ANALYSIS & PDE

Volume 11 No. 2 2018

RAFIK IMEKRAZ

CONCENTRATION ET RANDOMISATION UNIVERSELLE DE SOUS-ESPACES PROPRES

msp

ANALYSIS AND PDE
Vol. 11, No. 2, 2018
dx.doi.org/10.2140/apde.2018.11.263

msp

CONCENTRATION ET RANDOMISATION UNIVERSELLE DE SOUS-ESPACES PROPRES

RAFIK IMEKRAZ

Nous étudions des conditions nécessaires et suffisantes de convergence pour des séries aléatoires de fonctions propres dans L^p, avec p fini. De façon précise, nous montrons des résultats optimaux pour les harmoniques sphériques sur $\mathbb{S}^d$ et l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^d$ (cela améliore des résultats de Ayache–Tzvetkov, Grivaux et Imekraz–Robert–Thomann). Dans le cas multidimensionnel, nous utiliserons des séries aléatoires faisant intervenir des matrices aléatoires. Cela nous permettra de donner un éclairage sur la construction d'une famille de mesures construites par Burq–Lebeau sur l'espace de Hilbert d'une variété riemannienne compacte. En fait, nous montrons que c'est précisément parce que L^p est de cotype fini que cette construction est possible (il s'agit d'une version multidimensionnelle du théorème de Maurey–Pisier).

We study necessary and sufficient conditions of convergence for random series of eigenfunctions in L^p, for finite p. More precisely, we get optimal results for the spherical harmonics on $\mathbb{S}^d$ and for the harmonic oscillator on $\mathbb{R}^d$ (this improves results by Ayache–Tzvetkov, Grivaux and Imekraz–Robert–Thomann). In the multidimensional framework, our random series involve random matrices. This illuminates a construction, made by Burq–Lebeau, of a family of specific measures on the Hilbert space of a Riemannian boundaryless compact manifold. Actually, we show that the latter construction is possible because L^p has finite cotype (this is nothing but a multidimensional version of the Maurey–Pisier theorem).

1. Introduction

1A. ***Littérature existante.*** Cet article étudie de manière unifiée les questions suivantes :

MSC2010 : 15B52, 46B09, 60G50.
Mots-clefs : random matrix, eigenfunctions, Sobolev embedding.

(i) Fixons $p \in [1, +\infty[$. Peut-on trouver des conditions *déterministes* (nécessaires et suffisantes) qui assurent la convergence dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ des séries *aléatoires* constituées par des harmoniques sphériques ?

(ii) Qu'en est-il pour l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ sur la variété non compacte $X = \mathbb{R}^d$?

(iii) Quelles séries aléatoires permettent de résoudre les questions précédentes ?

Dans le cas où les fonctions propres considérées ont des propriétés de concentration, nous nous proposons de démontrer des résultats optimaux qui complètent ceux obtenus séparément par Ayache et Tzvetkov [2008] et Grivaux [2010], ainsi qu'un résultat obtenu conjointement par Robert, Thomann et l'auteur dans [Imekraz et al. 2016]. En ce qui concerne la randomisation multidimensionnelle, nous obtenons une extension de deux résultats de Maurey et Maurey–Pisier. Cela donnera un éclairage sur la construction d'une famille de mesures sur $L^2(X)$ (où X est une variété riemannienne compacte sans bord) construites par Burq et Lebeau [2013].

Avant d'écrire des énoncés précis, il convient de citer les principaux travaux existants concernant cette problématique. La source de toute cette étude réside dans le théorème de Paley et Zygmund [1930; 1932] : si l'on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartenant à $\ell^2(\mathbb{Z})$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\frac{1}{2}$-Bernoulli à valeurs dans $\{-1, +1\}$ alors la série de Fourier aléatoire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n a_n e^{inx}$ définit presque sûrement un élément de $L^p(\mathbb{T})$ pour tout réel $p \in [2, +\infty[$. La randomisation permet ainsi un gain d'intégrabilité alors qu'il n'y a évidemment aucun gain de régularité dans l'échelle des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$. Le théorème de Paley–Zygmund peut être considéré comme une amélioration probabiliste de l'injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ valide pour tout réel $p \in [2, +\infty[$. Les démonstrations du théorème de Paley–Zygmund utilisent généralement l'inégalité de Khintchine. L'ouvrage de Kahane [1985] contient de nombreux résultats importants dans ce thème et introduit notamment des versions banachiques de l'inégalité de Khintchine, à savoir les inégalités de Kahane–Khintchine (voir plus loin (39)). Citons maintenant trois résultats connus concernant la randomisation dans les espaces de Lebesgue.

Le premier résultat est le théorème de Maurey et énonce ceci : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(X)$ où X est un espace mesuré σ-fini, on a l'équivalence

$$\sum \varepsilon_n u_n \quad \text{converge presque sûrement dans } L^p(X) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2} \in L^p(X). \tag{1}$$

En fait, le théorème de Maurey permet de remplacer $L^p(X)$ par n'importe quel treillis de Banach qui dispose de la propriété de cotype fini [Maurey 1974, pages 21–22 ; Lindenstrauss et Tzafriri 1973, Theorem 1.d.6, Corollary 1.f.9].

Le deuxième résultat est le théorème de Maurey et Pisier [1976, corollaire 1.3] (voir le théorème 1.6 ci-dessous). Ce dernier assure, avec les mêmes notations, que les convergences des séries aléatoires $\sum \varepsilon_n u_n$ et $\sum g_n u_n$ dans $L^p(X)$ sont équivalentes où $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite i.i.d. de gaussiennes suivant une loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. En fait, le théorème de Maurey–Pisier permet de remplacer $L^p(X)$ par un espace de Banach complexe de cotype fini et les gaussiennes g_n par des variables aléatoires centrées plus générales.

Le troisième résultat a été obtenu par Figà-Talamanca et Rider [1966, Theorem 4; 1967, Corollary 4]. qui ont pu remplacer le tore $\mathbb{T}$ par un groupe compact quelconque G dans le théorème de Paley–Zygmund. On pourra aussi consulter [Figà-Talamanca 1971]. Marcus et Pisier [1981] ont résolu le problème de la convergence presque sûre des séries de Fourier dans $L^\infty(G)$ et leur analyse permet de retrouver les résultats dans l'échelle des espaces $L^p(G)$ avec $p \in [1, +\infty[$ à l'aide d'une version multidimensionnelle des inégalités de Kahane–Khintchine. Ces dernières inégalités, que nous choisissons de nommer les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier (voir plus loin (40)), vont jouer un rôle important dans notre article.

Récemment, ces problèmes ont ressurgi en considérant les fonctions trigonométriques $x \mapsto e^{inx}$ non pas comme les caractères du groupe abélien compact $\mathbb{T}$ mais plutôt comme les modes propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami $\frac{d^2}{dx^2}$. Deux types de résultat ont notamment motivé cette résurgence :

(i) Les bases hilbertiennes aléatoires de modes propres ont des propriétés non triviales comme l'ergodicité quantique [Zelditch 1992; Robert et Thomann 2015] ou des estimations de normes L^p bien meilleures que celles des bases hilbertiennes “canoniques” [Poiret et al. 2015; Burq et Lebeau 2013].

(ii) L'étude des équations non-linéaires de type Schrödinger ou ondes sur une variété riemannienne compacte X avec des conditions initiales à faible régularité dans les espaces de Sobolev $H^s(X)$ (on parle de régime sur-critique) est un problème difficile en toute dimension et tout spécialement en dimension $\dim(X) \geq 3$. La randomisation donne un gain d'intégrabilité qui permet de construire des solutions qui sont hors d'atteinte avec les méthodes déterministes actuelles. Ces travaux concernent les constructions de mesures de Gibbs (voir les articles [Bourgain 1994; 1996; Bourgain et Bulut 2014a; 2014b; 2014c; Burq et al. 2013; Deng 2012; Tzvetkov 2008] et leurs références) ou des conditions initiales aléatoires plus générales [Burq et al. 2015; Burq et Tzvetkov 2008a; 2008b; 2014; Poiret et al. 2014]. Concernant ces derniers articles, on pourra consulter le séminaire Bourbaki [de Bouard 2015].

Les deux points précédents ont même été combinés par de Suzzoni [2014] qui a étudié l'équation cubique des ondes sur la sphère $\mathbb{S}^3$ à l'aide d'une base hilbertienne aléatoire de $L^2(\mathbb{S}^3)$.

Il est donc légitime d'étudier la randomisation non plus sur un groupe compact mais sur une variété riemannienne compacte X (que l'on supposera toujours lisse, sans bord et de dimension $d \geq 2$). Étant données une suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, une famille *orthonormée* $(\phi_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(X)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ sur X et la fonction

$$\sum_{n\geq 0} a_n\phi_n \in L^2(X),$$

on s'intéresse à la convergence presque sûre dans $L^p(X)$ de la série aléatoire $\sum \varepsilon_n a_n \phi_n$. Bien entendu, le critère (1) répond à la question de façon théorique mais il ne paraît pas évident de le traduire en un comportement asymptotique sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sans surprise, cette étude est intimement liée à la suite des normes $\|\phi_n\|_{L^p(X)}$ en vertu de l'inégalité triangulaire :

$$\forall p \in [2,+\infty[, \quad \left\| \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2|\phi_n|^2} \right\|_{L^p(X)} \le \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \|\phi_n\|^2_{L^p(X)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

En fait, nous verrons que c'est l'éventuelle concentration des fonctions ϕ_n qui rentre en jeu. Rappelons les résultats connus. Tzvetkov montre ce que l'on appellera par la suite une *injection de Sobolev probabiliste* (selon la terminologie introduite par Burq et Lebeau [2013]) : pour tout réel $p \in]2,+\infty[$ il existe un réel explicite $\delta(d,p) < d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$ tel que

$$\sum_{n\ge 0} a_n\phi_n \in H^{\delta(d,p)}(X) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\ge 0} \varepsilon_n a_n \phi_n \quad \text{converge p.s. dans } L^p(X). \tag{3}$$

Avant de donner l'expression de $\delta(d,p)$, signalons que (3) améliore l'*injection de Sobolev déterministe*

$$\sum_{n\ge 0} a_n\phi_n \in H^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}(X) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\ge 0} a_n\phi_n \in L^p(X).$$

Par construction (voir [Tzvetkov 2010, Theorem 4]), le nombre $\delta(d,p)$ vient des inégalités de Sogge [1988] que nous rappelons : si l'on a $\Delta\phi_n = -\lambda_n^2\phi_n$, avec $\lambda_n > 0$ alors on a

$$\|\phi_n\|_{L^p(X)} \le C(X,p)\lambda_n^{\delta(d,p)}, \quad \delta(d,p) := \begin{cases} \frac{d-1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) & \text{si } 2 \le p \le \frac{2(d+1)}{d-1}, \\ \frac{d-1}{2} - \frac{d}{p} & \text{si } \frac{2(d+1)}{d-1} \le p \le +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

où $C(X,p) \ge 1$ ne dépend que de X et p. Le cas $p=\infty$ est dû à Avakumovič, Levitan et Hörmander [Hörmander 1968] et les inégalités (4) sont optimales pour $X = \mathbb{S}^d$. Notons au passage que le critère de Maurey (1) et l'inégalité triangulaire (2) permettent de retrouver immédiatement l'implication (3).

De façon indépendante, des travaux font intervenir la notion de randomisation multidimensionnelle sur une variété riemannienne compacte X en tenant compte de la décomposition spectrale de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur $L^2(X)$. Cette notion apparaît sous des formes en apparence différente, dans les travaux de Shiffman et Zelditch [2003 ; Zelditch 1992], dans celui de Burq et Lebeau [2013] ainsi que dans celui de Poiret, Robert et Thomann [Poiret et al. 2015] (pour l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^d$) avec des arguments de “concentration de la mesure” et de “grandes déviations”. C'est dans l'article [Burq et Lebeau 2013] que le terme “injection de Sobolev probabiliste” apparaît pour la première fois pour exprimer rigoureusement le gain d'intégrabilité obtenu par la randomisation. Même si cela n'est pas explicitement écrit, il nous semble qu'un des intérêts du papier [Burq et Lebeau 2013] est précisément de s'émanciper de l'astuce de considérer des modes propres invariants par symétrie (ce qui permet usuellement de réduire un problème multidimensionnel à un problème unidimensionnel). C'est ainsi que Burq et Lebeau obtiennent un résultat d'existence locale pour l'équation semi-linéaire des ondes sur une variété riemannienne compacte en régime sur-critique et leurs solutions ne sont pas spectralement supportées par des sous-suites particulières de fonctions propres.

Dans notre article, nous étudions les propriétés de dualité et interpolation de nouveaux espaces de Banach associés à une suite de sous-espaces propres $(E_n)_{n\ge 1}$, dénommés plus loin *espaces de Lebesgue* *probabilistes* et notés $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$. Afin de motiver cette étude dans le cadre de la randomisation des fonctions propres, nous écrivons dans les trois prochaines parties les applications que nous obtenons.

1B. ***Harmoniques sphériques de*** $\mathbb{S}^d$**.** Ayache et Tzvetkov [2008, Theorem 1] obtiennent un éclairage gaussien du théorème de Paley–Zygmund, à savoir l'équivalence pour tout $p \in [2, +\infty[$ des deux assertions suivantes :

(i) les fonctions propres ϕ_n sont uniformément bornées dans $L^p(X)$,

(ii) pour toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction gaussienne aléatoire $\sum_{n\geq 0} g_n a_n \phi_n$ appartient presque sûrement à $L^p(X)$ si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Alors que les preuves usuelles du théorème de Paley–Zygmund utilisent l'égalité $|e^{inx}| = 1$, l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) montre que c'est plutôt l'inégalité $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|e^{inx}\|_{L^p_x(-\pi,\pi)} < +\infty$ qui est déterminante. En d'autres termes, seule l'explosion des normes $\|\phi_n\|_{L^p}$ peut contredire la conclusion du théorème de Paley–Zygmund. Dans ce cas, Ayache et Tzvetkov posent la question de calculer en fonction des coefficients a_n, la borne supérieure des réels $p \in [2, +\infty[$ tels que la série aléatoire $\sum g_n a_n \phi_n$ converge presque sûrement dans $L^p(X)$. Sans aucune information sur les fonctions ϕ_n, cette question est trop générale et Ayache et Tzvetkov examinent les modes propres radiaux ψ_n de l'opérateur Laplacien Δ avec condition de Dirichlet au bord sur la boule fermée unité $\overline{\mathbb{B}_d(0,1)}$ de $\mathbb{R}^d$. Il s'avère que les fonctions ψ_n ne sont pas uniformément bornées dans $L^p(\mathbb{B}_d(0,1))$ pour $p \gg 1$, et l'on en déduit l'existence de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ telles que la série aléatoire gaussienne $\sum g_n a_n \psi_n$ diverge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{B}_d(0,1))$. Il s'agit là d'une différence majeure avec le théorème de Paley–Zygmund sur le tore $\mathbb{T}^d$. Dans le cas des fonctions ψ_n, Ayache et Tzvetkov [2008, Theorem 4] obtiennent une réponse partielle. Dans [Grivaux 2010] apparaissent deux idées qui vont jouer un rôle important dans notre travail :

(i) D'une part, Grivaux remarque que le théorème de Maurey–Pisier assure l'équivalence des convergences des séries aléatoires $\sum \varepsilon_n a_n \psi_n$ et $\sum g_n a_n \psi_n$.

(ii) D'autre part, Grivaux répond à la question de Ayache et Tzvetkov en utilisant la concentration des fonctions ψ_n en l'origine $0 \in \mathbb{R}^d$.

Comme le remarquent Ayache et Tzvetkov [2008, Theorem 4, Remark (d)], l'analyse précédente se transfère sans problème aux fonctions propres zonales de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur la sphère

$$\mathbb{S}^d := \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2 = 1\}, \quad d \geq 2.$$

On notera μ_d la mesure volume de $\mathbb{S}^d$ et l'on rappelle que le spectre de l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ est donné par la suite $(-n(n+d-1))_{n\in\mathbb{N}}$. Convenons aussi qu'une fonction sur $\mathbb{S}^d$ est zonale si elle ne dépend que de la première coordonnée x_1 d'un point $x \in \mathbb{S}^d$. D'après [Stein et Weiss 1971, Chapter IV.2, Theorem 2.14, page 149], on sait que l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ admet une suite de fonctions propres zonales $(Z_n)_{n\geq 1}$ vérifiant :

$$Z_n(x) = n^{\frac{1}{2}} P_n^{\left(\frac{d-2}{2}, \frac{d-2}{2}\right)}(x_1), \quad \Delta Z_n = -n(n+d-1) Z_n, \quad \|Z_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} \simeq_d 1, \tag{5}$$

où $P_n^{((d-2)/2,(d-2)/2)}$ est le n-ième polynôme de Jacobi, c'est-à-dire le n-ième polynôme orthogonal pour le poids $w \in [-1,1] \mapsto (1-w^2)^{\frac{d-2}{2}}$ et normalisé de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad P_n^{\left(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2}\right)}(1) = \binom{n+\frac{d-2}{2}}{n} \simeq_d n^{\frac{d-2}{2}}.$$

On peut montrer que l'on a les estimations (voir partie 3D) :

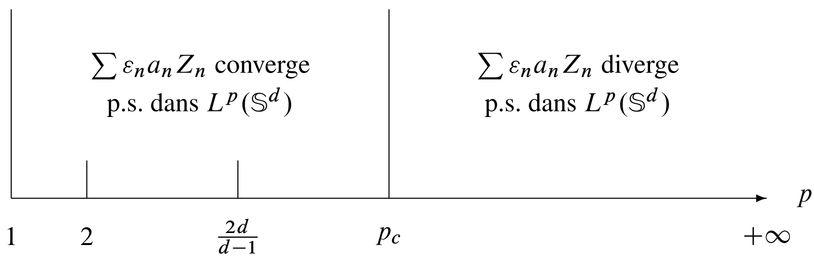
$$\begin{aligned} 1 \le p < \frac{2d}{d-1} &\quad\Rightarrow\quad \|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} 1, \\ p = \frac{2d}{d-1} &\quad\Rightarrow\quad \|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \sqrt[p]{\ln(n+1)}, \\ \frac{2d}{d-1} < p < \infty &\quad\Rightarrow\quad \|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2}-\frac{d}{p}}. \end{aligned} \tag{6}$$

D'après [Ayache et Tzvetkov 2008], on sait que pour toute suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N}^\star)$ et tout $p \in \left[2, \frac{2d}{d-1}\right[$, la série aléatoire $\sum g_n a_n Z_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$. Pour comprendre ce qu'il en est pour $p > \frac{2d}{d-1}$, on pourrait appliquer la méthode de Grivaux [2010]. Cette méthode nécessite de rappeler que les fonctions zonales Z_n se concentrent autour de deux boules centrées aux pôles $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ de rayon d'ordre $\frac{1}{n}$ avec une amplitude d'ordre $n^{\frac{d-1}{2}}$. Remarquons au passage que les formules (6) expliquent que cette concentration polaire est significative dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ pour $p > \frac{2d}{d-1}$. Notons maintenant

$$p_c := \sup\left\{ p > \frac{2d}{d-1} \;\middle|\; \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \tag{7}$$

Alors pour tout réel $p \in [2, +\infty[$, la méthode de Grivaux donne les implications suivantes :

$$\begin{aligned} p < p_c &\Rightarrow \text{ la série aléatoire } \sum g_n a_n Z_n \text{ converge p.s. dans } L^p(\mathbb{S}^d), \\ p > p_c &\Rightarrow \text{ la série aléatoire } \sum g_n a_n Z_n \text{ diverge p.s. dans } L^p(\mathbb{S}^d). \end{aligned}$$



Les arguments connus ne permettent pas de décider ce qu'il en est en $p = p_c$ (question soulevée dans [Imekraz et al. 2016, remark pages 2776–7] qui utilise notamment la méthode de Grivaux pour les fonctions propres radiales de l'opérateur $-\Delta + |x|^2$). Le premier résultat que nous énonçons élucide ce point.

Théorème 1.1. *On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$ à croissance polynomiale et un réel $p \in \left]\frac{2d}{d-1}, +\infty\right[$. La série aléatoire $\sum g_n a_n Z_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ si et seulement si*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty.$$

Le théorème précédent nous permet de préciser la formule (7) par comparaison logarithmique et rend légitime la mise en évidence de son terme $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$. Examinons par exemple des coefficients de la forme

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \ln^{\frac{\beta}{p}}(n)}, \qquad \beta \geq 0, \quad p > \frac{2d}{d-1}, \quad n \geq 2.$$

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$ et l'on calcule facilement l'équivalent

$$\frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=2}^{n} k^{d-1} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \sim \left(\frac{p}{2d} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{n \ln^{\beta}(n)}, \quad n \to +\infty.$$

La borne supérieure (7) vaut donc p pour toute valeur de β, mais le théorème 1.1 permet d'affirmer que la série aléatoire $\sum_{n\geq 2} g_n \alpha_n Z_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ si et seulement si $\beta > 1$.

Donnons une idée de la preuve du théorème 1.1. Nous justifierons rigoureusement que l'on peut assimiler $|Z_n|$ à sa restriction $\widetilde{Z}_n$ sur une boule de rayon d'ordre $\frac{1}{n}$ et centrée en l'un des pôles de symétrie. Cela nous permettra d'obtenir l'encadrement suivant pour tout $p > \frac{2d}{d-1}$:

$$\left\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \leq \left\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \leq C(d,p) \left\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}, \tag{8}$$

où $C(d,p) \geq 1$ ne dépend que de d et p. Comme les normes dans $L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{S}^d)$ des fonctions $\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n|^2$ sont calculables explicitement, on pourra finir en invoquant le critère (1). La majoration (8) est délicate et utilisera de nouveaux résultats abstraits d'interpolation développés dans la partie 2B. Signalons dès maintenant que l'interpolation (réelle ou complexe) des normes qui apparaissent dans (8) n'est pas gratuite et découlera des propriétés de concentration des fonctions zonales Z_n. Par exemple, il découlera de (6) et de la proposition 2.4 que l'interpolation n'est pas réalisée si l'on autorise p à parcourir un intervalle ouvert contenant $\frac{2d}{d-1}$.

Nos arguments permettent de traiter un autre cas important de fonctions propres, à savoir la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ des fonctions propres "de plus haut poids" qui se concentrent sur une géodésique. Ces dernières sont définies par les formules

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad Y_n(x) := c_{d,n}(x_1 + i x_2)^n, \quad \|Y_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} = 1, \tag{9}$$

où $c_{d,n} > 0$ est une constante de normalisation. On vérifie que l'on a $\Delta Y_n = -n(n+d-1)Y_n$ et $c_{d,n} \simeq_d n^{\frac{d-1}{4}}$. Les fonctions Y_n sont connues pour avoir des estimations de normes dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ maximales pour $2 < p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}$ et minimales pour $p \in [1, 2[$ parmi les modes propres $L^2(\mathbb{S}^d)$-normalisés associés à la valeur propre $-n(n+d-1)$ (et cela est même optimal d'après les inégalités de Sogge (4) et [Sogge et Zelditch 2011, Proposition 2]). De manière précise, il est connu et facile à vérifier que (9) implique les estimations suivantes

$$\forall p \in [1,+\infty[\cup\{+\infty\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \|Y_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \tag{10}$$

On montrera le théorème suivant.

Théorème 1.2. *On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$ à croissance polynomiale. Pour tout réel $p \in]1,+\infty[$, la série aléatoire $\sum g_n a_n Y_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ si et seulement si*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{d+1}{2}}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{d-1}{2}} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty. \tag{11}$$

Comme application immédiate, on obtient le fait suivant qui contraste avec le théorème de Paley–Zygmund sur $\mathbb{T}$: la fonction $\sum_{n\geq 2}(\sqrt{n}\ln(n))^{-1} Y_n$ appartient à $L^2(\mathbb{S}^d)$ mais la série aléatoire

$$\sum \frac{g_n}{\sqrt{n}\ln(n)} Y_n$$

diverge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ pour tout réel $p > 2$. La preuve du théorème 1.2 consistera à estimer les normes

$$\left\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n Y_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}.$$

Cela sera très facile pour $p \in 2\mathbb{N}$ en utilisant des estimées optimales vérifiées par les intégrales

$$\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{n_{(1)}}(x) \cdots Y_{n_{(p/2)}}(x)|^2 \, d\mu_d(x), \quad (n_{(1)},\ldots,n_{(p/2)}) \in (\mathbb{N}^\star)^{\frac{p}{2}}. \tag{12}$$

Pour traiter le cas général $p \in]1,+\infty[$, on raisonnera par interpolation et dualité. Mais comme précédemment, cela n'est pas gratuit. De façon précise, la concentration gaussienne de Y_n autour de la géodésique $\{x_1^2+x_2^2=1\} \subset \mathbb{S}^d$ nous permettra de valider les hypothèses de nos nouveaux théorèmes d'interpolation et de dualité (théorèmes 2.5 et 2.6).

Remarque 1.3. La condition (11) est exactement celle que l'on obtient avec le critère (1) en remplaçant Y_n par la fonction $x \mapsto n^{\frac{d-1}{4}} \mathbf{1}_{V_n}(x)$ où $V_n \subset \mathbb{S}^d$ est une bande de largeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ autour de la géodésique d'équation $x_1^2+x_2^2=1$. Par souci de simplification, nous n'avons traité que le cas des géodésiques sur $\mathbb{S}^d$ mais notre démarche est en fait plus générale. En effet, on devrait pouvoir estimer les intégrales (12) en utilisant seulement la concentration gaussienne de Y_n autour de la géodésique $\{x_1^2+x_2^2=1\}$. Or ce type de concentration se réalise dans un autre cas important, à savoir celui d'une surface X qui admet une géodésique $\Gamma \subset X$ fermée elliptique et non-dégénérée. Il est alors connu, mais assez délicat à rédiger, que l'on peut construire des quasi-modes qui se concentrent autour de la géodésique Γ avec des estimations gaussiennes (ce sont les travaux de Ralston et Babich).

En résumé, les théorèmes 1.1 et 1.2 affirment que la concentration sur une zone déterminée (voisinage d'une géodésique ou d'un pôle) est la seule information pertinente pour étudier les séries aléatoires de fonctions propres. Malgré la ressemblance de leurs énoncés, les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2 vont être différentes car la concentration des fonctions Y_n autour de la géodésique $\{x_1^2+x_2^2=1\}\subset\mathbb{S}^d$ est bien meilleure que la concentration des fonctions zonales Z_n autour des pôles $(\pm 1,0,\dots,0)$ (voir la discussion concernant les estimées multilinéaires au début de la preuve de la proposition 3.1).

Les deux exemples de fonctions propres Y_n et Z_n nous permettront facilement de justifier l'optimalité de l'injection de Sobolev probabiliste (3) obtenue par Tzvetkov [2010]. Cela est parfaitement cohérent car les preuves de [Tzvetkov 2010] sont obtenues grâce aux inégalités de Sogge (4) qui sont précisément saturées pour les fonctions Y_n et Z_n.

1C. ***Oscillateur harmonique $-\Delta+|x|^2$ sur $\mathbb{R}^d$.*** Dans cette partie, nous expliquons notre principale application à l'oscillateur harmonique $-\Delta+|x|^2$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $d\geq 2$. Nous prolongeons l'étude entamée dans [Imekraz et al. 2016]. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on note $H_n\in\mathbb{R}[X]$ le n-ième polynôme de Hermite ainsi que h_n la n-ième fonction de Hermite :

$$H_n(x):=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\quad\text{et}\quad h_n(x):=\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On vérifie que l'on a $\|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})}=1$. On définit aussi le sous-espace suivant de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$E_{d,n}:=\mathrm{Vect}\{h_{i_1}\otimes\cdots\otimes h_{i_d}\mid (i_1,\dots,i_d)\in\mathbb{N}^d,\ i_1+\cdots+i_d=n\},$$

où l'on note classiquement $(h_{i_1}\otimes\cdots\otimes h_{i_d})(x)=h_{i_1}(x_1)\cdots h_{i_d}(x_d)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$. Les fonctions $h_{i_1}\otimes\cdots\otimes h_{i_d}$ forment une base hilbertienne de $E_{d,n}$ et l'on vérifie aussi que l'on a

$$d_n:=\dim(E_{d,n})=\frac{(n+1)\cdots(n+d-1)}{(d-1)!}\sim\frac{n^{d-1}}{(d-1)!},\quad n\to+\infty. \tag{13}$$

Il faut savoir de plus que $E_{d,n}$ est le sous-espace propre de $-\Delta+|x|^2$ associé à la valeur propre $d+2n$ et que l'on a la somme directe orthogonale

$$L^2(\mathbb{R}^d)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}E_{d,n}.$$

On veut associer à cette somme directe orthogonale des séries aléatoires et étudier leur convergence en probabilité dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Expliquons d'abord la démarche employée dans [Imekraz et al. 2016, (1.9)]. Les séries aléatoires précédemment utilisées sont de la forme

$$\omega\in\Omega\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_n}V_{n,k}(\omega)c_{n,k}\phi_{n,k},$$

où Ω est un univers probabilisé de référence, $(\phi_{n,k})_{1\leq k\leq d_n}$ est une base hilbertienne de $E_{d,n}$, $(V_{n,k})_{n,k}$ est une famille de variables aléatoires, i.i.d., centrées, non nulles et dont tous les moments sont finis, et $(c_{n,k})_{n,k}$ est une suite de coefficients complexes. D'après le critère de Maurey (1) et le théorème de Maurey–Pisier, la convergence de ces séries aléatoires dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ revient à étudier les normes

$$\Bigg\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_n}|c_{n,k}|^2|\phi_{n,k}(x)|^2\Bigg\|_{L_x^{p/2}(\mathbb{R}^d)}. \tag{14}$$

L'expression précédente dépend a priori de chaque base hilbertienne $(\phi_{n,k})$ de $E_{d,n}$. Afin d'obtenir des résultats indépendants de ces bases, une condition de contrôle (nommée *squeezing condition*) sur les coefficients $(c_{n,k})$ a été imposée dans [Imekraz et al. 2016] (et même dans [Poiret et al. 2015 ; 2014 ; Robert et Thomann 2015]). Cette condition technique demande que les nombres $|c_{n,k}|^2$, d'un même paquet, soient du même ordre de grandeur, c'est-à-dire comparable à leur moyenne $\frac{1}{d_n}(|c_{n,1}|^2 + \cdots + |c_{n,d_n}|^2)$. Ainsi, (14) se réduit à

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\dim(E_{d,n})} \left(\sum_{k=1}^{d_n} |c_{n,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{d_n} |\phi_{n,k}(x)|^2 \right) \right\|_{L_x^{p/2}(\mathbb{R}^d)}, \tag{15}$$

où la fonction $|\phi_{n,1}|^2 + \cdots + |\phi_{n,d_n}|^2$ s'avère indépendante de la base hilbertienne choisie. Il est naturel de vouloir s'émanciper de la squeezing condition (cette dernière a été légèrement relaxée dans [Imekraz et al. 2016, Part 1.1.2] par comparaison aux travaux [Poiret et al. 2015 ; 2014 ; Robert et Thomann 2015]). Dans notre article, nous allons employer une autre méthode de randomisation qui ne dépend que de la suite $(E_{d,n})_{n\geq 0}$ et qui ne nécessite aucune condition de contrôle des coefficients. De façon précise, on va randomiser une fonction propre appartenant à $E_{d,n}$ en la faisant tourner uniformément et aléatoirement autour de l'origine. Nous noterons désormais $(W_n)_{n\geq 0}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes et supposons que chaque matrice aléatoire W_n suit une loi uniforme dans le groupe unitaire $U_{d_n}(\mathbb{C})$. Notre résultat s'énonce comme suit :

Théorème 1.4. *Supposons $d \geq 2$ et considérons une suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $u_n \in E_{d,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la série aléatoire $\sum_n \big(\sum_{i,j=1}^{d_n} W_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j}\rangle \phi_{n,i}\big)$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,*

(ii) *la série numérique $\sum_{n\geq 1} n^{\frac{d}{2}-1} \big(\sum_{k\geq n} \|u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} / k^{\frac{d}{2}}\big)^{\frac{p}{2}}$ est convergente.*

Pour tout $p \in [2, +\infty[$ on a l'injection de Sobolev probabiliste

$$\sum_{n\geq 1} n^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty \Rightarrow \sum_n \left(\sum_{i,j=1}^{d_n} W_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j}\rangle \phi_{n,i} \right) \text{ converge p.s. dans } L^p(\mathbb{R}^d). \tag{16}$$

Le théorème 1.4 donne donc une caractérisation explicite des séries aléatoires qui convergent presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Au passage, on obtient un résultat de type Paley–Zygmund :

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty \Rightarrow \forall\, p \in [2, +\infty[, \quad \sum_n \left(\sum_{i,j=1}^{d_n} W_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j}\rangle \phi_{n,i} \right) \text{ converge p.s. dans } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Dans la partie 4, nous verrons que l'implication (16) est optimale par rapport à l'exposant $-d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ et doit être vue comme une amélioration probabiliste de l'injection de Sobolev déterministe :

$$\sum_{n\geq 1} n^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 0} u_n \in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{17}$$

Dans [Imekraz et al. 2016, Theorem 2.2], un cas particulier de (16) a été obtenu avec une *squeezing condition*. Nous écrirons aussi une implication duale à celle de (16), avec $p \in \,]1, 2]$, grâce à un nouveau théorème de dualité.

Au niveau probabiliste, la preuve du théorème 1.4 reposera sur une extension multidimensionnelle du critère de Maurey (1) qui fera apparaître l'expression (15). An niveau de l'analyse, nous utiliserons une nouvelle estimée de la fonction spectrale de l'oscillateur harmonique tronquée au n-ième niveau d'énergie (voir la proposition 4.1) :

$$\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_d)\in\mathbb{N}^d\\ i_1+\cdots+i_d=n}} h_{i_1}(x_1)^2\cdots h_{i_d}(x_d)^2. \tag{18}$$

Didier Robert nous a signalé après la rédaction de notre article que des informations complémentaires sur la concentration de (18) ont été précédemment obtenues dans [Hanin et al. 2015].

1D. ***Version multidimensionnelle du théorème de Maurey–Pisier.*** Le théorème de Maurey–Pisier permet de remplacer les variables gaussiennes par des variables de Bernoulli dans les théorèmes 1.1 et 1.2. Il y a en réalité un phénomène d'universalité plus important : on peut remplacer les variables gaussiennes par toute une famille de variables aléatoires ayant des moments finis de tout ordre. Pour énoncer précisément ce résultat, rappelons la définition du cotype.

Définition 1.5. Considérons un réel $q \in [2, +\infty[$, un espace de Banach complexe B est de cotype q s'il existe $c > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$ et tout $(u_n)_{1\le n\le N} \in B^N$ on a

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|u_n\|_B^q\right)^{1/q} \le c\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n u_n\right\|_B\right]. \tag{19}$$

S'il existe un réel $q \in [2, +\infty[$ tel que l'inégalité précédente se réalise, alors on dit que B est de cotype fini.

Il faut considérer la propriété de cotype fini comme une propriété géométrique d'un espace de Banach. On vérifie que $L^p(X)$ est un espace de Banach de cotype $\max(2, p)$. La preuve du théorème de Maurey et Pisier [1976, corollaire 1.3] donne en fait le résultat suivant.

Théorème 1.6 (Maurey–Pisier). *Soit B un espace de Banach complexe. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *B est de cotype fini.*

(b) *Pour toute suite (u_n) de B et toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles, centrées, indépendantes et vérifiant*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] > 0 \quad \textit{et} \quad \forall q \in [2, +\infty[, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^q] < +\infty,$$

les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *la série aléatoire $\sum X_n u_n$ converge presque sûrement dans B,*

(ii) *la série aléatoire $\sum \varepsilon_n u_n$ converge presque sûrement dans B.*

En d'autres termes, l'universalité de la randomisation *unidimensionnelle* dans $L^p(X)$ se produit précisément parce que $L^p(X)$ dispose de la propriété de cotype fini. On veut naturellement généraliser ce phénomène pour les séries aléatoires qui apparaissent dans l'hypothèse (i) du théorème 1.4, c'est-à-dire trouver d'autres séries aléatoires multidimensionnelles pour lesquelles la conclusion du théorème 1.4 est encore valide.

