i}(X_{\lambda, i}) &= [\varepsilon]X_{\lambda, i} & \text{et} & & \gamma_{\lambda, i}(X_{\lambda, j}) &= X_{\lambda, j} & \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

On en déduit une action de $\Gamma_{\Sigma, \Lambda}$ sur $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$, $\mathbb{A}_{\Sigma, \Lambda}^{[u]}$, $\mathbb{A}_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$.

Enfin, pour $1 \leq i \leq |\Sigma| + d|\Lambda|$, on écrit $J_i := \{(j_1, \dots, j_i) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq |\Sigma| + d|\Lambda|\}$. Les mêmes preuves que celles des lemmes 5.6 et 5.8 donnent :

Proposition 8.6. *Il existe un p^{30r} -quasi-isomorphisme*

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}) &\xrightarrow{t^{\bullet}} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_{\Sigma, \Lambda}, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}) \\ &\xleftarrow{t^r} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \text{Lie } \Gamma_{\Sigma, \Lambda}, R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)) \xleftarrow{\beta} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \Gamma_{\Sigma, \Lambda}, R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)). \end{aligned} \quad (29)$$

Remarque 8.7. Modulo p^n , on obtient de la même façon un p^{58r} -quasi-isomorphisme.

Le morphisme $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})$ [Česnavičius et Koshikawa 2019, (5.38.1)] induit un morphisme

$$R\Gamma(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}(r)) \rightarrow R\Gamma(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, A_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]}(r)). \quad (30)$$

On considère ensuite la flèche

$$R\Gamma(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, A_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]}(r)) \rightarrow R\Gamma_{\text{proét}}(R, \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u, v]}(r)) \quad (31)$$

induite par le morphisme de bord associé au torseur

$$\mathrm{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty}) \rightarrow \mathrm{Spf}(R)$$

(voir [Stacks 2005–, tag 01GY; Česnavičius et Koshikawa 2019, (3.15.1)], et par le lemme $K(\pi, 1)$ de Scholze, le terme de droite dans (31) est calculé par la cohomologie de Galois $R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, v]}(r))$.

On rappelle qu'on a également un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \cong [R\Gamma_{\mathrm{cont}}(G_R, F^r \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, v]}) \xrightarrow{p^r - \varphi} R\Gamma(G_R, \mathbb{A}_{\overline{R}}^{[u, v]})]. \quad (32)$$

En composant les morphismes précédents, on obtient une application

$$\alpha_{r, \Sigma, \Lambda} : \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).$$

Proposition 8.8. *Il existe une constante N indépendante de R , Σ et Λ telle que l'application $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}$ ci-dessus est un p^{Nr} -quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On fixe un λ dans Λ . On note

$$R_{\mathrm{cris}, \lambda, \square}^+ := \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \left\{ X_{\lambda, 1}, \dots, X_{\lambda, d}, \frac{1}{X_{\lambda, 1} \cdots X_{\lambda, a_\lambda}}, \frac{[\varpi^b]}{X_{\lambda, a_\lambda + 1} \cdots X_{\lambda, d}} \right\}$$

et $R_{\mathrm{cris}, \lambda, \square}^+ \rightarrow R_{\mathrm{cris}, \lambda}^+$ un relevé étale de $R_{\lambda, \square} \rightarrow R$. On construit les anneaux $R_\lambda^{[u, v]}$ et $\mathbb{A}_{R_{\infty, \lambda}}^{[u, v]}$ associés et on a alors (par ce qui a été fait plus haut) un p^{Nr} -quasi-isomorphisme

$$\alpha_{r, \lambda} : \tau_{\leq r} \mathrm{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\mathrm{cris}, \lambda}^+) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spf}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\mathrm{PD}}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{Spec}(R/p) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Spf}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^{\square})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}, \lambda}^+) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Spf}(R_{\mathrm{cris}, \lambda, \square}^+) \end{array}$$

Pour tout n , l'idéal associé au morphisme $R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\mathrm{PD}} \rightarrow R/p$ est localement nilpotent. Comme $R_{\mathrm{cris}, \lambda, \square}^+ \rightarrow R_{\mathrm{cris}, \lambda}^+$ est étale, on peut relever la flèche $R_{\mathrm{cris}, \lambda, \square}^+ \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\mathrm{PD}}$ en une unique application $R_{\mathrm{cris}, \lambda}^+ \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\mathrm{PD}}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R/p & \longleftarrow & R_{\mathrm{cris}, \lambda}^+ \\ \uparrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\ R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\mathrm{PD}} & \longleftarrow & R_{\mathrm{cris}, \lambda, \square}^+ \end{array}$$

Comme ces applications sont compatibles avec les projections $R_{\Sigma, \Lambda, n}^{\text{PD}} \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda, n-1}^{\text{PD}}$, on obtient un morphisme $R_{\text{cris}, \lambda}^+ \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R/p & \longleftarrow & R_{\text{cris}, \lambda}^+ \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \\ R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}} & \longleftarrow & R_{\text{cris}, \lambda, \square}^+ \end{array}$$

est commutatif. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} R_{\text{cris}, \lambda}^+ & \longrightarrow & R_{\lambda}^{[u, v]} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{R_{\infty, \lambda}}^{[u, v]} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}} & \longrightarrow & R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]} \end{array}$$

et le résultat se déduit du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\text{cris}, \lambda}^+) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{r, \lambda}} & \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(R, r) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}}) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}} & \tau_{\leq r} R\Gamma(G_R, \mathbb{Z}_p(r)) \end{array} \quad \square$$

8B. Preuve du théorème 8.1. On rappelle qu'on cherche à montrer le théorème suivant :

Théorème 8.9. *Il existe un morphisme de périodes*

$$\alpha_{r, n}^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(r)').$$

De plus, ce morphisme est un p^{Nr} -isomorphisme pour une constante N qui ne dépend que de K , p et r .

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ un hyper-recouvrement affine. On note R^k l'anneau tel que $\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k := \text{Spf}(R^k)$.

Pour chaque k , on considère (Σ_k, Λ_k) tel qu'on ait comme en (27) une immersion fermée

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k \hookrightarrow \text{Spf}(R_{\Sigma_k}^\square) \times_{\mathcal{O}_C} \prod_{\lambda_k \in \Lambda_k} \text{Spf}(R_{\lambda_k}^\square)$$

On note ensuite $\text{Spf}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{PD}})$ la log-PD-enveloppe complétée de $\text{Spf}(R^k) \rightarrow \text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square))$, et

$$\text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n := [F^r \Omega_{R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{PD}}}^\bullet \xrightarrow{p^r - \varphi} \Omega_{R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{PD}}}^\bullet]_n.$$

L'application canonique $\text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \rightarrow R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r)_n$ est alors un quasi-isomorphisme.

De plus, on a vu que l'ensemble des $R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square$ pour (Σ_k, Λ_k) comme en (27) forme un système inductif filtrant. Le système des $\text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n$ est donc lui-même inductif filtrant. On en déduit un quasi-isomorphisme

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r)_n. \tag{33}$$

Mais on a un quasi-isomorphisme $\text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \cong \text{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n$ pour chaque (Σ_k, Λ_k) . On vérifie que ce morphisme est fonctoriel. En effet, pour $R \rightarrow R'$ une application étale, soit (Σ, Λ) associé à R et (Σ', Λ') associé à R' . Alors si on note $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma'$ et $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Lambda'$, le morphisme $R_{\Sigma, \Lambda}^\square \rightarrow R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^\square$ décrit plus haut induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \text{Kos}(\partial, R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^{PD}}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \text{Kos}(\partial, R_{\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}}^{PD}) \end{array}$$

Comme les systèmes sont filtrants, on a, pour tout i ,

$$H^i(\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \text{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} H^i(\text{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n),$$

et de même pour les complexes $\text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n$. On en déduit un quasi-isomorphisme fonctoriel

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \text{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n.$$

Par ailleurs, on a construit un p^{Nr} -quasi-isomorphisme $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^k$ fonctoriel de $\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n$ dans $\tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)')$, qui donne

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD})_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)').$$

On obtient un quasi-isomorphisme fonctoriel

$$\varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \tau_{\leq r} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'). \quad (34)$$

