

Systole et rayon interne des variétés hyperboliques non compactes

MATTHIEU GENDULPHE

Nous contrôlons deux invariants globaux des variétés hyperboliques à bouts cuspidaux : la longueur de la plus courte géodésique fermée (la *systole*), et le rayon de la plus grande boule plongée (le *rayon maximal*). Nous majorons la systole en fonction de la dimension et du volume simplicial. Nous minorons le rayon maximal par une constante positive indépendante de la dimension. Ces bornes sont optimales en dimension 3. Cela donne une nouvelle caractérisation de la variété de Gieseking.

We bound two global invariants of cusped hyperbolic manifolds: the length of the shortest closed geodesic (the *systole*), and the radius of the biggest embedded ball (the *inradius*). We give an upper bound for the systole, expressed in terms of the dimension and simplicial volume. We find a positive lower bound on the inradius independent of the dimension. These bounds are sharp in dimension 3, realized by the Gieseking manifold. They provide a new characterization of this manifold.

57M50; 30F45

1 Introduction

La recherche de bornes optimales sur les invariants globaux des variétés hyperboliques reste largement ouverte en dimension $n \geq 3$. Dans cet article, nous établissons des inégalités sur la systole et le rayon interne des variétés hyperboliques non compactes. Ces inégalités sont optimales en dimension 3.

Précisons tout de suite qu'une variété hyperbolique M^n est une variété sans bord, munie d'une métrique complète de courbure sectionnelle constante -1 . Sauf mention du contraire, une variété hyperbolique est supposée de volume fini.

1.1 Énoncé des résultats

La *systole* d'une variété hyperbolique est la longueur de sa plus courte géodésique fermée, on la note sys . Comme pour tout invariant métrique, nous souhaitons contrôler la systole en fonction de quantités purement topologiques, tel le volume simplicial

noté vol_Δ . Nous considérons ici le cas des variétés hyperboliques non compactes. En dimension 3, nous obtenons une inégalité optimale :

Théorème 1.1 *Soit M une 3-variété hyperbolique non compacte, alors*

$$\cosh(\text{sys}(M)/2) \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \text{vol}_\Delta(M),$$

avec égalité si et seulement si M est isométrique à la variété de Gieseking.

En dimension $n \geq 3$, nous majorons le rapport $\cosh(\text{sys}/2)/\text{vol}_\Delta$ par une constante ne dépendant que de la dimension. Cette constante converge très rapidement vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Théorème 1.2 *Toute variété hyperbolique non compacte de dimension $n \geq 3$ satisfait*

$$\frac{\cosh(\text{sys}/2)}{\text{vol}_\Delta} < \frac{\sqrt{\pi n}(n-1)^3(n+1)(n+11)}{2^n \pi^{n/2} \Gamma(n/2)}.$$

Remarque 1.3 Le majorant équivaut à $\frac{1}{2}n^6(\frac{e}{2\pi n})^{n/2}$ lorsque n tend vers l'infini. À comparer avec la constante de l'inégalité systolique de M Gromov ([partie 1.2.4](#)).

Le *rayon interne* d'une variété hyperbolique est le rayon de la plus grande boule métrique plongée dans la variété, on le note R . Nous minorons le rayon interne par une constante positive indépendante de la dimension :

Théorème 1.4 *Toute variété hyperbolique non compacte satisfait*

$$\cosh(R) \geq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

La variété de Gieseking réalise l'égalité en dimension 3.

1.2 Panorama des résultats connus

Nous effectuons ci-dessous un survol de la systole et du rayon interne des variétés hyperboliques. Au passage, nous décrivons une méthode de majoration de la systole introduite par C Adams et A Reid dans [5]. Nous généraliserons cette méthode dans la [partie 4](#).

1.2.1 Majorations Soit M une variété hyperbolique. En comparant le volume d'une boule de rayon $R(M)$ avec le volume de M on trouve

$$\cosh(R(M)) \leq \text{const}(n) \text{vol}_\Delta(M).$$

Si la variété est fermée, la demi-systole s'identifie au minimum du rayon d'injectivité, et on peut remplacer $R(M)$ par $\text{sys}(M)/2$ dans la majoration précédente. Cet argument ne fonctionne pas dans le cas non compact, la variété de Gieseking par exemple vérifie $\text{sys}(M)/2 > R(M)$.