Ce problème est lié à un fait remarqué par Burq et Lebeau [2013, appendice C] : si l'on considère X une variété riemannienne compacte sans bord alors on peut construire *beaucoup* de mesures ν sur $L^2(X)$ (même étrangères deux à deux) telles que $\nu(L^p(X)) = 1$ pour tout $p \in [2, +\infty[$. Rappelons simplement comment sont construites les mesures de Burq–Lebeau, disons dans le cas $X = \mathbb{S}^d$ (voir [Burq et Lebeau 2013, appendice C.1]). Notons $(E_n)_{n\geq 0}$ la suite des sous-espaces propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ sur $L^2(\mathbb{S}^d)$ et considérons une suite $(V_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $]0, +\infty[$ vérifiant les estimations de grandes déviations

$$\exists \gamma > 0,\ C > 0,\ c > 0, \quad \forall \rho > 0, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{P}(V_n \geq \rho) \leq C e^{-c\rho^\gamma}. \tag{20}$$

On supposera que les variables aléatoires V_n et les matrices unitaires aléatoires W_n sont indépendantes dans leur ensemble. Considérons maintenant une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\mathbb{S}^d)$ vérifiant $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les mesures de Burq–Lebeau sont tout simplement les mesures images (c'est-à-dire les lois) des fonctions aléatoires

$$\begin{aligned} &\Omega \to L^2(\mathbb{S}^d), \\ &\omega \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \Bigg(\sum_{i,j=1}^{d_n} V_n(\omega) W_{n,i,j}(\omega) \langle u_n, \phi_{n,j}\rangle \phi_{n,i} \Bigg), \end{aligned} \tag{21}$$

où $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ est une base orthonormée du sous-espace propre E_n et Ω un univers probabilisé de référence. Par indépendance des variables aléatoires en jeu, cette construction équivaut à définir une mesure de probabilité sur $L^2(\mathbb{S}^d)$ comme un produit tensoriel infini de certaines mesures de probabilités respectivement supportées dans les sous-espaces E_n (voir [Burq et Lebeau 2013, pages 955]). En termes de séries aléatoires, le résultat de Burq–Lebeau se reformule donc ainsi : il existe *beaucoup* de séries aléatoires de la forme (21) qui convergent presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$. Ce résultat n'est pas purement théorique ; il fait partie d'un programme de recherche consistant à étudier le transfert de mesures par le flot d'équations aux dérivées partielles non linéaires (par exemple des mesures de Gibbs).

On va écrire une version multidimensionnelle du théorème 1.6 qui va expliquer pourquoi l'on peut bien construire des mesures de Burq–Lebeau (et au passage en construire des nouvelles). Afin de recouvrir les variables aléatoires X_n du théorème 1.6, nous allons considérer des matrices aléatoires plus générales. Introduisons la notion suivante qui généralise la notion de symétrie pour les variables aléatoires scalaires [Marcus et Pisier 1981, page 82, (2.3)].

Définition 1.7. Une matrice aléatoire $M : \Omega \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est *orthogonalement invariante* si pour toute matrice orthogonale $P \in O_d(\mathbb{R})$ les matrices aléatoires M et PM ont la même loi. On définit de même l'invariance unitaire pour une matrice aléatoire $M : \Omega \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ en remplaçant le groupe orthogonal $O_d(\mathbb{R})$ par le groupe unitaire $U_d(\mathbb{C})$.

Fixons maintenant quelques notations usuelles d'algèbre linéaire :

$$\begin{aligned}
\forall y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^d, \quad |y| &:= \sqrt{|y_1|^2 + \cdots + |y_d|^2}, \\
\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \quad \|A\|_{\mathrm{op}} &:= \sup_{y \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}} \frac{|Ay|}{|y|}, \\
|A| &:= \sqrt{{}^t\bar{A}A} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \\
\sigma(A) &:= \inf_{y \neq 0} \frac{|Ay|}{|y|}.
\end{aligned} \tag{22}$$

La matrice $|A|$ est une matrice hermitienne positive issue d'une décomposition polaire de $A = P|A|$ avec $P \in U_d(\mathbb{C})$ (une telle décomposition est unique dès lors que $\det(A) \neq 0$). Enfin, $\sigma(A)$ est la plus petite valeur singulière de A, il s'agit aussi de la plus petite valeur propre de $|A|$. Notre première version multidimensionnelle du théorème de Maurey–Pisier prend la forme suivante :

Théorème 1.8. *Fixons X un espace mesuré σ-fini et un réel $p \in [1, +\infty[$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^p(X)$ de dimension finie. On notera $d_n = \dim(E_n)$ et $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n. Considérons aussi une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes et orthogonalement invariantes telles que*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}] < +\infty. \tag{23}$$

Alors, pour toute suite $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$, avec $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *La série aléatoire $\sum_n \bigl(\sum_{i,j=1}^{d_n} M_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i}\bigr)$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *La série aléatoire $\sum_n \bigl(\sum_{i,j=1}^{d_n} W_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i}\bigr)$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Dans ce qui précède, on convient que $W_n : \Omega \to U_{d_n}(\mathbb{C})$ suit une loi uniforme dans le groupe unitaire et que les matrices aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes.

La même conclusion est valide en remplaçant "orthogonalement invariante" par "unitairement invariante" au sens de la définition 1.7.

Faisons quelques remarques :

(a) L'assertion (20) est beaucoup plus restrictive que la condition $\sup_{n \geq 0} \mathbf{E}[|V_n|^{\max(2,p)}] < +\infty$. Le théorème 1.8 permet donc de construire des mesures de Burq–Lebeau sur $L^2(\mathbb{S}^d)$ qui ne sont pas accessibles par les arguments de grandes déviations utilisés dans [Burq et Lebeau 2013, appendice C].

(b) Le théorème 1.8 est indépendant d'une quelconque géométrie riemannienne sur X. En un certain sens, on peut dire que la philosophie globale est que c'est la géométrie de l'espace de Banach $L^p(X)$ qui est déterminante et non la géométrie de l'espace X. Cela explique au passage pourquoi les mesures de Burq et Lebeau [2013] peuvent être construites sur toute variété riemannienne compacte sans bord.

(c) La série aléatoire de l'assertion (i) du théorème 1.8 traduit l'idée que l'on applique un endomorphisme aléatoire à l'élément $u_n \in E_n$. Il s'agit d'une généralisation naturelle des séries aléatoires $\sum X_n u_n$ où $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires réelles.

(d) Les conditions (23) apparaissent sous une forme analogue dans l'étude des séries de Fourier aléatoires dans l'espace fonctionnel $L^\infty(G)$ sur un groupe compact G mais $\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}$ est remplacé par $\|M_n\|_{\mathrm{op}}^2$ (voir [Marcus et Pisier 1981, page 97, Theorem 3.5]). Dans le cas où le groupe G est abélien et localement compact, Marcus et Pisier expliquent que l'exposant 2 est dû au fait que l'espace des fonctions "presque sûrement continues" sur G est curieusement de cotype 2 (alors que $L^\infty(G)$ n'est même pas de cotype fini dès que G est infini).

Notre preuve du théorème 1.8 n'est pas un prolongement de celle du théorème de Maurey et Pisier [1976, corollaire 1.3]. La preuve originelle utilise le théorème de factorisation de Pietsch tandis que notre preuve est plus simple et repose essentiellement sur le théorème de Fubini–Tonelli et les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier. En fait, l'auteur ignore s'il est possible de démontrer le théorème 1.8 avec un théorème de factorisation. L'obstacle est le suivant : on veut démontrer un résultat de nature multidimensionnelle alors que la définition même d'un espace de Banach de cotype fini fait intervenir la randomisation unidimensionnelle (voir le membre droit de (19)). Pour autant, l'exposant $\max(2, p)$, qui apparaît dans (23), est le cotype de l'espace $L^p(X)$. Il est donc normal d'interpréter la preuve du théorème 1.8 en termes de cotype. Il se trouve que l'on peut contourner l'obstacle mentionné en considérant la structure de treillis de $L^p(X)$ (c'est-à-dire l'existence d'une relation d'ordre compatible avec la structure d'espace de Banach). Dans ce cas, il est connu que la propriété de "cotype fini" (19) peut être définie de manière déterministe sans variables de Bernoulli (qui sont par nature unidimensionnelle). Voici notre version multidimensionnelle du théorème 1.6 qui donne un éclairage sur les raisons géométriques de l'universalité de la randomisation *multidimensionnelle* dans les espaces de Banach $L^p(X)$, avec $p \in [1, +\infty[$.

Théorème 1.9. *Soit B un treillis de Banach complexe, alors se valent :*

(a) *L'espace de Banach B est de cotype fini.*

(b) *Pour toute suite d'entiers non nuls $(d_n)_{n\geq 0}$, pour toute suite $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ de matrices aléatoires indépendantes, orthogonalement invariantes et vérifiant*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad et \quad \forall q \in [2, +\infty[, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^q] < +\infty, \tag{24}$$

et pour toute suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *la série aléatoire $\sum \mathbf{tr}(M_n b_n)$ converge presque sûrement dans B,*

(ii) *la série aléatoire $\sum \mathbf{tr}(W_n b_n)$ converge presque sûrement dans B.*

La même conclusion est valide en remplaçant "orthogonalement invariante" par "unitairement invariante" au sens de la définition 1.7.

Le théorème 1.6 fournit évidemment le sens (b) $\Rightarrow$ (a) en choisissant $d_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est donc le sens (a) $\Rightarrow$ (b) qui est nouveau (et c'est en fait le sens pratique). On retrouve les séries aléatoires du théorème 1.8 avec $b_n = [\langle u_n, \phi_{n,i}\rangle \phi_{n,j}] \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p(X))$. La forme du théorème 1.9 nous a été inspirée par l'étude des séries aléatoires sur un groupe compact dans le livre de Marcus et Pisier [1981].

Signalons que certains espaces de Lorentz fournissent des exemples non triviaux de treillis de Banach de cotype fini [Creekmore 1981]. À l'instar du théorème 1.8, le théorème 2.21 donnera une version quantitative de l'hypothèse (24) afin de montrer que le bon exposant q à choisir est lié à la q-concavité du treillis B et que l'on peut effectivement choisir $q = \max(2, p)$ dans le cas de $B = L^p(X)$.

Le résultat suivant, prouvé dans les appendices B et C, donne des exemples de matrices aléatoires vérifiant les hypothèses (23) et (24).

Proposition 1.10. *Considérons des variables aléatoires $X_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ centrées, i.i.d. et où (i, j) parcourt $\mathbb{N}^{\star 2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note la matrice aléatoire $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}[X_{ij}]$. Il existe une constante universelle $C \geq 1$ telle que si l'on a $0 < \mathbf{E}[|X_{1,1}|^4] < +\infty$ alors*

$$\sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) \geq \frac{\mathbf{E}[|X_{11}|]^2}{C\mathbf{E}[|X_{11}|^4]^{\frac{1}{4}}}. \tag{25}$$

En outre, si $X_{1,1}$ admet un moment d'ordre $p \geq 4$ alors nous avons l'inégalité de Latała précisée

$$\mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^p] \leq C(p)\mathbf{E}[|X_{1,1}|^p]. \tag{26}$$

Par conséquent, on a

$$\inf_{n\geq 1} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \textit{et} \quad \sup_{n\geq 1} \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^p] < +\infty.$$

Remarque 1.11. Si les variables aléatoires X_{ij} sont à valeurs complexes et d'espérance nulle, alors on peut aussi montrer (26) en considérant partie réelle et partie imaginaire des variables aléatoires X_{ij}. Quant à (25), une preuve similaire est valide mais l'on doit remplacer l'hypothèse "centrée" par "symétrique au sens complexe" : pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$ les variables $e^{i\alpha}X_{ij}$ et X_{ij} ont la même loi.

Remarque 1.12. Dans le cadre des théorèmes 1.8 et 1.9, nous avons besoin de matrices aléatoires orthogonalement invariantes. Or les matrices $\frac{1}{\sqrt{n}}[X_{ij}]$ de la proposition 1.10 ne sont pas orthogonalement invariantes en général (le cas gaussien est une exception notable). Il suffit alors d'examiner des matrices aléatoires de la forme $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{E}_n[X_{ij}]$ où les matrices aléatoires $\mathcal{E}_n : \Omega \to O_{d_n}(\mathbb{R})$ et $[X_{ij}]$ sont indépendantes et où $\mathcal{E}_n$ suit une loi uniforme pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$. On remarque évidemment que $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{E}_n[X_{ij}]$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}[X_{ij}]$ ont la même norme d'opérateur et que l'on a $|\mathcal{E}_n[X_{ij}]| = |[X_{ij}]|$ (au sens de (22)).

Nous n'avons pas trouvé les estimations de la proposition 1.10 dans des références déjà publiées mais elles doivent être connues des spécialistes. Par exemple, nous pensons qu'il doit être possible de prouver (26) avec la méthode des moments (par exemple expliquée dans [Tao 2012, Part 2.3]). Cependant, cette méthode est assez technique à mettre en place. Un cas particulier très bien compris dans la littérature des matrices aléatoires est le cas *sous-gaussien*. Parmi plusieurs définitions équivalentes, $X_{1,1}$ est sous-gaussienne si l'on a $\mathbf{E}[X_{1,1}] = 0$ et

$$\exists K > 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbf{E}[|X_{1,1}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq K\sqrt{p}.$$

Cela équivaut par exemple à la condition

$$\exists K' > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[\exp(tX_{11})] \leq \exp(K't^2).$$

D'après [Rudelson et Vershynin 2009, Proposition 2.3] (voir aussi la preuve de [Litvak et al. 2005, Fact 2.4]), on sait que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \quad \exists C(p,K) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^p] \leq C(p,K).$$

L'inégalité (26) est plus générale. Dans notre article, nous montrons que (26) est en réalité une conséquence de la preuve de l'inégalité de Latała

$$\mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}] \leq C\,\mathbf{E}[|X_{1,1}|^4]^{\frac{1}{4}}. \tag{27}$$

et des inégalités de Kahane–Khintchine dans l'espace de Banach $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ (voir (39)). Cela explique pourquoi (26) implique (27) avec $p = 4$. La renormalisation de $[X_{ij}]$ par le facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et le fait que (27) nécessite au moins un moment d'ordre 4 peuvent surprendre a priori mais il s'agit de faits bien connus dans la théorie des matrices aléatoires (voir [Bai et al. 1988 ; Yin et al. 1988, Theorem 3.1]). Enfin, l'inégalité triviale $|X_{1,1}| \leq \sqrt{n}\|M_n\|_{\mathrm{op}}$ nous fait comprendre que l'inégalité (26) est optimale par rapport à la condition de moment d'ordre p.

Quant à l'inégalité (25), elle découlera d'un argument d'interpolation simplifiant celui du cas gaussien [Marcus et Pisier 1981, page 78, Proposition 1.5] et de l'inégalité de Latała (27).

1E. ***Organisation de l'article.*** La partie 2 contient les preuves des théorèmes 1.8 et 1.9. Mais elle est plus généralement dévolue à l'étude abstraite des espaces de Lebesgue probabilistes, notés $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ où X est un espace mesuré σ-fini et une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces non nuls de *dimension finie* de $L^2(X)$. Expliquons brièvement la définition de ces nouveaux espaces de Banach. Notons $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base orthonormée de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ sera défini comme l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, telles que la série aléatoire

$$\sum_n \bigg(\sum_{i,j=1}^{d_n} W_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} \bigg) \tag{28}$$

converge presque sûrement dans $L^p(X)$. Le cas $\dim(E_n) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est le plus simple à comprendre grâce au théorème de Maurey–Pisier et au critère de Maurey (1). Pour analyser les séries aléatoires (28) dans le cas $\dim(E_n) \neq 1$, nous allons utiliser une version multidimensionnelle des inégalités de Kahane–Khintchine, à savoir les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier que nous avons mentionnées plus haut. L'idée maîtresse de notre article est que ces inégalités sont précisément celles qui permettent d'aborder de façon satisfaisante la randomisation multidimensionnelle avec des hypothèses optimales de moments. Le théorème 2.2 nous donnera notamment une extension multidimensionnelle du critère de Maurey avec la caractérisation suivante des espaces de Lebesgue probabilistes :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big) \quad \Leftrightarrow \quad \bigg\| \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^2(X)}^2 \frac{e_n(x)}{\dim(E_n)}} \bigg\|_{L_x^p(X)} < +\infty,$$

où la fonction $e_n := |\phi_{n,1}|^2 + \dots + |\phi_{n,d_n}|^2$ est indépendante de la base hilbertienne $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ (voir (33)).

A priori, on s'attend à ce que le dual de $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ soit $\mathbf{PL}^{\frac{p}{p-1}}\big(X, \bigoplus E_n\big)$ et l'on espère que les espaces $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ soient stables par interpolation complexe et réelle. En fait, cela s'avérera faux pour la randomisation des fonctions zonales sur la sphère $\mathbb{S}^d$ (voir la partie 3) : on n'a pas de dualité et l'interpolation se réalise seulement si p parcourt certains intervalles. Nous avons cependant des résultats positifs : les théorèmes 2.5 et 2.6 donnent des hypothèses pratiques sur les fonctions e_n qui assurent les propriétés attendues de dualité et d'interpolation. La stratégie consistera à montrer $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ est un rétracte convenable de l'espace de Bochner–Lebesgue $L^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$. Cela nous permettra de faire hériter les propriétés de dualité/interpolation des espaces $L^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$ aux espaces $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$. Mais pour y arriver, nous serons obligés de justifier la continuité de certains projecteurs de $L^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$ à l'aide d'un nouveau critère de $\mathcal{R}$-bornitude sur $L^p(X)$. Les notions de rétracte et de $\mathcal{R}$-bornitude, que nous rappellerons plus loin, peuvent paraître abstraites mais elles sont incontournables sous une forme ou une autre (cela est formalisé par la proposition 2.31). C'est à ce moment qu'interviendra l'hypothèse abstraite

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{e_n}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)}} \in L^{p,\infty}(X), \tag{29}$$

où $L^{p,\infty}_x(X)$ est l'usuel espace L^p faible. Curieusement, il se trouve que la propriété (29) est vérifiée dans des exemples importants issus de la physique mathématique où les fonctions e_n se concentrent sur une même région de X.

La partie 3 contient les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2 grâce aux nouveaux arguments d'interpolation. Expliquons la principale idée dans le cas particulier $\dim(E_n) = 1$, c'est-à-dire si $E_n = \mathbb{C}\phi_n$. Supposons en outre que $|\phi_n|$ a tendance à se concentrer, en un sens à préciser, sur une partie $A_n \subset X$ avec une amplitude $c_n > 0$ quand n tend vers $+\infty$. Si l'on fixe une suite de coefficients $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors il est légitime d'espérer l'équivalence suivante pour toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n\phi_n|^2} \in L^p(X) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n c_n \mathbf{1}_{A_n}|^2} \in L^p(X).$$

En partitionnant les parties A_n en sous-parties disjointes, la condition du membre droit est explicite et résoudrait le problème de l'étude de la série aléatoire $\sum \varepsilon_n a_n \phi_n$. Si l'approximation de $|\phi_n|$ par $c_n \mathbf{1}_{A_n}$ n'est pas bonne, alors l'équivalence précédente n'est pas facile à prouver. L'hypothèse (29), avec $e_n = |\phi_n|^2$, a vocation à mesurer le reste de cette approximation et les arguments de dualité-interpolation permettent de simplifier les calculs.

La partie 4 est consacrée à la preuve du théorème 1.4 concernant l'oscillateur harmonique multidimensionnel.

Nous ajoutons trois appendices. Le premier est consacré à l'optimalité de l'exposant $\max(2, p)$ dans les différents théorèmes concernant $L^p(X)$ (ce fait est sans doute bien connu). Les deux derniers appendices contiennent la preuve des estimations matricielles de la proposition 1.10.

Conventions. Dans cet article, on fera les conventions suivantes :

— Sauf exception, la lettre d sera globalement réservée pour désigner la dimension des espaces en jeu ($\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$) et sera supérieure ou égale à 2.

— Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ désignera un espace probabilisé de référence (par exemple $\Omega = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne), on notera ω les éléments de Ω et $\mathbf{E}$ l'opérateur d'espérance.
— On notera C une constante universelle supérieure ou égale à 1 qui peut changer d'une ligne à l'autre.
— On notera $C(d, p)$ une constante supérieure ou égale à 1 qui ne dépend que des paramètres d et p et qui peut changer d'une ligne à l'autre.
— Si A et B sont deux nombres réels, la formule $A \lesssim B$ signifiera qu'il existe une constante universelle $C \geq 1$ telle que $A \leq CB$. De même, l'assertion $A \gtrsim B$ signifie $B \lesssim A$.
— On écrira $A \simeq B$ si l'on a $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.
— Si l'on fait intervenir des paramètres d et p, alors on notera $A \lesssim_{d,p} B$ pour signifier qu'il existe une constante $C(d, p) \geq 1$ qui ne dépend que de d et p telle que $A \leq C(d, p)B$. On définit de même les symboles $\gtrsim_{d,p}$ et $A \simeq_{d,p}$.

Par exemple, nous avons l'équivalence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; A_n \simeq_{d,p} B_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists C(d, p) \geq 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \frac{A_n}{C(d, p)} \leq B_n \leq C(d, p) A_n.$$

2. Espaces de Lebesgue probabilistes

2A. ***Universalité de la randomisation multidimensionnelle dans L^p.*** On énonce les résultats qui vont impliquer le théorème 1.8 et nous seront utiles pour la suite. On utilisera la notation suivante pour la norme matricielle de Hilbert–Schmidt :

$$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \quad \|A\|_{\mathrm{HS}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2}. \tag{30}$$

Désormais X désignera un espace mesuré σ-fini. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Fixons un réel $p \in [1, +\infty[$, une suite d'entiers non nuls $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p(X))$ et une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes, orthogonalement invariantes et vérifiant*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \textit{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}] < +\infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *la fonction $x \mapsto \sqrt{\sum_{n \geq 0} \|b_n(x)\|_{\mathrm{HS}}^2}$ appartient à $L^p(X)$,*

(ii) *la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ converge presque sûrement dans $L^p(X)$,*

(iii) *la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ converge dans $L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))$,*

(iv) *la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ est bornée en probabilité dans $L^p(X)$ (voir définition (46) plus loin).*

La même conclusion est valide en supposant que chaque matrice aléatoire $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ est unitairement invariante.

Le théorème 2.1 implique le suivant.

Théorème 2.2. *Fixons un réel $p \in [1, +\infty[$ et une suite de sous-espaces non nuls de dimension finie $(E_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^p(X)$. On notera $d_n = \dim(E_n)$ et $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit de plus*

$$\forall x \in X, \quad e_n(x) = |\phi_{n,1}(x)|^2 + \cdots + |\phi_{n,d_n}(x)|^2. \tag{31}$$

Fixons de plus une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes, orthogonalement invariantes et vérifiant

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \textit{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}] < +\infty.$$

Pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$, avec $u_n \in E_n$, on définit la série aléatoire

$$\sum_n \Big(\sum_{i,j=1}^{d_n} M_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} \Big). \tag{32}$$

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) *la fonction $x \mapsto \sqrt{\sum_{n\geq 0} \|u_n\|^2_{L^2(X)} e_n(x)/d_n}$ appartient à $L^p(X)$,*

(ii) *la série aléatoire (32) converge presque sûrement dans $L^p(X)$,*

(iii) *la série aléatoire (32) converge dans l'espace de Bochner–Lebesgue $L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))$,*

(iv) *la série aléatoire (32) est bornée en probabilité dans $L^p(X)$.*

Le même énoncé est valide si les matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ sont supposées unitairement invariantes.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer convenablement le théorème 2.1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$\sum_{i=1}^{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} M_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} = \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n),$$

avec

$$\forall x \in X, \quad b_n(x) := \frac{1}{\sqrt{d_n}} [\langle u_n, \phi_{n,i} \rangle \phi_{n,j}(x)]_{i,j} \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p_x(X)).$$

Cela nous donne

$$\|b_n(x)\|^2_{\mathrm{HS}} = \sum_{i,j=1}^{d_n} \frac{1}{d_n} |\langle u_n, \phi_{n,i} \rangle \phi_{n,j}(x)|^2 = \frac{1}{d_n} \|u_n\|^2_{L^2(X)} \sum_{j=1}^{d_n} |\phi_{n,j}(x)|^2 = \|u_n\|^2_{L^2(X)} \frac{e_n(x)}{d_n}. \qquad \square$$

La condition (i) du théorème 2.2 doit être vue comme une extension multidimensionnelle du critère de Maurey (1) et éclaire la discussion sur la squeezing condition (voir (14) et (15)). Remarquons aussi que la fonction (31) ne dépend que du sous-espace E_n en vertu des formules

$$e_n(x) = \sup_{|a_1|^2+\cdots+|a_{d_n}|^2=1} |a_1\phi_{n,1}(x) + \cdots + a_{d_n}\phi_{n,d_n}(x)|^2$$
$$= \sup\{|u_n(x)|^2 \mid u_n \in E_n,\ \|u_n\|_{L^2(X)} = 1\}. \tag{33}$$

Par conséquent la condition (i) est *indépendante* de la suite des lois des matrices aléatoires M_n et des bases hilbertiennes $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,d_n}$ de E_n. Cela traduit précisément un phénomène d'universalité pour la randomisation dans $L^p(X)$ et implique le théorème 1.8. L'interprétation avec la notion de cotype sera faite dans la partie 2D.

2B. ***Interpolation et dualité des espaces de Lebesgue probabilistes* $\mathbf{PL}^p$.** Le théorème 2.2 amène à poser la définition suivante.

Définition 2.3. Fixons un réel $p \in [1, +\infty[$ et une suite de sous-espaces non nuls de dimension finie $(E_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^p(X)$. On notera $d_n = \dim(E_n)$ et $(\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera aussi

$$\forall x \in X, \quad e_n(x) = |\phi_{n,1}(x)|^2 + \cdots + |\phi_{n,d_n}(x)|^2.$$

On note $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, avec $u_n \in E_n$ pour tout $n \geq 0$, qui satisfont les assertions équivalentes (i), (ii), (iii), (iv) du théorème 2.2. On appelle $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ l'espace de Lebesgue probabiliste associé à la suite de sous-espaces $(E_n)_{n\geq 0}$ et on le munit de la norme

$$\|(u_n)\|_{\mathbf{PL}^p(X,\bigoplus E_n)} := \left\| \sqrt{\sum_{n\geq 0} \|u_n\|^2_{L^2(X)} \frac{e_n(x)}{\dim(E_n)}} \right\|_{L^p_x(X)}.$$

Faisons quelques remarques sur cette définition :

— Répétons que la fonction e_n est indépendante de la base $(\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,d_n})$.

— On vérifie facilement que $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ est complet (voir (57)).

— Bien que défini abstraitement, nous verrons que dans les cas qui nous intéressent, on pourra considérer $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ comme un espace de distributions (par exemple si $X = \mathbb{S}^d$ ou $X = \mathbb{R}^d$).

— Si une suite (u_n), vérifiant $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, n'appartient pas à $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ alors les séries aléatoires (32) du théorème 2.2 divergent dans $L^p(X)$ avec une probabilité strictement positive et donc divergent presque sûrement d'après la loi du tout ou rien.

— Puisque les fonctions $\frac{1}{d_n} e_n$ sont des densités de probabilité sur X, on a l'égalité

$$\mathbf{PL}^2\big(X, \bigoplus E_n\big) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, u_n \in E_n,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|^2_{L^2(X)} < +\infty \right\}.$$

Si p est différent de 2, alors il semble nécessaire d'exploiter des propriétés des fonctions e_n afin de mieux comprendre l'espace $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$. Nous proposons une approche par dualité et interpolation. Le prochain résultat montre que l'interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ n'est pas gratuite et implique des propriétés sur les fonctions e_n. Rappelons maintenant que les espaces interpolés des espaces $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ sont définis de façon abstraite mais peuvent être vus comme des sous-espaces vectoriels du même espace ambiant, à savoir $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dans la suite, on notera $[\cdot,\cdot]_\theta$ et $[\cdot,\cdot]_{\theta,p}$ les méthodes d'interpolation complexe et réelle.

Proposition 2.4. *Fixons des réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $[1,+\infty[$ et soit $\theta \in]0,1[$ le nombre défini par la relation $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(X)\cap L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X)$ de dimension finie et supposons que l'on a l'égalité d'espaces vectoriels*

$$\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big) = \big[\mathbf{PL}^{p_1}\big(X,\bigoplus E_n\big),\mathbf{PL}^{p_2}\big(X,\bigoplus E_n\big)\big]_\theta$$

et que les normes des deux précédents espaces sont équivalentes. Alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|\sqrt{e_n}\|^{1-\theta}_{L^{p_1}(X)}\|\sqrt{e_n}\|^{\theta}_{L^{p_2}(X)}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)}} < +\infty. \tag{34}$$

La même conclusion est valide en remplaçant la méthode d'interpolation complexe $[\cdot,\cdot]_\theta$ par la méthode d'interpolation réelle $[\cdot,\cdot]_{\theta,p}$.

Démonstration. On considère pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ le "projecteur sur E_k" défini par

$$\Lambda_k : \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \to L^2(X), \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto u_k.$$

Le calcul de la norme d'opérateur de $\Lambda_k : \mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big) \to L^2(X)$ est immédiat

$$\|\Lambda_k\|_{\mathbf{PL}^p(X,\bigoplus E_n)\to L^2(X)} = \sup_{(u_n)\neq 0} \frac{\|u_k\|_{L^2(X)}}{\Big\|\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|^2_{L^2(X)}\frac{e_n}{d_n}}\Big\|_{L^p(X)}} = \frac{\sqrt{d_k}}{\|\sqrt{e(k,\cdot)}\|_{L^p(X)}}.$$

Par interpolation, il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a

$$\|\Lambda_k\|_{\mathbf{PL}^p(X,\bigoplus E_n)\to L^2(X)} \leq K\|\Lambda_k\|^{1-\theta}_{\mathbf{PL}^{p_1}(X,\bigoplus E_n)\to L^2(X)}\|\Lambda_k\|^{\theta}_{\mathbf{PL}^{p_2}(X,\bigoplus E_n)\to L^2(X)}. \qquad \square$$

L'inégalité (34) renverse l'inégalité usuelle $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)} \leq \|\sqrt{e_n}\|^{1-\theta}_{L^{p_1}(X)}\|\sqrt{e_n}\|^{\theta}_{L^{p_2}(X)}$. L'auteur ignore si (34) suffit pour interpoler les espaces $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)$. Afin d'obtenir des résultats positifs d'interpolation (et même de dualité), nous allons ajouter une hypothèse supplémentaire qui utilise l'espace de Lorentz $L^{1,\infty}(X)$. Il s'agit de l'espace vectoriel des fonctions mesurables $f : X\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ telles que

$$\forall t>0, \quad \mu\{x\in X \mid |f(x)|>t\} = \mathcal{O}(t^{-1}),$$

où μ est la mesure de l'espace mesuré X. L'inclusion $L^1(X)\subset L^{1,\infty}(X)$ est toujours vraie et est généralement stricte. Le contre-exemple typique est $|x|^{-d}\in L^{1,\infty}_x(\mathbb{R}^d)\backslash L^1_x(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.5. *Considérons $p_1<p_2$ deux nombres appartenant à $]1,+\infty[$ et vérifiant la condition $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq 1$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(X)\cap L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X)$*

de dimension finie. On suppose que les fonctions e_n satisfont les propriétés suivantes

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\sqrt{e_n}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}}\right)^{p_1}+\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\sqrt{e_n}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}}\right)^{p_2}\in L^{1,\infty}(X), \tag{35}$$

$$\exists p_0\in\,]p_1,p_2[,\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}^{1-\theta_0}\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_0}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_0}(X)}}<+\infty, \tag{36}$$

où $\theta_0\in\,]0,1[$ est déterminé par la relation $\frac{1}{p_0}=\frac{1-\theta_0}{p_1}+\frac{\theta_0}{p_2}$.

Alors les espaces $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)$, pour p parcourant $]p_1,p_2[$, sont stables par interpolation ***complexe*** *: en d'autres termes, si l'on a*

$$p_1<p_1'<p<p_2'<p_2,\quad \theta\in\,]0,1[,\quad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1'}+\frac{\theta}{p_2'},$$

alors on a l'égalité $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)=\big[\mathbf{PL}^{p_1'}\big(X,\bigoplus E_n\big),\mathbf{PL}^{p_2'}\big(X,\bigoplus E_n\big)\big]_\theta$ avec équivalence des normes.

De même, les espaces $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)$, pour p parcourant $]p_1,p_2[$, sont stables par d'interpolation ***réelle*** *: on a l'égalité $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)=\big[\mathbf{PL}^{p_1'}\big(X,\bigoplus E_n\big),\mathbf{PL}^{p_2'}\big(X,\bigoplus E_n\big)\big]_{\theta,p}$ avec équivalences des normes.*

La condition $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\le 1$ est de nature technique et est peut-être inutile en toute généralité. Elle est toujours vérifiée si l'on a $2\le p_1<p_2$. Une autre situation intéressante se produit si p_1 et p_2 sont deux exposants conjugués, i.e., vérifient $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$. Dans ce cas, il sera commode de considérer (36) avec $p_0=2$ et $\theta=\frac{1}{2}$ pour avoir l'assertion suivante qui est en apparence plus faible (mais équivalente comme le lemme 2.36 le montrera plus loin) :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}}{\dim(E_n)}<+\infty. \tag{37}$$

En prime de l'interpolation, le théorème suivant donne une propriété de dualité.

Théorème 2.6. *Fixons deux réels $p_1<p_2$ appartenant à $]1,+\infty[$ et vérifiant l'égalité $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n\ge 0}$ de $L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X)$ de dimension finie. Pour tous $p\in\,]p_1,p_2[$ et $(u,w)\in\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)\times\mathbf{PL}^q\big(X,\bigoplus E_n\big)$, avec $q:=\frac{p}{p-1}$, on a*

$$\sum_{n\ge 0}|\langle u_n,w_n\rangle_{L^2(X)}|\le\|u\|_{\mathbf{PL}^p(X,\bigoplus E_n)}\|w\|_{\mathbf{PL}^q(X,\bigoplus E_n)}. \tag{38}$$

En d'autres termes, tout élément de $\mathbf{PL}^q\big(X,\bigoplus E_n\big)$ induit canoniquement une forme linéaire bornée sur $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)$.

En outre, si l'on suppose (35) et (37) alors les espaces $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)$, pour p parcourant $]p_1,p_2[$, sont stables par dualité au sens suivant : l'injection canonique $\Lambda_p:\mathbf{PL}^q\big(X,\bigoplus E_n\big)\to\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)'$ qui à un élément $w\in\mathbf{PL}^q\big(X,\bigoplus E_n\big)$ associe la forme linéaire

$$\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)\mapsto\mathbb{C},\quad u\mapsto\sum_{n\ge 0}\langle u_n,w_n\rangle_{L^2(X)},$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

En d'autres termes, (35) et (37) impliquent que le dual de $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{PL}^q\big(X, \bigoplus E_n\big)$ pour tout $p \in]p_1, p_2[$. Les deux théorèmes précédents appellent à quelques remarques :

(a) L'inégalité (38) implique l'estimation $\|\Lambda_p\| \leq 1$ mais nous verrons que l'injection canonique Λ_p n'est généralement pas une isométrie de $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ sur $\mathbf{PL}^q\big(X, \bigoplus E_n\big)$ (voir (62)). Cela contraste avec la dualité des espaces de Lebesgue.

(b) En pratique, les hypothèses (36) et (37) se réalisent si les densités $\frac{1}{d_n} e_n$ ont tendance à se concentrer uniformément sur un borélien $A_n \subset X$ de mesure finie et strictement positive, c'est-à-dire si l'on peut assimiler la densité de probabilité $(\dim(E_n))^{-1} e_n$ à une fonction de la forme $x \mapsto (\mu(A_n))^{-1} \mathbf{1}_{A_n}(x)$. Dans les exemples issus de la physique mathématique qui font intervenir des polynômes orthogonaux, on a très souvent des propriétés de concentration qui forcent $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)}$ à être équivalent à $n^{(a+b/p)}$, pour un certain couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si p parcourt un intervalle donné $]p_1, p_2[$. Ainsi, (36) sera vérifié. De même (37) sera vérifié si $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)}$ est équivalent à $n^{a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \sqrt{\dim(E_n)}$ pour un certain réel a.

(c) L'hypothèse (35) est très importante dans nos preuves. Bien qu'il ne semble pas facile de l'interpréter, elle sera toujours réalisée dans les cas qui nous concernent. Il est sans doute possible de relaxer cette hypothèse (et peut-être même de la supprimer), mais permettons-nous d'expliquer l'intervention des espaces de Lorentz. D'une part, nos démonstrations utilisent l'interpolation réelle, théorie dans laquelle les espaces de Lorentz jouent un rôle clé. D'autre part, nous verrons des exemples bien concrets, à savoir les fonctions propres qui se concentrent sur une géodésique de la sphère $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, où l'hypothèse (35) ne se réalise pas si l'on remplace l'espace de Lorentz $L^{1,\infty}(\mathbb{S}^d)$ par l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{S}^d)$ (voir la remarque 3.7).