En combinant les deux quasi-isomorphismes précédents, on a

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r)_n \xleftarrow[\text{(33)}]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \tau_{\leq r} \text{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r)_n \xrightarrow[\text{(34)}]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)')$$

et ce quasi-isomorphisme est fonctoriel. On en déduit un quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, r)_n \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^\bullet}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)').$$

On définit $\alpha_{r, n}^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)')$ comme la composée

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n &\rightarrow \text{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, r)_n \rightarrow \text{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^\bullet}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)') \\ &\rightarrow \tau_{\leq r} \text{hocolim}_{\text{HRF}} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_C^\bullet, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)') \leftarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'). \end{aligned} \quad (35)$$

On va montrer qu’il s’agit d’un p^{Nr} -quasi-isomorphisme. La première et dernière flèches sont des quasi-isomorphismes par descente cohomologique (voir (11) pour la cohomologie syntomique ; le même argument donne le résultat pour la cohomologie étale). La deuxième flèche est un p^{Nr} -quasi-isomorphisme par ce qu’on vient de faire. Il reste à voir que, pour tout k , on a un quasi-isomorphisme $R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\text{Sp}(R^k[1/p]), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r))$. Mais cela découle du fait que $\text{Sp}(R^k[1/p])$ est $K(\pi, 1)$ pour $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (voir remarque 2.5). \square

On peut maintenant considérer les faisceaux $\mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}})$ et $\bar{\iota}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$ associés aux préfaisceaux $U \mapsto H^k(U, \mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}})$ et $U \mapsto H^k(U, \bar{\iota}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}})$. En utilisant l’équivalence de catégorie entre $\mathbf{Fsc}((\bar{Y})_{\text{ét}}, \mathcal{D}(\mathbb{Z}/p^n))$ et $\mathcal{D}^+((\bar{Y})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$, le morphisme ci-dessus peut être vu comme un morphisme dans $\mathcal{D}^+((\bar{Y})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ et on en déduit le théorème suivant :

Théorème 8.10. *Pour tout $0 \leq k \leq r$, il existe un p^N -isomorphisme*

$$\alpha_{r,n}^0 : \mathcal{H}^k(\mathcal{S}_n(r)_{\bar{\mathfrak{X}}}) \rightarrow \bar{\iota}^* R^k \bar{j}_* \mathbb{Z}/p^n(r)'_{\mathfrak{X}_{C,\text{tr}}}$$

où N est un entier qui dépend de p et de r , mais pas de \mathfrak{X} ni de n .

8C. Conjecture semi-stable. On suppose toujours que \mathfrak{X} est propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K , sans diviseur à l’infini. On rappelle qu’on a la cohomologie de Hyodo–Kato $R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) := R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0)_{\mathbb{Q}}$ et si D est un (φ, N) -module filtré, $D\{r\}$ désigne le module D muni du Frobenius $p^r\varphi$ et D_K est muni de la filtration $(F^{\bullet+r} D_K)$. Le but de cette partie est de prouver la conjecture semi-stable de Fontaine–Jannsen.

Théorème 8.11. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre semi-stable sur \mathcal{O}_K . On a un isomorphisme \mathbb{B}_{st} -linéaire, Galois équivariant*

$$\tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}. \tag{36}$$

De plus, cet isomorphisme préserve l’action du Frobenius et celle de l’opérateur de monodromie et après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} , il induit un isomorphisme filtré

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}. \tag{37}$$

Pour cela, commençons par rappeler les lemmes suivants [Colmez et Nizioł 2017, Propositions 5.20 et 5.22] :

Lemme 8.12. *Il existe un quasi-isomorphisme naturel*

$$R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} [[R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+]^{\varphi=p^r, N=0} \xrightarrow{\iota_{\text{HK}}} (R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r]$$

où ι_{HK} est induit par le quasi-isomorphisme de Hyodo–Kato $\iota_{\text{HK}} : R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F K \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}_K)$. De plus, pour tout i , $H^i[R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+]^{\varphi=p^r, N=0} \cong (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{\varphi=p^r, N=0}$ et si $i < r$, la suite exacte longue associée induit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \rightarrow (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{\varphi=p^r, N=0} \rightarrow (H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)/F^r \rightarrow 0.$$

Lemme 8.13. *Le (φ, N) -module filtré $(H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}), H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K), \iota_{\text{HK}})$ est faiblement admissible, et pour $i \leq r$ on a un isomorphisme (Frobenius-équivariant)*

$$H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}\{-r\}.$$

Remarque 8.14. Le résultat de ce lemme reste vrai pour tout ensemble de triplets $D^i = (D_{\text{st}}^i, D_{\text{dR}}^i, \iota^i)$ où, pour tout i , les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) D_{st}^i est un F -espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme de Frobenius φ bijectif semi-linéaire et d'un opérateur de monodromie N tels que $N\varphi = p\varphi N$.
- (2) D_{dR}^i est un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante, séparée et exhaustive.
- (3) $\iota^i : D_{\text{st}}^i \rightarrow D_{\text{dR}}^i$ est F -linéaire.

Il faut de plus que $F^{i+1}D_{\text{dR}}^i = 0$ et qu'on ait une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H^i(r) \rightarrow X_{\text{st}}^r(D^i) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D^i) \rightarrow H^{i+1}(r) \rightarrow \cdots$$

avec $X_{\text{st}}^r(D^i) = (t^{-r}\mathbb{B}_{\text{st}}^+ \otimes_F D_{\text{st}})^{\varphi=1, N=0}$, $X_{\text{dR}}^r(D^i) = (t^{-r}\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_K D_{\text{dR}})/F^0$ et où $\dim_{\mathbb{Q}_p} H^i(r)$ est finie pour $i \leq r$. La preuve utilise la théorie des espaces de Banach–Colmez ; voir [Colmez 2002; Colmez et Nizioł 2017, §5.2.2].

Démonstration du théorème 8.11. En vertu du corollaire 8.2, pour tout $i \leq r$, on a un isomorphisme $\alpha_r^0 : H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$, et en utilisant le lemme 8.12, on obtient un morphisme

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \xleftarrow{\sim} H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \rightarrow (H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}})^{\varphi=p^r, N=0}.$$

Le morphisme de périodes $\tilde{\alpha}^0$ est alors donné par

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \xleftarrow{\alpha_r^0} H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ &\rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}} \end{aligned} \quad (38)$$

et la flèche $H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}$ est un isomorphisme par le lemme 8.13. On obtient l'isomorphisme (36). Enfin, par construction de α_r^0 , l'application ci-dessus est Galois-équivariante, elle est compatible avec l'action de φ et de N et avec la filtration après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} . \square

9. Comparaison des morphismes de périodes

On suppose que \mathfrak{X} est un schéma formel propre à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K , sans diviseur à l'infini. On a construit, dans la section précédente, un isomorphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}, \\ \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} &\xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^i(\mathfrak{X}_K) \otimes_K \mathbb{B}_{\text{dR}}. \end{aligned}$$

D’autres démonstrations de la conjecture de Fontaine–Jannsen ont également été données par Česnavičius et Koshikawa [2019] et par Tsuji [1999]. Le morphisme de périodes utilisé par Tsuji est l’application de Fontaine–Messing, $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ définie ci-dessous. Česnavičius et Koshikawa définissent, eux, un morphisme de périodes $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ en généralisant la construction de Bhatt et al. [2018] et dont on rappelle la construction plus loin. Le but de cette section est d’utiliser $\tilde{\alpha}^0$ pour montrer que ces deux morphismes de périodes $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ et $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ coïncident.

9A. Comparaison de $\tilde{\alpha}^{\text{FM}}$ et $\tilde{\alpha}^0$. On commence par comparer l’application de Fontaine–Messing avec le morphisme construit dans le chapitre précédent.

Théorème 9.1. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre semi-stable sur \mathcal{O}_K . Les isomorphismes α_r^{FM} et α_r^0 de $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ dans $H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}}$ sont égaux. En particulier, les morphismes de périodes*

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^{\text{FM}}, \tilde{\alpha}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} &\rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}, \\ \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^{\text{FM}}, \tilde{\alpha}_{\text{dR}}^0 : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{dR}} &\rightarrow H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{dR}} \end{aligned}$$

sont égaux.