Si M admet une cuspidale, on travaille avec la fibre de plus grand volume de la cuspidale. Cette fibre consiste en une variété plate N , immergée mais non plongée dans M . Comme des points de N sont identifiés dans M , on peut concaténer dans M des lacets de N ayant des points base distincts. Prenons le cas où N est un tore plat, en choisissant deux lacets disjoints réalisant la systole de N , on construit un lacet de M de longueur $2\text{sys}(N)$. La figure 1 illustre cette manipulation.

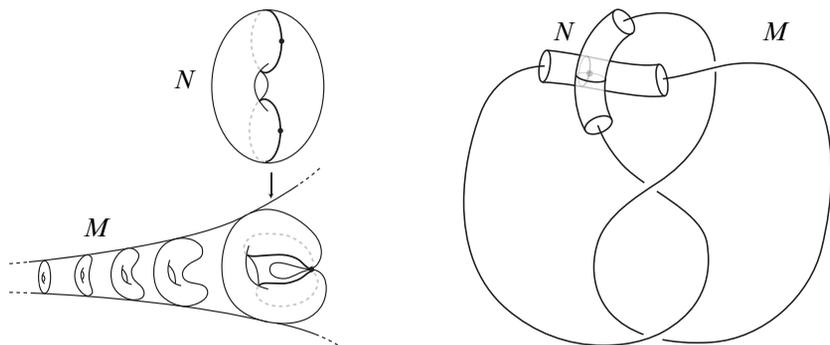


Figure 1: Fibre maximale (gauche) et nœud de huit (droite)

À ce moment précis, on ne sait pas si le lacet obtenu est périphérique. Il s'avère très difficile de répondre à cette question en toute généralité (voir [55]). Mais en dimension 3, un petit calcul dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ fait apparaître que si le lacet obtenu est périphérique, alors M contient un pantalon à trois pointes immergé. Ceci conduit à l'alternative $\text{sys}(M) \leq 2\text{sys}(N)$ ou $\text{sys}(M) \leq 2 \text{arccosh}(3)$.

L'idée de concaténer deux petits lacets périphériques est apparue dans l'article [5] de C Adams et A Reid. Leur inspiration vient d'une part des travaux sur le volume minimal des variétés hyperboliques non compactes (voir la partie 2), et d'autre part du problème des remplissages de Dehn exceptionnels. Voici un de leurs résultats :

Théorème 1.5 (C Adams, A Reid) *Soit $\mathbb{S}^3 \setminus L$ un complément d'entrelacs hyperbolique, alors $\text{sys}(\mathbb{S}^3 \setminus L) \leq 4\pi$.*

Démonstration Il suffit de reprendre l'alternative ci-dessus, et d'utiliser la majoration $\text{sys}(N) \leq 2\pi$ provenant du 2π -théorème de M Gromov et W Thurston. \square

G Lakeland et C Leininger [39] ont généralisé ce résultat de la manière suivante : soit M une 3-variété hyperbolique fermée, la systole $\text{sys}(M \setminus L)$ d'un complément d'entrelacs hyperbolique $M \setminus L$ est majorée par une constante ne dépendant que du volume de M , et pas de l'entrelacs L . Dans le même article, ils établissent une inégalité systolique valable pour toutes les 3-variétés hyperboliques non compactes :

$$\text{sys} \leq \frac{4}{3} \log \text{vol} + \text{constante}.$$

Celle-ci améliore l'inégalité du [théorème 1.1](#) lorsque le volume de la variété est grand.

On termine avec deux résultats de non majoration. Le premier dit que le rayon interne n'admet pas de borne supérieure sur l'ensemble des compléments de nœud hyperboliques (J Purcell et J Souto [49]), ceci contraste avec le théorème précédent. Le second paraît intuitivement évident :

Proposition 1.6 (Folklore) *À revêtement fini près, la systole et le rayon interne d'une variété hyperbolique sont arbitrairement grands.*

Remarque 1.7 Une variété hyperbolique fermée admet une suite de revêtements finis $(M_i)_i$ de degrés $(d_i)_i$ telle que $\text{sys}(M_i)$ soit comparable à $\log d_i$ quand d_i tend vers l'infini (M Gromov [26, section 0.2; 27, section 3.C.6]).