2C. ***Preuve du théorème 2.1, randomisation avec des matrices aléatoires.*** Dans la théorie unidimensionnelle, les inégalités de Kahane–Khintchine, que nous rappelons, sont très importantes : pour tous réels $p > q \geq 1$, il existe une constante $K_{p,q} \geq 1$ telle que, pour tout espace de Banach B et tous éléments $u_0, \ldots, u_N$ de B, les moments des variables aléatoires $\left\|\sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n\right\|_B$ sont du même ordre de grandeur au sens suivant

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n\right\|_B^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n\right\|_B^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq K_{p,q}\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n\right\|_B^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{39}$$

D'après Kwapień, il existe une constante universelle $K > 0$ telle que l'on a $K_{p,q} \leq K_{p,1} \leq K\sqrt{p}$ [Li et Queffélec 2004, Part 3.III].

Fixons maintenant une suite d'entiers non nuls $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et notons $(\mathcal{E}_n)_n$ une suite de matrices aléatoires indépendantes. On supposera que la matrice aléatoire $\mathcal{E}_n$ suit une loi uniforme dans le groupe orthogonal $O_{d_n}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit de même W_n en remplaçant les groupes orthogonaux $O_{d_n}(\mathbb{R})$ par les groupes unitaires $U_{d_n}(\mathbb{C})$. Comme nous manipulerons des matrices de tailles différentes, il sera commode de faire le raccourci suivant : à la place de "*une suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de matrices carrées telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *la matrice* b_n *soit de taille* $d_n \times d_n$ *à coefficients dans* B", nous écrirons "*une suite de matrices carrées* $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$". Dans ce contexte, les inégalités de Kahane–Khintchine démontrées par Marcus et Pisier [1981, page 81, (2.1) ; page 91, Corollary 2.12] s'énoncent comme suit :

Proposition 2.7. *Pour tous réels $p > q \geq 1$, il existe une constante $K_{p,q} \geq 1$ telle que, pour tout espace de Banach B, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et toute suite de matrices carrées $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$, nous avons*

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)\right\|_B^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)\right\|_B^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq K_{p,q}\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)\right\|_B^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{40}$$

De même que pour les inégalités de Kahane–Khintchine (39), il existe une constante numérique $K \geq 1$ telle que l'on a $K_{p,q} \leq K_{p,1} \leq K\sqrt{p}$. Des inégalités similaires sont valides pour les matrices aléatoires W_n à la place de $\mathcal{E}_n$.

La version originale des inégalités (40) utilise les séries aléatoires $\sum d_n \,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)$ qui sont plus adaptées à la théorie des séries de Fourier sur un groupe compact, mais l'on peut bien entendu englober l'entier d_n dans la matrice b_n (il est d'ailleurs remarquable que ces inégalités ne nécessitent aucune condition de croissance sur les dimensions d_n). Comme les inégalités (40) impliquent les inégalités (39), on se permet d'utiliser la même notation $K_{p,q}$. Les inégalités (40) jouent un rôle clé pour montrer le théorème suivant [Marcus et Pisier 1981, page 92, Corollary 2.14] où nous forçons l'apparition du terme multiplicatif $\sqrt{d_n}$ par cohérence avec la suite.

Théorème 2.8. *Considérons un espace de Banach complexe B et une suite $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$ de matrices carrées. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *la série $\sum_n \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)$ converge dans $L^p(\Omega, B)$ pour **un** réel $p \in [1, +\infty[$,*

(ii) *la série $\sum_n \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)$ converge dans $L^p(\Omega, B)$ pour **tout** réel $p \in [1, +\infty[$,*

(iii) *la série $\sum_n \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)$ converge presque sûrement dans B,*

(iv) *la série $\sum_n \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(W_n b_n)$ converge dans $L^p(\Omega, B)$ pour **un** réel $p \in [1, +\infty[$,*

(v) *la série $\sum_n \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(W_n b_n)$ converge dans $L^p(\Omega, B)$ pour **tout** réel $p \in [1, +\infty[$,*

(vi) *la série $\sum_n \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(W_n b_n)$ converge presque sûrement dans B.*

D'après le théorème de Maurey–Pisier (théorème 1.6), il faut nécessairement faire une hypothèse supplémentaire si l'on veut ajouter d'autres lois matricielles en plus des matrices aléatoires $(\mathcal{E}_n)$ et (W_n). Le théorème 2.1 explique que l'on peut considérablement préciser le théorème 2.8 dans le cas particulier $B = L^p(X)$, avec $p \in [1, +\infty[$. Nous allons exploiter la preuve du théorème 2.8, c'est-à-dire l'utilisation systématique des inégalités (40) et d'un principe de contraction (théorème 2.16). La partie 2D donnera un éclairage sur les propriétés géométriques de l'espace de Banach $L^p(X)$ utilisées dans notre argumentation.

Dans le cas $B = \mathbb{C}$, les inégalités (40) donnent un résultat simple et bien connu dans le cas unidimensionnel. Le cas multidimensionnel fait intervenir les normes de Hilbert–Schmidt (30).

Lemme 2.9. *Pour toute suite de matrices $a_n \in \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n a_n)\right|^2\right] = \sum_{n=0}^{N} \|a_n\|_{\mathrm{HS}}^2. \tag{41}$$

La même conclusion est valide en remplaçant $(\mathcal{E}_n)_{n\geq 0}$ par $(W_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration. En notant dP la mesure de Haar normalisée du groupe compact $O_d(\mathbb{R})$ et en utilisant l'indépendance des matrices aléatoires $\mathcal{E}_n$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n a_n)\Big|^2\Big] &= \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\sqrt{d_{n_1}}\sqrt{d_{n_2}}\mathbf{E}\big[\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n a_n)\overline{\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n a_n)}\big]\\ &= \sum_{\substack{0\le n_1\le N\\ 0\le n_2\le N\\ n_1\neq n_2}}\sqrt{d_{n_1}d_{n_2}}\Big(\int_{O_{d_{n_1}}(\mathbb{R})}\mathbf{tr}(Pa_{n_1})\,dP\Big)\Big(\int_{O_{d_{n_2}}(\mathbb{R})}\overline{\mathbf{tr}(Pa_{n_2})}\,dP\Big)\\ &\qquad+\sum_{n=0}^{N}d_n\int_{O_{d_n}(\mathbb{R})}|\,\mathbf{tr}(Pa_n)|^2\,dP.\end{aligned}$$

Il nous suffit de prouver pour tout entier $d\in\mathbb{N}^\star$ et pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$:

$$\int_{O_d(\mathbb{R})}\mathbf{tr}(PA)\,dP = 0 \quad\text{et}\quad \int_{O_d(\mathbb{R})}|\,\mathbf{tr}(PA)|^2\,dP = \frac{\mathbf{tr}({}^t\overline{A}A)}{d}.$$

Le cas $d=1$ étant trivial, on suppose $d\geq 2$. La nullité de la première intégrale est claire par le changement de variables $P\mapsto -P$. Pour la seconde intégrale, il suffit de traiter le cas où tous les coefficients de A sont réels. En effet, le cas complexe découle du cas réel en écrivant $A=A_x+iA_y$ avec $A_x, A_y\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. En notant la matrice symétrique $|A|=\sqrt{{}^tAA}$, on peut factoriser $A=P|A|=PQDQ^{-1}$ avec $(P,Q)\in O_d(\mathbb{R})^2$ et D matrice diagonale dont les valeurs propres $\mu_1,\dots,\mu_d$ sont les valeurs singulières de A. Les propriétés d'invariance de la trace et de la mesure de Haar dP simplifient l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{O_d(\mathbb{R})}\mathbf{tr}(PA)^2\,dP &= \int_{O_d(\mathbb{R})}\mathbf{tr}(PD)^2\,dP\\ &= \int_{O_d(\mathbb{R})}(p_{11}\mu_1+\cdots+p_{dd}\mu_d)^2\,dP\\ &= \sum_{i,j=1}^{d}\mu_i\mu_j\int_{O_d(\mathbb{R})}p_{ii}p_{jj}\,dP.\end{aligned}$$

En effectuant les changements de coordonnées $P\mapsto E_{ij}P$ et $P\mapsto PE_{ij}$ où E_{ij} est la matrice orthogonale associée à la permutation qui transpose i et j ainsi que les d changements de coordonnées $P\mapsto\Delta_k P$ où Δ_k est la matrice diagonale

$$\mathrm{Diag}(1,\dots,1,\underbrace{-1}_{k},1,\dots,1),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\forall i\neq j,&\quad \int_{O_d(\mathbb{R})}p_{ii}p_{jj}\,dP=0,\\ \forall i,j,&\quad \int_{O_d(\mathbb{R})}p_{ij}^2\,dP=\int_{O_d(\mathbb{R})}p_{11}^2\,dP.\end{aligned}$$

Par moyenne, la dernière intégrale vaut

$$\frac{1}{d^2}\int_{O_d(\mathbb{R})}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}p_{ij}^2\,dP=\frac{1}{d^2}\int_{O_d(\mathbb{R})}\mathbf{tr}({}^tPP)dP=\frac{1}{d^2}\int_{O_d(\mathbb{R})}\mathbf{tr}(I_d)\,dP=\frac{1}{d}.$$

Cela prouve (41) car $\mathbf{tr}({}^tAA)=\mu_1^2+\cdots+\mu_d^2$. □

Nous avons à présent tous les moyens pour aborder la randomisation de matrices aléatoires plus générales.

Proposition 2.10. *Fixons $q\in[2,+\infty[$ et considérons une suite de matrices aléatoires $M_n:\Omega\to\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes, orthogonalement invariantes et vérifiant l'hypothèse de bornitude des moments*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^q]<+\infty.$$

Il existe une constante universelle $K\geq 1$ telle que, pour toute suite $a_n\in\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$, nous avons

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_na_n)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\leq K\sqrt{q}\left(\sup_{0\leq n\leq N}\mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^q]\right)^{\frac{1}{q}}\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|a_n\|_{\mathrm{HS}}^2}. \tag{42}$$

La même conclusion est valide en supposant que chaque matrice aléatoire M_n est à valeurs dans $\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ et est unitairement invariante.

Démonstration. Fixons $\mathcal{E}_0,\ldots,\mathcal{E}_N$ des matrices aléatoires indépendantes (et indépendantes des matrices aléatoires M_n) qui suivent des lois uniformes dans les groupes orthogonaux de tailles respectives $d_0,\ldots,d_N$. Utilisant la définition 1.7 et les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier (40) et (41), on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_na_n)\right|^q\right]&=\mathbf{E}_{\omega'}\mathbf{E}_{\omega}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n(\omega')M_n(\omega)a_n)\right|^q\right]\\&=\mathbf{E}_{\omega}\mathbf{E}_{\omega'}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n(\omega')M_n(\omega)a_n)\right|^q\right]\\&\leq K^qq^{\frac{q}{2}}\mathbf{E}_{\omega}\left[\mathbf{E}_{\omega'}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n(\omega')M_n(\omega)a_n)\right|^2\right]^{\frac{q}{2}}\right]\\&\leq K^qq^{\frac{q}{2}}\mathbf{E}_{\omega}\left[\left(\sum_{n=0}^{N}\|M_n(\omega)a_n\|_{\mathrm{HS}}^2\right)^{\frac{q}{2}}\right]\\&\leq K^qq^{\frac{q}{2}}\mathbf{E}_{\omega}\left[\left(\sum_{n=0}^{N}\|M_n(\omega)\|_{\mathrm{op}}^2\|a_n\|_{\mathrm{HS}}^2\right)^{\frac{q}{2}}\right].\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire dans $L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ nous amène alors à la conclusion

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n a_n)\right|^q\right] \leq K^q q^{\frac{q}{2}}\left(\sum_{n=0}^{N}\|a_n\|_{\mathrm{HS}}^2\mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^q]^{\frac{2}{q}}\right)^{\frac{q}{2}}$$
$$\leq K^q q^{\frac{q}{2}}\left(\sup_{0\leq n\leq N}\mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^q]\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\|a_n\|_{\mathrm{HS}}^2\right)^{\frac{q}{2}}. \qquad \square$$

Remarque 2.11. Dans le cas particulier $d_n = 1$, c'est-à-dire si les matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont en fait des *variables aléatoires symétriques*, l'inégalité (42) s'écrit pour tout réel $q \in [2, +\infty[$ et tous réels $a_0, \dots, a_N$:

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N} M_n a_n\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq K\sqrt{q}\left(\sup_{0\leq n\leq N}\mathbf{E}[|M_n|^q]\right)^{\frac{1}{q}}\sqrt{\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2}\,.$$

Du fait que la dimension considérée est 1, le principe de symétrisation montrerait que l'inégalité précédente est aussi vraie si les variables aléatoires M_n sont seulement centrées (voir la preuve du lemme B.1).

Voici deux lemmes spécifiques à $L^p(X)$.

Lemme 2.12. *Pour tous réels p et q appartenant à $[1, +\infty[$ et pour toute suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p(X))$, on a*

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n(x))\right\|_{L_x^p(X)}^q\right]^{\frac{1}{q}} \simeq_{p,q} \left\|\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|b_n(x)\|_{\mathrm{HS}}^2}\right\|_{L_x^p(X)}. \tag{43}$$

La même conclusion est valide en remplaçant $(\mathcal{E}_n)_{n\geq 0}$ par $(W_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration. D'après les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier (40), il suffit de traiter le cas $q = p$. Le théorème de Fubini donne alors

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n(x))\right\|_{L_x^p(X)}^p\right] = \int_X \mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n(x))\right|^p\right] d\mu(x).$$

De nouveau, les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier sur $\mathbb{C}$ montrent que l'intégrale précédente est équivalente à la suivante

$$\int_X \mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n(x))\right|^2\right]^{\frac{p}{2}} d\mu(x).$$

L'égalité (41) achève la preuve. $\square$

Lemme 2.13. *Considérons un réel $p \in [1, +\infty[$, un entier $N \in \mathbb{N}$, des matrices aléatoires*

$$M_0 : \Omega \to \mathcal{M}_{d_0}(\mathbb{C}), \dots, M_N : \Omega \to \mathcal{M}_{d_N}(\mathbb{C})$$

et des matrices

$$b_0 \in \mathcal{M}_{d_0}(L^p(X)), \dots, b_N \in \mathcal{M}_{d_N}(L^p(X)).$$

Alors on a l'inégalité :

$\forall q \in [p, +\infty[\cup \{+\infty\}$,

$$\mathbf{E}_\omega\Big[\Big\|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n(\omega)b_n)\Big\|_{L^p(X)}^q\Big]^{\frac{1}{q}} \le \Big\|\mathbf{E}_\omega\Big[\Big|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n(\omega)b_n)\Big|^q\Big]^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p(X)}.$$

Démonstration. Il s'agit de remarquer la continuité de l'injection canonique

$$L^p(X, L^q(\Omega)) \to L^q(\Omega, L^p(X))$$

par interpolation entre $q = p$ et $q = +\infty$. □

À partir de ce point, nous n'aurons besoin d'aucune autre propriété spécifique de l'espace de Banach $L^p(X)$. On obtient facilement le résultat suivant.

Corollaire 2.14. *Considérons $p \in [1, +\infty[$ et une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes, orthogonalement invariantes et vérifiant*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\big[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}\big] < +\infty.$$

Il existe une constante universelle $K \ge 1$ telle que, pour toute suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p(X))$ et tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big\|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)\Big\|_{L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))} \le K\sqrt{p}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\big[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}\big]\Big)^{\frac{1}{\max(2,p)}}\Big[\int_X\Big(\sum_{n=0}^{N}\|b_n(x)\|_{\mathrm{HS}}^2\Big)^{\frac{p}{2}}d\mu(x)\Big]^{\frac{1}{p}}. \quad (44)$$

Par conséquent, si

$$x \mapsto \sum_{n\ge 0}\|b_n(x)\|_{\mathrm{HS}}^2$$

appartient à $L^{p/2}(X)$, alors la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)$ converge dans $L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))$ et presque sûrement dans $L^p(X)$.

La même conclusion est valide en supposant que chaque matrice aléatoire M_n est à valeurs dans $\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ et est unitairement invariante.

Démonstration. L'inégalité (44) découle d'une combinaison du lemme 2.13, l'inégalité (42) avec $q = \max(2, p)$ et de l'inégalité $\sqrt{\max(2, p)} \le \sqrt{2p}$.

Pour obtenir la convergence dans $L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))$ de la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)$, il suffit d'appliquer (44) à ses paquets de Cauchy. Ensuite, la convergence dans $L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))$ implique la convergence en probabilité. Puisque les termes de la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)$ sont indépendants et sont à valeurs dans le sous-espace séparable de $L^p(X)$ engendré par les coefficients des matrices b_n, on en déduit sa convergence presque sûre (voir [Ledoux et Talagrand 1991, Theorem 6.1] ou [Li et Queffélec 2004, théorème II.3]). □

Remarque 2.15. On peut reformuler l'inégalité (44) à l'aide de (43) :

$$\Big\| \sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n) \Big\|_{L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))} \leq C(p) \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\big[\| M_n \|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)} \big] \Big)^{\frac{1}{\max(2,p)}} \Big\| \sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n) \Big\|_{L^{\max(2,p)}(\Omega, L^p(X))}.$$

Cette inégalité a la même forme que celle qui apparaît à la fin de la démonstration de [Maurey et Pisier 1976, page 69]. Il est donc légitime de croire qu'une démonstration avec un théorème de factorisation est possible.

Rappelons maintenant un principe de contraction pour les variables $\mathcal{E}_n$ et W_n obtenu par Marcus et Pisier.

Théorème 2.16. *Fixons un espace de Banach complexe B, un réel $q \in [1, +\infty[$, une suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$ et une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes et orthogonalement invariantes. Alors on a*

$$\Big(\inf_{0\leq n\leq N} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) \Big) \mathbf{E}\Big[\Big\| \sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n) \Big\|_B^q \Big]^{\frac{1}{q}} \leq \mathbf{E}\Big[\Big\| \sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n) \Big\|_B^q \Big]^{\frac{1}{q}}. \tag{45}$$

Une inégalité similaire est valide en remplaçant $\mathcal{E}_n$ par W_n, $\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ par $\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ et l'invariance orthogonale par l'invariance unitaire.

Démonstration. On consultera [Marcus et Pisier 1981, page 82, Proposition 2.1, (2.7)] avec le terme $\|\mathbf{E}[|M_n|]^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1} = \sigma(\mathbf{E}[|M_n|])$. ☐

Le résultat précédent semble suggérer qu'une minoration uniforme de la forme $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0$ et la convergence presque sûre de la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ impliquent celle de $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)$. En fait, il est aisé de construire un contre-exemple dans le cas plus simple, à savoir $d_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{R}$. Pour cela, considérons une suite indépendante de variables aléatoires symétriques $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $n \geq 1$, telle que la loi de X_n est

$$\frac{\delta_{-n^2}}{2n^2} + \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)\delta_0 + \frac{\delta_{n^2}}{2n^2}.$$

On a une concentration en 0 au sens suivant : il existe une constante $C > 1$ telle que

$$\boldsymbol{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad \boldsymbol{P}[|X_n| \geq 1] = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbf{E}[|X_n|] \in \Big[\frac{1}{C}, C\Big].$$

Le lemme de Borel–Cantelli assure que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))$ stationne en 0, donc la série aléatoire $\sum X_n$ converge presque sûrement tandis que la série aléatoire $\sum \varepsilon_n$ diverge toujours. Cet exemple élémentaire montre qu'il faut nécessairement imposer des conditions supplémentaires sur les matrices aléatoires M_n pour obtenir la convergence presque sûre de la série aléatoire $\sum \mathbf{tr} \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)$ (voir par exemple [Jain et Marcus 1975, Part 5 ; Imekraz et al. 2016, Theorem 5.2] dans le cas unidimensionnel). Un défaut du contre-exemple précédent est l'explosion des moments d'ordre strictement plus grand que 1. Cela nous mène à la proposition suivante dont l'inspiration vient de la preuve de [Marcus et Pisier 1981, page 55, Lemma 1.2]. Cet ouvrage examine la situation d'un espace de Banach de la forme $\mathcal{C}^0(K)$, où K est compact d'un groupe localement compact, à la place de $L^p(X)$. L'idée de la preuve se résume simplement : nous allons majorer les moments d'ordre 2 des sommes partielles de la série $\sum \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)$ par leurs moments d'ordre 1 (ce qui inverse l'ordre naturel), puis la bornitude presque sûre impliquera que les moments d'ordre 1 et 2 sont uniformément bornés. Par comparaison avec les variables aléatoires $\mathcal{E}_n$, nous obtiendrons la conclusion.

Proposition 2.17. *Fixons $p \in [1, +\infty[$ et une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes, orthogonalement invariantes et vérifiant*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \textit{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\big[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}\big] < +\infty.$$

Pour toute suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p(X))$, si la série aléatoire $\sum \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)$ est bornée en probabilité dans $L^p(X)$, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{N\in\mathbb{N}} \boldsymbol{P}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)\right\|_{L^p(X)} > t\right] = 0, \tag{46}$$

alors

$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|b_n(x)\|_{\mathrm{HS}}^2} \in L_x^p(X).$$

De nouveau, la même conclusion est valide en supposant que chaque matrice aléatoire M_n est à valeurs dans $\mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ et est unitairement invariante.

Démonstration. Posons pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n).$$

En outre, on considère $c > 1$ de sorte que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{c} \le \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^{\max(2,p)}\big] \le c.$$

Le principe de contraction (théorème 2.16) et les inégalités (43) montrent qu'il existe une constante $C(p,c) > 1$ telle que

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n(x))\right\|_{L_x^p(X)}\right] \le \mathbf{E}[\|S_N\|_{L^p(X)}],$$

$$\frac{1}{C(p,c)}\left\|\sqrt{\sum_{n=0}^{N} \|b_n(x)\|_{\mathrm{HS}}^2}\right\|_{L_x^p(X)} \le \mathbf{E}[\|S_N\|_{L^p(X)}]. \tag{47}$$

Majorons maintenant les moments d'ordre 2. En invoquant (44) et quitte à augmenter $C(p,c)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\|S_N\|^2_{L^p(X)}]^{\frac{1}{2}} &\le \mathbf{E}\big[\|S_N\|^{\max(2,p)}_{L^p(X)}\big]^{\frac{1}{\max(2,p)}}\\ &\le C(p,c)\left\|\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|b_n(x)\|^2_{\mathrm{HS}}}\right\|_{L^p_x(X)}\\ &\le C(p,c)^2\mathbf{E}[\|S_N\|_{L^p(X)}].\end{aligned}$$

Il s'agit de l'inégalité d'inversion des moments que nous cherchions. Utilisons l'inégalité de Paley–Zygmund [Kahane 1985, page 8, Inequality II] pour obtenir

$$\boldsymbol{P}\big[\|S_N\|_{L^p(X)} \ge \tfrac{1}{2}\mathbf{E}[\|S_N\|_{L^p(X)}]\big] \ge \frac{\mathbf{E}[\|S_N\|_{L^p(X)}]^2}{4\mathbf{E}[\|S_N\|^2_{L^p(X)}]} \ge \frac{1}{4C(p,c)^4}. \tag{48}$$

D'après (46), il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4C(p,c)^4} > \boldsymbol{P}\big[\|S_N\|_{L^p(X)} \ge A\big].$$

Or (48) force chaque moment $\mathbf{E}[\|S_N\|_{L^p(X)}]$ à être majoré par $2A$. La conclusion découle en examinant (47). $\square$

La preuve du théorème 2.1 est obtenue en combinant tous les arguments précédents. En effet, on vérifie les implications (i) $\Rightarrow$ (iii) et (iv) $\Rightarrow$ (i) grâce au corollaire 2.14 et à la proposition 2.17. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) a été vue au cours de la preuve du corollaire 2.14. Quant à l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv), elle est vraie en toute généralité.

2D. ***Randomisation dans un treillis de Banach de cotype fini et preuve du théorème 1.9.*** On explique comment les arguments développés dans la partie 2C s'étendent pour les treillis de Banach (pour cette notion, on se réfère au livre [Lindenstrauss et Tzafriri 1973]). Par souci de simplicité, on ne considérera que des espaces de Banach sur le corps des réels. Il est en fait possible de *complexifier* un treillis de Banach afin de déduire des résultats complexes à partir de résultats réels (voir [Lindenstrauss et Tzafriri 1973, page 43]). On notera $\le$, $\vee$ et $|\cdot|$ respectivement la relation d'ordre, la borne supérieure et la valeur absolue. Pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, on notera aussi $\overline{\mathcal{H}_N}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues et 1-homogènes sur $\mathbb{R}^N$ ainsi que les projections sur les coordonnées :

$$\phi_i : (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N \mapsto t_i \in \mathbb{R}.$$

On notera que $\overline{\mathcal{H}_N}$ est un treillis. Le théorème suivant assure l'existence d'un calcul fonctionnel dans un treillis de Banach basé sur $\overline{\mathcal{H}_N}$ (voir [Lindenstrauss et Tzafriri 1973, Theorem 1d1]).

Théorème 2.18. *Soit B un treillis de Banach et fixons $f_1, \dots, f_N$ des éléments de B. Il existe une unique application linéaire*

$$\tau : \overline{\mathcal{H}_N} \to B, \quad F \mapsto F(f_1, \dots, f_N)$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\phi_i(f_1, \dots, f_N) = f_i$ *pour tout entier* $i \in [1, N]$,

(ii) τ *est un morphisme de treillis* (*i.e.*, *conserve positivité*, *borne supérieure*, *borne inférieure et valeur absolue*).

Dans ce cas, *en notant* $f = |f_1| \vee \cdots \vee |f_N|$, *on a l'estimation de continuité*

$$\|F(f_1, \dots, f_N)\|_B \leq \|f\|_B \sup_{\|t\|_\infty \leq 1} |F(t_1, \dots, t_N)|. \tag{49}$$

Rappelons maintenant la définition suivante.

Définition 2.19. Un treillis de Banach B est q-concave, avec $q \in [1, +\infty[$, s'il existe un réel $M_{(q)}(B) > 0$ tel que l'on a l'inégalité suivante pour tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ et tout élément $(f_1, \dots, f_N) \in B^N$:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_B^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq M_{(q)}(B) \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_B, \tag{50}$$

où le terme $\left(\sum_{i=1}^{N} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \in B$ est défini par calcul fonctionnel.

La notion de q-concavité est reliée à celle de cotype comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2.20 [Lindenstrauss et Tzafriri 1973, Proposition 1f3, Corollary 1f9]. *Soient* B *un treillis de Banach et un réel* $q \in [2, +\infty[$, *on a*

(i) *si* B *est* q*-concave*, *alors* B *est de cotype* q,

(ii) *si* B *est de cotype* $q \in [2, +\infty[$ *alors* B *est* $(q + \varepsilon)$*-concave pour tout* $\varepsilon \in]0, +\infty[$.

Par conséquent, *on a*

$$\inf\{q \geq 2 \mid B \text{ est } q\text{-concave}\} = \inf\{q \geq 2 \mid B \text{ est de cotype } q\}. \tag{51}$$

On vérifie que $L^p(\mathbb{R})$ est q-concave si $1 \leq p \leq q$ (il s'agit d'interpoler l'injection canonique $L^p(\mathbb{R}, \ell^q(\mathbb{N})) \to \ell^q(\mathbb{N}, L^p(\mathbb{R}))$ entre $q = p$ et $q = \infty$) et la borne inférieure (51) vaut $\max(2, p)$. Un autre exemple intéressant est fourni par les espaces de Lorentz $L^{p,1}(\mathbb{R})$ (voir les calculs exacts dans [Creekmore 1981]).

Pour ce qui nous concerne, la proposition précédente est le point crucial qui permet de s'émanciper de la randomisation unidimensionnelle. En effet la définition de la q-concavité ne fait pas intervenir de variables aléatoires de Bernoulli (contrairement à la définition du cotype (19)). Nous disposons maintenant du vocabulaire adéquat pour énoncer une version multidimensionnelle et quantitative du théorème de Maurey–Pisier dans la catégorie des treillis de Banach. De façon précise, le théorème ci-dessous généralise le théorème 2.1 et implique le théorème 1.9.

Théorème 2.21. *Considérons un treillis de Banach* B q*-concave avec* $q \in [2, +\infty[$, *une suite d'entiers non nuls* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite de matrices* $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$, *et une suite de matrices aléatoires* $M_n : \Omega \to \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ *indépendantes*, *orthogonalement invariantes et vérifiant*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \textit{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}[\|M_n\|_{\mathrm{op}}^q] < +\infty.$$

Alors on a l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) *les normes* $\left\| \sqrt{\sum_{n=0}^{N} \|b_n\|_{\mathrm{HS}}^2} \right\|_B$ *sont majorées indépendamment de* $N \in \mathbb{N}$,

(ii) *la série aléatoire* $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ *converge presque sûrement dans* B,

(iii) *la série aléatoire* $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ *converge dans* $L^q(\Omega, B)$,

(iv) *la série aléatoire* $\sum \sqrt{d_n}\, \mathbf{tr}(M_n b_n)$ *est bornée en probabilité dans* B.

Pour prouver le théorème 2.21, nous aurons besoin du lemme suivant. L'inégalité (53) ci-dessous est seulement une version généralisée de (50).

Lemme 2.22. *Considérons des variables aléatoires* $X_1, \dots, X_N$ *appartenant à* $L^1(\Omega)$ *et des éléments* $f_1, \dots, f_N$ *d'un treillis de Banach* B. *Alors on a "l'inégalité triangulaire" :*

$$\left\| \mathbf{E}_\omega \left[\left| \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega) f_n \right| \right] \right\|_B \leq \mathbf{E}_\omega \left[\left\| \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega) f_n \right\|_B \right]. \tag{52}$$

S'il existe un réel $q \in [1, +\infty[$ *tel que* B *soit* q*-concave et que les variables aléatoires* $X_1, \dots, X_N$ *appartiennent à* $L^q(\Omega)$, *alors on a aussi*

$$\mathbf{E}_\omega \left[\left\| \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega) f_n \right\|_B^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq M_{(q)}(B) \left\| \mathbf{E}_\omega \left[\left| \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega) f_n \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\|_B, \tag{53}$$

où les espérances dans le membre gauche de (52) *et dans le membre droit de* (53) *sont définies par calcul fonctionnel sur les* N *variables* $f_1, \dots, f_N$.

Démonstration. On commence par (53). Pour tout entier $n \in [1, N]$, on note $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires qui prend un nombre fini de valeurs et qui converge dans $L^q(\Omega)$ vers X_n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe donc une partition finie

$$\Omega = \bigsqcup_{\ell=1}^{L} \Omega_{k,\ell}$$

en parties mesurables telle que chaque variable aléatoire $X_{n,k}$ prend une valeur fixe, disons $x_{n,k,\ell}$, sur $\Omega_{k,\ell}$. La q-concavité de B nous donne alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega \left[\left\| \sum_{n=1}^{N} X_{n,k}(\omega) f_n \right\|_B^q \right]^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{\ell=1}^{L} \boldsymbol{P}(\Omega_{k,\ell}) \left\| \sum_{n=1}^{N} x_{n,k,\ell} f_n \right\|_B^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq M_{(q)}(B) \left\| \left(\sum_{\ell=1}^{L} \boldsymbol{P}(\Omega_{k,\ell}) \left| \sum_{n=1}^{N} x_{n,k,\ell} f_n \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_B. \end{aligned}$$

Or on a évidemment pour tout $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\left(\sum_{\ell=1}^{L} \boldsymbol{P}(\Omega_{k,\ell}) \left| \sum_{n=1}^{N} x_{n,k,\ell} t_n \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \mathbf{E}\left[\left| \sum_{n=1}^{N} X_{n,k} t_n \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{54}$$

Si k tend vers $+\infty$, l'expression précédente converge uniformément, en tant que fonction de $(t_1, \ldots, t_N)$, sur chaque compact de $\mathbb{R}^N$ vers

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=1}^{N} X_n t_n\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Le calcul fonctionnel du théorème 2.18 assure que l'égalité (54) est encore valide en substituant $(f_1, \ldots, f_N)$ à $(t_1, \ldots, t_N)$, ce qui nous donne

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=1}^{N} X_{n,k} f_n\right\|_B^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq M_{(q)}(B)\left\|\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=1}^{N} X_{n,k} f_n\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_B. \tag{55}$$

L'estimation (49) de continuité du calcul fonctionnel assure aussi que le membre droit de (55) tend vers

$$M_{(q)}(B)\left\|\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=1}^{N} X_n f_n\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_B.$$

Enfin, il est clair que le membre gauche de (55) tend vers le membre gauche de (53). Pour démontrer (52), on refait la même démarche de densité dans $L^1(\Omega)$ à l'aide de l'inégalité triangulaire dans B :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega\left[\left\|\sum_{n=1}^{N} X_{n,k}(\omega) f_n\right\|_B\right] &= \sum_{\ell=1}^{L} \boldsymbol{P}(\Omega_{k,\ell})\left\|\sum_{n=1}^{N} x_{n,k,\ell} f_n\right\|_B \\ &\geq \left\|\sum_{\ell=1}^{L} \boldsymbol{P}(\Omega_{k,\ell})\left|\sum_{n=1}^{N} x_{n,k,\ell} f_n\right|\right\|_B. \end{aligned}$$ □

Corollaire 2.23. *Considérons des matrices aléatoires $M_0 : \Omega \to \mathcal{M}_{d_0}(\mathbb{R}), \ldots, M_N : \Omega \to \mathcal{M}_{d_N}(\mathbb{R})$ dont les coefficients appartiennent à $L^1(\Omega)$ et des matrices $b_0 \in \mathcal{M}_{d_0}(B), \ldots, b_N \in \mathcal{M}_{d_N}(B)$ dont les coefficients appartiennent à un treillis de Banach B. Alors on a l'inégalité :*

$$\left\|\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)\right|\right]\right\|_B \leq \mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)\right\|_B\right].$$

S'il existe de plus un réel $q \in [1, +\infty[$ tel que B soit q-concave et tel que les coefficients des matrices aléatoires $M_0, \ldots, M_N$ appartiennent à $L^q(\Omega)$, alors on a

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)\right\|_B^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq M_{(q)}(B)\left\|\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N} \sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(M_n b_n)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\|_B.$$

Il nous reste à remarquer que les inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier permettent d'étendre le théorème de Maurey [Lindenstrauss et Tzafriri 1973, Theorem 1.d.6 i)] au cas multidimensionnel.

Théorème 2.24. *Soit B un treillis de Banach q-concave, avec $q \in [2, +\infty[$ et considérons une suite de matrices $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$. Alors, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$\frac{1}{K_{2,1}}\left\|\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|b_n\|_{\mathrm{HS}}^2}\right\|_B \leq \mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)\right\|_B\right] \leq M_{(q)}(B)K_{q,2}\left\|\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|b_n\|_{\mathrm{HS}}^2}\right\|_B, \tag{56}$$

où l'élément $\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|b_n\|_{\mathrm{HS}}^2} \in B$ est défini par calcul fonctionnel.

Démonstration. La minoration est vraie sans hypothèse de q-concavité. La version scalaire des inégalités de Kahane–Khintchine–Marcus–Pisier (voir (40) et (41)) rend triviale l'inégalité suivante si les matrices b_n sont à coefficients réels

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\|b_n\|_{\mathrm{HS}}^2} \leq K_{2,1}\mathbf{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\sqrt{d_n}\,\mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n)\right|\right].$$

L'inégalité précédente s'étend par calcul fonctionnel si les coefficients des matrices b_n sont à coefficients dans B. La minoration de (56) découle alors du corollaire 2.23. On raisonne de même pour la majoration. □

Le corollaire 2.23 et le théorème 2.24 nous permettent de prouver le théorème 2.21. Il s'agit de reprendre mutatis mutandis les arguments de la partie 2C à partir du lemme 2.12.

2E. *Preuves des théorèmes 2.5 et 2.6, partie I : Rétracte d'un espace de Banach.* On conviendra que les éléments de $E_n \subset L^2(X)$ sont des fonctions de la variable $y \in X$ et l'on préférera les deux écritures

$$L^2(X) \to L^2_y(X) \quad \text{et} \quad \mathbf{PL}^p\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big) \to \mathbf{PL}^p_y\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big).$$

Il sera aussi commode de définir l'espace de Hilbert abstrait $\oplus E_n$, c'est-à-dire que l'on pose

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n, \quad \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\oplus E_n} := \left(\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(y)|^2\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concernant l'espace de Bochner–Lebesgue, on conservera la lettre $x \in X$ pour écrire $L^p_x\big(X, \bigoplus E_n\big)$ au lieu de $L^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$. La définition 2.3 dit exactement que l'opérateur linéaire suivant est isométrique

$$S_p : \mathbf{PL}^p_y\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big) \to L^p_x\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big), \quad (u_n(y))_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}u_n(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{57}$$

Le résultat suivant est facile.