Il suffit de montrer que les applications entières sont p^N -égales pour une certaine constante N . Le théorème 7.5 donne l’égalité locale. Pour obtenir l’égalité entre les morphismes globaux, on va commencer par construire des applications $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^{\text{FM}}$ et les comparer au $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^0$ définis plus haut.

On définit les anneaux suivants :

- $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{[u, v]}$) pour $S = A = R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}}$ (resp. $R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$).
- $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{\text{PD}} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{R_{\Sigma, \infty}}^{[u, v]}$) pour $S = R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}}$ (resp. $R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})$ (resp. $\mathbb{A}_{R_{\Sigma, \Lambda, \infty}}^{[u, v]}$).
- $\mathbb{E}_{\bar{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}} = SA$ (resp. $\mathbb{E}_{\bar{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{[u, v]}$) pour $S = R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}}$ (resp. $R_{\Sigma, \Lambda}^{[u, v]}$) et $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ (resp. $\mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u, v]}$).

On ne dispose plus ici des lemmes de Poincaré mais on peut montrer qu’on a un quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{\bar{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}}) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R}))$$

en se ramenant au cas où on ne travaille qu’avec une seule coordonnée $\lambda \in \Lambda$. En effet, si on fixe un tel λ , l’application $R_{\text{cris}, \lambda}^+ \rightarrow R_{\Sigma, \Lambda}^{\text{PD}}$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}}) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})) \\ \downarrow \wr & & \parallel \\ \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{\bar{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}}) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})) \end{array}$$

où $\mathbb{E}_{\bar{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}}$ est l’anneau SA pour $A = \mathbb{A}_{\text{cris}}(\bar{R})$ et $S = R_{\text{cris}, \lambda}^+$. La première flèche verticale est un quasi-isomorphisme car les complexes $\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{R_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}})$ et $\text{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{\bar{R}_{\Sigma, \Lambda}}^{\text{PD}})$ calculent tous les deux la cohomologie syntomique $\text{Syn}(\bar{R}, r)$. On en déduit que la flèche horizontale de la ligne du bas est un quasi-isomorphisme.

On montre de la même façon qu'on a un quasi-isomorphisme

$$\tau_{\leq r} \operatorname{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{\bar{R}, \Sigma, \Lambda}^{[u, v]}) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} \operatorname{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{[u, v]}).$$

L'application de Fontaine–Messing $\alpha_{\Sigma, \Lambda}^{\text{FM}}$ est donnée par la composée

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} \operatorname{Kos}(\varphi, \partial, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}) &\rightarrow \tau_{\leq r} C(G_R, \operatorname{Kos}(\varphi, \partial, F^r \mathbb{E}_{\bar{R}, \Sigma, \Lambda}^{PD})) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} C(G_R, \operatorname{Kos}(\varphi, F^r \mathbb{A}_{\bar{R}}^{\text{cris}}(\bar{R}))) \\ &\xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} C(G_R, \mathbb{Z}_p(r)'). \end{aligned}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 9.2. *Il existe N qui ne dépend ni de R , ni de Σ et Λ telle que l'application de Fontaine–Messing $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^{\text{FM}}$ est p^{Nr} -égale à l'application $\alpha_{r, \Sigma, \Lambda}^0$.*

Démonstration. Le résultat se déduit d'un diagramme similaire à celui de la preuve du théorème 7.5. La différence principale est que les flèches qui vont de la troisième vers la deuxième ligne sont maintenant des morphismes de bord. Il est aussi à noter que les flèches horizontales qui vont de la troisième colonne vers la deuxième ne sont (a priori) plus des quasi-isomorphismes dans ce cas, à l'exception de celles de la première, deuxième et dernière lignes. \square

Démonstration du théorème 9.1. L'application globale

$$\alpha_r^{\text{FM}} : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)')$$

s'obtient de la même façon que dans la preuve du théorème 8.1 : elle est donnée par la composée

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_n &\rightarrow \operatorname{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, r) \rightarrow \operatorname{hocolim}_{\text{HRF}} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^\bullet}, \mathbb{Z}_p(r)') \\ &\rightarrow \tau_{\leq r} \operatorname{hocolim}_{\text{HRF}} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_C^\bullet, \mathbb{Z}_p(r)') \leftarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)'). \end{aligned} \quad (39)$$

où le quasi-isomorphisme (fonctoriel) $\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^\bullet}, \mathbb{Z}_p(r)')$ pour un hyper-recouvrement affine $\mathfrak{U}^\bullet = \operatorname{Spf}(R^\bullet) \rightarrow \mathfrak{X}$ est induit par

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, r) \xleftarrow[(33)]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} \tau_{\leq r} \operatorname{Syn}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^\square), r) \xrightarrow[\varinjlim \alpha_{r, \Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{FM}}]{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma(G_{R^k}, \mathbb{Z}_p(r)'). \quad (40)$$

Le lemme 9.2 donne la p^{Nr} -égalité entre les morphismes $\varinjlim \alpha_{r, \Sigma_k, \Lambda_k}^{\text{FM}}$ et $\varinjlim \alpha_{r, \Sigma_k, \Lambda_k}^0$ et donc entre les morphismes induits (40). On en déduit que $\alpha_r^{\text{FM}} : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)')$ et $\alpha_r^0 : \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r) \rightarrow \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)')$ sont p^{Nr} -égales. En inversant p , on obtient l'égalité entre les morphismes rationnels et on en déduit finalement $\tilde{\alpha}^{\text{FM}} = \tilde{\alpha}^0$. \square

9B. Comparaison de $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ et $\tilde{\alpha}^0$. On considère maintenant le morphisme de périodes

$$\tilde{\alpha}^{\text{CK}} : H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{st}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\text{st}}$$

défini par Bhatt et al. [2018] dans le cas où \mathfrak{X} est à bonne réduction et par Česnavičius et Koshikawa [2019] pour \mathfrak{X} à réduction semi-stable. On rappelle rapidement sa définition locale dans la section qui suit. On montre ensuite qu'il est égal à $\tilde{\alpha}^0$.

9B1. *Définition de l'application locale γ^{CK} .*

Définition 9.3. [Bhatt et al. 2018, §6] Soit A un anneau et K un complexe de A -modules, sans f -torsion. On note $\eta_f(K)$ le sous-complexe de $K[1/f]$ dont le i -ième terme est donné par

$$(\eta_f K)^i := \{x \in f^i K^i : dx \in f^{i+1} K^{i+1}\}.$$

L'application $K^i \rightarrow (\eta_f K)^i$, $x \mapsto f^i x$ induit un isomorphisme $H^i(K)/H^i(K)[f] \cong H^i(\eta_f K)$ (où $H^i(K)[f]$ désigne la f -torsion de $H^i(K)$) et on en déduit que si $K \rightarrow K'$ est un quasi-isomorphisme alors $\eta_f K \rightarrow \eta_f K'$ l'est aussi. On définit le foncteur $L\eta_f$ de $D(A)$ dans $D(A)$ de la façon suivante : pour K dans $D(A)$ on choisit un complexe C quasi-isomorphe à K et dont les termes sont sans f -torsion et on pose $L\eta_f K := \eta_f C$.