Démonstration Soient M une variété hyperbolique, et Γ un groupe uniformisant M . On se donne une constante $A > 0$, et un point x_0 dans le revêtement universel. Par finitude géométrique de Γ , le sous-ensemble

$$\Gamma(x_0, A) = \{ \gamma \in \Gamma \text{ satisfaisant } 0 < \ell_\gamma < A \text{ ou } d(x_0, \gamma x_0) < 3A \}$$

est fini modulo conjugaison dans Γ . Ici ℓ_γ désigne la distance de translation de γ dans le revêtement universel. Le groupe Γ étant résiduellement fini (théorème de Mal'cev, voir [40]), il admet un sous-groupe distingué d'indice fini et d'intersection vide avec $\Gamma(x_0, A)$. Le revêtement fini associé vérifie $\text{sys} \geq A$ et $R \geq A$. \square

1.2.2 Minorations On attribue généralement à G Margulis et D Kazdan l'existence d'une constante positive R_n minorant le rayon interne des variétés hyperboliques de dimension n . Aucune constante R_n n'est connue à l'heure actuelle (on parlera un peu plus loin du résultat de A Yamada). Plusieurs auteurs ont cependant déterminé des bornes explicites en utilisant des généralisations de l'inégalité de Jørgensen ou du lemme du collier (voir le [tableau 1](#)). Ces méthodes permettent aussi de comparer le rayon interne avec le volume ou le diamètre (A Reznikov [50], R Kellerhals [36; 37; 38], P Buser et H Karcher [15]). La minoration de P Buser et H Karcher reste valable pour les variétés riemanniennes fermées avec courbure pincée $-1 \leq K < 0$.

Minoration	Référence
$R(M^2) \geq \operatorname{arcsinh}(2/\sqrt{3})$ (M^2 orientable)	Yamada [58]
$R(M^3) \geq 0.04$ (M^3 orientable)	Waterman [56]
$R(M^3) \geq 0.24$ (M^3 fermée orientable)	Prezowski [48, section 4]
$R(M^5) > 0.033 \dots$ (M^5 fermée orientable)	Kellerhals [37, section 3]
$R(M^n) \geq 1/4^{n+3}$ (M^n fermée)	Buser et Karcher [15, section 2.5]
$R_n \geq 0.0025/17^{[n/2]}$	Martin [43], Friedland et
où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$	Hersonsky [21, section 4]
$R(M^n) > \frac{1}{(n+3) \cdot \pi^{n-1}}$ (M^n orientable)	Kellerhals [38]

Table 1: Minorations de R_n

On passe maintenant à la systole. Par remplissage de Dehn (voir [54, section 5.8] ou [41, section 4.11]) on construit facilement des 3-variétés hyperboliques avec une systole arbitrairement petite. Ces variétés peuvent être compactes, non compactes, voire des compléments de nœud (C Adams [4, section 6]). Suivant une idée similaire, mais plus difficile à mettre en œuvre, F Bonahon et J-P Otal [13] ont produit des variétés hyperboliques de volume infini avec une systole nulle (on définit alors la systole comme la borne inférieure des longueurs des géodésiques fermées). En dimensions supérieures, on obtient des variétés hyperboliques (compactes ou non compactes) avec une systole arbitrairement petite *via* une manipulation algébrique introduite par I Agol [6] pour la dimension 4, et étendue en dimension supérieure par M Belolipetsky et S Thomson [11], N Bergeron, F Haglund et D Wise [12, dernière remarque].

1.2.3 Quelques mots sur les surfaces L'étude des invariants globaux est nettement plus avancée en dimension 2. Une borne inférieure optimale sur R a été déterminée par A Yamada [58] dans le cas orientable. Elle est réalisée par le pantalon à trois points, et atteinte à l'infini dans l'espace des modules pour les autres types topologiques (il suffit de pincer des géodésiques). Le maximum de R sur l'espace des modules est connu dans le cas compact (C Bavard [9]), et dans le cas non compact (J DeBlois [17]). Signalons que des problèmes plus fins tels que la caractérisation des surfaces maximales (C Bavard [9]), leur dénombrement à topologie fixée (R Bacher et A Vdovina [7]), ou l'unicité du plus grand disque plongé dans ces surfaces (E Gironde et G González-Diez [25]) ont été résolus.

L'étude de la systole s'avère beaucoup plus difficile. Bien sûr, la systole n'admet pas de borne inférieure positive (en dehors du cas trivial du pantalon), il s'agit donc d'étudier son maximum sur l'espace des modules. La méthode de comparaison des volumes évoquée plus haut donne $\operatorname{sys} \leq 2 \ln(1 - \chi) + 2 \ln(2)$ dans le cas fermé. Les exemples

les plus intéressants de surfaces avec une grande systole (P Buser et P Sarnak [16]) ne permettent pas de dire si cette inégalité est asymptotiquement optimale. Nous connaissons peu de maxima globaux dans le cas compact (F Jenni [33] et C Bavard [8], P Schmutz [52], l'auteur [23]), et une infinité dans le cas non compact (ils sont réalisés par les principaux sous-groupes de congruence, P Schmutz [53]). Enfin, signalons ce qui est peut-être le plus intéressant, à savoir qu'une très belle théorie variationnelle a été développée (P Schmutz [52], C Bavard [10]).