Proposition 2.25. *L'espace $\mathbf{PL}^p_y\big(X, \bigoplus E_n\big)$ est complet.*

Démonstration. Il s'agit de prouver que l'image de l'opérateur (57) est un sous-espace fermé de $L^p_x\big(X, \bigoplus E_n\big)$. Remarquons d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la continuité du projecteur

$$L^p_x\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big) \to L^p_x(X, L^2_y(X)), \quad (w_n(x, y))_{n\in\mathbb{N}} \mapsto w_k(x, y).$$

Il suffit donc de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{\sqrt{e_n(x)}u_n(y) \mid u_n \in E_n\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p_x(X, L^2_y(X))$. L'hypothèse $E_n \subset L^p(X)$ de la définition 2.3 signifie précisément que $\sqrt{e_n(x)}$ appartient à $L^p_x(X)$. Soit $\big(\sqrt{e_n(x)}u_{n,\ell}(y)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $L^p_x(X, L^2_y(X))$ (avec $u_{n,\ell} \in E_n$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$). En particulier, $(u_{n,\ell}(y))_{\ell\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $E_n \subset L^2_y(X)$:

$$\|u_{n,\ell}(y) - u_{n,\ell'}(y)\|_{L^2_y(X)} = \frac{1}{\big\|\sqrt{e_n(x)}\big\|_{L^p_x}} \big\|\sqrt{e_n(x)}(u_{n,\ell}(y) - u_{n,\ell'}(y))\big\|_{L^p_x(X, L^2_y(X))}.$$

On déduit que $(u_{n,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(X)$ vers une fonction $u_{n,\infty} \in L^2(X)$ et bien entendu que l'on a $u_{n,\infty} \in E_n$ (car E_n est de dimension finie). Il est alors immédiat que $\big(\sqrt{e_n(x)}u_{n,\ell}(y)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{e_n(x)}u_{n,\infty}(y)$ dans $L^p_x(X, L^2_y(X))$. □

Commençons par les points faciles ayant trait à la dualité et l'interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$.

Dualité. Rappelons que l'on note $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p. On montre facilement l'inégalité (38) pour tout $(u, w) \in \mathbf{PL}^p_y\big(X, \bigoplus E_n\big) \times \mathbf{PL}^q_y\big(X, \bigoplus E_n\big)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} |\langle u_n, w_n\rangle_{L^2(X)}| &= \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e_n(x)}{d_n} |\langle u_n, w_n\rangle_{L^2(X)}|\, d\mu(x)\\ &\leq \int_X \sqrt{\sum_{n\geq 0} \frac{e_n(x)}{d_n}\|u_n(y)\|^2_{L^2_y(X)}}\sqrt{\sum_{n\geq 0} \frac{e_n(x)}{d_n}\|w_n(y)\|^2_{L^2_y(X)}}\, d\mu(x)\\ &\leq \|u\|_{\mathbf{PL}^p(X,\bigoplus E_n)}\|w\|_{\mathbf{PL}^q(X,\bigoplus E_n)}.\end{aligned}$$

L'injection canonique $\Lambda_p : \mathbf{PL}^q_y\big(X, \bigoplus E_n\big) \to \mathbf{PL}^p_y\big(X, \bigoplus E_n\big)'$, définie dans l'énoncé du théorème 2.6, est donc continue.

Interpolation. Rappelons que les espaces $\mathbf{PL}^p_y\big(X, \bigoplus E_n\big)$ et leurs interpolés complexes et réels peuvent être vus comme des sous-espaces de $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. En outre, on a le résultat suivant [Triebel 1978, Part 1.18.4].

Théorème 2.26. *Considérons deux espaces de Banach complexes B_1 et B_2 ainsi que des réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $[1, +\infty[$. En notant $\theta \in]0, 1[$ le réel qui vérifie $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$, on a*

$$\big[L^{p_1}(X, B_1), L^{p_2}(X, B_2)\big]_\theta = L^p(X, [B_1, B_2]_\theta).$$

Si un opérateur linéaire T borné de $L^{p_1}(X, B_1)$ dans lui-même et de $L^{p_2}(X, B_2)$ dans lui-même alors il est aussi borné de $L^p(X, [B_1, B_2]_\theta)$ dans lui-même. Le même énoncé est valide en remplaçant la méthode d'interpolation complexe $[\cdot,\cdot]_\theta$ par la méthode d'interpolation réelle $[\cdot,\cdot]_{\theta,p}$.

Avec les notations du théorème précédent, on peut interpoler l'application (57) et assurer que l'opérateur

$$\big[\mathbf{PL}^{p_1}_y\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big), \mathbf{PL}^{p_2}_y\big(X, \bigoplus E_n\big)\big]_\theta \to L^p_x\big(X, \bigoplus E_n\big), \quad (u_n(y))_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}u_n(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est borné. Cela implique l'inclusion continue

$$\big[\mathbf{PL}^{p_1}_y\big(X, \textstyle\bigoplus E_n\big), \mathbf{PL}^{p_2}_y\big(X, \bigoplus E_n\big)\big]_\theta \subset \mathbf{PL}^p_y\big(X, \bigoplus E_n\big). \tag{58}$$

Vers la notion de rétracte d'un espace de Banach. Cependant, il ne paraît pas évident d'aller plus loin dans les deux analyses précédentes, c'est-à-dire de prouver que $\Lambda_p : \mathbf{PL}^q_y\big(X, \bigoplus E_n\big) \to \mathbf{PL}^p_y\big(X, \bigoplus E_n\big)'$ est surjective et que l'inclusion (58) est une égalité. La notion de rétracte d'un espace de Banach permet de reformuler la question.

Définition 2.27. Soient A et B deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés, on dit que A est un rétracte de B s'il existe deux applications linéaires bornées $S : A \to B$ et $R : B \to A$ telles que $RS = \mathrm{id}_A$.

Dans la définition précédente, il faut imaginer que B est un espace de référence qui est bien compris et A un sous-espace que l'on veut analyser. Le prototype de rétracte qu'il faut avoir à l'esprit est le cas où A est un sous-espace complémenté de B, c'est-à-dire image d'un projecteur borné, l'application S est alors l'application identité et R un projecteur de B sur A. En effet, on vérifie facilement le résultat suivant.

Proposition 2.28. *Avec les mêmes notations que dans la définition 2.27, on a :*

(i) *$SR : B \to B$ est un projecteur borné, son espace image est égal à $S(A)$ et est fermé.*

(ii) *S est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés de A sur $S(A) \subset B$:*

$$\forall a \in A, \qquad \frac{1}{\|R\|_{B\to A}} \|a\|_A \le \|S(a)\|_B \le \|S\|_{A\to B} \|a\|_A.$$

(iii) *Si B est complet alors A l'est aussi.*

En ce qui concerne la dualité, on a le corollaire facile.

Corollaire 2.29. *Avec les mêmes notations que dans la définition 2.27, si l'on note les applications duales (ou applications transposées) de S et R :*

$$\begin{aligned} {}^tS &: B' \to A', \quad \phi \mapsto \phi \circ S, \\ {}^tR &: A' \to B', \quad \psi \mapsto \psi \circ R, \end{aligned}$$

alors on a ${}^tS\,{}^tR = \mathrm{id}_{A'}$. Cela signifie que l'espace dual A' est un rétracte de B' et en particulier que ${}^tR$ est un isomorphisme de A' sur l'image du projecteur ${}^tR\,{}^tS = {}^t(SR) : B' \to B'$.

En ce qui concerne l'interpolation réelle ou complexe, la réponse est donnée par le résultat suivant.

Corollaire 2.30 [Triebel 1978, page 22, Theorem 1.2.4].. *On note $[\cdot,\cdot]$ une méthode d'interpolation. Soient (A_1, A_2) et (B_1, B_2) deux couples d'interpolation d'espaces de Banach, on suppose qu'il existe un opérateur linéaire borné $S : A_1 \to B_1$ et $S : A_2 \to B_2$ et un opérateur linéaire borné $R : B_1 \to A_1$ et $R : B_2 \to A_2$ qui satisfont :*

$$\forall a \in A_1 + A_2, \qquad RS(a) = a.$$

Alors SR est un projecteur borné de l'espace interpolé $[B_1, B_2]$ et S réalise un isomorphisme d'espaces de Banach de l'espace interpolé $[A_1, A_2]$ sur $SR([B_1, B_2])$.

Démonstration. C'est immédiat puisque l'espace de Banach $[A_1, A_2]$ est un rétracte de $[B_1, B_2]$ par l'intermédiaire des opérateurs bornés $S : [A_1, A_2] \to [B_1, B_2]$ et $R : [B_1, B_2] \to [A_1, A_2]$. □

Pour comprendre les espaces duaux et interpolés des espaces $\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)$, il suffit d'étudier si $\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)$ est un rétracte de l'espace de Banach $L_x^p(X, \bigoplus E_n)$ par le biais de l'application S_p définie en (57) si p parcourt $]p_1, p_2[$ pour les théorèmes 2.5 et 2.6. En d'autres termes, on cherche un opérateur borné

$$R_p : L_x^p(X, \bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)$$

tel que $R_p S_p = \mathrm{id}_{\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)}$.

Stratégie pour le théorème 2.6 de dualité. Puisque les fonctions $\frac{1}{d_n} e_n$ sont des densités de probabilité sur X, nous avons un candidat très naturel pour l'opérateur R_p. En effet, posons :

$$R_p : L_x^p(X, \bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n), \quad (u_n(x, y))_{n \geq 0} \mapsto \left(\int_X u_n(x', y) \frac{\sqrt{e_n(x')}}{\sqrt{d_n}} \, d\mu(x') \right)_{n \geq 0}. \tag{59}$$

D'après la définition (57), on a bien formellement $R_p S_p = \mathrm{id}_{\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)}$. Malheureusement, nous ne voyons aucune raison triviale assurant que R_p arrive bien dans $\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)$! Puisque S_p est une isométrie, la bornitude de R_p équivaut à la bornitude du projecteur

$$\begin{aligned} &S_p R_p : L_x^p(X, \bigoplus E_n) \to L_x^p(X, \bigoplus E_n), \\ &\quad (u_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}} \int_X u_n(x', y) \frac{\sqrt{e_n(x')}}{\sqrt{d_n}} \, d\mu(x') \right)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned} \tag{60}$$

Par souci pédagogique, permettons-nous de considérer comme exemple le cas unidimensionnel :

$$d_n = 1, \quad e_n(x) = |\phi_n(x)|^2, \quad E_n = \mathbb{C}\phi_n, \quad \int_X |\phi_n(x)|^2 d\mu(x) = 1.$$

Dans ce cas, un élément de $L_x^p(X, \bigoplus E_n)$ est de la forme $(u_n(x)\phi_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ et il est donc évident que $L_x^p(X, \bigoplus E_n)$ s'identifie à $L_x^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$ par le biais de l'isométrie

$$L_x^p(X, \bigoplus E_n) \to L_x^p(X, \ell^2(\mathbb{N})), \quad (u_n(x)\phi_n(y))_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Par conséquent, la bornitude du projecteur $S_p R_p$ équivaut à celle du projecteur

$$L_x^p(X, \ell^2(\mathbb{N})) \to L_x^p(X, \ell^2(\mathbb{N})), \quad (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(|\phi_n(x)| \int_X u_n(x') |\phi_n(x')| d\mu(x') \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Revenons au cas général et rappelons que sous les hypothèses du théorème 2.6 de dualité, p_1 et p_2 sont supposés être deux exposants conjugués. La bornitude du projecteur $S_p R_p$ sera prouvée dans la partie 2H pour tout $p \in]p_1, p_2[$ grâce à (35) et (37). La proposition suivante achèvera la preuve du théorème 2.6 de dualité et explique pourquoi la notion de rétracte est la bonne notion pour aborder la dualité des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \bigoplus E_n)$.

Proposition 2.31. *Fixons $p \in]1, +\infty[$ et posons $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\sqrt{e_n}$ appartient à $L^p(X) \cap L^q(X)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'injection canonique $\Lambda_p : \mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)'$ est surjective,*

(ii) *l'injection canonique $\Lambda_q : \mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n)'$ est surjective,*

(iii) *l'injection canonique* $\Lambda_p : \mathbf{PL}^q_y(X, \bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}^p_y(X, \bigoplus E_n)'$ *est un isomorphisme d'espaces de Banach,*

(iv) *l'injection canonique* $\Lambda_q : \mathbf{PL}^p_y(X, \bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}^q_y(X, \bigoplus E_n)'$ *est un isomorphisme d'espaces de Banach,*

(v) *le projecteur* $S_p R_p$ *est borné sur* $L^p_x(X, \bigoplus E_n)$,

(vi) *le projecteur* $S_q R_q$ *est borné sur* $L^q_x(X, \bigoplus E_n)$.

Les assertions précédentes impliquent les assertions suivantes

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}} \right\|_{L^p(X)} \left\| \frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}} \right\|_{L(^q(X)} < +\infty. \tag{61}$$

$$\|S_p R_p\| = \|S_q R_q\| = \|R_p\| = \|R_q\| = \|\Lambda_p^{-1}\| = \|\Lambda_q^{-1}\| \in [1, +\infty[. \tag{62}$$

Démonstration. Preuve de (61) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe $\phi \in E_n$ vérifiant $\|\phi\|_{L^2_y(X)} = 1$ et l'on note

$$u(x, y) = \Big(0, \dots, 0, \underbrace{\sqrt{e_n(x)}^{q-1}\phi(y)}_{n}, 0, \dots\Big) \in L^p_x(X, \bigoplus E_n).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\|S_p R_p u\|_{L^p(X, \bigoplus E_n)} &\le \|S_p R_p\| \times \|u\|_{L^p(X, \bigoplus E_n)} \\
\left\| \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}} \right\|_{L^p_x(X)} \times \left| \int_X \frac{\sqrt{e_n(x')}^q}{\sqrt{d_n}}\, d\mu(x') \right| &\le \|S_p R_p\| \times \left\| \sqrt{e_n(x)}^{q-1} \right\|_{L^p_x(X)} \\
\left\| \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}} \right\|_{L^p_x(X)} \times \frac{1}{\sqrt{d_n}} \left\| \sqrt{e_n(x)} \right\|^q_{L^q_x(X)} &\le \|S_p R_p\| \times \left\| \sqrt{e_n(x)} \right\|^{q-1}_{L^q_x(X)} \\
\left\| \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}} \right\|_{L^p_x(X)} \left\| \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}} \right\|_{L^q_x(X)} &\le \|S_p R_p\|.
\end{aligned}$$

Équivalence des propriétés (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) : i) $\Leftrightarrow$ (iii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Cela découle du théorème de l'application ouverte pour des bijections linéaires continues entre espaces de Banach.

v) $\Leftrightarrow$ (vi). Puisque $\bigoplus E_n$ est un espace de Hilbert, les espaces de Bochner–Lebesgue $L^p_x(X, \bigoplus E_n)$ et $L^q_x(X, \bigoplus E_n)$ sont duaux l'un de l'autre et la dualité naturelle est donnée par

$$\forall (u, w) \in L^p_x(X, \bigoplus E_n) \times L^q_x(X, \bigoplus E_n), \quad \langle u, w \rangle := \int_X \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X u_n(x, y) w_n(x, y)\, d\mu(y) \right] d\mu(x).$$

Or l'on a

$$\begin{aligned}
\int_X \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |u_n(x, y)|\, |w_n(x, y)|\, d\mu(y) \right] d\mu(x) &\le \int_X \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(x, y)\|_{L^2_y(X)} \|w_n(x, y)\|_{L^2_y(X)} \right] d\mu(x) \\
&\le \|u\|_{L^p_x(X, \bigoplus E_n)} \|w\|_{L^q_x(X, \bigoplus E_n)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini assure que la dualité naturelle s'écrit aussi

$$\langle u, w\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{X\times X} u_n(x,y) w_n(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

La définition (60) nous permet alors d'écrire

$$\langle S_p R_p u, w\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{d_n} \int_{X\times X} \left[\sqrt{e_n(x)} \int_X u_n(x', y)\sqrt{e_n(x')}\, d\mu(x')\right] w_n(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Remarquons maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration triviale de

$$\iiint_{X^3} \sqrt{e_n(x)} |w_n(x,y)| \sqrt{e_n(x')} |u_n(x', y)|\, d\mu(x)\, d\mu(x')\, d\mu(y)$$

par

$$\begin{aligned}
&\left(\int_X \sqrt{e_n(x)} \|w_n(x,y)\|_{L^2_y(X)} d\mu(x)\right) \times \left(\int_X \sqrt{e_n(x')} \|u_n(x',y)\|_{L^2_y(X)}\, d\mu(x')\right) \\
&\qquad \leq \left\|\sqrt{e_n(x)}\right\|_{L^p_x(X)} \|w_n(x,y)\|_{L^q_x(X, L^2_y(X))} \times \left\|\sqrt{e_n(x')}\right\|_{L^q_{x'}(X)} \|u_n(x',y)\|_{L^p_{x'}(X, L^2_y(X))} \\
&\qquad \leq \left\|\sqrt{e_n(x)}\right\|_{L^p_x(X)} \|w\|_{L^q_x(X, \bigoplus E_n)} \left\|\sqrt{e_n(x')}\right\|_{L^q_{x'}(X)} \|u\|_{L^p_x(X, \bigoplus E_n)} \\
&\qquad < +\infty.
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini nous permet donc d'intervertir x et x' pour obtenir

$$\begin{aligned}
\langle S_p R_p u, w\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{d_n} \int_{X\times X} \left[\sqrt{e_n(x)} \int_X w_n(x', y)\sqrt{e_n(x')} d\mu(x')\right] u_n(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\
&= \langle u, S_q R_q w\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_p R_p$ et $S_q R_q$ sont adjoints l'un de l'autre. La continuité de l'un implique la continuité de l'autre.

Pour la fin de la démonstration, on aura besoin de l'expression de ${}^t S_p$ (qui découle de (57)) :

$$\begin{aligned}
&{}^t S_p : L^q_x(X, \textstyle\bigoplus E_n) \to \mathbf{PL}^p_y(X, \textstyle\bigoplus E_n)', \\
&\quad (w_n(x,y))_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left((u_n(y))_{n\geq 0} \mapsto \int_{X\times X} \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n(x,y) u_n(y) \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}} d\mu(x) d\mu(y)\right).
\end{aligned}$$

iii) $\Rightarrow$ (vi). À l'aide de (59), on vérifie la formule $R_q = \Lambda_p^{-1} \circ {}^t S_p$. A fortiori, $S_q R_q$ est un opérateur borné.

iv) $\Rightarrow$ (v). On permute p et q dans l'argument précédent.

vi) $\Rightarrow$ (i). L'équivalence (v) $\Leftrightarrow$ (vi) assure que $S_p R_p$ est borné. Puisque S_p et S_q sont des isométries, R_p et R_q sont des opérateurs bornés et l'on a par construction

$$R_p S_p = \mathrm{id}_{\mathbf{PL}^p_y(X, \bigoplus E_n)} \quad \text{et} \quad R_q S_q = \mathrm{id}_{\mathbf{PL}^q_y(X, \bigoplus E_n)}.$$

L'idée est d'exprimer Λ_p avec la formule suivante qui découle facilement de (57) :

$$\Lambda_p = {}^t S_p S_q.$$

Utilisant que $S_p R_p$ et $S_q R_q$ sont deux opérateurs duaux, on obtient

$${}^t R_p \Lambda_p = {}^t R_p {}^t S_p S_q = {}^t (S_p R_p) S_q = S_q R_q S_q = S_q. \tag{63}$$

Le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)' \arrow[drr, "{}^t R_p"] & & \\
\Lambda_p(\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n)) \arrow[u, hook] \arrow[rr, "{}^t R_p"] & & L_x^q(X, \bigoplus E_n) \\
\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n) \arrow[u, "\Lambda_p"] \arrow[urr, "S_q"] & &
\end{tikzcd}$$

On doit examiner le diagramme précédent en se rappelant que l'on a

$${}^t S_p {}^t R_p = \mathrm{id}_{\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)'} \quad \text{et} \quad R_q S_q = \mathrm{id}_{\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n)}.$$

La proposition 2.28 et le corollaire 2.29 assurent que S_q réalise un isomorphisme d'espaces de Banach de $\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n)$ sur l'image du projecteur $S_q R_q$ de $L_x^q(X, \bigoplus E_n)$ et que ${}^t R_p$ réalise un isomorphisme d'espaces de Banach de $\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)'$ sur l'image du même projecteur ${}^t R_p {}^t S_p = S_q R_q$ de $L_x^q(X, \bigoplus E_n)$. Grâce à (63), on vérifie que $\Lambda_p(\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n))$ et $\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)'$ ont la même image par l'opérateur ${}^t R_p$:

$$\begin{aligned}
{}^t R_p(\Lambda_p(\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n))) &= S_q(\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n)) = S_q R_q(L_x^q(X, \bigoplus E_n)), \\
{}^t R_p(\mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)') &= S_q R_q(L_x^q(X, \bigoplus E_n)).
\end{aligned}$$

Par application de ${}^t S_p$, on obtient (i) :

$$\Lambda_p(\mathbf{PL}_y^q(X, \bigoplus E_n)) = \mathbf{PL}_y^p(X, \bigoplus E_n)'.$$

v) $\Rightarrow$ (ii). On permute p et q dans la preuve précédente.

Preuve de (62) : Comme $S_p R_p$ est un projecteur, sa norme est supérieure ou égale à 1. On a déjà vu au cours de la démonstration précédente l'égalité $\|S_p R_p\| = \|S_q R_q\|$. Comme S_p et S_q sont des isométries, on déduit à la fois la formule $\|S_p R_p\| = \|R_p\|$ et $\|S_q R_q\| = \|R_q\|$ et la formule $\|R_p\| = \|{}^t R_p\| = \|\Lambda_p^{-1}\|$ (grâce à (63)). $\square$

Stratégie pour le théorème 2.5. Il est naturel d'espérer utiliser une stratégie similaire pour prouver le théorème 2.5 d'interpolation en utilisant cette fois-ci le corollaire 2.30. On suppose donc seulement que l'on a $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq 1$. La proposition 2.31 nous informe que la bornitude de R_p pour tout $p\in\,]p_1,p_2[$ implique l'assertion (61) :

$$\forall p\in\,]p_1,p_2[,\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}}\right\|_{L^p(X)}\left\|\frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}}\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(X)}<+\infty.$$

En raison de la symétrie entre p et $\frac{p}{p-1}$, les inégalités précédentes sont aussi valides si p parcourt le plus petit intervalle contenant $]p_1,p_2[$ et stable par la fonction $p\mapsto\frac{p}{p-1}$. Toutes ces inégalités sont trop violentes puisque l'on doit seulement se contenter de l'hypothèse (36). L'application R_p paraît donc inutilisable. Pour pallier ce problème, nous allons remplacer R_p par une application de la forme

$$R_{p,\psi}:L^p_x\big(X,\bigoplus E_n\big)\to \mathbf{PL}^p_y\big(X,\bigoplus E_n\big),\quad (u_n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\left(\int_X u_n(x',y)\psi_n(x')\,d\mu(x')\right)_{n\geq 0},$$

où $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $L^{\frac{p_2}{p_2-1}}(X)\cap L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(X)$ vérifiant

$$\int_X\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}\psi_n(x)\,d\mu(x)=1.$$

De nouveau, on a bien $R_{p,\psi}S_p=\mathrm{id}_{\mathbf{PL}^p_y(X,\bigoplus E_n)}$ de manière formelle et l'on rencontre le même obstacle : il n'y a aucune raison pour que $R_{p,\psi}$ arrive bien dans $\mathbf{PL}^p_y\big(X,\bigoplus E_n\big)$. Une nouvelle fois, puisque S_p est une isométrie pour tout $p\in\,]p_1,p_2[$, la bornitude de $R_{p,\psi}$ équivaut à la bornitude de l'opérateur

$$\begin{aligned}S_pR_{p,\psi}:L^p_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)&\to L^p_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\\ (u_n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}&\mapsto\left(\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}\int_X u_n(x',y)\psi_n(x')\,d\mu(x')\right).\end{aligned}\tag{64}$$

Sous les hypothèses (35) et (36), l'existence d'une suite adéquate $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la bornitude de $S_pR_{p,\psi}$, pour $p\in\,]p_1,p_2[$, seront établies dans la partie 2J.

On peut maintenant expliquer la preuve du théorème 2.5 d'interpolation. On remarque que les expressions de S_p et $R_{p,\psi}$ sont indépendantes de p. On fixe alors p_1' et p_2' deux réels appartenant à $]p_1,p_2[$. Pour tout $p\in\,]p_1',p_2'[$ on note $\theta'\in[0,1]$ l'unique réel vérifiant $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta'}{p_1'}+\frac{\theta'}{p_2'}$. Le corollaire 2.30 assure que l'image de l'opérateur

$$S_p:\big[\mathbf{PL}^{p_1'}_y\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big),\mathbf{PL}^{p_2'}_y\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\big]_{\theta'}\to\big[L^{p_1'}_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big),L^{p_2'}_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\big]_{\theta'}$$

est $S_pR_{p,\psi}\big(\big[L^{p_1'}_x\big(X,\bigoplus E_n\big),L^{p_2'}_x\big(X,\bigoplus E_n\big)\big]_{\theta'}\big)$ et que S_p induit un isomorphisme sur son image. Le théorème 2.26 et le point (i) de la proposition 2.28 donnent alors

$$\begin{aligned}S_p\big(\big[\mathbf{PL}^{p_1'}_y\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big),\mathbf{PL}^{p_2'}_y\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\big]_{\theta'}\big)&=S_pR_{p,\psi}\big(\big[L^{p_1'}_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big),L^{p_2'}_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\big]_{\theta'}\big)\\&=S_pR_{p,\psi}\big(L^p_x\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\big)\\&=S_p\big(\mathbf{PL}^p_y\big(X,\textstyle\bigoplus E_n\big)\big).\end{aligned}$$

Se rappelant l'inclusion (58), on a donc le schéma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{PL}_y^p(X,\bigoplus E_n) \arrow[r, "S_p"] & L_x^p(X,\bigoplus E_n) \\
\big[\mathbf{PL}_y^{p_1'}(X,\bigoplus E_n),\mathbf{PL}_y^{p_2'}(X,\bigoplus E_n)\big]_{\theta'} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "S_p"'] &
\end{tikzcd}$$

Or S_p est isométrique sur $\mathbf{PL}_y^p(X,\bigoplus E_n)$ et donc injectif. Cela nous amène à l'égalité

$$\big[\mathbf{PL}_y^{p_1'}(X,\bigoplus E_n),\mathbf{PL}_y^{p_2'}(X,\bigoplus E_n)\big]_{\theta'}=\mathbf{PL}_y^p(X,\bigoplus E_n).$$

Enfin, les normes des espaces $\big[\mathbf{PL}_y^{p_1'}(X,\bigoplus E_n),\mathbf{PL}_y^{p_2'}(X,\bigoplus E_n)\big]_{\theta'}$ et $\mathbf{PL}_y^p(X,\bigoplus E_n)$ sont équivalentes d'après le théorème du graphe fermé et l'inclusion continue (58). On aurait aussi pu invoquer le fait que S_p est un isomorphisme d'espaces de Banach de $\big[\mathbf{PL}_y^{p_1'}(X,\bigoplus E_n),\mathbf{PL}_y^{p_2'}(X,\bigoplus E_n)\big]_{\theta'}$ sur son image. La même argumentation est valide en remplaçant la méthode d'interpolation complexe $[\cdot,\cdot]_{\theta'}$ par la méthode d'interpolation réelle $[\cdot,\cdot]_{\theta',p}$.

2F. ***Preuves des théorèmes 2.5 et 2.6, partie II : Espaces de Lorentz.*** On effectue quelques rappels sur les espaces de Lorentz $L^{p,\infty}(X)$, avec $p\in\,]1,+\infty[$ (voir par exemple [Grafakos 2008, Chapter 1]). Afin d'exprimer l'inégalité de Hölder des espaces de Lorentz, il sera utile de remarquer la reformulation suivante de la quasi-norme $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(X)}$:

$$\begin{aligned}\forall f\in L^{p,\infty}(X)\quad \|f\|_{L^{p,\infty}(X)}&:=\inf\Big\{c>0\;\Big|\;\forall t>0\quad \mu\{x\in X\mid |f(x)|>t\}\le\frac{c^p}{t^p}\Big\}\\&=\sup_{T>0}T^{\frac1p}f^\star(T),\end{aligned}$$

où $f^\star:[0,+\infty[\,\to[0,+\infty[$ est le réarrangement décroissant de f définie par la formule

$$f^\star(T):=\inf\{t>0\mid\mu\{|f|>t\}\le T\}.$$

En général, la quasi-norme $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(X)}$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire mais est toujours équivalente à la norme suivante dès lors que l'on a $p>1$ ([Grafakos 2008, page 13 and 64] ou [García-Cuerva et Rubio de Francia 1985, Part V, Lemma 2.8]) :

$$\forall f\in L^{p,\infty}(X),\qquad |||f|||_{L^{p,\infty}(X)}:=\sup_{\substack{A\in\mathcal{B}(X)\\0<\mu(A)<+\infty}}\frac{\|f\mathbf{1}_A\|_{L^1(X)}}{\mu(A)^{1-\frac1p}},\tag{65}$$

où $\mathcal{B}(X)$ désigne l'ensemble des parties mesurables de X. Précisément, nous avons

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}\le|||f|||_{L^{p,\infty}(X)}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}.$$

En d'autres termes, quitte à perdre une constante multiplicative, on pourra utiliser l'inégalité triangulaire dans $L^{p,\infty}(X)$. On aura aussi besoin de l'espace de Lorentz $L^{p,1}(X)$: il s'agit de l'espace vectoriel des fonctions mesurables $g : X \to \mathbb{C}$ qui vérifient

$$\|g\|_{L^{p,1}(X)} := \int_0^{+\infty} T^{\frac{1}{p}} g^\star(T) \, \frac{dT}{T} < +\infty.$$

Venons-en maintenant aux inégalités de Hardy–Littlewood et de Hölder, on a pour toutes fonctions $f \in L^{p,\infty}(X)$ et $g \in L^{\frac{p}{p-1},1}(X)$

$$\begin{aligned}\left|\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| &\le \int_0^{+\infty} f^\star(T)g^\star(T)\,dT = \int_0^{+\infty} T^{\frac{1}{p}} f^\star(t) T^{\frac{p-1}{p}} g^\star(T)\,\frac{dT}{T}\\ &\le \|f\|_{L^{p,\infty}(X)}\,\|g\|_{L^{\frac{p}{p-1},1}(X)}\\ &\le |\!|\!| f |\!|\!|_{L^{p,\infty}(X)}\,\|g\|_{L^{\frac{p}{p-1},1}(X)}. \end{aligned} \tag{66}$$

On peut aussi définir des espaces de Lorentz $L^{p,r}(X, B)$, avec $r \in \{1, \infty\}$ (et même tout réel $r \ge 1$), à valeurs dans un espace de Banach complexe B. Il s'agit des fonctions mesurables $f : X \to B$ telles que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|_B$ appartient à $L^{p,r}(X)$. La théorie de l'interpolation réelle fait jouer un rôle important aux espaces de Lorentz, en particulier on a le résultat suivant [Triebel 1978, Part 1.18.6, Lemma, Theorem 2, (16), $q = p$; Part 1.18.7, Theorem 2].

Théorème 2.32. *Considérons un espace de Banach complexe B et trois réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $]1, +\infty[$. Soit $\theta \in]0, 1[$ l'unique réel tel que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$. Pour tout $r \in \{1, +\infty\}$, on a pour la méthode d'interpolation réelle*

$$[L^{p_1,r}(X, B), L^{p_2,r}(X, B)]_{\theta,p} = L^p(X, B).$$

Si un opérateur linéaire T est borné de $L^{p_1,1}(X, B)$ à valeurs dans $L^{p_1,\infty}(X, B)$ et de $L^{p_2,1}(X, B)$ à valeurs dans $L^{p_2,\infty}(X, B)$ alors il est borné de $L^p(X, B)$ à valeurs dans $L^p(X, B)$ et il existe une constante $K > 0$ indépendante de T telle que

$$\|T\|_{L^p(X,B)\to L^p(X,B)} \le K \|T\|^{1-\theta}_{L^{p_1,1}(X,B)\to L^{p_1,\infty}(X,B)} \|T\|^{\theta}_{L^{p_2,1}(X,B)\to L^{p_2,\infty}(X,B)}.$$

2G. *Preuves des théorèmes 2.5 et 2.6, partie III : R-bornitude.* Énonçons deux faits qui vont justifier que la bornitude d'un opérateur linéaire sur $L^p_x(X, \ell^2(\mathbb{N}))$ n'est généralement pas simple et qui vont motiver l'approche qui va suivre.

Fait 1. *Soit $(P_n)_{n\ge 0}$ une suite d'opérateurs uniformément bornés sur $L^2(X)$, c'est-à-dire que l'on a*

$$\sup_{n\ge 0} \|P_n\|_{L^2(X)\to L^2(X)} < +\infty,$$

alors l'opérateur $\bigoplus P_n$ défini par l'expression suivante est borné sur $L^2(X, \ell^2(\mathbb{N}))$:

$$\forall (f_n)_{n\ge 0} \in L^2(X, \ell^2(\mathbb{N})), \quad \big(\bigoplus P_n\big)(f_n) = (P_n f_n).$$

En effet, cela découle immédiatement des formules :

$$\|(f_n)\|_{L^2(X,\ell^2(\mathbb{N}))} = \sqrt{\int_X \sum_{n\ge 0} |f_n(x)|^2 \, d\mu(x)} = \sqrt{\sum_{n\ge 0} \|f_n\|^2_{L^2(X)}}.$$

Fait 2. *Pour tout réel $p > 2$ il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ d'opérateurs uniformément bornés de $L^p(\mathbb{R})$ et tels que l'opérateur $\bigoplus P_n$ défini par*

$$\forall (f_n)_{n\geq 0} \in L^p(X, \ell^2(\mathbb{N})), \quad \left(\bigoplus P_n\right)(f_n) = (P_n f_n). \tag{67}$$

n'est pas borné sur $L^p(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{N}))$.

L'exemple est élémentaire. On considère les isométries P_n définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_n f)(x) = f(x+n),$$

puis les fonctions $f_{N,n}$, paramétrées par $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, définies par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{N,n}(x) := \begin{cases} \mathbf{1}_{[n,n+1[}(x) & \text{si } n < N, \\ 0 & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

On a immédiatement $\|P_n\|_{L^p(X)\to L^p(X)} = 1$. De même pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\left\|\left(\bigoplus P_n\right)(f_{N,n})\right\|^p_{L^p(\mathbb{R},\ell^2(\mathbb{N}))} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{[0,1[}(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx = N^{\frac{p}{2}},$$

$$\|(f_{N,n})\|^p_{L^p(\mathbb{R},\ell^2(\mathbb{N}))} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{[n,n+1[}(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx = N \ll N^{\frac{p}{2}}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on voit que l'opérateur $\bigoplus P_n$ n'est pas borné sur $L^p(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{N}))$. L'exemple précédent utilise le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas compact afin de s'échapper vers l'infini. En réalité, cela est un faux-semblant et l'on peut transférer la construction précédente sur $L^p(0, 1)$ à l'aide d'une isométrie linéaire surjective adéquate de $L^p(0, 1)$ sur $L^p(\mathbb{R})$. En outre, si l'on raisonne par dualité ou si l'on choisit $f_n = \mathbf{1}_{[0,1[}$ à la place de $\mathbf{1}_{[n,n+1[}$, la construction précédente s'adapte au cas $p < 2$. Ainsi, le fait 2 contraste fortement avec le fait 1 et montre que la seule condition

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_{L^p(X)\to L^p(X)} < +\infty$$

ne suffit pas pour assurer la bornitude de l'opérateur $\bigoplus P_n$ sur $L^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$ pour $p \neq 2$, même si $\mu(X) < +\infty$. Un exemple qui illustre ce problème est la non continuité du multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R}^2)$ de l'indicatrice de la boule unité (voir la preuve de Fefferman [1971] dans laquelle les opérateurs P_n sont des projecteurs de $L^p(\mathbb{R}^2)$).