Soit \mathfrak{X} un schéma formel sur \mathcal{O}_K , à réduction semi-stable et soit $X := \mathfrak{X}_C$ la fibre générique de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$, vue comme une variété analytique rigide. On note \mathcal{O}_X le faisceau structural du site pro-étale $X_{\text{proét}}$, \mathcal{O}_X^+ le faisceau intégral associé et $\widehat{\mathcal{O}}_X^+$ sa complétion. On définit le complexe de faisceaux $\mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ comme la complétion p -adique dérivée¹¹ de $W(\widehat{\mathcal{O}}_X^{+,b})$. On considère alors le complexe de faisceaux

$$A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}} := L\eta_\mu(Rv_*(\mathbb{A}_{\text{inf}, X})) \in \mathcal{D}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C, \text{ét}}, \mathbb{A}_{\text{inf}}),$$

où $v : X_{\text{proét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C, \text{ét}}$ est la projection. Dans [Bhatt et al. 2018, Lemma 5.6], il est montré que l'application naturelle $\mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ induit un morphisme

$$R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} \cong R\Gamma(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} \rightarrow R\Gamma_{\text{proét}}(X, \mathbb{A}_{\text{inf}, X})$$

tel que la cohomologie de son cône est tuée par $W(\mathfrak{m}_C^b)$ (où \mathfrak{m}_C est l'idéal maximal de \mathcal{O}_C). Comme $\mu = [\varepsilon] - 1$ est dans $W(\mathfrak{m}_C^b)$, on en déduit le résultat suivant :

Théorème 9.4 [Česnavičius et Koshikawa 2019, Theorem 2.3]. *Si \mathfrak{X} est propre sur \mathcal{O}_K , il existe un quasi-isomorphisme*

$$R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} \left[\frac{1}{\mu} \right] \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} \left[\frac{1}{\mu} \right]. \quad (41)$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C} = \text{Spf}(R)$ avec R étale sur R_\square . On reprend les notations R_{inf}^+ , R_{cris}^+ de la section 2B2 et \mathbb{A}_R^+ , $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$ de la section 5A (on rappelle que $R_{\text{inf}}^+ \cong \mathbb{A}_R^+$ et $R_{\text{cris}}^+ \cong \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)$). On définit R_∞ comme avant. On a alors que R_∞ est perfectoïde et muni d'une action de Γ_R . Ainsi, la tour notée par abus de notation $X_\infty := \varprojlim \text{Spa}(R_m[1/p], R_m)$ est un recouvrement affinoïde perfectoïde de $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}$.

Théorème 9.5 [Česnavičius et Koshikawa 2019, §3.3]. (1) *On a des quasi-isomorphismes*

$$\begin{aligned} L\eta_{(\zeta_p-1)}(R\Gamma(\Gamma_R, R_\infty)) &\xrightarrow{\sim} L\eta_{(\zeta_p-1)}(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \widehat{\mathcal{O}}_X^+)), \\ L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty))) &\xrightarrow{\sim} L\eta_\mu(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \mathbb{A}_{\text{inf}, X})). \end{aligned} \quad (42)$$

11. La complétion p -adique dérivée \widehat{K} d'un complexe $K \in D(X_{\text{proét}}, \mathbb{Z}_p)$ est définie localement par $\widehat{K}|_U = \text{holim}_n (K|_U \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}/p^n)$.

(2) Plus généralement, si R'_∞ définit un recouvrement affinoïde perfectoïde de R muni d'une action d'un groupe Γ' et tel que R'_∞ est un raffinement de R_∞ , alors on a des quasi-isomorphismes

$$\begin{aligned} L\eta_{(\xi_p-1)}(R\Gamma(\Gamma', R'_\infty)) &\xrightarrow{\sim} L\eta_{(\xi_p-1)}(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \widehat{O}_X^+)), \\ L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma', \mathbb{A}_{\text{inf}}(R'_\infty))) &\xrightarrow{\sim} L\eta_\mu(R\Gamma_{\text{proét}}(X, \mathbb{A}_{\text{inf}, X})). \end{aligned} \tag{43}$$

Le but est de construire un quasi-isomorphisme entre $R\Gamma_{\text{cris}}((R/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})$ et $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$. L'application va être induite par la composée

$$\text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) \xrightarrow{\tilde{\beta}} \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) \rightarrow \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_\infty))$$

où $\tilde{\beta}$ est construit ci-dessous. Le problème est que l'anneau \mathbb{A}_{cris} vient de la complétion d'un anneau qui n'est pas de type fini sur \mathbb{A}_{inf} et en particulier, $\mathbb{A}_{\text{cris}}/\mu$ n'est pas p -adiquement séparé. Notamment, $\eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}(R_\infty))$ ne calcule pas nécessairement $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}$. Pour contourner cette difficulté, Bhatt et al. passent par l'anneau $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$, construit à partir du même anneau que \mathbb{A}_{cris} mais tronqué en degré m .

Plus précisément, pour m dans \mathbb{N} , on note $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$ la complétion p -adique de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\xi^k/k!, k \leq m]$. On a toujours une surjection $\theta : \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{O}_C$ et on étend le Frobenius de \mathbb{A}_{inf} en $\varphi : \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} \rightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$. Remarquons que pour $m < p$, on a $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} = \mathbb{A}_{\text{inf}}$ et pour $m \geq p$, les topologies p -adique et (p, μ) -adique sur $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$ coïncident. On peut de plus identifier \mathbb{A}_{cris} à la complétion p -adique de $\varinjlim \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$. On définit de la même façon $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(\bar{R})$ et $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)$. Enfin, soit $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) := \mathbb{A}_R^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$.

On a (voir [Bhatt et al. 2018, Corollary 12.7]) des isomorphismes

$$\begin{aligned} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty)) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)), \\ L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty))) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)} &\xrightarrow{\sim} L\eta_\mu(R\Gamma(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty))). \end{aligned} \tag{44}$$

En combinant les résultats (42) et (44), on obtient :

Corollaire 9.6. *Il existe un quasi-isomorphisme naturel*

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\left(\varinjlim_m (\eta_\mu(\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)))) \right)}.$$

On a alors le théorème suivant (voir [Bhatt et al. 2018, Theorem 12.1; Česnavičius et Koshikawa 2019, Theorem 5.4]) :

Théorème 9.7. *Il existe un quasi-isomorphisme Frobenius-équivariant*

$$\gamma^{\text{CK}} : R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}. \tag{45}$$

Démonstration. Les détails de la preuve sont donnés dans [Česnavičius et Koshikawa 2019, § 5.5–5.16]. On rappelle ici rapidement la construction de γ^{CK} . Pour $m \geq p^2$, on définit $\tilde{\beta}^{(m)} : \text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) \rightarrow$

$\eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))$ par

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{(\partial_j)} & (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_n} \longrightarrow \dots \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow (\tilde{\beta}_j) & & & & \downarrow (\tilde{\beta}_{j_1} \dots \tilde{\beta}_{j_n}) \\ \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{(\gamma_j - 1)} & (\mu \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (\mu^n \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_n} \longrightarrow \dots \end{array}$$

avec $\tilde{\beta}_j := \sum_{n \geq 1} (t^n/n!) \partial_j^{n-1}$. L'application $\tilde{\beta}^{(m)}$ est bien définie puisqu'elle est induite par le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{\partial_j} & \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \tilde{\beta}_j \\ \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) & \xrightarrow{\gamma_j - 1} & \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \end{array}$$

et $\tilde{\beta}_j \partial_j = \gamma_j - 1$ (en utilisant $\text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) = \bigotimes_{j=1}^d (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \xrightarrow{\partial_j} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))$). Ce sont des isomorphismes par le lemme 5.15 de [Česnavičius et Koshikawa 2019]. Pour obtenir le résultat, il suffit ensuite de montrer que l'inclusion $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \hookrightarrow \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)$ induit un isomorphisme

$$\eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) \xrightarrow{\sim} \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)). \tag{46}$$

Pour cela, on écrit $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)$ comme une somme $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R) \oplus (N_\infty \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)})$ (voir [Česnavičius et Koshikawa 2019, (3.14.5)]) avec $\mu \cdot H^i(\Gamma_R, N_\infty \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}) = 0$ (voir [Česnavičius et Koshikawa 2019, Proposition 3.32]).