1.2.4 Inégalités universelles Les principales inégalités systoliques sont *universelles*, elles ne dépendent pas de la métrique mais seulement de la variété supportant la métrique. Soit M^n une variété fermée essentielle (par exemple asphérique), M Gromov (voir [26; 28; 29]) a montré que toute métrique riemannienne sur M^n satisfait l'inégalité

$$\text{sys}^n \leq 6(n+1)n^n \sqrt{(n+1)!} \text{vol}.$$

Remarquez que la quantité sys^n/vol est homogène. Dans le cas où M supporte une métrique de courbure négative, il est possible d'améliorer le facteur devant le volume ([27, théorème 3.B1], voir aussi [29]).

Si l'on se restreint aux métriques hyperboliques (ou plus généralement aux métriques de courbure inférieure ou égale à -1), il est plus naturel de comparer la systole avec le logarithme du volume, en raison de la croissance exponentielle du volume (entropie positive). Les inégalités des théorèmes 1.1 et 1.2 sont donc plus précises, mais moins générales que celles de M Gromov.

1.3 Commentaires sur les résultats et leurs preuves

Le [théorème 1.4](#) donne une première minoration de R par une constante positive, les minorants précédents tendent exponentiellement vers 0 (même ceux ne concernant que le cas non compact, voir [19]). Sa preuve est extrêmement simple : on prend un point de tangence d'une région cuspidale maximale avec elle-même, et on évalue le rayon d'injectivité en ce point. La détermination du rayon interne de la variété de Gieseking s'effectue sans difficulté grâce à une propriété de convexité.

En ce qui concerne la majoration du rapport $\cosh(\text{sys}/2)/\text{vol}_\Delta$, nous nous inspirons du travail d'Adams et Reid pour construire une géodésique dont nous contrôlons la longueur en fonction du groupe de Bieberbach à l'infini. Nous comparons cette longueur au volume de la variété grâce à des méthodes classiques de minoration de volume (voir la [partie 2](#)). Nous montrons ainsi que l'exponentielle de la demi-systole est négligeable par rapport au volume simplicial lorsque la dimension est grande.

Le résultat principal de l'article est la majoration optimale de la systole en dimension 3. Nous établissons l'inégalité en nous ramenant à un problème d'empilement de disques dans les surfaces euclidiennes. Ce problème est résolu *via* un argument variationnel (partie 6). Nous déterminons le cas d'égalité grâce à une caractérisation du nœud de huit en termes de longueur de lacets périphériques due à C Adams [3]. Le lemme suivant (voir partie 5.2) s'avère essentiel pour estimer les longueurs des géodésiques :

Lemme 1.8 *Soit γ un élément loxodromique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Sa distance de translation ℓ_γ est donnée par $2 \cosh(\ell_\gamma/2) = |\mathrm{Tr}(\gamma)/2 - 1| + |\mathrm{Tr}(\gamma)/2 + 1|$.*

Dans les énoncés des résultats, nous préférons faire intervenir le volume simplicial plutôt que le volume. Mais dans les preuves, nous travaillons avec le volume, qui dans le cas des n -variétés hyperboliques de volume fini vérifie $\mathrm{vol} = \nu_n \mathrm{vol}_\Delta$ (voir [54, section 6.5]), où ν_n désigne le volume du simplexe idéal régulier de \mathbb{H}^n .

1.4 Plan de l'article

Nous effectuons d'abord (partie 2) des rappels sur la structure et le volume des variétés hyperboliques non compactes. Nous établissons ensuite la minoration du rayon interne (partie 3), puis les inégalités entre systole et volume simplicial (partie 4). Le reste de l'article est consacré à l'inégalité optimale sur la systole en dimension 3. Elle nécessite des lemmes spécifiques à la dimension 3 (partie 5), ainsi qu'une proposition sur les empilements de disques dans les surfaces plates (partie 6). Tous ces éléments sont utilisés pour finalement établir le résultat (partie 7).