La notion mathématique qui s'est dégagée est la $\mathcal{R}$-bornitude. Étant donné un espace de Banach B, une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de B est dite $\mathcal{R}$-bornée s'il existe $K > 0$ telle que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B (nulle pour $n \gg 1$) on a un principe de contraction :

$$\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n P_n(f_n)\right\|_B\right] \leq K\mathbf{E}\left[\left\|\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n f_n\right\|_B\right].$$

Dans le cas $B = L^p(X)$, il est classique que les deux espérances précédentes s'estiment avec le théorème de Fubini et les inégalités de Kahane–Khintchine dans $L^p(X)$ et dans $\mathbb{C}$ (voir (43) dans le cas unidimensionnel). L'inégalité précédente signifie alors que l'opérateur $\bigoplus P_n$, défini en (67), est borné sur $L^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$. Quitte à changer $K > 0$, cela équivaut à une estimation de la forme

$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 0} |(P_n f_n)(x)|^2\Big)^{\frac{p}{2}} d\mu(x) \leq K \int_X \Big(\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|^2\Big)^{\frac{p}{2}} d\mu(x).$$

Différents critères de $\mathcal{R}$-bornitude existent dans la littérature (voir par exemple [García-Cuerva et Rubio de Francia 1985, Chapter V ; Weis 2001, Section 2 ; Clément et al. 2000] et les références indiquées). Le lemme 2.33 donne un nouveau critère qui s'apparente au lemme de Schur et qui donne des conditions suffisantes pour obtenir la $\mathcal{R}$-bornitude. Ce critère suffira pour la théorie de l'interpolation et de la dualité des espaces $\mathbf{PL}^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$ dans le cas unidimensionnel $d_n = \dim(E_n) = 1$. Pour comprendre le cas $d_n \neq 1$, nous aurons besoin d'une version légèrement plus sophistiquée du lemme 2.33, à savoir le lemme 2.34, mais le coeur de l'idée est dans la démonstration suivante.

Lemme 2.33. *Fixons des réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $]1, +\infty[$. Notons $q_1 := \frac{p_1}{p_1 - 1}$ et $q_2 := \frac{p_2}{p_2 - 1}$. Considérons $K_n : X^2 \to \mathbb{C}$ des fonctions mesurables, pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que l'on a*

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L^{q_1,\infty}_{x'}(X)} \in L^{p_1,\infty}_x(X), \tag{68}$$

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L^{q_2,\infty}_{x'}(X)} \in L^{p_2,\infty}_x(X), \tag{69}$$

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L^{p_1,\infty}_{x}(X)} \in L^{q_1,\infty}_{x'}(X), \tag{70}$$

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L^{p_2,\infty}_{x}(X)} \in L^{q_2,\infty}_{x'}(X). \tag{71}$$

Les deux assertions suivantes sont vraies :

(a) *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur P_n de noyau K_n défini par*

$$\forall f \in L^p_x(X), \quad \forall x \in X, \quad (P_n f)(x) = \int_X K_n(x,x') f(x')\, d\mu(x'),$$

est borné sur $L^p(X)$ et la borne supérieure $\sup_{n\geq 0} \|P_n\|_{L^p(X)\to L^p(X)}$ est finie.

(b) *La famille d'opérateurs $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(X)$ est $\mathcal{R}$-bornée.*

Démonstration. Nous aurons besoin des propriétés des espaces de Lorentz rappelées dans la partie 2F.

(a) On affirme que (68) implique la bornitude de l'opérateur

$$P_n : L^{p_1,1}_x(X) \to L^{p_1,\infty}_x(X).$$

En effet, l'inégalité de Hölder (66) donne

$$|(P_n f)(x)| \leq \|K_n(x,x')\|_{L^{q_1,\infty}_{x'}(X)} \|f\|_{L^{p_1,1}(X)}$$

$$\|P_n f\|_{L^{p_1,\infty}(X)} \leq \Big\| \|K_n(x,x')\|_{L^{q_1,\infty}_{x'}(X)} \Big\|_{L^{p_1,\infty}_x(X)} \|f\|_{L^{p_1,1}(X)}.$$

Afin de faciliter la lecture de la preuve de l'assertion (b), nous donnons un autre argument qui utilise (70) et la norme $|||\cdot|||_{L^{p_1,\infty}(X)}$ de $L^{p_1,\infty}(X)$, définie en (65), car elle présente l'avantage de satisfaire l'inégalité triangulaire. En effet, on a

$$\begin{aligned} |||P_n f|||_{L^{p_1,\infty}(X)} &\leq \int_X |||K_n(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} |f(x')|\, d\mu(x') \\ &\leq \big\| \, |||K_n(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \big\|_{L_{x'}^{q_1,\infty}(X)} \|f\|_{L^{p_1,1}(X)}. \end{aligned}$$

Les deux arguments précédents sont en fait duaux. En utilisant (69) ou (71), on obtient de même la bornitude de l'opérateur

$$P_n : L_x^{p_2,1}(X) \to L_x^{p_2,\infty}(X).$$

On conclut par interpolation réelle (à savoir le théorème 2.32 avec $B = \mathbb{C}$).

(b) On affirme que l'opérateur suivant est borné

$$\bigoplus P_n : L_x^{p_1,1}(X, \ell^\infty(\mathbb{N})) \to L_x^{p_1,\infty}(X, \ell^\infty(\mathbb{N})).$$

En effet, cela découle de l'inégalité de Hölder (66) et de (68) :

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |(P_n f_n)(x)| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_X K_n(x,x') f_n(x')\, d\mu(x') \right| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |K_n(x,x')| \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_m(x')|\, d\mu(x') \\ &\leq \underbrace{\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|K_n(x,x')\|_{L_{x'}^{q_1,\infty}(X)} \right)}_{\in L_x^{p_1,\infty}(X)} \times \left\| \sup_{m\in\mathbb{N}} |f_m(x')| \right\|_{L_{x'}^{p_1,1}(X)}. \end{aligned}$$

On s'attelle maintenant à prouver la bornitude de l'opérateur

$$\bigoplus P_n : L_x^{p_1,1}(X, \ell^1(\mathbb{N})) \to L_x^{p_1,\infty}(X, \ell^1(\mathbb{N})).$$

De nouveau, on utilise la norme $|||\cdot|||_{L^{p_1,\infty}(X)}$ de $L^{p_1,\infty}(X)$. L'hypothèse (70) et l'inégalité de Hölder (66) nous amènent aux estimations

$$\begin{aligned} \left|\left|\left| \sum_{n\in\mathbb{N}} |(P_n f_n)(x)| \right|\right|\right|_{L_x^{p_1,\infty}(X)} &= \left|\left|\left| \sum_{n\geq 0} \left| \int_X K_n(x,x') f_n(x')\, d\mu(x') \right| \right|\right|\right|_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \int_X |||K_n(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} |f_n(x')|\, d\mu(x') \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \int_X \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} |||K_m(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \right) |f_n(x')|\, d\mu(x') \\ &\leq \int_X \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} |||K_m(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \right) \left(\sum_{n\geq 0} |f_n(x')| \right) d\mu(x') \end{aligned}$$

$$\leq \left\| \sup_{m\in\mathbb{N}} |||K_m(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \right\|_{L_{x'}^{q_1,\infty}(X)} \left\| \sum_{n\geq 0} |f_n(x')| \right\|_{L_{x'}^{p_1,1}(X)}.$$

La démonstration est évidemment similaire en remplaçant p_1 par p_2 et en utilisant (71) et (69). On a ainsi obtenu la bornitude des quatre opérateurs

$$\begin{aligned}
\bigoplus P_n &: L_x^{p_1,1}(X,\ell^\infty(\mathbb{N})) \to L_x^{p_1,\infty}(X,\ell^\infty(\mathbb{N})),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_2,1}(X,\ell^\infty(\mathbb{N})) \to L_x^{p_2,\infty}(X,\ell^\infty(\mathbb{N})),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_1,1}(X,\ell^1(\mathbb{N})) \ \to L_x^{p_1,\infty}(X,\ell^1(\mathbb{N})),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_2,1}(X,\ell^1(\mathbb{N})) \ \to L_x^{p_2,\infty}(X,\ell^1(\mathbb{N})).
\end{aligned}$$

Pour tout $p \in]p_1, p_2[$, le théorème 2.32 assure la bornitude des deux opérateurs suivants par interpolation réelle

$$\begin{aligned}
\bigoplus P_n &: L_x^{p}(X,\ell^\infty(\mathbb{N})) \to L_x^{p}(X,\ell^\infty(\mathbb{N})),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p}(X,\ell^1(\mathbb{N})) \ \to L_x^{p}(X,\ell^1(\mathbb{N})).
\end{aligned}$$

Par interpolation complexe (c'est-à-dire le théorème 2.26 avec $\theta = \frac{1}{2}$), on obtient la bornitude de l'opérateur

$$\bigoplus P_n : L_x^{p}(X,\ell^2(\mathbb{N})) \to L_x^{p}(X,\ell^2(\mathbb{N})). \qquad \square$$

Il s'agit maintenant d'écrire un résultat analogue au lemme 2.33 adaptée à la théorie générale avec $\dim(E_n) \neq 1$. Pour cela, on aura besoin d'espaces analogues à $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ adaptés aux sous-espaces E_n, ce sera le rôle joué par les espaces $\left(\bigoplus E_n\right)_{\ell^r}$ dans la preuve du résultat suivant.

Lemme 2.34. *Fixons des réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $]1, +\infty[$ et considérons $K_n : X^2 \to \mathbb{C}$ des fonctions mesurables, pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que*

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L_{x'}^{q_1,\infty}(X)} \in L_x^{p_1,\infty}(X), \tag{72}$$

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L_{x'}^{q_2,\infty}(X)} \in L_x^{p_2,\infty}(X), \tag{73}$$

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L_{x}^{p_1,\infty}(X)} \in L_{x'}^{q_1,\infty}(X), \tag{74}$$

$$\sup_{n\geq 0} \|K_n(x,x')\|_{L_{x}^{p_2,\infty}(X)} \in L_{x'}^{q_2,\infty}(X). \tag{75}$$

Alors les deux assertions suivantes sont vraies

(a) *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur P_n défini par*

$$\forall u \in L_x^p(X, E_n), \quad \forall (x,y) \in X^2, \quad (P_n u)(x,y) = \int_X K_n(x,x')u(x',y)\, d\mu(x'),$$

est borné sur $L_x^p(X,E_n)$ et la borne supérieure $\sup_{n\geq 0}\|P_n\|$ est finie.

(b) *L'opérateur $\bigoplus P_n$, défini par l'expression suivante, est borné*

$$\bigoplus P_n : L_x^p\left(X, \bigoplus E_n\right) \to L_x^p\left(X, \bigoplus E_n\right), \quad (u_n(x,y))_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((P_n u_n)(x,y))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Démonstration. (a) On raisonne comme pour le lemme 2.33, c'est-à-dire que chaque opérateur P_n est borné de $L_x^{p_1,1}(X, E_n)$ à valeurs dans $L_x^{p_1,\infty}(X, E_n)$ et de $L_x^{p_2,1}(X, E_n)$ à valeurs dans $L_x^{p_2,\infty}(X, E_n)$ avec des normes majorées indépendamment de n. On conclut par interpolation réelle (c'est-à-dire le théorème 2.32 avec $B = E_n$).

(b) L'idée est d'interpoler l'espace de Hilbert $\bigoplus E_n$ entre les deux espaces

$$\big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1} := \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E_n,\ \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L_y^2(X)} < +\infty\big\},$$
$$\big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty} := \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E_n,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L_y^2(X)} < +\infty\big\},$$

qui sont munis de leurs normes naturelles. On vérifie aisément que les espaces $\big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}$ et $\big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}$ sont des rétractes, au sens de la définition 2.27, des espaces $\ell^1\big(\mathbb{N}, \bigoplus E_n\big)$ et $\ell^\infty\big(\mathbb{N}, \bigoplus E_n\big)$. Par suite, le corollaire 2.30 et la théorie de l'interpolation complexe des espaces $\ell^r\big(\mathbb{N}, \bigoplus E_n\big)$ (c'est-à-dire le théorème 2.26) montrent que l'on a l'égalité

$$\big[\big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big]_{\frac{1}{2}} = \bigoplus E_n,$$

avec équivalence de normes. Nous pouvons donc reprendre l'argumentation du lemme 2.33 et il nous suffit manifestement de prouver la bornitude des quatre opérateurs

$$\begin{aligned}
\bigoplus P_n &: L_x^{p_1,1}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}\big) \to L_x^{p_1,\infty}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}\big),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_2,1}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}\big) \to L_x^{p_2,\infty}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}\big),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_1,1}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big) \to L_x^{p_1,\infty}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_2,1}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big) \to L_x^{p_2,\infty}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big).
\end{aligned}$$

Par symétrie évidente, il nous suffit de justifier la bornitude des deux opérateurs

$$\begin{aligned}
\bigoplus P_n &: L_x^{p_1,1}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}\big) \to L_x^{p_1,\infty}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^1}\big),\\
\bigoplus P_n &: L_x^{p_1,1}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big) \to L_x^{p_1,\infty}\big(X, \big(\bigoplus E_n\big)_{\ell^\infty}\big).
\end{aligned}$$

L'hypothèse (74) et l'inégalité de Hölder (66) nous donnent les majorations

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|\Big|\sum_{n\geq 0} \|(P_n u_n)(x,y)\|_{L_y^2(X)}\Big|\Big|\Big|_{L_x^{p_1,\infty}(X)}\\
&\qquad = \Big|\Big|\Big|\sum_{n\geq 0} \Big\|\int_X K_n(x,x')u_n(x',y)\,d\mu(x')\Big\|_{L_y^2(X)}\Big|\Big|\Big|_{L_x^{p_1,\infty}(X)}\\
&\qquad \leq \sum_{n\geq 0}\int_X |||K_n(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \|u_n(x',y)\|_{L_y^2(X)}\,d\mu(x')\\
&\qquad \leq \int_X \Big(\sup_{m\in\mathbb{N}} |||K_m(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)}\Big)\Big(\sum_{n\geq 0}\|u_n(x',y)\|_{L_y^2(X)}\Big)\,d\mu(x')\\
&\qquad \leq \Big\|\sup_{m\in\mathbb{N}} |||K_m(x,x')|||_{L_x^{p_1,\infty}(X)}\Big\|_{L_{x'}^{q_1,\infty}(X)} \Big\|\sum_{n\geq 0}\|u_n(x',y)\|_{L_y^2(X)}\Big\|_{L_{x'}^{p_1,1}(X)}.
\end{aligned}$$

Enfin, (72) et l'inégalité de Hölder (66) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|(P_n u_n)(x,y)\|_{L^2_y(X)} &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\int_X K_n(x,x')u_n(x',y)\,d\mu(x')\right\|_{L^2_y(X)}\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X |K_n(x,x')|\sup_{m\in\mathbb{N}}\|u_m(x',y)\|_{L^2_y(X)}\,d\mu(x')\\ &\le \underbrace{\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|K_n(x,x')\|_{L^{q_1,\infty}_{x'}(X)}\right)}_{\in L^{p_1,\infty}_x(X)}\times\left\|\sup_{m\in\mathbb{N}}\|u_m(x',y)\|_{L^2_y(X)}\right\|_{L^{p_1,1}_{x'}(X)}. \qquad\square\end{aligned}$$

2H. ***Preuve du théorème 2.6 : bornitude de S_pR_p.*** Sous les hypothèses du théorème 2.6 de dualité, les exposants p_1 et p_2 sont conjugués et l'on souhaite montrer que S_pR_p est un projecteur borné sur $L^p_x\big(X,\bigoplus E_n\big)$ pour tout $p\in]p_1,p_2[$. Avec les notations usuelles, on a $q_1=\frac{p_1}{p_1-1}=p_2$ et $q_2=\frac{p_2}{p_2-1}=p_1$. D'après la forme du projecteur (60), il s'agit d'appliquer le lemme 2.34 avec la suite de noyaux K_n définis par

$$\forall (x,x')\in X^2,\quad K_n(x,x')=\frac{1}{d_n}\sqrt{e_n(x)e_n(x')}.$$

Il est facile de constater que (35) et (37) impliquent l'assertion (72) (qui est identique à (75)). En effet, on a pour tout $(x,n)\in X\times\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{d_n}\sqrt{e_n(x)e_n(x')}\right\|_{L^{q_1,\infty}_{x'}(X)} &\le \frac{\sqrt{e_n(x)}}{d_n}\|\sqrt{e_n}\|_{L^{q_1}(X)}\\ &\le \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}}\times\frac{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}\|\sqrt{e_n}\|_{L^{q_1}(X)}}{d_n}.\end{aligned}$$

Les deux autres hypothèses (73) et (74) du lemme 2.34 se vérifient de la même façon. La preuve du théorème 2.6 de dualité est finie.

2I. ***Preuve du théorème 2.5 : défaut d'interpolation.*** Nous allons définir la notion de *défaut d'interpolation* afin d'aborder l'interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p\big(X,\bigoplus E_n\big)$. Commençons par introduire quelques notations. Pour tous réels p_1, p et p_2 appartenant à $[1,+\infty[$ et vérifiant $p_1\le p\le p_2$, on définit les nombres $\theta_1(p_1,p,p_2)$ et $\theta_2(p_1,p,p_2)$ tels que

$$\frac{\theta_1(p_1,p,p_2)}{p_1}+\frac{\theta_2(p_1,p,p_2)}{p_2}=\frac{1}{p}\quad\text{et}\quad \theta_1(p_1,p,p_2)+\theta_2(p_1,p,p_2)=1.$$

De façon précise, on a les formules

$$\theta_1(p_1,p,p_2)=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\quad\text{et}\quad \theta_2(p_1,p,p_2)=\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}.$$

On peut alors poser la définition suivante.

Définition 2.35. Considérons p_1 et p_2 appartenant à $[1, +\infty[$ et vérifiant $p_1 < p_2$ ainsi qu'une fonction non nulle $\phi \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$. Nous définissons $Q(\phi, [p_1, p_2]) \in [1, +\infty[$ le *défaut d'interpolation* de ϕ sur $[p_1, p_2]$ par la formule

$$Q(\phi, [p_1, p_2]) := \sup_{p \in [p_1, p_2]} \frac{\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta_1(p_1,p,p_2)} \|\phi\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_2(p_1,p,p_2)}}{\|\phi\|_{L^p(X)}}.$$

L'inégalité $Q(\phi, [p_1, p_2]) < +\infty$ est facile et nous allons la vérifier par convexité (voir le lemme 2.36 ci-après). Quant à l'inégalité $Q(\phi, [p_1, p_2]) \geq 1$, elle découle de l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{p_1}{p\theta_1(p_1,p,p_2)}$ et $\frac{p_2}{p\theta_2(p_1,p,p_2)}$:

$$\begin{aligned}\left(\int_X |\phi(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_X |\phi(x)|^{p\theta_1(p_1,p,p_2)} |\phi(x)|^{p\theta_2(p_2,p,p_2)} \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_X |\phi(x)|^{p_1} \, d\mu(x)\right)^{\frac{\theta_1(p_1,p,p_2)}{p_1}} \left(\int_X |\phi(x)|^{p_2} \, d\mu(x)\right)^{\frac{\theta_2(p_1,p,p_2)}{p_2}}. \end{aligned} \tag{76}$$

La condition d'égalité de l'inégalité de Hölder montre alors l'équivalence

$$Q(\phi, [p_1, p_2]) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a > 0,\ \exists A \in \mathcal{B}(X),\ 0 < \mu(A) < +\infty,\ |\phi| = a\mathbf{1}_A,$$

où $\mathcal{B}(X)$ est l'ensemble des parties mesurables de X. Ainsi, le défaut d'interpolation de la fonction ϕ permet de tester si elle se concentre complètement sur une même partie de l'espace mesuré X. Par comparaison avec (76), le défaut d'interpolation permet de *minorer* $\|\phi\|_{L^p(X)}$ si l'on connaît $\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}$ et $\|\phi\|_{L^{p_2}(X)}$:

$$\forall p \in [p_1, p_2], \quad \frac{\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta_1(p_1,p,p_2)} \|\phi\|_{L_2^p(X)}^{\theta_2(p_1,p,p_2)}}{Q(\phi, [p_1, p_2])} \leq \|\phi\|_{L^p(X)}. \tag{77}$$

Le lemme suivant montre qu'il suffit d'examiner un seul point de l'intervalle $]p_1, p_2[$ pour contrôler $Q(\phi, [p_1, p_2])$.

Lemme 2.36. *Fixons des réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $[1, +\infty[$ et une suite de fonctions non nulles $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, alors on a l'équivalence :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|\phi_n\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta_1(p_1,p,p_2)} \|\phi_n\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_2(p_1,p,p_2)}}{\|\phi_n\|_{L^p(X)}} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} Q(\phi_n, [p_1, p_2]) < +\infty.$$

Démonstration. Pour toute fonction non nulle $\phi \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, il est bien connu que la fonction

$$\Phi : \wp \in [p_1, p_2] \mapsto \ln(\|\phi\|_{L^\wp(X)})$$

est convexe par rapport à $\frac{1}{\wp}$ (voir les inégalités (76)). Introduisons la fonction $\widetilde{\Phi} : [p_1, p_2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{\Phi}(\wp) = \ln\left(\frac{\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta_1(p_1,\wp,p_2)} \|\phi\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_2(p_1,\wp,p_2)}}{\|\phi\|_{L^\wp(X)}}\right) = \theta_1(p_1, \wp, p_2)\Phi(p_1) + \theta_2(p_1, \wp, p_2)\Phi(p_2) - \Phi(\wp).$$

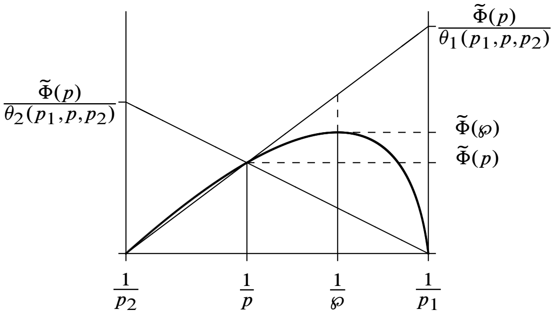


Figure 1. La fonction $\widetilde{\Phi}$.

La fonction $\widetilde{\Phi}$ s'annule en p_1 et p_2 et est concave par rapport à $\frac{1}{\wp}$; voir figure 1. Par concavité et application du théorème de Thalès, nous avons les estimations

$$\forall \wp \in [p_1, p_2], \quad \widetilde{\Phi}(\wp) \le \widetilde{\Phi}(p) \max\left(\frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_2}}, \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} \right).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient les estimations suivantes qui donnent la conclusion :

$$\frac{\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta_1(p_1,p,p_2)} \|\phi\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_2(p_1,p,p_2)}}{\|\phi\|_{L^p(X)}} \le Q(\phi, [p_1, p_2]) \le \left(\frac{\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta_1(p_1,p,p_2)} \|\phi\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_2(p_1,p,p_2)}}{\|\phi\|_{L^p(X)}} \right)^{C(p_1,p,p_2)}. \qquad \square$$

On sait que pour tout réel $p \in]1, +\infty[$ et toute fonction $\phi \in L^p(X)$, il existe une fonction $\psi \in L^{\frac{p}{p-1}}(X)$ telle que

$$\int_X \phi(x)\psi(x)\, d\mu(x) = \|\phi\|_{L^p(X)} \|\psi\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(X)}.$$

Par exemple, si ϕ est positive alors on peut choisir $\psi(x) = \phi(x)^{p-1}$. Le défaut d'interpolation permet de formuler des propriétés analogues si ϕ appartient à deux espaces de Lebesgue $L^{p_1}(X)$ et $L^{p_2}(X)$.

Proposition 2.37. *Fixons p_1 et p_2 appartenant à $]1, +\infty[$ et vérifiant $p_1 < p_2$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le 1$. Il existe un réel $r = r(p_1, p_2) > 1$ tel que pour toute fonction non nulle $\phi \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$ on peut trouver une fonction $\psi \in L^{q_2}(X) \cap L^{q_1}(X)$, avec $q_2 = \frac{p_2}{p_2-1}$ et $q_1 = \frac{p_1}{p_1-1}$, de sorte que l'on a*

$$\int_X \phi(x)\psi(x)\, d\mu(x) = 1,$$

$$\|\phi\|_{L^{p_1}(X)} \|\psi\|_{L^{q_1}(X)} \le Q(\phi, [p_1, p_2])^r, \quad \|\phi\|_{L^{p_2}(X)} \|\psi\|_{L^{q_2}(X)} \le Q(\phi, [p_1, p_2])^r,$$

$$\frac{|\psi|^{q_1}}{\int_X |\psi(x)|^{q_1}\, d\mu(x)} \le Q(\phi, [p_1, p_2])^{(r-1)q_1} \left[\frac{|\phi|^{p_1}}{\int_X |\phi(x)|^{p_1}\, d\mu(x)} + \frac{|\phi|^{p_2}}{\int_X |\phi(x)|^{p_2}\, d\mu(x)} \right],$$

$$\frac{|\psi|^{q_2}}{\int_X |\psi(x)|^{q_2}\, d\mu(x)} \le Q(\phi, [p_1, p_2])^{(r-1)q_2} \left[\frac{|\phi|^{p_1}}{\int_X |\phi(x)|^{p_1}\, d\mu(x)} + \frac{|\phi|^{p_2}}{\int_X |\phi(x)|^{p_2}\, d\mu(x)} \right].$$

Démonstration. Commençons par le calcul élémentaire suivant :

$$p_2q_2 - p_1q_1 = \frac{p_2^2}{p_2-1} - \frac{p_1^2}{p_1-1} = \frac{p_2^2(p_1-1)-p_1^2(p_2-1)}{(p_2-1)(p_1-1)} = \frac{(p_2-p_1)(p_1p_2-p_1-p_2)}{(p_2-1)(p_1-1)}.$$

Par conséquent on a $p_2q_2 \geq p_1q_1$ et l'on peut choisir un réel $r \in \left[1+\frac{p_1}{q_2}, 1+\frac{p_2}{q_1}\right]$. En particulier, on a $r \in [p_1, p_2]$ et

$$p_1 \leq (r-1)q_2 \leq (r-1)q_1 \leq p_2. \tag{78}$$

On peut maintenant considérer la fonction ψ définie par

$$\forall x \in X, \quad \psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\int_X |\phi(x')|^r \, d\mu(x')} \times \dfrac{|\phi(x)|^r}{\phi(x)} & \text{si } \phi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \phi(x) = 0. \end{cases}$$

La définition précédente est licite car, d'après (76), la fonction ϕ appartient à $L^p(X)$ pour tout $p \in [p_1, p_2]$. Ensuite, il est clair que la fonction $\phi\psi$ est positive et d'intégrale égale à 1. Les inégalités (78) impliquent que ψ appartient à $L^{q_2}(X) \cap L^{q_1}(X)$. Grâce à (76) et (77), il vient

$$\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}\|\psi\|_{L^{q_1}(X)} = \frac{\|\phi\|_{L^{p_1}(X)}\|\phi\|^{r-1}_{L^{(r-1)q_1}(X)}}{\|\phi\|^r_{L^r(X)}} \leq Q(\phi,[p_1,p_2])^r \|\phi\|^{\alpha}_{L^{p_1}(X)}\|\phi\|^{\beta}_{L^{p_2}(X)}, \tag{79}$$

où l'on a noté

$$\alpha := 1 + (r-1)\theta_1(p_1,(r-1)q_1,p_2) - r\theta_1(p_1,r,p_2),$$
$$\beta := (r-1)\theta_2(p_1,(r-1)q_1,p_2) - r\theta_2(p_1,r,p_2).$$

L'égalité $\theta_1+\theta_2 = 1$ implique que l'on a $\alpha+\beta = 0$. En fait, il s'avère que $\alpha = \beta = 0$. Cela peut se voir par calcul, mais puisque α ne dépend que de (p_1, p_2, r), il suffit de traiter le cas particulier $X = \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $t > 0$, si l'on pose $\phi_t = \mathbf{1}_{[0,t]}$ alors on a $\psi_t = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{[0,t]}$ et $\|\phi_t\|_{L^p} = t^{\frac{1}{p}}$ pour tout $p \in [1,+\infty[$ et donc

$$\|\phi_t\|_{L^{p_1}(X)}\|\psi_t\|_{L^{q_1}(X)} = t^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}-1} = 1 \quad \text{et} \quad Q(\phi_t,[p_1,p_2]) = 1.$$

L'inégalité (79) devient

$$\forall t > 0, \quad 1 \leq t^{\alpha\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}.$$

Cela force les égalités $\alpha = \beta = 0$. Un argument similaire permet d'estimer $\|\phi\|_{L^{p_2}(X)}\|\psi\|_{L^{q_2}(X)}$.

Passons aux estimations de $|\psi|^q$ avec $q \in \{q_1, q_2\}$. On se permet de noter $\theta_1 = \theta_1(p_1,(r-1)q,p_2)$ et $\theta_2 = \theta_2(p_1,(r-1)q,p_2)$. On obtient alors pour tout $x \in X$

$$\frac{|\psi(x)|^q}{\|\psi\|^q_{L^q(X)}} = \frac{|\phi(x)|^{(r-1)q}}{\|\phi\|^{(r-1)q}_{L^{(r-1)q}(X)}} \leq Q(\phi,[p_1,p_2])^{(r-1)q}\frac{|\phi(x)|^{(r-1)q}}{\|\phi\|^{(r-1)q\theta_1}_{L^{p_1}(X)}\|\phi\|^{(r-1)q\theta_2}_{L^{p_2}(X)}}.$$

Les égalités $(r-1)q\theta_1 + (r-1)q\theta_2 = (r-1)q$ et $\frac{(r-1)q\theta_1}{p_1} + \frac{(r-1)q\theta_2}{p_2} = 1$ nous donnent la conclusion

$$\frac{|\psi(x)|^q}{\|\psi\|^q_{L^q(X)}} \leq Q(\phi,[p_1,p_2])^{(r-1)q}\left(\frac{|\phi(x)|^{p_1}}{\|\phi\|^{p_1}_{L^{p_1}(X)}}\right)^{\frac{(r-1)q\theta_1}{p_1}}\left(\frac{|\phi(x)|^{p_2}}{\|\phi\|^{p_2}_{L^{p_2}(X)}}\right)^{\frac{(r-1)q\theta_2}{p_2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Q(\phi,[p_1,p_2])^{(r-1)q}\left(\frac{(r-1)q\theta_1}{p_1}\frac{|\phi(x)|^{p_1}}{\|\phi\|^{p_1}_{L^{p_1}(X)}}+\frac{(r-1)q\theta_2}{p_2}\frac{|\phi(x)|^{p_2}}{\|\phi\|^{p_2}_{L^{p_2}(X)}}\right)\\
&\leq Q(\phi,[p_1,p_2])^{(r-1)q}\left(\frac{|\phi(x)|^{p_1}}{\|\phi\|^{p_1}_{L^{p_1}(X)}}+\frac{|\phi(x)|^{p_2}}{\|\phi\|^{p_2}_{L^{p_2}(X)}}\right).
\end{aligned}
$$
□

2J. ***Preuve du théorème 2.5 : bornitude de $S_p R_{p,\psi}$.*** Nous avons maintenant les moyens d'achever la preuve, expliquée dans la partie 2E, du théorème 2.5. Sous les hypothèses (35) et (36), il s'agit de justifier l'existence d'une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^{p_2/(p_2-1)}(X)\cap L^{p_1/(p_1-1)}(X)$ telle que

$$
\forall n\in\mathbb{N},\qquad \int_X \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}\psi_n(x)\,d\mu(x)=1, \tag{80}
$$

et que l'opérateur $S_p R_{p,\psi}$ soit borné sur $L^p_x\big(X,\bigoplus E_n\big)$ (voir (64)). L'hypothèse (36) et le lemme 2.36 nous apprennent que la suite des défauts d'interpolation $(Q(\sqrt{e_n},[p_1,p_2]))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par homogénéité, on a aussi

$$
\sup_{n\in\mathbb{N}} Q\left(\frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}},[p_1,p_2]\right)<+\infty.
$$

Par suite, la proposition 2.37 nous assure l'existence d'une constante $K>0$ et d'une suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^{p_2/(p_2-1)}(X)\cap L^{p_1/(p_1-1)}(X)$ qui vérifient (80) et les estimations suivantes uniformément en n :

$$
\left\|\frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}}\right\|_{L^{p_1}(X)}\|\psi_n\|_{L^{q_1}(X)}\leq K,\qquad \left\|\frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}}\right\|_{L^{p_2}(X)}\|\psi_n\|_{L^{q_2}(X)}\leq K,
$$

ainsi que les inégalités suivantes pour tout $x\in X$

$$
\left(\frac{|\psi_n(x)|}{\|\psi_n\|_{L^{q_1}(X)}}\right)^{q_1}+\left(\frac{|\psi_n(x)|}{\|\psi_n\|_{L^{q_2}(X)}}\right)^{q_2}\leq K\left[\left(\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}}\right)^{p_1}+\left(\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}}\right)^{p_2}\right]. \tag{81}
$$

On va appliquer le lemme 2.34 avec les noyaux K_n définis par

$$
\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall (x,x')\in X^2,\quad K_n(x,x'):=\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}\psi_n(x').
$$

Les propriétés (72) et (73) se traitent comme pour la bornitude de $S_p R_p$. Par exemple, l'inclusion continue $L^{q_1}(X)\subset L^{q_1,\infty}(X)$ nous permet d'écrire pour tout $x\in X$

$$
\|K_n(x,x')\|_{L^{q_1,\infty}_{x'}(X)}\leq \frac{\sqrt{e_n(x)}}{\sqrt{d_n}}\|\psi_n\|_{L^{q_1}(X)}\leq K\frac{\sqrt{e_n(x)}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}}.
$$

L'hypothèse (35) implique alors (72). On montre de même (73). L'intérêt de la proposition 2.37 apparaît pour démontrer (74) et (75). En effet, on a

$$
\forall x'\in X,\quad \|K_n(x,x')\|_{L^{p_1,\infty}_x(X)}\leq |\psi_n(x')|\left\|\frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{d_n}}\right\|_{L^{p_1}(X)}\leq K\frac{|\psi_n(x')|}{\|\psi_n\|_{L^{q_1}(X)}}.
$$

D'après (35) et (81), on obtient

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|K_n(x,x')\|_{L_x^{p_1,\infty}(X)}\right)^{q_1} \in L_{x'}^{1,\infty}(X),$$

c'est-à-dire

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|K_n(x,x')\|_{L_x^{p_1,\infty}(X)} \in L_{x'}^{q_1,\infty}(X).$$

On a ainsi obtenu (74). Et (75) se traite de même. On a validé toutes les hypothèses du lemme 2.34 et l'on peut donc conclure que $S_p R_{p,\psi}$ est borné sur $L_x^p\big(X, \bigoplus E_n\big)$. Cela achève la preuve du théorème 2.5 d'interpolation.

3. Espaces $\mathbf{PL}^p$ pour les harmoniques sphériques

3A. ***Reformulation des énoncés.*** On reprend les notations de la partie 1B. Commençons par remarquer que l'on peut naturellement identifier une somme d'une série $\sum a_n Z_n$ comme une distribution sur $\mathbb{S}^d$ dès lors que $(a_n)_{n\geq 1}$ est à croissance polynomiale. En effet, pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^d)$ on a pour un paramètre $\varsigma \gg 1$:

$$\sum_{n\geq 1}|a_n\langle Z_n,\psi\rangle| \leq \sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n|^2 n^{-2\varsigma}}\sqrt{\sum_{n\geq 1}n^{2\varsigma}|\langle Z_n,\psi\rangle|^2}.$$

La série $\sum_{n\geq 1}|a_n|^2 n^{-2\varsigma}$ converge trivialement. Il en est de même de la seconde en utilisant la relation $(I-\Delta)^{\varsigma/2}Z_n = (1+n(n+d-1))^{\varsigma/2}Z_n$ et en faisant intervenir les espaces de Sobolev :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}n^{2\varsigma}|\langle Z_n,\psi\rangle|^2 &\lesssim_{\varsigma,d} \sum_{n\geq 1}|\langle (I-\Delta)^{\varsigma/2}Z_n,\psi\rangle|^2\\ &\lesssim_{\varsigma,d} \sum_{n\geq 1}|\langle Z_n,(I-\Delta)^{\varsigma/2}\psi\rangle|^2\\ &\lesssim_{\varsigma,d} \|(I-\Delta)^{\varsigma/2}\psi\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} := \|\psi\|_{H^\varsigma(\mathbb{S}^d)} < +\infty.\end{aligned}$$

On peut donc naturellement identifier la suite $(a_n Z_n)$ à la distribution $\sum_{n\geq 1}a_n Z_n$. Ainsi, l'espace $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$ sera vu comme un espace de distributions sur $\mathbb{S}^d$. Une injection de Sobolev est une inclusion de la forme $H^s \subset L^p$, il est donc légitime de définir une injection de Sobolev probabiliste comme une inclusion de la forme $H^s \subset \mathbf{PL}^p$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant (qui implique le théorème 1.1).