Finalement, le quasi-isomorphisme γ^{CK} est donné par la composée

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) &\xrightarrow{\sim} \left(\varinjlim_m \text{Kos}(\partial, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) \right)^\wedge \\ &\xrightarrow[\sim]{} \left(\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R)) \right)^\wedge \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_\infty)) \right)^\wedge \\ &\xrightarrow[\sim]{} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}. \end{aligned} \quad \square$$

9B2. Application globale. Comme précédemment, on va écrire les complexes du théorème 9.7 de manière fonctorielle. On commence par le complexe de droite. On prend (Σ, Λ) comme en (27) et on définit $\Gamma_{\Sigma, \Lambda}$, $R_{\Sigma, \Lambda, \infty}^\square$ et $R_{\Sigma, \Lambda, \infty}$ comme avant. On a alors un recouvrement pro-étale affinoïde perfectoïde

$$\text{Spa}\left(R_{\Sigma, \Lambda, \infty} \left[\frac{1}{p} \right], R_{\Sigma, \Lambda, \infty}\right) \rightarrow \text{Spa}\left(R \left[\frac{1}{p} \right], R\right). \tag{47}$$

Le raisonnement précédent (et en particulier l'isomorphisme (43)) donne un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \left(\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})) \right)^\wedge. \quad (48)$$

On va maintenant écrire le complexe $\Omega_{R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}/\mathbb{A}_{\text{cris}}}$ sous une forme semblable à celle de (48). On considère l'exactification de l'immersion $\text{Spec}(R/p) \hookrightarrow \text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^\square))$,

$$\text{Spec}(R/p) \xrightarrow{j} \mathcal{Y} \xrightarrow{q} \text{Spf}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\Sigma, \Lambda}^\square)),$$

avec j immersion fermée exacte et q log-étale ; voir [Česnavičius et Koshikawa 2019, §5.25–5.31]. Si on note D_j la log-PD-enveloppe associée à j , on a alors un isomorphisme $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD} \xrightarrow{\sim} \widehat{D_j}$. On note $D_j^{(m)}$ l'anneau des puissances divisées de degré inférieur à m et $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD, (m)}$ la complétion de l'image de $D_j^{(m)}$ par cet isomorphisme.

Les $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD, (m)}$ sont alors des $\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}$ -algèbres munies d'une action continue de $\Gamma_{\Sigma, \Lambda}$ et d'un Frobenius. On a de plus un \mathbb{A}_{cris} -isomorphisme $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD} \cong \left(\varinjlim_m R_{\Sigma, \Lambda}^{PD, (m)} \right)^\wedge$, qui est équivariant pour l'action du Frobenius et de $\Gamma_{\Sigma, \Lambda}$. On obtient

$$R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \xrightarrow{\sim} \left(\varinjlim_m \text{Kos}(\partial, R_{\Sigma, \Lambda}^{PD, (m)}) \right)^\wedge. \quad (49)$$

Enfin, en se ramenant au cas où on ne considère qu'une seule coordonnée λ (donnée par le théorème 9.7), on construit un isomorphisme fonctoriel

$$\tilde{\beta}_{\Sigma, \Lambda} : \left(\varinjlim_m \text{Kos}(\partial, R_{\Sigma, \Lambda}^{PD, (m)}) \right)^\wedge \xrightarrow{\sim} \left(\varinjlim_m \eta_\mu \text{Kos}(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, \mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})) \right)^\wedge, \quad (50)$$

voir [Česnavičius et Koshikawa 2019, §5.38–5.39].

On peut maintenant prouver la version globale du théorème 9.7 :

Théorème 9.8 [Česnavičius et Koshikawa 2019, Corollary 5.43]. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre sur \mathcal{O}_K à réduction semi-stable. Il existe un quasi-isomorphisme compatible avec le morphisme de Frobenius*

$$\gamma^{\text{CK}} : R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 8.1. Le morphisme global γ^{CK} est donné par la composée

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) &\xrightarrow{\sim} \text{hocolim}_{\text{HRF}} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{hocolim}_{\text{HRF}} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, A\Omega_{\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet}) \\ &\xleftarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}), \end{aligned}$$

où, si $\mathcal{U}^\bullet \rightarrow \mathfrak{X}$ est un hyper-recouvrement affine de \mathfrak{X} avec $\mathcal{U}_{\mathcal{O}_C}^k := \mathrm{Spf}(R^k)$, le quasi-isomorphisme $R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathcal{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathcal{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet, A\Omega_{\mathcal{U}_{\mathcal{O}_C}^\bullet})$ est induit par

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathrm{cris}}((R^k/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) &\xrightarrow[(49)]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} (\varinjlim_m \mathrm{Kos}(\partial, R_{\Sigma_k, \Lambda_k}^{PD, (m)}))^\wedge \\ &\xrightarrow[(50)]{\sim} \varinjlim_{(\Sigma_k, \Lambda_k)} (\varinjlim_m \eta_\mu \mathrm{Kos}(\Gamma_{\Sigma, \Lambda}, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^{(m)}(R_{\Sigma, \Lambda, \infty})))^\wedge \\ &\xleftarrow[(48)]{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \hat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}^L} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}. \quad \square \end{aligned}$$

On a un quasi-isomorphisme qui dépend du choix de ϖ et est compatible avec les actions du Frobenius et de l'opérateur de monodromie [Česnavičius et Koshikawa 2019, Proposition 9.2],

$$\iota_{\mathrm{cris}, \varpi}^B : R\Gamma_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+ \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^L} \mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+, \quad (51)$$

et on en déduit l'isomorphisme de périodes $\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}}$:

Théorème 9.9 [Česnavičius et Koshikawa 2019, Theorem 9.5]. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre sur \mathcal{O}_K à réduction semi-stable. Il existe un quasi-isomorphisme*

$$\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}} : R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}}.$$

De plus, $\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}}$ est compatible avec les actions du morphisme de Frobenius, du groupe de Galois et de l'opérateur de monodromie et il induit un isomorphisme filtré après tensorisation par \mathbb{B}_{dR} .

Démonstration. Le morphisme $\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}}$ est donné par la composée

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}} &\xrightarrow[9.4]{\sim} R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}^L} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \\ &\xrightarrow[\sim]{\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}}} R\Gamma_{\mathrm{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}^L} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \\ &\xleftarrow[\sim]{\iota_{\mathrm{cris}, \varpi}^B} R\Gamma_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X}_k/W(k)^0) \otimes_{W(k)}^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}}. \quad \square \end{aligned}$$

En inversant p , on obtient un quasi-isomorphisme rationnel

$$\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}} : R\Gamma_{\mathrm{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\mathrm{st}}.$$

9B3. Comparaison avec $\tilde{\alpha}^0$. Soit \mathfrak{X} un schéma formel propre sur \mathcal{O}_K à réduction semi-stable. Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 9.10. *Les morphismes de périodes*

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}}, \tilde{\alpha}^0 : H_{\mathrm{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} &\rightarrow H_{\mathrm{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\mathrm{st}}, \\ \tilde{\alpha}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{CK}}, \tilde{\alpha}_{\mathrm{dR}}^0 : H_{\mathrm{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} &\rightarrow H_{\mathrm{HK}}^i(\mathfrak{X}) \otimes_F \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \end{aligned}$$

sont égaux. En particulier, on a $\tilde{\alpha}^{\mathrm{CK}} = \tilde{\alpha}^{\mathrm{FM}}$ et $\tilde{\alpha}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{CK}} = \tilde{\alpha}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{FM}}$.

Démonstration. Soit $r \geq 0$. On rappelle (voir (38)) que le morphisme $\tilde{\alpha}^0$ est donné par la composée

$$\begin{aligned} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \xleftarrow{\sim} \alpha_r^0 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ &\xrightarrow{\text{can}} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}} \end{aligned}$$

et $\tilde{\alpha}^{\text{CK}}$ par

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} &\xrightarrow{9.4} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ &\xleftarrow{\sim} \gamma^{\text{CK}} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}}. \end{aligned}$$

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que pour $r \geq 2d$ où $d = \dim(X)$, le rectangle extérieur du diagramme suivant commute (au moins au niveau des cohomologies) :

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \\ \downarrow 9.4 \wr & \swarrow f_r & & \swarrow \text{can} & \downarrow \\ \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{HK}}(\mathfrak{X}) \otimes_F^L \mathbb{B}_{\text{st}} \end{array}$$

L'application f_r est définie de façon à ce que le triangle de gauche soit commutatif. Le triangle de droite est commutatif par [Nekovář et Nizioł 2016, §3.1], il suffit donc de montrer que le trapèze intérieur commute. Il est suffisant de le montrer au niveau des cohomologies et c'est le résultat du lemme 9.11 ci-dessous. \square

Lemme 9.11. *Soit $i \leq r$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{st}} \\ f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{B}_{\text{st}}\{r\} \end{array}$$

Démonstration. (i) *Réduction.* Pour prouver le lemme, par $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+[1/\mu]$ -linéarité, il suffit de voir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[1/\mu] & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[1/\mu] \\ f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\ H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\gamma_{[u,v]}^{\text{CK}}]{\sim} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \\
 \text{Id} \otimes \text{can} \uparrow & & \text{Id} \otimes \text{can} \uparrow \\
 H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\gamma^{\text{CK}}]{\sim} & H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \quad (52) \\
 f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\
 H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} & H_{\text{syn}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}}
 \end{array}$$

La flèche verticale de gauche $\beta_1 := \text{Id} \otimes \text{can}$ est injective. En effet, par le théorème 9.4, on a

$$H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}],$$

et on en déduit les isomorphismes

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}], \\
 H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xleftarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}].
 \end{aligned}$$

En utilisant que l'application canonique $\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p, 1/\mu] \rightarrow \mathbb{A}^{[u,v]}[1/p, 1/\mu]$ est injective et $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ est de rang fini sur \mathbb{Q}_p , on obtient que β_1 est injective.