Proposition 3.1. *On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$ à croissance polynomiale. Pour tout réel $p \in \left]\frac{2d}{d-1}, +\infty\right[$, la distribution $\sum_{n\geq 1}a_n Z_n$ appartient à $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$ si et seulement si l'on a*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{d+1}}\left(\sum_{k=1}^n k^{d-1}|a_k|^2\right)^{\frac{p}{2}} < +\infty.$$

Les espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$ sont stables par interpolation réelle et complexe pour p parcourant $\left]\frac{2d}{d-1}, +\infty\right[$ au sens du théorème 2.5. Enfin, les injections de Sobolev probabilistes des fonctions Z_n sont *données par les inclusions*

$$H_{\mathrm{zon}}^{\frac{d-1}{2}-\frac{d}{p}}(\mathbb{S}^d) \subset \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C} Z_n\big) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} H_{\mathrm{zon}}^{\frac{d-1}{2}-\frac{d}{p}-\varepsilon}(\mathbb{S}^d), \tag{82}$$

où l'on note

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad H^s_{\mathrm{zon}}(\mathbb{S}^d) := \left\{ \sum_{n\geq 1} a_n Z_n \;\middle|\; \sum_{n\geq 1} n^{2s}|a_n|^2 < +\infty \right\} \subset H^s(\mathbb{S}^d).$$

De même, le théorème 1.2 découle du résultat suivant.

Proposition 3.2. *On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$ à croissance polynomiale. Pour tout réel $p \in]1, +\infty[$, la distribution $\sum_{n\geq 1} a_n Y_n$ appartient à $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C} Y_n\big)$ si et seulement si l'on a la condition*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{d+1}{2}}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{d-1}{2}} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty. \tag{83}$$

En outre, les espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C} Y_n\big)$ sont stables par dualité et interpolation réelle et complexe pour p parcourant $]1, +\infty[$ au sens des théorèmes 2.5 et 2.6.

Par dualité, on va obtenir gratuitement la moitié des injections de Sobolev probabilistes des fonctions Y_n. Par commodité, on note

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{H}^s(\mathbb{S}^d) := \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n Y_n \;\middle|\; \sum_{n\geq 1} n^{2s}|a_n|^2 < +\infty \right\} \subset H^s(\mathbb{S}^d).$$

Corollaire 3.3. *Considérons $p \in]2, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1} \in]1, 2[$. Nous avons les inclusions*

$$\widetilde{H}^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\mathbb{S}^d) \subset \mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus \mathbb{C} Y_n) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \widetilde{H}^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon}(\mathbb{S}^d),$$

$$\bigcup_{\varepsilon>0} \widetilde{H}^{\frac{-(d-1)}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})+\varepsilon}(\mathbb{S}^d) \subset \mathbf{PL}^q(\mathbb{S}^d, \oplus \mathbb{C} Y_n) \subset \widetilde{H}^{\frac{-(d-1)}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}(\mathbb{S}^d).$$

Pour conclure cette partie, remarquons que (82) et le corollaire 3.3 montrent l'optimalité de l'exposant $\delta(d, p)$ dans l'injection de Sobolev probabiliste de Tzvetkov (3). Comme expliqué dans l'introduction, cela est lié au fait que les fonctions Y_n et Z_n optimisent par leur concentration les normes dans $L^p(\mathbb{S}^d)$.

3B. ***Preuve de la proposition 3.2, randomisation des fonctions Y_n.*** Nous commençons par traiter les fonctions Y_n car les idées d'interpolation sont plus simples. Rappelons en quel sens la fonction Y_n se concentre de façon gaussienne sur une bande de largeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ autour de la géodésique $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. On part des inégalités

$$\forall \delta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{\delta^2}{2} \leq \cos(\delta) \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2}.$$

Le nombre

$$\delta = \mathcal{A}(x_1, x_2) := \arccos\Big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Big)$$

désigne la distance géodésique d'un point $x \in \mathbb{S}^d$ au cercle $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{S}^d$, puis la définition $Y_n(x) = c_{d,n}(x_1 + ix_2)^n$ et l'équivalent $c_{d,n} \simeq_d n^{\frac{d-1}{4}}$ assurent qu'il existe $C(d) > 1$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{S}^d, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{C(d)} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2) \le 1/\sqrt{n}\}} \le \frac{|Y_n(x)|}{n^{\frac{d-1}{4}}} \le C(d) e^{-\frac{1}{2} n \mathcal{A}(x_1,x_2)^2}. \tag{84}$$

L'idée que l'on doit garder à l'esprit est que l'on peut sous certaines conditions assimiler $|Y_n|$ à la fonction $\widetilde{Y}_n$ définie comme suit

$$\widetilde{Y}_n(x) := n^{\frac{d-1}{4}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2) \le 1/\sqrt{n}\}}.$$

Pour tout $p > 1$, on peut alors vérifier les équivalences

$$\|\widetilde{Y}_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \|Y_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}, \tag{85}$$

ce qui signifie que la concentration autour de la géodésique $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ est significative dans $L^p(\mathbb{S}^d)$.

Venons-en maintenant aux estimées multilinéaires des fonctions Y_n qui font *disparaître* la plus grande fréquence. Le résultat suivant énonce que les estimées multilinéaires des fonctions Y_n et $\widetilde{Y}_n$ sont équivalentes.

Lemme 3.4. *Pour tout entier $\alpha \ge 2$ et pour tous entiers naturels $n_1 \ge \cdots \ge n_\alpha \ge 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{n_1}(x) \cdots Y_{n_\alpha}(x)|^2 \, d\mu_d(x) \simeq_{d,\alpha} (n_2 \cdots n_\alpha)^{\frac{d-1}{2}},$$
$$\int_{\mathbb{S}^d} |\widetilde{Y}_{n_1}(x) \cdots \widetilde{Y}_{n_\alpha}(x)|^2 \, d\mu_d(x) \simeq_{d,\alpha} (n_2 \cdots n_\alpha)^{\frac{d-1}{2}}.$$

Démonstration. On va invoquer l'argument algébrique de [Burq et al. 2005, pages 5–8], on a pour tout $x \in \mathbb{S}^d$:

$$Y_{n_1}(x) \cdots Y_{n_\alpha}(x) = c_{d,n_1} \cdots c_{d,n_\alpha} (x_1 + ix_2)^{n_1 + \cdots + n_\alpha} = \frac{c_{d,n_1} \cdots c_{d,n_\alpha}}{c_{d,n_1+\cdots+n_\alpha}} Y_{n_1+\cdots+n_\alpha}(x).$$

Et donc

$$\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{n_1}(x) \ldots Y_{n_\alpha}(x)|^2 \, d\mu_d(x) = \left(\frac{c_{d,n_1} \ldots c_{d,n_\alpha}}{c_{d,n_1+\cdots+n_\alpha}} \right)^2 \simeq_{d,\alpha} \left(\frac{n_1 \ldots n_\alpha}{n_1 + \cdots + n_\alpha} \right)^{\frac{d-1}{2}}.$$

On conclut en invoquant les inégalités $n_1 \le n_1 + \cdots + n_\alpha \le \alpha n_1$.

Les intégrales multilinéaires des fonctions $\widetilde{Y}_n$ sont faciles à calculer l'aide d'une formule de changement de variables (voir plus loin (89)) en tenant compte que n_1 est le plus grand entier parmi $n_2, \ldots, n_\alpha$:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{S}^d} |\widetilde{Y}_{n_1}(x) \ldots \widetilde{Y}_{n_\alpha}(x)|^2 \, d\mu_d(x)}{(n_1 \cdots n_\alpha)^{\frac{d-1}{2}}} &= \int_{\mathbb{S}^d} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2) \le 1/\sqrt{n_1}\}} \, d\mu_d(x) \\
&= \mu_{d-2}(\mathbb{S}^{d-2}) \int_{x_1^2 + x_2^2 < 1} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{d-3}{2}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2) \le 1/\sqrt{n_1}\}} \, dx_1 \, dx_2 \\
&= \mu_{d-2}(\mathbb{S}^{d-2}) \int_{\cos(1/\sqrt{n_1})}^1 (1 - r^2)^{\frac{d-3}{2}} r \, dr
\end{aligned}$$

$$= \mu_{d-2}(\mathbb{S}^{d-2}) \int_0^{1/\sqrt{n_1}} \sin^{d-2}(u)\cos(u)\,du$$
$$\simeq_d 1/n_1^{\frac{d-1}{2}}, \tag{86}$$

qui donne le résultat. □

Proposition 3.5. *Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$ et pour toute suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$, on a*

$$\Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Y}_n|^2} \Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \Big[\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{d+1}{2}}} \Big(\sum_{k=1}^n k^{\frac{d-1}{2}} |a_k|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{S}^d$, il s'agit de décomposer en supports disjoints

$$\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Y}_n(x)|^2 = \sum_{n\geq 1} n^{\frac{d-1}{2}} |a_n|^2 \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2)\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}} = \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{k=1}^n k^{\frac{d-1}{2}} |a_k|^2 \Big) \mathbf{1}_{\{\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \mathcal{A}(x_1,x_2)\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}}.$$

En utilisant une expression de la forme $\sin^{d-2}(\xi)\cos(\xi) = \xi^{d-2} G(\xi^2)$ avec G fonction holomorphe, on peut assurer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ qui précise la formule (86) :

$$\int_{\mathbb{S}^d} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2)\leq 1/\sqrt{n}\}}\, d\mu_d(x) = \frac{\mu_{d-2}(\mathbb{S}^{d-2})}{n^{\frac{d-1}{2}}} \Big(1 + \frac{c}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big).$$

On conclut alors aisément. □

Le résultat suivant dit précisément que l'approximation de $|Y_n|$ par $\widetilde{Y}_n$ est légitime dans la théorie L^p probabiliste des modes propres Y_n.

Proposition 3.6. *Pour tout réel $p \in]1, +\infty[$ et pour toute suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$, on a*

$$\frac{1}{C(p,d)} \Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Y}_n|^2} \Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \leq \Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n Y_n|^2} \Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \leq C(p,d) \Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Y}_n|^2} \Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}. \tag{87}$$

Démonstration. Si $p = 2\alpha$ est un entier pair non nul, (87) découle du lemme 3.4 et des deux formules

$$\Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n Y_n|^2} \Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p = \sum_{n_1,\dots,n_\alpha} |a_{n_1} \dots a_{n_\alpha}|^2 \int_{\mathbb{S}^d} |Y_{n_1}(x) \dots Y_{n_\alpha}(x)|^2 \, d\mu_d(x),$$
$$\Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Y}_n|^2} \Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p = \sum_{n_1,\dots,n_\alpha} |a_{n_1} \dots a_{n_\alpha}|^2 \int_{\mathbb{S}^d} |\widetilde{Y}_{n_1}(x) \dots \widetilde{Y}_{n_\alpha}(x)|^2 \, d\mu_d(x).$$

Pour assurer que l'équivalence (87) est encore valide pour tout $p \geq 2$, il nous suffit de prouver que les espaces $\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus\mathbb{C}Y_n)$ et $\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus\mathbb{C}\widetilde{Y}_n)$ sont stables par interpolation au sens du théorème 2.5. Pour conclure, il suffira d'invoquer un argument de dualité (grâce au théorème 2.6). En effet, pour la dualité on aurait pour $q = \frac{p}{p-1}$:

$$\Big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Y}_n|^2} \Big\|_{L^q(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \sup_{(b_n)_{n\geq 1}\neq 0} \frac{\big| \sum_{n\geq 1} \langle a_n \widetilde{Y}_n, b_n \widetilde{Y}_n \rangle \big|}{\big\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |b_n \widetilde{Y}_n|^2} \big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}}.$$

Quitte à remplacer b_n par $b_n/\|\widetilde{Y}_n\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}$ et en remarquant l'équivalence $\|\widetilde{Y}_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} \simeq_d 1$ (voir (85)), l'expression précédente devient

$$\begin{aligned}
\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Y}_n|^2}\Big\|_{L^q(\mathbb{S}^d)} &\simeq_{d,p} \sup_{(b_n)_{n\geq 1}\neq 0} \frac{\big|\sum_{n\geq 1} a_n b_n\big|}{\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|b_n\widetilde{Y}_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}} \\
&\simeq_{d,p} \sup_{(b_n)_{n\geq 1}\neq 0} \frac{\big|\sum_{n\geq 1} a_n b_n\big|}{\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|b_n Y_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}} \\
&\simeq_{d,p} \Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n Y_n|^2}\Big\|_{L^q(\mathbb{S}^d)}.
\end{aligned}$$

Validons maintenant les hypothèses des théorèmes d'interpolation et dualité. En examinant (85) et en se rappelant que $\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ change de signe en remplaçant p par son exposant conjugué $\frac{p}{p-1}$, on comprend que l'hypothèse (37) est vérifiée avec $\sqrt{e_n(x)} = |Y_n(x)|$ et $\sqrt{e_n(x)} = \|\widetilde{Y}_n\|^{-1}_{L^2(\mathbb{S}^d)}\widetilde{Y}_n(x)$.

Quant à l'hypothèse (35), elle va s'avérer être une conséquence de la concentration gaussienne des fonctions Y_n. En effet, grâce à (84) et (85), nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{S}^d$,

$$\frac{|Y_n(x)|}{\|Y_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}} \leq C(d,p) n^{\frac{d-1}{2p}} e^{-\frac{n}{2}\mathcal{A}(x_1,x_2)^2} \leq \frac{C(d,p)}{\mathcal{A}(x_1,x_2)^{\frac{d-1}{p}}}.$$

Et il se trouve que $x \mapsto \mathcal{A}(x_1,x_2)^{-\frac{(d-1)}{p}}$ appartient à l'espace de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)$, ou ce qui revient au même que $x \mapsto \mathcal{A}(x_1,x_2)^{-(d-1)}$ appartient à $L^{1,\infty}(\mathbb{S}^d)$: la formule de changement de variables (89) donne pour tout $t > 1$

$$\begin{aligned}
\mu_d\{x \in \mathbb{S}^d \mid \mathcal{A}(x_1,x_2)^{-(d-1)} > t\} &\simeq_d \int_{x_1^2+x_2^2<1} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{d-3}{2}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2)^{-(d-1)}>t\}}\, dx_1\, dx_2 \\
&\simeq_d \int_{\cos(t^{-1/(d-1)})}^1 (1-r^2)^{\frac{d-3}{2}} r\, dr \\
&\simeq_d \int_{\cos(t^{-1/(d-1)})}^1 (1-r)^{\frac{d-3}{2}}\, dr \\
&\simeq_d [1-\cos(t^{-1/(d-1)})]^{\frac{d-1}{2}} \\
&\lesssim_d \frac{1}{t}.
\end{aligned} \tag{88}$$

Comme $\mu_d(\mathbb{S}^d)$ est fini, l'estimation précédente est aussi valide si t appartient à $]0,1]$. □

Remarque 3.7. Concernant l'hypothèse (35), l'intérêt des espaces de Lorentz est désormais flagrant. En effet, en utilisant la minoration de (84), nous arrivons à

$$\forall x \in \mathbb{S}^d, \quad \sup_{n\geq 1} \frac{|Y_n(x)|^p}{\|Y_n\|^p_{L^p(\mathbb{S}^d)}} \geq C(d,p) \sup_{n\geq 1} n^{\frac{d-1}{2}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{A}(x_1,x_2)\leq 1/\sqrt{n}\}} \geq C(d,p)\mathcal{A}(x_1,x_2)^{-(d-1)}.$$

Or (88) est une équivalence si t tend vers $+\infty$. Cela implique que $x \mapsto \mathcal{A}(x_1, x_2)^{-(d-1)}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{S}^d$. Il s'ensuit que $\sup_{n\geq 1} |Y_n|/\|Y_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}$ n'appartient pas à $L^p(\mathbb{S}^d)$.

La proposition 3.2 est alors une conséquence des propositions 3.5 et 3.6 et des théorèmes 2.5 et 2.6. On conclut avec une formule standard de changement de variables.

Proposition 3.8. *Considérons un entier naturel $k \in [1, d]$ et une fonction intégrable $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{C}$ qui ne dépend que des k premières coordonnées $y = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. En notant $\widetilde{f}(y)$ la valeur commune des nombres $f(y, z)$ pour $(y, z) \in \mathbb{S}^d$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(x)\, d\mu_d(x) = \mu_{d-k}(\mathbb{S}^{d-k}) \int_{\mathbb{B}_k(0,1)} \widetilde{f}(y)(1-|y|^2)^{\frac{d-k-1}{2}}\, dy, \tag{89}$$

où l'on a noté $\mathbb{B}_k(0, 1) := \{y \in \mathbb{R}^k, |y| < 1\}$. Dans le cas $k = d$, on convient que $\mu_0(\mathbb{S}^0) = 2$.

Démonstration. On donne les principales lignes la preuve du cas $k \leq d-1$. Le cas $k = d$ se traite de même. On introduit le changement de variables

$$\Psi : \mathbb{B}_k(0, 1)\backslash\{0\} \times \mathbb{S}^{d-k} \to \mathbb{S}^d, \quad (y, u) \mapsto (y, (1-|y|^2)^{\frac{1}{2}} u)$$

dont la différentielle au point (y, u) est l'application linéaire

$$D_{(y,u)}\Psi : \mathbb{R}^k \times T_u\mathbb{S}^{d-k} \to T_{\Psi(y,u)}\mathbb{S}^d, \quad (\eta, w) \mapsto \left(\eta, \frac{-\langle y, \eta\rangle}{\sqrt{1-|y|^2}} u + (1-|y|^2)^{\frac{1}{2}} w\right).$$

L'injectivité de Ψ et l'inversibilité de $D_{(y,u)}\Psi$ pour tout (y, u) sont immédiates de sorte que le théorème d'inversion globale sur les variétés montre que Ψ est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image (qui est de mesure pleine dans $\mathbb{S}^d$). Il nous reste à étudier le transport des formes volumes. Considérons d'abord dans $\mathbb{R}^k$ une base orthonormée de la forme $\frac{y}{|y|}, \overrightarrow{\xi_2}, \ldots, \overrightarrow{\xi_k}$, puis dans $T_u\mathbb{S}^{d-k}$ une base orthonormée quelconque $\overrightarrow{\vartheta_1}, \ldots, \overrightarrow{\vartheta_{d-k}}$. Ainsi,

$$\left(\frac{y}{|y|}, 0\right), (\overrightarrow{\xi_2}, 0), \ldots, (\overrightarrow{\xi_k}, 0), (0, \overrightarrow{\vartheta_1}), \ldots, (0, \overrightarrow{\vartheta_{d-k}})$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^k \times T_u\mathbb{S}^{d-k}$. Il s'avère que cette base orthonormée est envoyée sur une famille orthogonale de l'espace tangent $T_{\Psi(y,u)}\mathbb{S}^d$:

$$D_{(y,u)}\Psi\left(\frac{y}{|y|}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}\left(\frac{y}{|y|}\sqrt{1-|y|^2}, -|y|u\right),$$

$$2 \leq i \leq k, \qquad D_{(y,u)}\Psi(\overrightarrow{\xi_i}, 0) = (\overrightarrow{\xi_i}, 0),$$

$$1 \leq j \leq d-k, \qquad D_{(y,u)}\Psi(0, \overrightarrow{\vartheta_j}) = \sqrt{1-|y|^2}(0, \overrightarrow{\vartheta_j}).$$

Par conséquent, $D_{(y,u)}\Psi$ multiplie localement les volumes par $(1-|y|^2)^{\frac{d-k-1}{2}}$. Le changement de variables $x=\Psi(y,u)$ nous amène à la formule

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} f(x)\,d\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{B}_k(0,1)\times\mathbb{S}^{d-k}} f\Big(y,u\sqrt{1-|y|^2}\Big)(1-|y|^2)^{\frac{d-k-1}{2}}\,dy\,d\mu_{d-k}(u)\\ &= \mu_{d-k}(\mathbb{S}^{d-k})\int_{\mathbb{B}_k(0,1)} \tilde{f}(y)(1-|y|^2)^{\frac{d-k-1}{2}}\,dy.\end{aligned}$$ □

3C. *Preuve du corollaire 3.3, injections de Sobolev probabilistes des fonctions Y_n.* Nous avons vu dans la preuve de la proposition 3.6 que les espaces $\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}Y_n)$ sont stables par dualité. Comme il en est de même des espaces de Sobolev, on peut se restreindre au cas $p>2$.

L'inégalité triangulaire (2) et les estimations (10) donnent immédiatement l'inclusion

$$\widetilde{H}^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\mathbb{S}^d)\subset\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}Y_n\big).$$

Montrons maintenant l'inclusion

$$\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}Y_n\big)\subset\bigcap_{\varepsilon>0}\widetilde{H}^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon}(\mathbb{S}^d).$$

Autrement dit, pour toute distribution $u=\sum_{n\geq1}a_nY_n$, il s'agit de vérifier l'inégalité suivante

$$\|u\|_{H^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbb{S}^d)}\lesssim_{d,p,\varepsilon}\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}Y_n)}.$$

On pose $S_0=0$ et $S_n=\sum_{k=1}^n k^{\frac{d-1}{2}}|a_k|^2$ pour tout $n\geq1$. En utilisant une transformation d'Abel et une inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbb{S}^d)} &= \sum_{n\geq1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-\varepsilon}|a_n|^2\\ &= \sum_{n\geq1} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon-(\frac{d-1}{2})}[S_n-S_{n-1}]\\ &= \sum_{n\geq1} n^{-\frac{(d-1)}{p}-\varepsilon}[S_n-S_{n-1}]\\ &\lesssim_{d,p,\varepsilon} \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n^{\frac{(d-1)}{p}+1+\varepsilon}}+\sup_{N\geq1}\frac{S_N}{N^{\frac{(d-1)}{p}+\varepsilon}}\\ &\lesssim_{d,p,\varepsilon} \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n^{\frac{(d-1)}{p}+1+\varepsilon}}+\sup_{N\geq1}\sum_{n>N}\frac{S_n}{n^{\frac{(d-1)}{p}+1+\varepsilon}}\\ &\lesssim_{d,p,\varepsilon} \sum_{n\geq1}\frac{S_n}{n^{\frac{(d-1)}{p}+1+\varepsilon}}\\ &\lesssim_{d,p,\varepsilon} \sum_{n\geq1}\frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}+\varepsilon}}\times\frac{S_n}{n^{\frac{d+1}{p}}}\lesssim_{d,p,\varepsilon}\Bigg(\sum_{n\geq1}\frac{S_n^{\frac{p}{2}}}{n^{\frac{d+1}{2}}}\Bigg)^{\frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

3D. ***Normes L^p des fonctions zonales.*** Parmi les modes propres de Δ, les fonctions Z_n sont connues pour maximiser la croissance des quotients $\|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}/\|Z_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)}$ si n tend vers $+\infty$ avec $p \geq 2(d+1)/(d-1)$ (et cela est même optimal d'après les inégalités de Sogge (4)). En l'occurrence, la formule de changement de variables (89) donne

$$\|Z_n\|^p_{L^p(\mathbb{S}^d)} = \int_{\mathbb{S}^d} |Z_n(x)|^p \, d\mu_d(x) = \mu_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \times n^{\frac{p}{2}} \int_{-1}^{1} \left|P_n^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(x_1)\right|^p (1-x_1^2)^{\frac{d-2}{2}} \, dx_1,$$

puis [Szegő 1975, page 391] nous fournit les estimations des normes (6).

3E. ***Preuve de la proposition 3.1, randomisation des fonctions zonales Z_n.*** La description des espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$ est plus délicate que celle des espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Y_n\big)$ car on ne peut pas raisonner par interpolation complexe en faisant parcourir p dans $2\mathbb{N}$. Cela dit, une fois cette description obtenue, les injections de Sobolev probabilistes (82) des fonctions Z_n se démontrent de façon rigoureusement semblable à celle des fonctions Y_n du corollaire 3.3 et l'on se permet d'en omettre la preuve. Avant d'expliquer plus en détail la difficulté rencontrée dans cette preuve par rapport à celle de la proposition 3.2, commençons par rappeler les estimations précises des polynômes de Jacobi.

Lemme 3.9. *Pour tout $\alpha > -1$, il existe des constantes $c = c(\alpha) \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$ et $C(\alpha) \geq 1$ de sorte que pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ l'on a*

$$\Theta \in \left[0, \frac{c}{n}\right] \cup \left[\pi - \frac{c}{n}, \pi\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{n^\alpha}{C(\alpha)} \leq |P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos(\Theta))| \leq C(\alpha) n^\alpha. \tag{90}$$

On note ensuite $N = n + \alpha + \frac{1}{2}$ et $\varrho = \frac{\pi}{2}\big(\alpha + \frac{1}{2}\big)$. Si Θ appartient à $[\frac{c}{n}, \pi - \frac{c}{n}]$ alors

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos(\Theta)) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi n}(\sin \Theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left[\cos(N\Theta - \varrho) + \frac{\mathcal{O}_\alpha(1)}{n \sin(\Theta)}\right], \tag{91}$$

où le terme $\mathcal{O}_\alpha(1)$ vérifie $|\mathcal{O}_\alpha(1)| \leq C(\alpha)$.

Démonstration. Ces estimées découlent des formules (4.1.3), (4.21.7), (7.32.5) et (8.21.18) du livre [Szegő 1975]. La formule (4.1.3) nous donne $P_n^{(\alpha,\alpha)}(-x_1) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_1)$, ce qui nous ramène au cas $\Theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$. D'une part, on a toujours

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \geq \frac{n^\alpha}{C(\alpha)}.$$

Pour tout $x_1 \in [1 - 1/n^2, 1]$, on peut estimer grâce aux formules (4.21.7) page 63 et (7.32.5) page 169 :

$$\left|\frac{d}{dx_1} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_1)\right| = \tfrac{1}{2}\left|(n+2\alpha+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\alpha+1)}(x_1)\right| \leq C(\alpha) n^{\alpha+2}.$$

Choisissons $c(\alpha) = 1/(2C(\alpha)^2)$ de sorte que $1/C(\alpha) - c(\alpha)C(\alpha) = 1/(2C(\alpha))$. On a

$$1 - \frac{c(\alpha)}{n^2} \leq x_1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_1) \geq \frac{n^\alpha}{2C(\alpha)}.$$

De nouveau, d'après la formule (7.32.5) de la page 169 et quitte à augmenter $C(\alpha) > 1$, on a aussi $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_1) \leq C(\alpha) n^\alpha$. Cela nous donne (90). Quant à (91), c'est la formule (8.21.18) de la page 198. $\square$

Dans la suite, on notera

$$\Theta := \arccos(x_1) \in [0, \pi]$$

la distance géodésique d'un point $x \in \mathbb{S}^d$ au pôle $(1, 0, \ldots, 0)$. D'après (5), (90), (91) avec $\alpha = \frac{d-2}{2}$, on a

$$\Theta \in \left[0, \frac{c}{n}\right] \cup \left[\pi - \frac{c}{n}, \pi\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{n^{\frac{d-1}{2}}}{C(d)} \leq |Z_n(x)| \leq C(d) n^{\frac{d-1}{2}}, \tag{92}$$

$$\Theta \in \left]\frac{c}{n}, \pi - \frac{c}{n}\right[\quad \Rightarrow \quad |Z_n(x)| \leq \frac{C(d)}{\sin(\Theta)^{\frac{d-1}{2}}}. \tag{93}$$

C'est d'ailleurs avec ces estimations que l'on peut obtenir les estimations (6) des normes dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ des fonctions Z_n. Ces dernières disent que seule la concentration au voisinage des pôles est significative dans l'échelle des espaces $L^p(\mathbb{S}^d)$, avec $p > \frac{2d}{d-1}$. Il est donc naturel de comparer Z_n à sa restriction $\widetilde{Z}_n$ au voisinage du pôle $(1, 0, \ldots, 0)$:

$$\widetilde{Z}_n(x) := \mathbf{1}_{[0, \frac{c}{n}]}(\Theta) \times Z_n(x).$$

La fonction $\widetilde{Z}_n$ se concentre sur une boule de centre $(1, 0, \ldots, 0)$ de rayon $\frac{c}{n}$ et avec une amplitude d'ordre $n^{(d-1)/2}$. La preuve de la proposition 3.2 consistait à comparer $|Y_n|$ à sa restriction $\widetilde{Y}_n$ autour d'une géodésique. Le lemme 3.4 assurait alors que les fonctions $|Y_n|$ ont les mêmes estimations multilinéaires que les fonctions $\widetilde{Y}_n$. Malheureusement, il est illusoire de refaire le même argument en approchant les fonctions Z_n par les fonctions $\widetilde{Z}_n$ par exemple pour étudier l'espace $\mathbf{PL}^6(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C} Z_n)$. Utilisant l'équivalent $\|Z_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} \simeq_d 1$, (92) et [Burq et al. 2005, page 8], nous avons en effet pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\widetilde{Z}_1(x)|^4 |\widetilde{Z}_n(x)|^2 \, d\mu_d(x) \leq C(d) \int_{\mathbb{S}^d} |\widetilde{Z}_n(x)|^2 \, d\mu_d(x) \leq \frac{C(d)}{n} \ll \int_{\mathbb{S}^d} |Z_1(x)|^4 |Z_n(x)|^2 \, d\mu_d(x).$$

L'estimation précédente est une manifestation de la mauvaise qualité de l'approximation de Z_n par $\widetilde{Z}_n$ dans $L^2(\mathbb{S}^d)$, phénomène qui ne se produit pas pour les fonctions Y_n. On ne dispose donc pas d'un résultat analogue au lemme 3.4. Cela nous oblige à raisonner différemment.

Proposition 3.10. *Pour tout réel $p > \frac{2d}{d-1}$, il existe une constante $C(p, d) \geq 1$ telle que pour toute suite complexe $(a_n)_{n \geq 1}$ et tout $x \in \mathbb{S}^d$ vérifiant $\Theta(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a*

$$\sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n(x)|^2} \leq C(p, d) \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n(x)|^2} + \frac{C(p, d)}{\sin^{\frac{d}{p}}(\Theta)} \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}. \tag{94}$$

Par conséquent, on a

$$\left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)} \leq C(p, d) \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}. \tag{95}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que la suite (a_n) n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. L'idée consiste essentiellement à décomposer les différentes fonctions en jeu en somme de fonctions à supports disjoints deux à deux. La formule de changement de variables (89) donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} \mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)\, d\mu_d(x) &= \mu_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^{1} \mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)(1-x_1^2)^{\frac{d-2}{2}}\, dx_1 \\ &= \mu_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{0}^{\pi} \mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta) \sin(\Theta)^{d-1}\, d\Theta \\ &\simeq_d \frac{1}{n^{d+1}}.\end{aligned}$$

En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{d-1}|a_k|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons grâce à (92),

$$\sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n(x)|^2} \simeq_d \sqrt{\sum_{n\geq 1} n^{d-1}|a_n|^2 \mathbf{1}_{[0,\frac{c}{n}]}(\Theta)} \simeq_d \sum_{n\geq 1} \sqrt{S_n}\mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta), \tag{96}$$

et donc

$$\left\| \sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n \widetilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \left(\sum_{n\geq 1} S_n^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{S}^d} \mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)\, d\mu_d(x) \right)^{\frac{1}{p}} \simeq_{d,p} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{S_n^{\frac{p}{2}}}{n^{d+1}} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{97}$$

On peut maintenant estimer $Z_n(x) - \widetilde{Z}_n(x)$. En tenant compte de (93) et du fait que $\Theta(x)$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 |Z_n(x) - \widetilde{Z}_n(x)|^2} &\lesssim_d \left(\sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{1}_{]c,\frac{\pi}{2}]}(\Theta)}{\sin(\Theta)^{\frac{d-1}{2}}} + \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k>n} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)}{\sin(\Theta)^{\frac{d-1}{2}}} \\ &\lesssim_d \underbrace{\left(\sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{]c,\frac{\pi}{2}]}(\Theta)}_{:=A_1(\Theta)} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} \left(n^{d-1} \sum_{k>n} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)}_{:=A_2(\Theta)}.\end{aligned}$$

On va faire quelques calculs avant d'attaquer l'estimation des termes $A_1(\Theta)$ et $A_2(\Theta)$. En convenant que $S_0 = 0$, nous pouvons effectuer une transformation d'Abel pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k>n} |a_k|^2 = \sum_{k>n} \frac{k^{d-1}|a_k|^2}{k^{d-1}} = \frac{-S_n}{(n+1)^{d-1}} + \sum_{k>n} \left(\frac{1}{k^{d-1}} - \frac{1}{(k+1)^{d-1}} \right) S_k. \tag{98}$$

Puisque la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est bornée et la dernière série converge bien. On va exploiter l'inégalité $p > \frac{2d}{d-1}$, ou encore

$$\left(d - \frac{2(d+1)}{p} \right) \frac{p}{p-2} = d - \frac{2}{p-2} > 1.$$

L'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{p}{p-2}$, $\frac{p}{2}$:

$$(n+1)^{d-1} \sum_{k>n} \frac{S_k}{k^d} \leq (n+1)^{d-1} \sum_{k>n} \overbrace{\frac{1}{k^{d-\frac{2(d+1)}{p}}}}^{\in \ell^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{N})} \times \frac{S_k}{k^{\frac{2(d+1)}{p}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (n+1)^{d-1}\Big(\sum_{k>n}\frac{1}{k^{d-\frac{2}{p-2}}}\Big)^{\frac{p-2}{p}}\Big(\sum_{k>n}\frac{S_k^{\frac{p}{2}}}{k^{d+1}}\Big)^{\frac{2}{p}}\\
&\lesssim_{d,p}\frac{(n+1)^{d-1}}{(n+1)^{\frac{p-2}{p}(d-\frac{2}{p-2}-1)}}\Big(\sum_{k>n}\frac{S_k^{\frac{p}{2}}}{k^{d+1}}\Big)^{\frac{2}{p}}\\
&\lesssim_{d,p}(n+1)^{\frac{2d}{p}}\Big(\sum_{k>n}\frac{S_k^{\frac{p}{2}}}{k^{d+1}}\Big)^{\frac{2}{p}} &&(99)\\
&\lesssim_{d,p}(n+1)^{\frac{2d}{p}}\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|^2_{L^p(\mathbb{S}^d)}, &&(100)
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé (97). On peut alors contrôler $A_1(\Theta)$ avec (98) et (100) pour $n=0$:

$$A_1(\Theta)=\sqrt{\sum_{k\geq 1}|a_k|^2}\times\mathbf{1}_{]c,\frac{\pi}{2}[}(\Theta)\lesssim_{d,p}\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}\frac{1}{\sin^{d/p}(\Theta)}.$$

Pour contrôler $A_2(\Theta)$, on utilise (96), (98) et (100) :

$$
\begin{aligned}
A_2(\Theta)&\lesssim_{d,p}\sum_{n\geq 1}\sqrt{S_n}\mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)+\sum_{n\geq 1}n^{\frac{d}{p}}\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}\mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)\\
&\lesssim_{d,p}\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n(x)|^2}+\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}\frac{1}{\sin^{d/p}(\Theta)}.
\end{aligned}
$$

On a donc obtenu (94). Passons à l'inégalité (95). Comme les polynômes de Jacobi sont pairs ou impairs, les fonctions $x\mapsto|Z_n(x)|$ sont invariantes par la transformation $\Theta(x)\to\pi-\Theta(x)$. Se rappelant que $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)}$ n'est pas une norme, on sait qu'il existe néanmoins une constante universelle $C\geq 1$ telle que

$$\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_nZ_n|^2}\Big\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)}\leq C\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_nZ_n|^2}\times\mathbf{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(\Theta)\Big\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)}.$$

Pour obtenir l'estimation (94) à partir de (95), on remarque d'une part l'inégalité triviale

$$\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)}\leq\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)},$$

d'autre part que la fonction $x\mapsto\sin(\Theta(x))^{-d/p}$ appartient à $L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)$. Cela peut se vérifier avec la formule de changement de variable (89) mais il est plus simple de remarquer que sur un voisinage $\mathcal{V}$ du pôle $(1,0,\dots 0)\in\mathbb{S}^d$ nous avons l'équivalent $\sin(\Theta)^{-d/p}\sim\Theta^{-d/p}$ et que la mesure de $\mathbb{S}^d$ sur $\mathcal{V}$ est comparable à la mesure de Lebesgue d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^d$. $\square$

Si l'on essaie d'estimer directement la norme dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ de $\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_nZ_n|^2}$ en comparant Z_n avec $\widetilde{Z}_n$ à l'aide de (92) et (93), alors la preuve précédente montre que l'on commet une perte avec l'inégalité de Hölder. De façon précise, après application de l'inégalité de Hölder, la formule (99) et le contrôle de $\|A_2(\Theta)\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}$ conduisent aux inégalités

$$\Big\|\sum_{n\geq 1} n^{\frac{d}{p}}\Big(\sum_{k>n}\frac{S_k^{\frac{p}{2}}}{k^{d+1}}\Big)^{\frac{1}{p}}\mathbf{1}_{]\frac{c}{n+1},\frac{c}{n}]}(\Theta)\Big\|^p_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \sum_{n\geq 1}\frac{n^{\frac{d}{p}p}}{n^{d+1}}\sum_{k>n}\frac{S_k^{\frac{p}{2}}}{k^{d+1}} \simeq_{d,p} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{k>n}\frac{S_k^{\frac{p}{2}}}{k^{d+1}} \simeq_{d,p} \sum_{k\geq 1}\frac{\ln(k+1)}{k^{d+1}}S_k^{\frac{p}{2}}.$$

Par comparaison avec (97), l'estimation précédente est mauvaise en raison du terme logarithmique. Un argument d'interpolation réelle bien connu va nous permettre de corriger le facteur logarithmique. C'est maintenant que le théorème 2.5 intervient via le lemme suivant.

Lemme 3.11. *La famille d'espaces de Banach $\big(\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}\widetilde{Z}_n)\big)_{p\in]1,+\infty[}$ est stable par interpolation réelle au sens du théorème 2.5.*

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème 2.5 avec

$$E_n=\mathbb{C}\widetilde{Z}_n \quad \text{et} \quad \sqrt{e_n(x)}=\frac{|\widetilde{Z}_n(x)|}{\|\widetilde{Z}_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)}}.$$

D'une part, on a le comportement asymptotique

$$\forall p>1, \quad \|\widetilde{Z}_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}\simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2}-\frac{d}{p}},$$

ce qui nous assure la validité de (36). Quant à l'hypothèse (35), on peut écrire d'après (92) :

$$\forall x\in\mathbb{S}^d, \quad \sup_{n\geq 1}\frac{|\widetilde{Z}_n(x)|}{\|\widetilde{Z}_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}}\leq C(d,p)\sup_{n\geq 1}\frac{|\widetilde{Z}_n(x)|}{n^{\frac{d-1}{2}-\frac{d}{p}}}=C(d,p)\sup_{n\geq 1}n^{d/p}\mathbf{1}_{[0,\frac{c}{n}]}(\Theta)\leq\frac{C(d,p)}{\sin(\Theta)^{d/p}}.$$

Or l'on a remarqué à la fin de la proposition 3.10 que la fonction $x\mapsto\sin(\Theta)^{-d/p}$ appartient à $L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d)$. □

Nous sommes en mesure d'obtenir la partie de la proposition 3.1 qui décrit $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}Z_n\big)$.

Proposition 3.12. *Pour tout réel $p>\frac{2d}{d-1}$, et pour toute suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$ on a*

$$\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_n\widetilde{Z}_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}\simeq_{d,p}\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_nZ_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}. \tag{101}$$

En outre, on a

$$\Big\|\sqrt{\sum_{n\geq 1}|a_nZ_n|^2}\Big\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}\simeq_{d,p}\Big[\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{d+1}}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^{d-1}|a_k|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]^{\frac{1}{p}}. \tag{102}$$

Démonstration. L'équivalence (102) découlera de (97) et (101). Montrons donc (101). L'inégalité $|\widetilde{Z}_n|\leq|Z_n|$ donne un sens de l'équivalence (101). L'autre sens équivaut à la bornitude de l'opérateur :

$$\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d,\bigoplus\mathbb{C}\widetilde{Z}_n\big)\to L^p(\mathbb{S}^d,\ell^2(\mathbb{N}^\star)), \quad (a_n\widetilde{Z}_n)_{n\geq 1}\mapsto(a_nZ_n)_{n\geq 1}.$$

L'inégalité (95) de la proposition 3.10 montre, pour tout $p > \frac{2d}{d-1}$, la continuité de l'opérateur

$$\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}\widetilde{Z}_n\big) \to L^{p,\infty}(\mathbb{S}^d, \ell^2(\mathbb{N}^\star)), \quad (a_n \widetilde{Z}_n)_{n\geq 1} \mapsto (a_n Z_n)_{n\geq 1}.$$

À présent, il s'agit de raisonner par interpolation réelle. Fixons deux réels p_1' et p_2' tels que

$$\frac{2d}{d-1} < p_1' < p < p_2'.$$

Considérons de plus l'unique réel $\theta' \in [0, 1]$ tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta'}{p_1'} + \frac{\theta'}{p_2'}.$$

Par application de la méthode d'interpolation réelle $[\cdot, \cdot]_{\theta',p}$, l'opérateur suivant est borné :

$$\big[\mathbf{PL}^{p_1'}\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}\widetilde{Z}_n\big), \mathbf{PL}^{p_2'}\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}\widetilde{Z}_n\big)\big]_{\theta',p} \to \big[L_x^{p_1',\infty}(\mathbb{S}^d, \ell^2(\mathbb{N}^\star)), L^{p_2',\infty}(\mathbb{S}^d, \ell^2(\mathbb{N}^\star))\big]_{\theta',p}$$
$$(a_n \widetilde{Z}_n)_{n\geq 1} \mapsto (a_n Z_n)_{n\geq 1}.$$

L'espace de départ s'identifie à $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}\widetilde{Z}_n\big)$ d'après le lemme 3.11. Quant à l'espace d'arrivée, il s'identifie à $L_x^p(\mathbb{S}^d, \ell^2(\mathbb{N}^\star))$ d'après le théorème 2.32. Cela prouve (101). □

En apparence, on n'a pas montré l'interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$. La preuve de la proposition suivante montre en fait que cela est inclus dans l'inégalité (94).

Proposition 3.13. *Les espaces* $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$ *sont stables par interpolation réelle et complexe pour* p *parcourant* $\big]\frac{2d}{d-1}, +\infty\big[$ *au sens du théorème 2.5.*

Démonstration. On peut donner deux preuves. La proposition 3.12 montre que les espaces

$$\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big) \quad \text{et} \quad \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}\widetilde{Z}_n\big)$$

sont isomorphes pour tout $p > \frac{2d}{d-1}$. Le lemme 3.11, qui contient aussi dans sa preuve l'interpolation complexe, donne alors la conclusion.

La seconde preuve utilise aussi la démonstration du lemme 3.11 avec l'argument additionnel suivant. D'après (94), on a pour tout $x \in \mathbb{S}^d$ vérifiant $\Theta(x) \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$,

$$|Z_n(x)| \leq C(d,p)|\widetilde{Z}_n(x)| + \frac{C(d,p)}{\sin^{d/p}(\Theta)}\|\widetilde{Z}_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}.$$

La symétrie $\Theta(x) \leftrightarrow \pi - \Theta(x)$ et le fait que $\sin^{-d}(\Theta)$ appartient à $L^{1,\infty}(\mathbb{S}^d)$ nous donnent

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{|Z_n(x)|}{\|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}} \in L_x^{p,\infty}(\mathbb{S}^d).$$

On conclut par application du théorème 2.5 pour les espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$. □

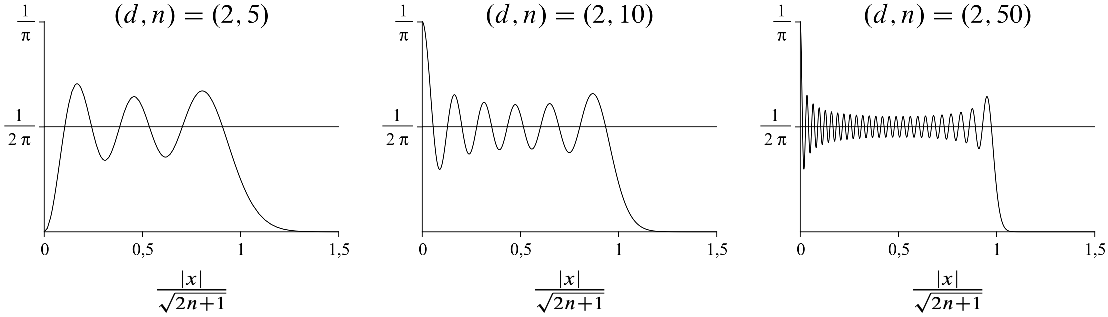


Figure 2. Graphes de la fonction $x \mapsto e_{d,n}(x)$.

4. Espaces $\mathbf{PL}^p$ pour l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^d$

4A. ***Reformulation des énoncés.*** On reprend les notations de la partie 1C. En particulier les résultats énoncés sont valides uniquement en dimension $d \geq 2$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'étude de l'espace $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$ passe par la compréhension de la localisation des fonctions

$$\begin{aligned} e_{d,n}(x) &:= \sup\big\{|u_n(x)|^2 \mid u_n \in E_{d,n},\ \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1\big\} \\ &= \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_d)\in\mathbb{N}^d \\ i_1+\cdots+i_d=n}} h_{i_1}(x_1)^2 \cdots h_{i_d}(x_d)^2. \end{aligned} \tag{103}$$

Suivant l'idée selon laquelle seule la concentration de $e_{d,n}$ devrait être significative, on démontre le résultat suivant.

Proposition 4.1. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\begin{aligned} |x| \leq \sqrt{2(2n+1)} \quad &\Rightarrow \quad e_{d,n}(x) \leq C(d) n^{\frac{d}{2}-1}, \\ |x| \geq \sqrt{2(2n+1)} \quad &\Rightarrow \quad e_{d,n}(x) \leq C(d) e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}}. \end{aligned} \tag{104}$$

Il existe aussi une constante universelle $\alpha \in]0,1[$ et un entier $n(d) \in \mathbb{N}^\star$ tels que pour tout entier $n \geq n(d)$ on a, quitte à augmenter $C(d) \geq 1$, l'implication

$$\frac{C(d)}{\sqrt{2n+1}} \leq |x| \leq \alpha\sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{C(d)} \leq e_{d,n}(x) \leq C(d) n^{\frac{d}{2}-1}. \tag{105}$$

On justifiera plus loin que la fonction $x \mapsto e_{d,n}(x)$ est invariante par rotation autour de 0, si bien que l'on a $e_{d,n}(x) = e_{d,n}((|x|, 0, \dots, 0))$. À titre d'exemple, on examine à la figure 2 les graphes pour $d = 2$ et $n \in \{5, 10, 50\}$ de $e_{d,n}(x)$ en fonction de $|x| \in \big[0, \frac{3}{2}\sqrt{2n+1}\big]$.

La majoration (104) est grossière et est obtenue grâce à des majorations classiques des fonctions de Hermite. Quant à la minoration de (105), sa démonstration est plus subtile et utilise des approximations essentiellement optimales des fonctions de Hermite dues à Muckhenhoupt. On notera que nous sommes obligés d'éviter, en toute rigueur, un voisinage de l'origine pour effectuer une minoration uniforme de $e_{d,n}$. En effet, pour tout entier n impair la fonction h_n est impaire et donc $e_{d,n}(0)$ est nul.

Après la rédaction de cet article, Didier Robert nous a signalé le lemme 10 de l'article [Hanin et al. 2015] dans lequel se trouvent des estimations plus précises si $|x|$ appartient à un compact de la forme $[a\sqrt{2n+d}, b\sqrt{2n+d}]$ avec $0 < a < b < 1$. Par souci de comparaison, on se permet d'écrire cette approximation :

$$e_{d,n}(x) = \frac{\mu_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})}{(2\pi)^d}(2n+d-|x|^2)^{\frac{d}{2}-1}\Big(1+\mathcal{O}_{a,b}\Big(\frac{1}{2n+d}\Big)\Big),$$

où $\mathcal{O}_{a,b}$ est uniforme en la condition $a \leq |x|/\sqrt{2n+d} \leq b$. Il s'agit d'une loi de Weyl locale pour l'oscillateur harmonique. Dans la théorie des espaces de Lebesgue probabilistes, il apparaîtra que l'on peut en fait considérer, en première approximation, que la fonction $e_{d,n}$ se localise uniformément sur le compact $\overline{\mathbb{B}_d(0, \sqrt{2n+1})}$ avec une amplitude d'ordre $n^{\frac{d}{2}-1}$.

Une application immédiate de la proposition 4.1 est donnée par les estimations

$$\forall p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2}-\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} = n^{\frac{1}{2}[\frac{d}{2}-1+\frac{d}{p}]}. \tag{106}$$

La majoration $\|e_{d,n}\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p} n^{\frac{d}{2}-1+\frac{d}{p}}$ est connue pour $p \geq 2$ et est généralement traitée par interpolation entre $p = 2$ et $p = +\infty$, mais nous ne connaissons pas de référence où l'optimalité est prouvée (voir [Poiret et al. 2015, Lemma 3.5] et les références indiquées). Les hypothèses du théorème 2.6 de dualité sont alors très faciles à vérifier. D'une part, (13) nous donne

$$\forall p \in]1, +\infty[, \quad \|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p} \dim(E_{d,n}). \tag{107}$$

D'autre part, en utilisant (104) et (106), on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{\sqrt{e_{d,n}(x)}}{\|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}} &\lesssim_{d,p} \frac{1}{n^{\frac{d}{2p}}}\mathbf{1}_{\mathbb{B}_d(0,\sqrt{2(2n+1)})}(x) + \frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}}}{n^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1+\frac{d}{p})}},\\
\sup_{n\geq 1}\frac{\sqrt{e_{d,n}(x)}}{\|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}} &\lesssim_{d,p} \frac{1}{|x|^{\frac{d}{p}}} + e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}},\\
\sup_{n\geq 0}\frac{\sqrt{e_{d,n}}}{\|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}} &\in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d).
\end{aligned} \tag{108}$$

Ainsi, on sait par avance que les espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$ sont stables par dualité. Tout comme pour les harmoniques sphériques, ces espaces vont s'identifier à des sous-espaces de distributions sur $\mathbb{R}^d$. Pour le voir, commençons par rappeler la définition des espaces de Sobolev naturellement associés à l'oscillateur harmonique. En notant $\Pi_n : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ le projecteur orthogonal sur

$$E_{d,n} = \ker(-\Delta + |x|^2 - 2n - d),$$

on a

$$\begin{aligned}\forall s \geq 0, \quad \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) &:= \mathrm{Dom}((-\Delta + |x|^2)^{\frac{s}{2}}) \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid (-\Delta + |x|^2)^{\frac{s}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \\ &= \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \;\Big|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n)^s \|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty\Big\}.\end{aligned}$$

Rappelons aussi que cet espace abstrait admet, si $s \in \mathbb{N}$, la caractérisation fonctionnelle suivante (voir la preuve de [Yajima et Zhang 2004, Lemma 2.4 ; Imekraz et al. 2016, page 2765]) :

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \forall (m_0, m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d,\ m_0 + \cdots + m_d \leq s \Rightarrow |x|^{m_0} \partial_{x_1}^{m_1} \cdots \partial_{x_d}^{m_d} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.\end{aligned} \tag{109}$$

Toute fonction φ de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ admet alors une décomposition

$$\varphi = \sum_{n\geq 0} \Pi_n(\varphi), \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \|\Pi_n(\phi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C(\alpha)}{n^\alpha}.$$

On en déduit par dualité que toute distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ admet une décomposition en série faiblement convergente pour la dualité $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$:

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n(u), \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \|\Pi_n(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\alpha) n^\alpha.$$

Cela nous amène à définir des espaces de Sobolev pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}^s(\mathbb{R}) = \Big\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \;\Big|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n)^s \|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty\Big\}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer un lemme d'identification.

Lemme 4.2. *Pour tous $p \in [1, +\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$, la série $\sum u_n$ converge pour la dualité $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ vers une distribution tempérée. Par suite, on peut identifier $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$ au sous-espace des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant*

$$\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_n)} = \left\| \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \frac{e_{d,n}(x)}{\dim(E_{d,n})}} \right\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

Démonstration. On invoque l'inégalité triviale :

$$\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n})} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{\dim(E_{d,n})}} \|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Les équivalents (13) et (106) assurent que $(\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance polynomiale. □

La proposition 4.1, le théorème 2.6 de dualité et le théorème 2.5 d'interpolation vont nous permettre de décrire complètement les sous-espaces $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$ et leurs propriétés de dualité et d'interpolation pour $p \in]1, +\infty[$. Cela nous donne l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) du théorème 1.4.

Théorème 4.3. *Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$ et toute distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n})} \simeq_{d,p} \|\Pi_0(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left[\sum_{n\geq 1} n^{\frac{d}{2}-1}\left(\sum_{k\geq n} \frac{\|\Pi_k(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{k^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{110}$$

En outre, nous avons les propriétés de dualité et d'interpolation :

(i) *pour tout $p \in]1, +\infty[$, on pose $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué. L'injection canonique*

$$\Lambda_p : \mathbf{PL}^q\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \to \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)'$$

qui à un élément $w \in \mathbf{PL}^q\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$ associe la forme linéaire

$$u \in \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \mapsto \sum_{n\geq 0} \langle \Pi_n(u), \Pi_n(w)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

est bien définie et est un isomorphisme d'espaces de Banach.

(ii) *les espaces $\big(\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)\big)_{p\in]1,+\infty[}$ sont stables par interpolation complexe et réelle au sens du théorème 2.5.*

Le théorème précédent ressemble aux propositions 3.1 et 3.2 mais sa preuve est bien plus simple car la concentration des fonctions $e_{d,n}$ est bien meilleure que celle des harmoniques sphériques Y_n et Z_n étudiées dans la partie 3. En effet, la proposition 4.1 assure que l'on peut brutalement contrôler $e_{d,n}(x)$ par le terme gaussien $e^{-|x|^2/C(d)} \ll 1$ à l'extérieur de la boule $\mathbb{B}_d(0, \sqrt{2(2n+1)})$.

L'équivalence de normes (110) implique déjà quelques faits non triviaux :

— pour tout $p \in [1, +\infty[$ on a l'inclusion $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \subset \mathcal{H}^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Cela signifie qu'il faut un minimum de régularité pour espérer arriver presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

— pour tous réels $p_1 < p_2$ on a l'inclusion stricte $\mathbf{PL}^{p_1}\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \subset \mathbf{PL}^{p_2}\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$. D'une part, cela contraste fortement avec le fait que $L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, la conclusion du théorème de Paley–Zygmund est vérifiée pour l'oscillateur harmonique (choisir $p_1 = 2$).

Il est temps à présent d'énoncer les injections de Sobolev probabilistes de l'oscillateur harmonique multidimensionnel (ce qui donne la fin du théorème 1.4).

Théorème 4.4. *Pour tout réel $p \in]2, +\infty[$, on note $q = \frac{p}{p-1} \in]1, 2[$. Nous avons les inclusions*

$$\mathcal{H}^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-\varepsilon}(\mathbb{R}^d),$$

$$\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^{d\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{PL}^q\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \subset \mathcal{H}^{d\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}(\mathbb{R}^d).$$

Remarquons que pour tout $q \in [1, 2]$, l'espace $\mathbf{PL}^q\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace de fonctions (alors que pour les harmoniques sphériques Y_n, l'espace $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{S}^d, \bigoplus \mathbb{C}Z_n\big)$ est en général constitué de distributions). En choisissant $m_0 = 0$ dans (109), on voit que l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans l'usuel espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$. Dans le cas $p > 2$, les injections de Sobolev déterministes (17) s'écrivent alors

$$\mathcal{H}^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}(\mathbb{R}^d) \subset H^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d).$$

En autorisant un aléa pour arriver dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, l'injection de Sobolev probabiliste

$$\mathcal{H}^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d, \bigoplus E_{d,n}\big)$$

assure donc presque sûrement un gain de $2d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$ dérivées.

4B. ***Rappels sur les fonctions de Hermite.*** Par récurrence, on peut simplifier (103) en

$$e_{d,n}(x) = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_d)\in\mathbb{N}^d \\ i_1+\cdots+i_d=n}} h_{i_1}(x_1)^2 \cdots h_{i_d}(x_d)^2 = \sum_{k=0}^{n} e_{d-1,k}(x_1,\dots,x_{d-1}) h_{n-k}(x_d)^2.$$

Cela dit, nous allons utiliser d'autres formules plus maniables. Remarquons que toute rotation linéaire de $\mathbb{R}^d$ commute avec l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ et laisse donc invariant son sous-espace propre $E_{d,n}$ associé à la valeur propre $d + 2n$. On en déduit que la fonction $e_{d,n}$ de $E_{d,n}$ ne dépend que de la norme euclidienne

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$$

et l'on peut écrire

$$e_{d,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} e_{d-1,k}(\overbrace{|x|, 0, \dots, 0}^{\in\mathbb{R}^{d-1}}) h_{n-k}(0)^2 \tag{111}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e_{d-1,k}(\overbrace{0, \dots, 0}^{\in\mathbb{R}^{d-1}}) h_{n-k}(|x|)^2. \tag{112}$$

Le résultat suivant nous donne des estimations faciles en 0.

Proposition 4.5. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $h_{2k+1}(0) = 0$ et l'équivalence $(-1)^k h_{2k}(0) \simeq \frac{1}{(k+1)^{1/4}}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$n \in 2\mathbb{N}+1 \Rightarrow e_{d,n}(0) = 0, \quad n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow e_{d,n}(0) \simeq_d n^{\frac{d}{2}-1}.$$

Démonstration. La première équivalence découle de la formule (5.5.5) de [Szegő 1975] :

$$(-1)^k h_{2k}(0) = (-1)^k \frac{H_{2k}(0)}{\sqrt{(2k)!4^k\sqrt{\pi}}} = \frac{\sqrt{(2k)!}}{k!2^k\pi^{1/4}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}}.$$

Pour le cas n impair, on a déjà remarqué l'égalité $e_{d,n}(0) = 0$ après l'énoncé de la proposition 4.1. Pour le cas n pair, on peut écrire :

$$\begin{aligned} e_{d,n}(0) &= \sum_{2i_1+\cdots+2i_d=n} h_{2i_1}(0)^2 \cdots h_{2i_d}(0)^2 \\ &\simeq_d \sum_{2i_1+\cdots+2i_d=n} \frac{1}{\sqrt{(1+i_1)\cdots(1+i_d)}} \\ &\gtrsim_d \sum_{2i_1+\cdots+2i_d=n} n^{-\frac{d}{2}} \\ &\gtrsim_d n^{\frac{d}{2}-1}. \end{aligned}$$

La majoration $e_{d,n}(0) \lesssim_d n^{\frac{d}{2}-1}$ peut se démontrer par récurrence sur d en séparant les sommes suivantes selon que ℓ est plus petit ou plus grand que $\frac{n}{4}$:

$$e_{d,n}(0) = \sum_{\ell=0}^{n/2} e_{d-1,n-2\ell}(0) h_{2\ell}(0)^2 \simeq \sum_{\ell=0}^{n/2} \frac{e_{d-1,n-2\ell}(0)}{\sqrt{1+\ell}}. \qquad \square$$

Nous aurons besoin d'estimations précises concernant le comportement des fonctions de Hermite. Pour le résultat suivant, on fait référence à [Thangavelu 1993, Lemma 1.5.1] ou [Muckenhoupt 1970b, (2.3)].

Proposition 4.6. *Il existe deux constantes universelles $C \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\begin{aligned} |x| \leq \sqrt{2(2n+1)} \quad &\Rightarrow \quad |h_n(x)| \leq \frac{C}{\sqrt[4]{|2n+1-x^2| + \sqrt[3]{2n+1}}}, \\ |x| > \sqrt{2(2n+1)} \quad &\Rightarrow \quad |h_n(x)| \leq C e^{-\gamma x^2}. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$|x| \leq \sqrt{2n+1} \Rightarrow |h_n(x)| \leq \frac{C}{\sqrt[4]{2n+2-x^2}}. \tag{113}$$

Comme les fonctions h_n oscillent et s'annulent plusieurs fois, les estimations de la proposition 4.6 sont inutilisables pour minorer les fonctions $|h_n|$. Pour remédier à cela, on fait appel à un résultat d'approximation des fonctions de Hermite dû à Muckenhoupt [1970a, (2.4), page 421] et prouvé à partir de [Erdélyi 1960, 6.12, page 23].

Proposition 4.7. *Introduisons la fonction croissante $\Phi : [0,1] \to [0, \frac{\pi}{4}]$ définie par*

$$\Phi(u) = \int_0^u \sqrt{1-s^2}\, ds = \tfrac{1}{2}\arcsin(u) + \tfrac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}.$$

Il existe une constante universelle $C \geq 1$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \sqrt{2n+1} - (2n+1)^{-\frac{1}{6}}]$ on a

$$\left| h_n(x) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2n+1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left[(2n+1)\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) - \frac{n\pi}{2}\right] \right| \leq \frac{C\sqrt{2n+1}}{(2n+1-x^2)^{\frac{7}{4}}}.$$

Démonstration. En fait, le terme principal est exprimé dans [Muckenhoupt 1970a, (2.4), page 421] sous la forme différente mais équivalente

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2n+1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left[\tfrac{1}{4}(2n+1)[2\theta-\sin(2\theta)]-\tfrac{\pi}{4}\right],$$

avec $\theta=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$ et donc $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)=2\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2n+1}}$. □

Pour tout $\beta\in\,]0,1[$ et $x\in[0,\beta\sqrt{2n+1}]$, l'inégalité (113) et la proposition 4.7 nous amènent donc à

$$\left|h_n(x)^2-\frac{2}{\pi\sqrt{2n+1-x^2}}\cos^2\left[(2n+1)\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]\right|\leq\frac{C(\beta)}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{114}$$

C'est la formule précédente et la proposition 4.6 que nous allons utiliser pour comprendre la localisation spatiale de la fonction $e_{d,n}$ de l'oscillateur harmonique multidimensionnel.

4C. *Preuve de la proposition 4.1, majoration (104) de la fonction $e_{d,n}$.* À l'aide de [Koch et Tataru 2005, Corollary 3.2, case $n\geq 2$ and $p=\infty$, $\lambda=\sqrt{2n+d}$], on a pour tout $x\in\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}e_{d,n}(x)&=\sup\left\{|u_n(x)|^2\mid u_n\in E_{d,n},\ \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=1\right\}\\&\leq\sup\left\{\|u_n\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\mid u_n\in E_{d,n},\ \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=1\right\}\\&\leq C(d)n^{\frac{d}{2}-1}.\end{aligned}$$

Il nous reste à analyser le cas $|x|>\sqrt{2(2n+1)}$. Nous ne traitons que le sous-cas $n\in 2\mathbb{N}$ car le sous-cas $n\in 2\mathbb{N}+1$ se traite de la même façon. La formule (112) et la proposition 4.5 donnent

$$e_{d,n}(x)=\sum_{k=0}^{n/2}h_{2k}(|x|)^2e_{d-1,n-2k}(0)\simeq_d\sum_{k=0}^{n/2}h_{2k}(|x|)^2(1+n-2k)^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}}.$$

Par suite, la proposition 4.6 nous donne

$$e_{d,n}(x)\leq C(d)e^{-2\gamma|x|^2}\sum_{k=0}^{n/2}(1+n-2k)^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}}\leq C(d)n^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}e^{-2\gamma|x|^2}\leq C(d)|x|^{d-1}e^{-2\gamma|x|^2}.$$

Quitte à augmenter $C(d)\geq 1$, le majorant précédent est majoré par $C(d)e^{\frac{-|x|^2}{C(d)}}$.

4D. *Preuve de la proposition 4.1, minoration (105) de la fonction $e_{d,n}$.* Pour tout entier $d\geq 2$, on va démontrer par récurrence sur d l'assertion

$$H(d):\qquad\forall\alpha\in\left]0,\sin\left(\tfrac{1}{4}\right)\right[,\quad\exists C(d,\alpha)>1,\quad\liminf_{n\to+\infty}\left(\inf_{\frac{C(d,\alpha)}{\sqrt{2n+1}}\leq|x|\leq\alpha\sqrt{2n+1}}\frac{e_{d,n}(x)}{n^{\frac{d}{2}-1}}\right)>0.$$

Dans toute cette preuve, on aura besoin d'un réel $\beta\in\left]\alpha,\sin\left(\frac{1}{4}\right)\right[$ et l'on choisit par simplicité

$$\beta:=\tfrac{1}{2}\left(\alpha+\sin\left(\tfrac{1}{4}\right)\right). \tag{115}$$

Premier cas : $H(2)$ avec $n \in 2\mathbb{N}$. Il s'agit du cas le plus technique. Tout d'abord, l'invariance radiale de $e_{2,n}$ et la proposition 4.5 donnent pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$e_{2,n}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} h_{2k}(|x|)^2 h_{n-2k}(0)^2 \simeq \sum_{k=0}^{n/2} \frac{h_{2k}(|x|)^2}{\sqrt{1+n-2k}}.$$

Afin de pouvoir exploiter la formule (114), nous avons besoin de considérer des indices k du même ordre de grandeur que n. De façon précise, nous allons sélectionner les indices k tels que $\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \leq k \leq \frac{n}{2}$. Puisque l'on a $\beta > \alpha$, on déduit que l'on a

$$n \leq \frac{2\beta^2}{\alpha^2}k + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1\right), \quad 2n+1 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2}(4k+1), \quad \alpha\sqrt{2n+1} \leq \beta\sqrt{4k+1}.$$

En utilisant (114) et en imposant $|x| \leq \alpha\sqrt{2n+1}$, il existe une constante $C(\alpha) > 1$ telle que

$$e_{2,n}(x) \gtrsim \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1+n-2k)k}} \cos^2\left[(4k+1)\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{4k+1}}\right)\right] - \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{C(\alpha)}{(4k+1)^{\frac{3}{2}}(1+n-2k)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui se minore grossièrement par

$$\frac{1}{C(\alpha)n} \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \leq k \leq \frac{n}{2}} \cos^2\left[(4k+1)\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{4k+1}}\right)\right] - \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{C(\alpha)}{(4k+1)^{\frac{3}{2}}(1+n-2k)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or on a immédiatement

$$\sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{C(\alpha)}{(4k+1)^{\frac{3}{2}}(1+n-2k)^{\frac{1}{2}}} \leq C(\alpha)\frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}} = \frac{C(\alpha)}{n}.$$

Notons à présent $\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Si l'on définit

$$S(n,x,\alpha,\beta) := \sum_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n \rceil \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cos\left[2(4k+1)\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{4k+1}}\right)\right],$$

alors notre minoration se reformule en

$$e_{2,n}(x) \gtrsim_\alpha \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + \frac{1}{2n}S(n,x,\alpha,\beta) - \frac{C(\alpha)}{n}. \tag{116}$$

L'estimation grossière $|S(n,x,\alpha,\beta)| \leq \frac{n}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$ ne suffit pas pour minorer $e_{2,n}(x)$. Nous allons raffiner cette estimation grâce à l'oscillation des termes. On va faire appel à la formule d'Euler–Maclaurin au rang 0 en posant

$$\forall t \in \left[\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n, \tfrac{1}{2}n\right], \quad a_x(t) := 2(4t+1)\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{4t+1}}\right) = 2(4t+1)\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{4t+1}}} \sqrt{1-s^2}\,ds,$$
$$a_x'(t) = 4\arcsin\left(\frac{|x|}{\sqrt{4t+1}}\right) \in [0, 4\arcsin(\beta)].$$

Cela nous permet de reformuler $S(n,x,\alpha,\beta)$ en

$$\frac{\cos\big[a_x\big(\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil\big)\big] + \cos\big[a_x\big(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\big)\big]}{2} + \int_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \cos(a_x(t))\,dt - \int_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_x'(t)\sin(a_x(t))\big[t-\lfloor t\rfloor-\tfrac{1}{2}\big]\,dt.$$

La deuxième intégrale est contrôlée grossièrement par

$$\left|\int_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_x'(t)\sin(a_x(t))\big[t-\lfloor t\rfloor-\tfrac{1}{2}\big]\,dt\right| \le \frac{4\arcsin(\beta)}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - \left\lceil\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\right\rceil\right) \le n\arcsin(\beta)\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right).$$

Passons au contrôle de la première intégrale. La forme de la minoration (105) nous autorise à supposer $x \neq 0$. Remarquons maintenant que $t \mapsto a_x'(t)$ est strictement positive et décroissante. En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\int_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \cos(a_x(t))\,dt = \left[\frac{\sin(a_x(t))}{a_x'(t)}\right]_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} - \int_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \left(\frac{1}{a_x'(t)}\right)' \sin(a_x(t))\,dt$$
$$\left|\int_{\lceil \frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \cos(a_x(t))\,dt\right| \le \frac{1}{a_x'\big(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\big)} + \frac{1}{a_x'\big(\lceil \frac{\alpha^2 n}{2\beta^2}\rceil\big)} + \frac{1}{a_x'\big(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\big)} - \frac{1}{a_x'\big(\lceil \frac{\alpha^2 n}{2\beta^2}\rceil\big)}$$
$$\le \frac{2}{a_x'\big(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\big)} \le \frac{2}{a_x'\big(\frac{n}{2}\big)} \le \frac{\sqrt{2n+1}}{2|x|}.$$

La définition (115) de β nous autorise à majorer

$$|S(n,x,\alpha,\beta)| \le 1 + n\arcsin(\beta)\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + \frac{\sqrt{2n+1}}{2|x|} \le 1 + \frac{n}{4}\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + \frac{2n}{|x|\sqrt{2n+1}}.$$

On peut donc choisir $C(2,\alpha) > 1$ de sorte que l'inégalité $C(2,\alpha)/\sqrt{2n+1} \le |x|$ implique

$$|S(n,x,\alpha,\beta)| \le 1 + \frac{n}{3}\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right).$$

On conclut à l'aide de (116).

Deuxième cas : $H(2)$ et $n \in 2\mathbb{N}+1$. Par invariance radiale et par imparité des fonctions de Hermite h_{n-2k}, on obtient

$$e_{2,n}(x) = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} h_{2k-1}(|x|)^2 h_{n-2k+1}(0)^2 \simeq \sum_{k=1}^{(n+1)/2} h_{2k-1}(|x|)^2 \frac{1}{\sqrt{n-2k+2}}.$$

En notant K l'ensemble des indices k vérifiant

$$\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n + \frac{\alpha^2+\beta^2}{4\beta^2} \le k \le \frac{n+1}{2},$$

on a

$$\forall k \in K, \qquad \frac{\alpha^2}{\beta^2}\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\Big) \le k - \frac{1}{4}, \quad \alpha\sqrt{2n+1} < \beta\sqrt{4k-1}.$$

En utilisant (114) et la même argumentation que celle du premier cas, nous arrivons à

$$\begin{aligned} e_{2,n}(x) &\ge \frac{1}{C(\alpha)\sqrt{n}} \sum_{k\in K} \frac{1}{\sqrt{n-2k+2}} \sin^2\Big[(4k-1)\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{4k-1}}\Big)\Big] - \frac{C(\alpha)}{n} \\ &\ge \frac{1}{C(\alpha)n} \sum_{k\in K} \sin^2\Big[(4k-1)\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{4k-1}}\Big)\Big] - \frac{C(\alpha)}{n} \\ &\gtrsim_\alpha \frac{1}{4}\Big(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\Big) - \frac{1}{2n}\sum_{k\in K} \cos\Big[2(4k-1)\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{4k-1}}\Big)\Big] - \frac{C(\alpha)}{n}. \end{aligned}$$

On finit exactement comme dans le premier cas.