On en déduit que pour prouver le lemme, il suffit de montrer que le carré extérieur du diagramme (52) commute. Mais en utilisant une nouvelle fois le théorème 9.4 puis le théorème 9.8 (et que $H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r))$ est de \mathbb{Q}_p -rang fini), on a

$$\begin{aligned}
 H_{\text{ét}}^i(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] &\xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(R\Gamma(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]), \\
 H_{\text{cris}}^i((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \\
 &\xrightarrow{\sim} H^i(R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}]),
 \end{aligned}$$

et il suffit donc de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] & \xleftarrow[\gamma_{[u,v]}^{\text{CK}}]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u,v]}[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}] \\
 f_r \uparrow & & \text{can} \uparrow \\
 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} \quad (53)
 \end{array}$$

commute.

Pour cela, on va montrer que le diagramme suivant est p^N -commutatif (pour un $N \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{array}{ccc}
 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}^{[u,v]} \left[\frac{1}{\mu} \right] & \xleftarrow[\gamma_{[u,v]}^{\text{CK}}]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}/p)/\mathbb{A}_{\text{cris}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}}^L \mathbb{A}^{[u,v]} \left[\frac{1}{\mu} \right] \\
 \uparrow f_r & & \uparrow \text{can} \\
 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_C, \mathbb{Z}_p(r)) & \xleftarrow[\alpha_r^0]{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)
 \end{array} \quad (54)$$

(ii) *Calcul local.* On suppose dans un premier temps que $\mathfrak{X} = \text{Spf}(R)$ avec R la complétion d'une algèbre étale sur R_{\square} . On va voir que la principale différence entre la construction du morphisme de [Česnavičius et Koshikawa 2019] et celle de α_r^0 est que l'application $\tilde{\beta}$ utilisée par Bhatt et al. est égale à l'inverse de l'application β construite plus haut, tordue par t . Plus précisément, on va montrer qu'on a un diagramme $p^{c(r)}$ -commutatif (pour une certaine constante $c(r) \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \gamma_{[u,v]}^{\text{CK}} \\
 & & & & & & \searrow \\
 K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) & \downarrow & & & & & \eta_{\mu}(K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]}) \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} \eta_{\mu}(C_G(\mathbb{A}_{\bar{R}}^+)^{[u,v]}) \\
 \downarrow & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & (\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)))^{[u,v]} & \xrightarrow{(46)} & (\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\infty})))^{[u,v]} & \xleftarrow{(44)} & \eta_{\mu}(K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]}) \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} \eta_{\mu}(C_G(\mathbb{A}_{\bar{R}}^+)^{[u,v]}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_{\partial}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R))^{[u,v]} & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R))^{[u,v]} & \longrightarrow & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & \eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_{\bar{R}}^+)^{[u,v]} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_{\partial}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\beta'_1} & K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) & \longrightarrow & K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]}(r) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & C_G(\mathbb{A}_{\bar{R}}^+)^{[u,v]}(r) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_{\varphi, \partial}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\beta'} & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) & \longrightarrow & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{[u,v]}(r) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & C_{G, \varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}^+)^{[u,v]}(r) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_R^{(0, v]+}(r)) & \xrightarrow{5.10} & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{(0, v]+}(r) & \longrightarrow & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}^+)^{(0, v]+}(r) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_H} & C_{G, \varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}^+)^{(0, v]+}(r) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_R(r)) & \xrightarrow{5.14} & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}(r)) & \xrightarrow{6.3} & K_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{A}_{R_{\infty}}(r)) & \xrightarrow{6.2} & C_{G, \varphi}(\mathbb{A}_{\bar{R}}(r)) \xleftarrow{\sim} C_G(\mathbb{Z}_p(r))
 \end{array} \quad (55)$$

Tous les complexes sont tronqués par $\tau_{\leq r}$. L'exposant $[u, v]$ sur la deuxième ligne sert à désigner $(-)\widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}^{[u,v]}$. On pose $K_{\Gamma}(-) := \text{Kos}(\Gamma, -)$, $K_{\partial}(-) := \text{Kos}(\partial, -)$ et $C_G(-)$ désigne le complexe de cochaînes continues de G . Les notations $K_{\varphi, \Gamma}$ et $C_{G, \varphi}(-)$ sont celles du théorème 7.5. On écrit $\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) := \varinjlim \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))$ et $\eta_{\mu} \tilde{K}_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R_{\infty})) := \varinjlim \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R_{\infty}))$. Enfin, les morphismes $\tilde{\mu}_H$ sont ceux induits par les morphismes

$$\text{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_{\infty}}^?) \rightarrow C(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_{\infty}}^?) \rightarrow C(G_R, \mathbb{A}_{\bar{R}}^?)$$

pour $? \in \{(0, v]+, [u, v]\}$, où la deuxième flèche est le morphisme de bord du recouvrement de Galois R_{∞} de R .

L'application β' est donnée par la composée

$$\tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, \varphi, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{t^\bullet} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, \varphi, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \leftarrow \tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, \varphi, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xleftarrow{\beta} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\Gamma, \varphi, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r))$$

où la seconde flèche est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) & \xrightarrow{1-\varphi} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v/p]}(r)) \\ \downarrow & & \downarrow p^r \\ \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) & \xrightarrow{p^r(1-\varphi)} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v/p]}(r)) \\ \downarrow t^r & & \downarrow t^r \\ \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{p^r-\varphi} & \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma_R, \mathbb{A}_R^{[u,v/p]}) \end{array}$$

et où

$$\beta : \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)^{J_j} \rightarrow \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)^{J_j}, \quad (a_{i_1 \dots i_j}) \mapsto (\beta_{i_j} \dots \beta_{i_1}(a_{i_1 \dots i_j})) \quad \text{avec } \beta_k := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tau_k^{n-1}.$$

En particulier, sur le premier terme, β' induit

$$\beta'_1 : \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xrightarrow{t^\bullet} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) \xleftarrow{t^r} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\text{Lie } \Gamma, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \xleftarrow{\beta} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\Gamma, \mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)). \quad (56)$$

Les deux premières flèches sont des $p^{c(r)}$ -quasi-isomorphismes (pour certaines constantes $c(r)$) et l'application β est un isomorphisme.

L'application $\tilde{\beta}^{(m)} : (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_i} \rightarrow (\mathbb{A}_{\text{cris}}^{(m)}(R))^{J_i}$ est donnée par les $\tilde{\beta}_k = \sum_{n \geq 1} (t^n/n!) \partial_k^{n-1}$. Soit $(a_{i_1 \dots i_j})$ dans $(F^{r-j} \mathbb{A}_R^{[u,v]})^{J_j}$, on a alors

$$t^r \beta'((a_{i_1 \dots i_j})) = (t^r \beta_{i_1}^{-1} \dots \beta_{i_j}^{-1}(t^{j-r} a_{i_1 \dots i_j})) = ((\beta_{i_1}^{-1} t) \dots (\beta_{i_j}^{-1} t)(a_{i_1 \dots i_j}))$$

et $(\beta_{i_k}^{-1} t) = (\sum_{n \geq 0} b_n \tau_{i_k}^n) t$ où les b_n sont les coefficients de la série $X/\log(1+X)$. Comme

$$\tilde{\beta}_{i_k} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \partial_{i_k}^{n-1} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (t \partial_{i_k})^{n-1} \right) t$$

avec $(t \partial_{i_k}) = \log(\gamma_{i_k})$, on obtient $\beta_{i_k}^{-1} t = \tilde{\beta}_{i_k}$ et on en déduit que le carré

$$\begin{array}{ccc} K_{\partial}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \eta_{\mu} K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}) \\ \uparrow & & \uparrow t^r \\ K_{\partial}(F^r \mathbb{A}_R^{[u,v]}) & \xrightarrow{\beta'_1} & K_{\Gamma}(\mathbb{A}_R^{[u,v]}(r)) \end{array} \quad (57)$$

commute, où β'_1 est l'application donnée par (56). On obtient finalement que le diagramme (55) est $p^{c(r)}$ -commutatif (pour un certain $c(r) \in \mathbb{N}$).

Montrons que le trapèze dans le coin supérieur droit

$$\begin{array}{ccc}
 \eta_\mu K_\Gamma(\mathbb{A}_{R_\infty}^+)^{[u,v]} & \xrightarrow[\sim]{\tilde{\mu}_H} & \eta_\mu C_G(\mathbb{A}_R^+)^{[u,v]} \\
 \downarrow \wr & \searrow \sim & \downarrow \wr \\
 \eta_\mu K_\Gamma(\mathbb{A}_{R_\infty}^{[u,v]}) & \xrightarrow[\sim]{\tilde{\mu}_H} & \eta_\mu C_G(\mathbb{A}_R^{[u,v]})
 \end{array} \tag{58}$$

est constitué de quasi-isomorphismes.

La flèche verticale de gauche est un isomorphisme de complexes. La flèche horizontale du haut est un quasi-isomorphisme par (42). Montrons que la flèche verticale de droite est un quasi-isomorphisme. Par définition, le complexe $C_G(\mathbb{A}_R^+)^{[u,v]}$ est égal à

$$\operatorname{holim}_n((R\Gamma(G, \mathbb{A}_R^+) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}^{[u,v]}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} / (\xi, p)^n).$$

Mais $R\Gamma(G, \mathbb{A}_R^+)$ est calculé par le complexe borné $\operatorname{Kos}(\Gamma_R, \mathbb{A}_{R_\infty}^+)$ dont les termes sont plats sur \mathbb{A}_{inf} . On a donc

$$R\Gamma(G, \mathbb{A}_R^+) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}^{[u,v]} \cong R\Gamma(G, \mathbb{A}_R^+) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]}.$$

Pour n suffisamment grand (tel que $\xi^n \in p\mathbb{A}^{[u,v]}$), on a

$$\operatorname{Tor}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^1(\mathbb{A}^{[u,v]}, \mathbb{A}_{\text{inf}} / (\xi, p)^n) \hookrightarrow \operatorname{Tor}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^1(\mathbb{A}^{[u,v]}, \mathbb{A}_{\text{inf}} / p) = 0$$

et donc

$$(R\Gamma(G, \mathbb{A}_R^+) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}^{[u,v]}) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}}^L \mathbb{A}_{\text{inf}} / (\xi, p)^n \cong R\Gamma(G, \mathbb{A}_R^+) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]} / (\xi, p)^n.$$

Les termes du complexes ci-dessus sont donnés par

$$\operatorname{Map}_{\text{cont}}(G^m, \mathbb{A}_R^+) \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]} / (p, \xi)^n,$$

qui est isomorphe à

$$\operatorname{Map}_{\text{cont}}(G^m, \mathbb{A}_R^+ \otimes_{\mathbb{A}_{\text{inf}}} \mathbb{A}^{[u,v]} / (p, \xi)^n),$$

car G est profini. En prenant la limite sur n , on obtient finalement le quasi-isomorphisme

$$C_G(\mathbb{A}_R^+)^{[u,v]} \xrightarrow{\sim} C_G(\mathbb{A}_R^{[u,v]}).$$

On en déduit que les autres flèches de (58) sont elles aussi des quasi-isomorphismes. Finalement, une chasse au diagramme (dans (55)) montre que (54) et donc (53) commute dans le cas où $\mathfrak{X} := \operatorname{Spf}(R)$. Il reste à voir que le résultat reste vrai pour \mathfrak{X} global.

(iii) *Cas global.* Dans un premier temps, on suppose toujours $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf}(R)$. Si (Σ, Λ) sont tels qu'on ait une immersion (27), en définissant $R_{\Sigma, \Lambda}^{PD}$, $R_{\infty, \Sigma, \Lambda}$, etc. comme précédemment, on peut réécrire le

diagramme (55) en utilisant les versions (Σ, Λ) des anneaux. On prend ensuite la limite sur l'ensemble des (Σ, Λ) et on obtient un diagramme commutatif fonctoriel

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim_{\Sigma, \Lambda} \tau_{\leq r} (\text{Kos}(\partial, R_{\Sigma, \Lambda}^{PD})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u, v]}\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}\right]) & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_{\Sigma, \Lambda} \tau_{\leq r} (\eta_{\mu} C_G(\mathbb{A}_{\overline{R}_{\Sigma, \Lambda}}^+)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]}^L \mathbb{A}^{[u, v]}\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}\right]) \\
 \uparrow & & \uparrow \iota^r \\
 \varinjlim_{\Sigma, \Lambda} \tau_{\leq r} \text{Kos}(\partial, \varphi, F^r R_{\Sigma, \Lambda}^{PD})_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} C_G(\text{Kos}(\varphi, \mathbb{A}_{\overline{R}}(r)))_{\mathbb{Q}} \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r} C_G(\mathbb{Z}_p(r))_{\mathbb{Q}}
 \end{array}$$

Soit \mathfrak{X} global. En considérant des hyper-recouvrements affines $\mathfrak{U}^{\bullet} \rightarrow \mathfrak{X}$ comme précédemment et en remarquant que les deux complexes de la ligne du haut du diagramme ci-dessus calculent respectivement

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}((\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k / p) / \mathbb{A}_{\text{cris}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{cris}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u, v]}\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}\right]$$

et

$$\tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^k, A\Omega_{\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}})_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\text{inf}}[1/p]}^L \mathbb{A}^{[u, v]}\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{\mu}\right],$$

on en déduit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{cris}}(\mathfrak{U}^{\bullet})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{ét}}(A\Omega_{\mathfrak{U}^{\bullet}})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(A\Omega_{\mathfrak{X}})_{\mathbb{Q}}^{[u, v]} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \iota^r & & \uparrow \iota^r \\
 \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, r)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{syn}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, r)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq r} \text{hocolim } R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_C}^{\bullet}, \mathbb{Q}_p(r)) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq r} R\Gamma_{\text{ét}}(\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_C}, \mathbb{Q}_p(r))
 \end{array}$$

On a ici noté $R\Gamma_{\text{cris}}(-) := R\Gamma_{\text{cris}}(((-)_{\mathcal{O}_C} / p) / \mathbb{A}_{\text{cris}})$ et $R\Gamma_{\text{ét}}(A\Omega_{(-)_{\mathcal{O}_C}}) := R\Gamma_{\text{ét}}((-)_{\mathcal{O}_C}, A\Omega_{(-)_{\mathcal{O}_C}})$. On obtient le résultat du lemme. \square

Remerciements

Cet article présente les résultats obtenus durant ma thèse à l'ÉNS de Lyon. Je remercie ma directrice de thèse, Wiesława Nizioł, pour m'avoir suggéré ce sujet et pour les conseils et l'aide qu'elle m'a apportés tout au long de ce projet. Je remercie également l'évaluateur pour sa lecture attentive et ses nombreuses remarques et corrections.

Ce projet a reçu des financements du Labex Milyon, dans le cadre du programme Investissements d'Avenir (ANR-11-IDEX-0007) et de l'European Research Council (ERC) dans le cadre du programme European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 804176).