Troisième cas : $H(d)$ avec $d > 2$ et $n \in 2\mathbb{N}$. On utilise la proposition 4.5 et l'invariance radiale de $e_{d,n}$ exprimée par la formule (111) pour obtenir

$$\begin{aligned} e_{d,n}(x) &= \sum_{k=0}^{n/2} e_{d-1,2k}(\overbrace{|x|,0,\dots,0}^{\in\mathbb{R}^{d-1}})h_{n-2k}(0)^2 \\ &\simeq \sum_{k=0}^{n/2} \frac{e_{d-1,2k}(|x|,0,\dots,0)}{\sqrt{1+n-2k}} \\ &\gtrsim \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\le k\le\frac{n}{2}} \frac{e_{d-1,2k}(|x|,0,\dots,0)}{\sqrt{1+n-2k}}. \end{aligned}$$

Comme dans le premier cas, les indices k sélectionnés vérifient l'inégalité $\alpha\sqrt{2n+1} \le \beta\sqrt{2(2k)+1}$. Puisque l'on a $\beta < \sin(\frac{1}{4})$, l'hypothèse de récurrence $H(d-1)$ nous fournit un nombre $C(d-1,\beta) > 1$. En imposant la condition

$$\frac{\beta C(d-1,\beta)}{\alpha\sqrt{2n+1}} \le |x| \le \alpha\sqrt{2n+1},$$

on a

$$\frac{C(d-1,\beta)}{\sqrt{2(2k)+1}} \le |x| \le \beta\sqrt{2(2k)+1}.$$

Cela nous mène à

$$\begin{aligned}
e_{d,n}(x) &\gtrsim_{d,\beta} \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\le k\le \frac{n}{2}} \frac{k^{\frac{d-1}{2}-1}}{\sqrt{1+n-2k}} \\
&\gtrsim_{d,\beta} n^{\frac{d-1}{2}-1} \sum_{\frac{\alpha^2}{2\beta^2}n\le k\le \frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+n-2k}} \\
&\gtrsim_{d,\beta} n^{\frac{d-1}{2}-1} \times \sqrt{n} = n^{\frac{d}{2}-1}.
\end{aligned}$$

Dernier cas : $H(d)$ avec $d>2$ et $n\in 2\mathbb{N}+1$. On se ramène à $H(d-1)$ comme dans le troisième cas.

4E. ***Preuve du théorème 4.3, randomisation des fonctions de Hermite.*** Nous avons déjà vérifié les hypothèses des théorème 2.6 de dualité et théorème 2.5 d'interpolation (voir (107) et (108)). On a donc les points (i) et (ii). Décomposant $u=\sum_{n\in\mathbb{N}}\Pi_n(u)\in \mathbf{PL}^p\left(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n}\right)$, on souhaite maintenant montrer que la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})}$ est équivalente à la suivante

$$N(u):=\|\Pi_0(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\left[\sum_{n\ge 1} n^{\frac{d}{2}-1}\left(\sum_{k\ge n}\frac{\|\Pi_k(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{k^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

On va appliquer la proposition 4.1. Quitte à augmenter l'entier $n(d)$, on peut supposer que l'on a

$$\frac{C(d)}{\sqrt{2n+1}}\le 1\le \alpha\sqrt{2n+1}\quad \text{pour tout } n\ge n(d).$$

On vérifie facilement que la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})}$ domine la norme N :

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})} &\gtrsim_{d,p} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{n\ge n(d)}(1+n)^{-(d-1)}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}e_{d,n}(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx \\
&\gtrsim_{d,p} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{n\ge n(d)}(1+n)^{-\frac{d}{2}}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\mathbf{1}_{1\le|x|\le\alpha\sqrt{2n+1}}\right)^{\frac{p}{2}}dx \\
&\gtrsim_{d,p} \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{n\ge n(d)}\left(\sum_{k>n}(1+k)^{-\frac{d}{2}}\|\Pi_k(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{p}{2}}\mathbf{1}_{\sqrt{2n+1}<\frac{|x|}{\alpha}\le\sqrt{2n+3}}\,dx \\
&\gtrsim_{d,p} \sum_{n>n(d)} n^{\frac{d}{2}-1}\left(\sum_{k\ge n}(1+k)^{-\frac{d}{2}}\|\Pi_k(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Pour récupérer les premiers termes d'indice $n\le n(d)$, il s'agit de remarquer les inégalités triviales

$$\forall n\in\mathbb{N}\cap[0,n(d)],\quad \|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})}\gtrsim_{d,p}(1+n)^{-\frac{(d-1)}{2}}\|\Pi_n(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\sqrt{e_{d,n}}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

On obtient alors facilement l'estimation $\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})}\gtrsim_{d,p}N(u)$.

Montrons maintenant l'estimation réciproque $\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})} \lesssim_{d,p} N(u)$ à l'aide des deux fonctions

$$A(u,x) := \sum_{n\geq 0}(1+n)^{-\frac{d}{2}}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\mathbf{1}_{0\leq|x|\leq\sqrt{2(2n+1)}},$$
$$B(u,x) := e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}}\sum_{n\geq 0}(1+n)^{-(d-1)}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\mathbf{1}_{\sqrt{2(2n+1)}\leq|x|},$$

où le terme gaussien provient de la proposition 4.1. D'après la proposition 4.1, nous avons

$$\|u\|^p_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})} \lesssim_{d,p} \int_{\mathbb{R}^d}[A(u,x)+B(u,x)]^{\frac{p}{2}}\,dx \lesssim_{d,p} \int_{\mathbb{R}^d} A(u,x)^{\frac{p}{2}} + B(u,x)^{\frac{p}{2}}\,dx.$$

Par une argumentation similaire à celle que nous venons d'employer, on vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} A(u,x)^{\frac{p}{2}}\,dx \lesssim_{d,p} N(u)^p.$$

Par ailleurs, nous avons trivialement

$$\begin{aligned}B(u,x) &\leq e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}}\sum_{n\geq 0}(1+n)^{-\frac{d}{2}}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}}\|u\|^2_{\mathcal{H}^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} B(u,x)^{\frac{p}{2}}\,dx \lesssim_{d,p} N(u)^p.$$

Nous pouvons conclure que l'on a $\|u\|^p_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})} \lesssim_{d,p} N(u)^p$.

4F. ***Preuve du théorème 4.4, injections de Sobolev probabilistes hermitiennes.*** Le théorème 4.3 permet par dualité de se ramener au cas $p \in [2,+\infty[$. Commençons par l'inclusion

$$\mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n}\big).$$

On invoque l'inégalité triangulaire dans $L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^d)$ et (106) pour obtenir pour tout $u \in \mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n\geq 0}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\frac{e_{d,n}}{(1+n)^{d-1}}\Big\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{n\geq 0}\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\frac{\|e_{d,n}\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^d)}}{(1+n)^{d-1}}\\ &\leq \sum_{n\geq 0}\frac{\|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{(1+n)^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} = \|u\|^2_{\mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'inclusion $\mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n}\big) \subset \mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour tout $u \in \mathbf{PL}^p\big(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n}\big)$, on doit montrer

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)} \leq C(p,d,\varepsilon)\|u\|_{\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d,\bigoplus E_{d,n})}. \tag{117}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $\Pi_n(u) = 0$ pour $n \gg 1$. Posons à cet effet

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n := \sum_{k \geq n} (1+k)^{-\frac{d}{2}} \|\Pi_k(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

La décroissance et la positivité de (R_n) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\varepsilon} \|\Pi_n(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^{\frac{d}{p}-\varepsilon} (R_n - R_{n+1}) \\
&\leq C(d,p,\varepsilon) \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^{\frac{d}{p}-\varepsilon-1} R_n \\
&\leq C(d,p,\varepsilon) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(1+n)^{\varepsilon + \frac{p-2}{p}}} \times (1+n)^{\frac{d-2}{p}} R_n \\
&\leq C(d,p,\varepsilon) \Bigg(\sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^{\frac{d}{2}-1} R_n^{\frac{p}{2}} \Bigg)^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

On conclut avec (110).

Appendice A: Optimalité de l'exposant max(2, p) dans le théorème 2.1

Il suffit de comprendre le cas unidimensionnel $d_n = 1$. Examinons l'espace mesuré $X = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ muni de la mesure de comptage si bien que l'on a $L^p(X) = \ell^p(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$. Pour tout réel $p \in [2, \infty[$, on note $(X_{n,p})_{n \geq 2}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires symétriques, réelles et vérifiant

$$\forall t \gg 1, \quad \boldsymbol{P}[|X_{n,p}| \geq t] = \frac{\ln(t)}{t^p}.$$

Il est clair que $X_{n,p}$ n'a pas de moment d'ordre p et a des moments d'ordre $q \in [1, p[$. On a aussi

$$\text{p.s.} \quad \sup_{n \geq 2} \frac{|X_{n,p}|}{n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{2}{p}}(n)} = +\infty. \tag{118}$$

En effet, il s'agit de remarquer que pour tout entier $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n \geq 2} \boldsymbol{P}\big[|X_{n,p}| \geq K n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{2}{p}}(n)\big] = +\infty.$$

Par indépendance des variables $X_{n,p}$, il existe presque sûrement une infinité d'entiers $n \geq 2$ tels que $|X_{n,p}| \geq K n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{2}{p}}(n)$. On en déduit facilement (118). Revenons à l'optimalité de l'exposant $\max(2, p)$.

Cas $p \in [1, 2]$: On fixe u une suite non nulle appartenant à $\ell^p(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$ et l'on examine les deux séries aléatoires dans $\ell^p(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$

$$\sum \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}\ln(n)} u \quad \text{et} \quad \sum \frac{X_{n,2}}{\sqrt{n}\ln(n)} u, \tag{119}$$

La série aléatoire $\sum \varepsilon_n/(\sqrt{n}\ln(n))$ converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la première série aléatoire dans (119) converge presque sûrement dans $\ell^p(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$. La divergence presque sûre de la seconde série aléatoire dans (119) découle de (118).

Cas $p \in [2,+\infty[$: Une démarche similaire est valide en examinant les deux séries aléatoires

$$\sum \frac{\varepsilon_n}{n^{\frac{1}{p}}\ln^{\frac{2}{p}}(n)} w_n \quad \text{et} \quad \sum \frac{X_{n,p}}{n^{\frac{1}{p}}\ln^{\frac{2}{p}}(n)} w_n,$$

où $w_n = (0,\dots,0,1,0,\dots) \in \ell^p(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$ est la suite qui admet 1 à la position n et 0 ailleurs. Il est clair que la première série converge de manière déterministe dans $\ell^p(\mathbb{N}\backslash\{0,1\})$. De nouveau, (118) implique la divergence presque sûre de la seconde série aléatoire.

Appendice B: Preuve de la proposition 1.10, inégalité de Latała précisée (26)

Notons $B_n = [\varepsilon_{ij}]$ la matrice aléatoire de taille $n \times n$ et dont les coefficients ε_{ij} sont des variables aléatoires i.i.d. qui suivent une loi $\frac{1}{2}$-Bernoulli à valeurs dans $\{-1,+1\}$. Les inégalités de Kahane–Khintchine (39) dans l'espace de Banach $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ nous donnent l'encadrement :

$$\forall q \in [1,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbf{E}[\|B_n\|_{\mathrm{op}}] \le \mathbf{E}[\|B_n\|_{\mathrm{op}}^q]^{\frac{1}{q}} \le K_{q,1}\mathbf{E}[\|B_n\|_{\mathrm{op}}].$$

Cela signifie que tous les moments $\mathbf{E}[\|B_n\|_{\mathrm{op}}^q]^{\frac{1}{q}}$ ont le même ordre de grandeur si n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, la théorie des matrices aléatoires explique que le moment $\mathbf{E}[\|B_n\|_{\mathrm{op}}]$ est asymptotiquement de l'ordre de $\sqrt{n}$ (voir [Tao 2012, Part 2.3]). Nous allons exploiter cette idée pour démontrer l'inégalité (26). Commençons par le lemme élémentaire suivant qui s'apparente à une version commutative de (26).

Lemme B.1. *Considérons un réel $p \in [2,+\infty[$ ainsi que N variables aléatoires $U_1,\dots,U_N$ réelles, centrées, i.i.d. et ayant un moment d'ordre p. Nous avons l'inégalité*

$$\mathbf{E}\left[\left|\frac{U_1+\cdots+U_N}{\sqrt{N}}\right|^p\right] \le (C\sqrt{p})^p\mathbf{E}[|U_1|^p].$$

Démonstration. L'idée se résume en deux points : on se ramène au cas où les variables U_i sont symétriques et l'on invoque les inégalités de Kahane–Khintchine à l'aide du théorème de Fubini. Si nous notons $\widetilde{U}_1,\dots,\widetilde{U}_N$ des copies indépendantes des variables $U_1,\dots,U_N$ alors l'inégalité de Jensen pour l'espérance en les variables $\widetilde{U}_1,\dots,\widetilde{U}_N$ donne

$$\mathbf{E}[|U_1+\cdots+U_N|^p] \le \mathbf{E}[|U_1-\widetilde{U}_1+\cdots+U_N-\widetilde{U}_N|^p].$$

Rappelons alors l'égalité triviale

$$\mathbf{E}[|U_1-\widetilde{U}_1+\cdots+U_N-\widetilde{U}_N|^p] = \mathbf{E}_{\omega'}\mathbf{E}_\omega\left[\left|\varepsilon_1(\omega')(U_1(\omega)-\widetilde{U}_1(\omega))+\cdots+\varepsilon_N(\omega')(U_N(\omega)-\widetilde{U}_N(\omega))\right|^p\right].$$

Il s'agit maintenant d'utiliser le théorème de Fubini, les inégalités de Kahane–Khintchine (39) et (41) (avec $d_n = 1$) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[|U_1+\cdots+U_N|^p] \\
&\quad \le \mathbf{E}_\omega \mathbf{E}_{\omega'}\big[\big|\varepsilon_1(\omega')|U_1(\omega)-\widetilde{U}_1(\omega)|+\cdots+\varepsilon_N(\omega')|U_N(\omega)-\widetilde{U}_N(\omega)|\big|^p\big] \\
&\quad \le K_{p,2}^p \mathbf{E}_\omega\big[\mathbf{E}_{\omega'}\big[\big|\varepsilon_1(\omega')|U_1(\omega)-\widetilde{U}_1(\omega)|+\cdots+\varepsilon_N(\omega')|U_N(\omega)-\widetilde{U}_N(\omega)|\big|^2\big]^{\frac{p}{2}}\big] && (120) \\
&\quad \le (C\sqrt{p})^p \mathbf{E}_\omega\Bigg[\bigg(\sum_{i=1}^N |U_i(\omega)-\widetilde{U}_i(\omega)|^2\bigg)^{\frac{p}{2}}\Bigg] && (121) \\
&\quad \le (C\sqrt{p})^p\bigg(\sum_{i=1}^N \|(U_i-\widetilde{U}_i)^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\Omega)}\bigg)^{\frac{p}{2}} = (C\sqrt{pN})^p\|(U_1-\widetilde{U}_1)^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\Omega)}^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \le (C\sqrt{pN})^p\|U_1\|_{L^p(\Omega)}^p. \qquad \square
\end{aligned}$$

La preuve précédente est similaire à celle de la proposition 2.10 avec $(d_n, a_n, M_n) = (1, 1, U_n)$ à ceci près que nous pouvons utiliser en plus le principe de symétrisation. Nous avons écrit la preuve précédente d'abord parce que nous aurons besoin plus loin de considérer des variables seulement centrées au lieu de symétriques, mais aussi pour des raisons pédagogiques. En effet, la disparition élémentaire de l'espérance $\mathbf{E}_{\omega'}$ de la ligne (120) à la ligne (121) peut être interprétée comme suit : l'espace de Banach $\mathbb{R}$ est de type 2. Nous allons utiliser un substitut non-commutatif de cette propriété pour démontrer (26). C'est l'objet de la proposition suivante dont la preuve est très technique.

Proposition B.2 [Latała 2005, Theorem 1]. *Il existe une constante universelle $C \ge 1$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, si l'on considère n^2 variables aléatoires i.i.d. $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ qui suivent une loi normale $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ et une matrice $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors*

$$\mathbf{E}[\|a_{ij}g_{ij}\|_{\mathrm{op}}] \le C\left(\sqrt[4]{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^4} + \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} + \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}\right). \tag{122}$$

Latała démontre la proposition précédente pour en déduire l'estimation (27) qui se reformule

$$\mathbf{E}[\|X_{ij}\|_{\mathrm{op}}] \le C\sqrt{n}\mathbf{E}[|X_{1,1}|^4]^{\frac{1}{4}}.$$

On peut attaquer la preuve de (26) et l'on commence comme dans [Latała 2005]. On note $\widetilde{X}_{ij}$ des copies indépendantes des variables aléatoires X_{ij}. En particulier, on a $\mathbf{E}[\widetilde{X}_{ij}] = 0$. Pour tout réel $p \in [4, +\infty[$, l'argument classique de l'inégalité de Jensen en les variables $\widetilde{X}_{ij}$ donne

$$\mathbf{E}[\|X_{ij}\|_{\mathrm{op}}^p] \le \mathbf{E}[\|X_{ij}-\widetilde{X}_{ij}\|_{\mathrm{op}}^p] = \mathbf{E}[\|\varepsilon_{ij}(X_{ij}-\widetilde{X}_{ij})\|_{\mathrm{op}}^p] \le 2^p\mathbf{E}[\|\varepsilon_{ij}X_{ij}\|_{\mathrm{op}}^p], \tag{123}$$

où les n^2 variables aléatoires ε_{ij} sont indépendantes entre elles et vis-à-vis des variables X_{ij} et $\widetilde{X}_{ij}$. On diffère maintenant de [Latała 2005] en faisant appel aux inégalités de Kahane–Khintchine (39) dans l'espace de Banach $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ afin de récupérer le moment d'ordre p :

$$\mathbf{E}[\|\varepsilon_{ij}X_{ij}\|_{\mathrm{op}}^p] = \mathbf{E}_\omega\mathbf{E}_{\omega'}[\|\varepsilon_{ij}(\omega')X_{ij}(\omega)\|_{\mathrm{op}}^p] \le K_{p,1}^p\mathbf{E}_\omega[\mathbf{E}_{\omega'}[\|\varepsilon_{ij}(\omega')X_{ij}(\omega)\|_{\mathrm{op}}]^p]. \tag{124}$$

Et l'on reprend de nouveau l'argumentation de Latała. En supposant que toutes les variables aléatoires sont indépendantes, (122) et le principe de contraction (voir (45)) donnent pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega'}[\|\varepsilon_{ij}(\omega')X_{ij}(\omega)\|_{\mathrm{op}}] &\leq \frac{1}{\mathbf{E}[|g_{11}|]}\mathbf{E}_{\omega'}[\|g_{ij}(\omega')X_{ij}(\omega)\|_{\mathrm{op}}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\mathbf{E}_{\omega'}[\|g_{ij}(\omega')X_{ij}(\omega)\|_{\mathrm{op}}] \\ &\leq C\left(\sqrt[4]{\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}(\omega)^4} + \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(\omega)^2} + \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_{ij}(\omega)^2}\right).\end{aligned}$$

Reprenant (123), (124) et tenant compte que les variables X_{ij} sont i.i.d., on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\|X_{ij}\|_{\mathrm{op}}^{p}] &\leq C(p)\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}^4\right)^{\frac{p}{4}} + \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2\right)^{\frac{p}{2}} + \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ &\leq C(p)\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}^4\right)^{\frac{p}{4}} + \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right].\end{aligned}$$

La fin de cette preuve est différente de [Latała 2005] car on doit tenir compte de l'inégalité $p \geq 4$. Le premier terme ne posera aucun problème tandis que le dernier est plus délicat, c'est pour cela que nous le forçons à être centré en majorant

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 \leq \sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[X_{ij}^2] + \left|\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \mathbf{E}[X_{ij}^2]\right|.$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\|X_{ij}\|_{\mathrm{op}}^{p}] &\leq C(p)[A(1)+A(2)+A(3)], \\ A(1) &:= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}^4\right)^{\frac{p}{4}}\right], \\ A(2) &:= \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[X_{ij}^2]\right)^{\frac{p}{2}} = n^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}[X_{11}^2]^{\frac{p}{2}}, \\ A(3) &:= \mathbf{E}\left[\max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \mathbf{E}[X_{ij}^2]\right|^{\frac{p}{2}}\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne d'abord $A(2) \leq n^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}[|X_{11}|^p]$, puis

$$A(1) \leq \mathbf{E}\left[(n^2)^{(1-\frac{4}{p})\frac{p}{4}}\sum_{i,j=1}^{n}|X_{ij}|^p\right] = n^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}[|X_{11}|^p].$$

Concernant le terme $A(3)$, nous majorons grossièrement à l'aide du lemme B.1 et de l'inégalité $p \geq 4$

$$\begin{aligned}A(3) \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \mathbf{E}[X_{ij}^2]\right|^{\frac{p}{2}}\right] \leq C(p)n^{1+\frac{p}{4}}\mathbf{E}\left[|X_{11}^2 - \mathbf{E}[X_{11}^2]|^{\frac{p}{2}}\right] &\leq C(p)n^{1+\frac{p}{4}}\mathbf{E}[|X_{11}|^p] \\ &\leq C(p)n^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}[|X_{11}|^p].\end{aligned}$$

Appendice C: Preuve de la proposition 1.10, minoration de la plus petite valeur singulière

On commence par un lemme dual au lemme B.1.

Lemme C.1. *Considérons N variables aléatoires $U_1, \ldots, U_N$ réelles, centrées, i.i.d. et ayant un moment d'ordre* 1. *Pour tout $(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, nous avons l'inégalité*

$$\mathbf{E}[|U_1|]\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_N^2} \le C\,\mathbf{E}[|y_1 U_1 + \cdots + y_N U_N|].$$

Démonstration. Soient $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_N$ des copies indépendantes de $U_1, \ldots, U_N$. On a

$$\mathbf{E}\big[|y_1(U_1 - \widetilde{U}_1) + \cdots + y_N(U_N - \widetilde{U}_N)|\big] \le 2\mathbf{E}[|y_1 U_1 + \cdots + y_N U_N|].$$

Puisque les variables $U_i - \widetilde{U}_i$ sont symétriques, le principe de contraction (théorème 2.16), l'inégalité de Khintchine et l'inégalité de Jensen donnent

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|U_1|]\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_N^2} &= \mathbf{E}[|U_1|]\mathbf{E}[|\varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_N y_N|^2]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \mathbf{E}[|U_1 - \widetilde{U}_1|] \times K_{2,1}\mathbf{E}[|\varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_N y_N|] \\
&\le K_{2,1}\mathbf{E}\big[|y_1(U_1 - \widetilde{U}_1) + \cdots + y_N(U_N - \widetilde{U}_N)|\big] \\
&\le 2K_{2,1}\mathbf{E}[|y_1 U_1 + \cdots + y_N U_N|].
\end{aligned}$$

□

Passons à la preuve de (25). Fixons $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\omega \in \Omega$, la diagonalisation de la matrice symétrique positive $|M_n(\omega)| = \sqrt{{}^tM_n(\omega)M_n(\omega)}$ dans une base orthonormée fournit l'inégalité

$$|M_n(\omega)y|^2 := \langle M_n(\omega)y, M_n(\omega)y\rangle = {}^ty|M_n(\omega)|^2 y \le \|M_n(\omega)\|_{\mathrm{op}}{}^ty|M_n(\omega)|y.$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\omega[|M_n(\omega)y|] &\le \mathbf{E}_\omega\big[\sqrt{\|M_n(\omega)\|_{\mathrm{op}}}\sqrt{{}^ty|M_n(\omega)|y}\big] \\
\mathbf{E}_\omega[|M_n(\omega)y|]^2 &\le \mathbf{E}_\omega[\|M_n(\omega)\|_{\mathrm{op}}]\mathbf{E}_\omega[{}^ty|M_n(\omega)|y].
\end{aligned}$$

On invoque alors l'inégalité de Latała (27) pour contrôler le moment d'ordre 1 de $\|M_n\|_{\mathrm{op}}$:

$$\mathbf{E}_\omega[|M_n(\omega)y|]^2 \le C\,\mathbf{E}[|X_{11}|^4]^{\frac{1}{4}} \times {}^ty\mathbf{E}_\omega[|M_n(\omega)|]y.$$

On va maintenant utiliser l'égalité

$$|M_n(\omega)y| = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big|\sum_{j=1}^n X_{ij}(\omega)y_j\Big|^2} = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{j=1}^n X_{1j}(\omega)y_j\Big|, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{j=1}^n X_{nj}(\omega)y_j\Big|\right)\right|$$

à l'aide de l'inégalité triangulaire entre $\mathbf{E}_\omega$ et la norme euclidienne $|\cdot|$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_\omega\Big[\Big|\sum_{j=1}^n X_{ij}(\omega)y_j\Big|\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \mathbf{E}_\omega[|M_n(\omega)y|].$$

Le lemme C.1 nous permet d'obtenir (25) :

$$\mathbf{E}[|X_{11}|]^2(y_1^2+\cdots+y_n^2) \le C\,\mathbf{E}_\omega[|M_n(\omega)y|]^2,$$
$$\frac{\mathbf{E}[|X_{11}|]^2}{C\,\mathbf{E}[|X_{11}|^4]^{\frac{1}{4}}}(y_1^2+\cdots+y_n^2) \le {}^t y\,\mathbf{E}[|M_n|]y.$$

Remerciement

L'auteur remercie Didier Robert pour lui avoir signalé l'article [Hanin et al. 2015].

Bibliographie

[Ayache et Tzvetkov 2008] A. Ayache et N. Tzvetkov, "L^p properties for Gaussian random series", *Trans. Amer. Math. Soc.* **360**:8 (2008), 4425–4439. MR Zbl

[Bai et al. 1988] Z. D. Bai, J. W. Silverstein et Y. Q. Yin, "A note on the largest eigenvalue of a large-dimensional sample covariance matrix", *J. Multivariate Anal.* **26**:2 (1988), 166–168. MR Zbl

[de Bouard 2015] A. de Bouard, "Construction de solutions pour des EDP sur-critiques à données initiales aléatoires (d'après N. Burq et N. Tzvetkov)", exposé 1074, pp. 1–23 dans *Séminaire Bourbaki,* 2013/2014, Astérisque **367–368**, Société Mathématique de France, Paris, 2015. MR Zbl

[Bourgain 1994] J. Bourgain, "Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures", *Comm. Math. Phys.* **166**:1 (1994), 1–26. MR Zbl

[Bourgain 1996] J. Bourgain, "Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation", *Comm. Math. Phys.* **176**:2 (1996), 421–445. MR Zbl

[Bourgain et Bulut 2014a] J. Bourgain et A. Bulut, "Almost sure global well posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball I: the 2D case", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **31**:6 (2014), 1267–1288. MR Zbl

[Bourgain et Bulut 2014b] J. Bourgain et A. Bulut, "Almost sure global well-posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball, II: the 3D case", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **16**:6 (2014), 1289–1325. MR Zbl

[Bourgain et Bulut 2014c] J. Bourgain et A. Bulut, "Invariant Gibbs measure evolution for the radial nonlinear wave equation on the 3d ball", *J. Funct. Anal.* **266**:4 (2014), 2319–2340. MR Zbl

[Burq et Lebeau 2013] N. Burq et G. Lebeau, "Injections de Sobolev probabilistes et applications", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **46**:6 (2013), 917–962. MR Zbl

[Burq et Tzvetkov 2008a] N. Burq et N. Tzvetkov, "Random data Cauchy theory for supercritical wave equations, I: local theory", *Invent. Math.* **173**:3 (2008), 449–475. MR Zbl

[Burq et Tzvetkov 2008b] N. Burq et N. Tzvetkov, "Random data Cauchy theory for supercritical wave equations, II: a global existence result", *Invent. Math.* **173**:3 (2008), 477–496. MR Zbl

[Burq et Tzvetkov 2014] N. Burq et N. Tzvetkov, "Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **16**:1 (2014), 1–30. MR Zbl

[Burq et al. 2005] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov, "Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **38**:2 (2005), 255–301. MR Zbl

[Burq et al. 2013] N. Burq, L. Thomann et N. Tzvetkov, "Long time dynamics for the one dimensional non linear Schrödinger equation", *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **63**:6 (2013), 2137–2198. MR Zbl

[Burq et al. 2015] N. Burq, L. Thomann et N. Tzvetkov, "Global infinite energy solutions for the cubic wave equation", *Bull. Soc. Math. France* **143**:2 (2015), 301–313. MR Zbl

[Clément et al. 2000] P. Clément, B. de Pagter, F. A. Sukochev et H. Witvliet, "Schauder decomposition and multiplier theorems", *Studia Math.* **138**:2 (2000), 135–163. MR Zbl

[Creekmore 1981] J. Creekmore, "Type and cotype in Lorentz L_{pq} spaces", *Indag. Math.* **43**:2 (1981), 145–152. MR Zbl

[Deng 2012] Y. Deng, "Two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with random radial data", *Anal. PDE* **5**:5 (2012), 913–960. MR Zbl

[Erdélyi 1960] A. Erdélyi, "Asymptotic forms for Laguerre polynomials", *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*) **24** (1960), 235–250. MR Zbl

[Fefferman 1971] C. Fefferman, "The multiplier problem for the ball", *Ann. of Math.* (2) **94** (1971), 330–336. MR Zbl

[Figà-Talamanca 1971] A. Figà-Talamanca, "Random Fourier series on compact groups", pp. 1–63 dans *Theory of Group Representations and Fourier Analysis* (Montecatini Terme, Italy, 1970), Edizioni Cremonese, Rome, 1971. MR Zbl

[Figà-Talamanca et Rider 1966] A. Figà-Talamanca et D. Rider, "A theorem of Littlewood and lacunary series for compact groups", *Pacific J. Math.* **16** (1966), 505–514. MR Zbl

[Figà-Talamanca et Rider 1967] A. Figà-Talamanca et D. Rider, "A theorem on random Fourier series on noncommutative groups", *Pacific J. Math.* **21** (1967), 487–492. MR Zbl

[García-Cuerva et Rubio de Francia 1985] J. García-Cuerva et J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies **116**, North-Holland, Amsterdam, 1985. MR Zbl

[Grafakos 2008] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, 2nd éd., Graduate Texts in Mathematics **249**, Springer, 2008. MR Zbl

[Grivaux 2010] S. Grivaux, "Almost sure convergence of some random series", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **348**:3-4 (2010), 155–159. MR Zbl

[Hanin et al. 2015] B. Hanin, S. Zelditch et P. Zhou, "Nodal sets of random eigenfunctions for the isotropic harmonic oscillator", *Int. Math. Res. Not.* **2015**:13 (2015), 4813–4839. MR Zbl

[Hörmander 1968] L. Hörmander, "The spectral function of an elliptic operator", *Acta Math.* **121** (1968), 193–218. MR Zbl

[Imekraz et al. 2016] R. Imekraz, D. Robert et L. Thomann, "On random Hermite series", *Trans. Amer. Math. Soc.* **368**:4 (2016), 2763–2792. MR Zbl

[Jain et Marcus 1975] N. C. Jain et M. B. Marcus, "Integrability of infinite sums of independent vector-valued random variables", *Trans. Amer. Math. Soc.* **212** (1975), 1–36. MR Zbl

[Kahane 1985] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, 2nd éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics **5**, Cambridge University Press, 1985. MR Zbl

[Koch et Tataru 2005] H. Koch et D. Tataru, "L^p eigenfunction bounds for the Hermite operator", *Duke Math. J.* **128**:2 (2005), 369–392. MR Zbl

[Latała 2005] R. Latała, "Some estimates of norms of random matrices", *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**:5 (2005), 1273–1282. MR Zbl

[Ledoux et Talagrand 1991] M. Ledoux et M. Talagrand, *Probability in Banach spaces: isoperimetry and processes*, Ergebnisse der Mathematik (3) **23**, Springer, 1991. MR Zbl

[Li et Queffélec 2004] D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach : analyse et probabilités*, Cours Spécialisés **12**, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR Zbl

[Lindenstrauss et Tzafriri 1973] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics **338**, Springer, 1973. MR Zbl

[Litvak et al. 2005] A. E. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson et N. Tomczak-Jaegermann, "Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes", *Adv. Math.* **195**:2 (2005), 491–523. MR Zbl

[Marcus et Pisier 1981] M. B. Marcus et G. Pisier, *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, Annals of Mathematics Studies **101**, Princeton University Press, 1981. MR Zbl

[Maurey 1974] B. Maurey, "Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles", exposés 24 et 25 dans *Séminaire Maurey–Schwartz 1973–1974*, Centre de Math., École Polytech., Paris, 1974. MR Zbl

[Maurey et Pisier 1976] B. Maurey et G. Pisier, "Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach", *Studia Math.* **58**:1 (1976), 45–90. MR Zbl

[Muckenhoupt 1970a] B. Muckenhoupt, "Mean convergence of Hermite and Laguerre series, I", *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431. MR Zbl

[Muckenhoupt 1970b] B. Muckenhoupt, "Mean convergence of Hermite and Laguerre series, II", *Trans. Amer. Math. Soc* **147** (1970), 433–460. MR Zbl

[Paley et Zygmund 1930] R. E. A. C. Paley et A. Zygmund, "On some series of functions, I, II", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **26**:3 (1930), 337–357 ; 458–474. JFM

[Paley et Zygmund 1932] R. E. A. C. Paley et A. Zygmund, "On some series of functions, III", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **28**:2 (1932), 190–205. JFM

[Poiret et al. 2014] A. Poiret, D. Robert et L. Thomann, "Probabilistic global well-posedness for the supercritical nonlinear harmonic oscillator", *Anal. PDE* **7**:4 (2014), 997–1026. MR Zbl

[Poiret et al. 2015] A. Poiret, D. Robert et L. Thomann, "Random-weighted Sobolev inequalities on $\mathbb{R}^d$ and application to Hermite functions", *Ann. Henri Poincaré* **16**:2 (2015), 651–689. MR Zbl

[Robert et Thomann 2015] D. Robert et L. Thomann, "Random weighted Sobolev inequalities and application to quantum ergodicity", *Comm. Math. Phys.* **335**:3 (2015), 1181–1209. MR Zbl

[Rudelson et Vershynin 2009] M. Rudelson et R. Vershynin, "Smallest singular value of a random rectangular matrix", *Comm. Pure Appl. Math.* **62**:12 (2009), 1707–1739. MR Zbl

[Shiffman et Zelditch 2003] B. Shiffman et S. Zelditch, "Random polynomials of high degree and Levy concentration of measure", *Asian J. Math.* **7**:4 (2003), 627–646. MR Zbl

[Sogge 1988] C. D. Sogge, "Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds", *J. Funct. Anal.* **77**:1 (1988), 123–138. MR Zbl

[Sogge et Zelditch 2011] C. D. Sogge et S. Zelditch, "Lower bounds on the Hausdorff measure of nodal sets", *Math. Res. Lett.* **18**:1 (2011), 25–37. MR Zbl

[Stein et Weiss 1971] E. M. Stein et G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series **32**, Princeton University Press, 1971. MR Zbl

[de Suzzoni 2014] A.-S. de Suzzoni, "Consequences of the choice of a particular basis of $L^2(S^3)$ for the cubic wave equation on the sphere and the Euclidean space", *Commun. Pure Appl. Anal.* **13**:3 (2014), 991–1015. MR Zbl

[Szegő 1975] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th éd., Colloquium Publications **XXIII**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975. MR Zbl

[Tao 2012] T. Tao, *Topics in random matrix theory*, Graduate Studies in Mathematics **132**, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 2012. MR Zbl

[Thangavelu 1993] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, Mathematical Notes **42**, Princeton University Press, 1993. MR Zbl

[Triebel 1978] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Mathematical Library **18**, North-Holland, Amsterdam, 1978. MR Zbl

[Tzvetkov 2008] N. Tzvetkov, "Invariant measures for the defocusing nonlinear Schrödinger equation", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58**:7 (2008), 2543–2604. MR Zbl

[Tzvetkov 2010] N. Tzvetkov, "Riemannian analogue of a Paley–Zygmund theorem", exposé XV dans *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2008–2009*, École Polytech, Palaiseau, 2010. MR Zbl

[Weis 2001] L. Weis, "Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity", *Math. Ann.* **319**:4 (2001), 735–758. MR Zbl

[Yajima et Zhang 2004] K. Yajima et G. Zhang, "Local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity", *J. Differential Equations* **202**:1 (2004), 81–110. MR Zbl

[Yin et al. 1988] Y. Q. Yin, Z. D. Bai et P. R. Krishnaiah, "On the limit of the largest eigenvalue of the large-dimensional sample covariance matrix", *Probab. Theory Related Fields* **78**:4 (1988), 509–521. MR Zbl

[Zelditch 1992] S. Zelditch, "Quantum ergodicity on the sphere", *Comm. Math. Phys.* **146**:1 (1992), 61–71. MR Zbl

Received 29 Mar 2016. Revised 6 Mar 2017. Accepted 17 Jun 2017.

RAFIK IMEKRAZ: rafik.imekraz@math.u-bordeaux.fr
Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251 du CNRS, Université de Bordeaux, 33405 Talence Cedex, France

Analysis & PDE

msp.org/apde

See inside back cover or msp.org/apde for submission instructions.

The subscription price for 2018 is US $275/year for the electronic version, and $480/year (+$55, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues from the last three years and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Analysis & PDE (ISSN 1948-206X electronic, 2157-5045 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840, is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

APDE peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Analysis & PDE

Volume 11 No. 2 2018