Bibliographie

[Andreatta et Brinon 2008] F. Andreatta et O. Brinon, "Surconvergence des représentations p -adiques: le cas relatif", pp. 39–116 dans *Représentations p -adiques de groupes p -adiques, I : Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules*, Astérisque **319**, Soc. Math. de France, Paris, 2008. MR Zbl

[Andreatta et Iovita 2008] F. Andreatta et A. Iovita, "Global applications of relative (ϕ, Γ) -modules, I", pp. 339–420 dans *Représentations p -adiques de groupes p -adiques, I : Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules*, Astérisque **319**, Soc. Math. de France, Paris, 2008. MR Zbl

- [Antieau et al. 2022] B. Antieau, A. Mathew, M. Morrow et T. Nikolaus, “On the Beilinson fiber square”, *Duke Math. J.* **171**:18 (2022), 3707–3806. MR Zbl
- [Beilinson 2013] A. A. Beilinson, “On the crystalline period map”, *Camb. J. Math.* **1**:1 (2013), 1–51. MR Zbl
- [Bhatt et al. 2018] B. Bhatt, M. Morrow et P. Scholze, “Integral p -adic Hodge theory”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **128** (2018), 219–397. MR Zbl
- [Bloch et Kato 1986] S. Bloch et K. Kato, “ p -adic étale cohomology”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **63** (1986), 107–152. MR Zbl
- [Česnavičius et Koshikawa 2019] K. Česnavičius et T. Koshikawa, “The A_{inf} -cohomology in the semistable case”, *Compos. Math.* **155**:11 (2019), 2039–2128. MR Zbl
- [Colmez 2002] P. Colmez, “Espaces de Banach de dimension finie”, *J. Inst. Math. Jussieu* **1**:3 (2002), 331–439. MR Zbl
- [Colmez 2003] P. Colmez, “Les conjectures de monodromie p -adiques”, exposé 897, pp. 53–101 dans *Séminaire Bourbaki 2001/2002*, Astérisque **290**, Soc. Math. de France, Paris, 2003. MR Zbl
- [Colmez et Nizioł 2017] P. Colmez et W. Nizioł, “Syntomic complexes and p -adic nearby cycles”, *Invent. Math.* **208**:1 (2017), 1–108. MR Zbl
- [Colmez et Nizioł 2021a] P. Colmez et W. Nizioł, “On the cohomology of p -adic analytic spaces, I: The basic comparison theorem”, prépublication, 2021. arXiv 2104.13448
- [Colmez et Nizioł 2021b] P. Colmez et W. Nizioł, “On the cohomology of p -adic analytic spaces, II: The C_{st} -conjecture”, prépublication, 2021. arXiv 2108.12785
- [Conrad 2003] B. Conrad, “Cohomological descent”, prépublication, 2003, voir <https://math.stanford.edu/~conrad/papers/hypercover.pdf>.
- [Diao et al. 2019] H. Diao, K.-W. Lan, R. Liu et X. Zhu, “Logarithmic adic spaces: some foundational results”, prépublication, 2019. arXiv 1912.09836
- [Faltings 2002] G. Faltings, “Almost étale extensions”, pp. 185–270 dans *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II*, Astérisque **279**, Soc. Math. de France, Paris, 2002. MR Zbl
- [Fontaine 1994] J.-M. Fontaine, “Le corps des périodes p -adiques”, pp. 59–111 dans *Périodes p -adiques* (Bures-sur-Yvette, France, 1988), Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris, 1994. MR Zbl
- [Fontaine et Messing 1987] J.-M. Fontaine et W. Messing, “ p -adic periods and p -adic étale cohomology”, pp. 179–207 dans *Current trends in arithmetical algebraic geometry* (Arcata, CA, 1985), édité par K. A. Ribet, Contemp. Math. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. MR Zbl
- [Hyodo 1988] O. Hyodo, “A note on p -adic étale cohomology in the semistable reduction case”, *Invent. Math.* **91**:3 (1988), 543–557. MR Zbl
- [Kato 1994] K. Kato, “Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology”, pp. 269–293 dans *Périodes p -adiques* (Bures-sur-Yvette, France, 1988), Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris, 1994. MR Zbl
- [Kedlaya et Liu 2016] K. S. Kedlaya et R. Liu, “Relative p -adic Hodge theory, II: Imperfect period rings”, prépublication, 2016. arXiv 1602.06899
- [Nekovář et Nizioł 2016] J. Nekovář et W. Nizioł, “Syntomic cohomology and p -adic regulators for varieties over p -adic fields”, *Algebra Number Theory* **10**:8 (2016), 1695–1790. MR Zbl
- [Nizioł 2008] W. Nizioł, “Semistable conjecture via K -theory”, *Duke Math. J.* **141**:1 (2008), 151–178. MR Zbl
- [Nizioł 2009] W. Nizioł, “On uniqueness of p -adic period morphisms”, *Pure Appl. Math. Q.* **5**:1 (2009), 163–212. MR Zbl
- [Nizioł 2020] W. Nizioł, “On uniqueness of p -adic period morphisms, II”, *Compos. Math.* **156**:9 (2020), 1915–1964. MR Zbl
- [Scholze 2013] P. Scholze, “ p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties”, *Forum Math. Pi* **1** (2013), art. id. e1. MR Zbl
- [Stacks 2005–] “The Stacks project”, référence web, 2005–, voir <http://stacks.math.columbia.edu>.

[Tsuji 1999] T. Tsuji, “ p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case”, *Invent. Math.* **137**:2 (1999), 233–411. MR Zbl

Communicated by Bhargav Bhatt

Received 2021-01-26 Revised 2022-03-22 Accepted 2022-05-10

s.gilles@imperial.ac.uk

*Huxley Building, South Kensington Campus, Imperial College London,
London, United Kingdom*

Algebra & Number Theory

msp.org/ant

EDITORS

MANAGING EDITOR
Antoine Chambert-Loir
Université Paris-Diderot
France

EDITORIAL BOARD CHAIR
David Eisenbud
University of California
Berkeley, USA

BOARD OF EDITORS

Jason P. Bell	University of Waterloo, Canada	Philippe Michel	École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Bhargav Bhatt	University of Michigan, USA	Martin Olsson	University of California, Berkeley, USA
Frank Calegari	University of Chicago, USA	Irena Peeva	Cornell University, USA
J.-L. Colliot-Thélène	CNRS, Université Paris-Saclay, France	Jonathan Pila	University of Oxford, UK
Brian D. Conrad	Stanford University, USA	Anand Pillay	University of Notre Dame, USA
Samit Dasgupta	Duke University, USA	Bjorn Poonen	Massachusetts Institute of Technology, USA
Hélène Esnault	Freie Universität Berlin, Germany	Victor Reiner	University of Minnesota, USA
Gavril Farkas	Humboldt Universität zu Berlin, Germany	Peter Sarnak	Princeton University, USA
Sergey Fomin	University of Michigan, USA	Michael Singer	North Carolina State University, USA
Edward Frenkel	University of California, Berkeley, USA	Vasudevan Srinivas	Tata Inst. of Fund. Research, India
Wee Teck Gan	National University of Singapore	Shunsuke Takagi	University of Tokyo, Japan
Andrew Granville	Université de Montréal, Canada	Pham Huu Tiep	Rutgers University, USA
Ben J. Green	University of Oxford, UK	Ravi Vakil	Stanford University, USA
Christopher Hacon	University of Utah, USA	Akshay Venkatesh	Institute for Advanced Study, USA
Roger Heath-Brown	Oxford University, UK	Melanie Matchett Wood	Harvard University, USA
János Kollár	Princeton University, USA	Shou-Wu Zhang	Princeton University, USA
Michael J. Larsen	Indiana University Bloomington, USA		

PRODUCTION

production@msp.org
Silvio Levy, Scientific Editor

See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2023 is US \$485/year for the electronic version, and \$705/year (+\$65, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

ANT peer review and production are managed by EditFLOW[®] from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**
nonprofit scientific publishing

<http://msp.org/>

© 2023 Mathematical Sciences Publishers

Algebra & Number Theory

Volume 17 No. 3 2023

Quadratic relations between Bessel moments JAVIER FRESÁN, CLAUDE SABBABH and JENG-DAW YU	541
Morphismes de périodes et cohomologie syntomique SALLY GILLES	603
Maximizing Sudler products via Ostrowski expansions and cotangent sums CHRISTOPH AISTLEITNER and BENICE BORDA	667
Free rational curves on low degree hypersurfaces and the circle method TIM BROWNING and WILL SAWIN	719
Optimal lifting for the projective action of $SL_3(\mathbb{Z})$ AMITAY KAMBER and HAGAI LAVNER	749
Sums of two squares are strongly biased towards quadratic residues OFIR GORODETSKY	775