1.5 Remerciements

Je tiens à remercier Ruth Kellerhals pour son soutien. Je la remercie aussi pour m'avoir indiqué de nombreuses références et prêté plusieurs documents personnels. Une partie de ce travail a été réalisée lors d'un séjour au Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn, je remercie la Max-Planck-Gesellschaft de son soutien et les membres de l'institut pour leur accueil. Je remercie le référé pour sa lecture attentive, et pour m'avoir indiqué des références.

2 Volume et bouts cuspidaux

Dans cette partie, nous rappelons plusieurs résultats classiques portant sur la structure et le volume des variétés hyperboliques non compactes. Les idées relatives au volume sont issues des travaux de R Meyerhoff [45], C Adams [1], S Hersonsky [31] et R Kellerhals [35]. Nous suivons la présentation donnée par R Kellerhals [35].

Nous désignons par \mathbb{H}^n l'espace hyperbolique de dimension $n \geq 2$. Nous travaillerons avec le modèle du demi-espace, où \mathbb{H}^n est identifié à $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ muni de la métrique $(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)/x_n^2$. La forme volume de \mathbb{H}^n est alors donnée par $dx_1 \cdots dx_n / (x_n)^n$.

2.1 Groupes kleiniens

Soit M une variété hyperbolique de volume fini et de dimension $n \geq 3$. Il existe une représentation fidèle Γ de $\pi_1(M)$ comme réseau de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Selon le théorème de rigidité de Mostow et Prasad, la représentation Γ est unique à conjugaison près par une isométrie de \mathbb{H}^n , et le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ s'identifie isométriquement à M .

Lorsque M est non compacte, le groupe Γ admet des stabilisateurs paraboliques pour son action sur le bord conforme $\partial\mathbb{H}^n$. Ces stabilisateurs sont en nombre fini modulo conjugaison dans Γ . Considérons Γ_x ($x \in \partial\mathbb{H}^n$) l'un de ces stabilisateurs, il agit de façon conforme et libre sur le complémentaire $\partial\mathbb{H}^n \setminus \{x\}$, et s'identifie ainsi à un réseau sans torsion de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{n-1})$. Cette représentation de Γ_x comme réseau de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{n-1})$ n'est pas canonique, mais elle est bien définie à conjugaison près par une similitude.

Dans la suite nous supposons M non compacte, nous désignons par Γ_x un stabilisateur parabolique d'un point $x \in \partial\mathbb{H}^n$. Nous notons Λ_x le sous-groupe abélien libre maximal de Γ_x . Notez que l'indice de Λ_x dans Γ_x est borné par une fonction de n .

2.2 Cuspides

Les cuspides sont les bouts de la variété, leur géométrie est très simple.

2.2.1 Définition Une *région cuspidale* est une partie C de M de la forme $\Gamma_x \backslash B_x$, où B_x est une horoboule centrée en $x \in \partial\mathbb{H}^n$ ne contenant pas deux points identifiés par un élément de $\Gamma \backslash \Gamma_x$. Nous appelons *cuspidale* ou *bout cuspidal* une classe d'équivalence C de régions cuspidales pour la relation $C \sim C'$ si C contient C' ou C' contient C .

L'inclusion, ou de manière équivalente le volume, ordonne totalement une cuspidale. La cuspidale admet un *représentant maximal* pour cette relation d'ordre consistant en l'union de ses éléments. Nous appellerons *volume* de la cuspidale le volume de son représentant maximal.

2.2.2 Structure métrique Une région cuspidale C se relève en un empilement d'horoboules dans \mathbb{H}^n . Supposons l'une de ces horoboules de la forme $B_\infty = \{x_n > h\}$ avec $h > 0$. Nous observons que la région cuspidale C est isométrique à la variété

produit $]1, +\infty[\times N$ munie de la métrique $(dt^2 + ds^2)/t^2$, où (N, ds^2) désigne la variété plate $\Gamma_\infty \backslash \partial B_\infty$. En particulier

$$\text{vol}(C) = \frac{\text{vol}(N)}{\text{dim}(N)}.$$

2.2.3 Action sur $\partial \mathbb{H}^n$ Dans la suite, nous préférons regarder l'action de Γ_∞ sur la partie du bord à l'infini $\partial \mathbb{H}^n \setminus \{\infty\} = \mathbb{E}^{n-1}$ plutôt que sur l'horosphère ∂B_∞ . Cette action n'étant pas intrinsèque, nous pouvons la normaliser suivant nos préférences, quitte à conjuguer Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Indépendamment de la normalisation, nous avons

$$(1) \quad \text{vol}(C) = \frac{\text{covol}(\Gamma_\infty)}{(n-1)h^{n-1}} = \frac{\text{covol}(\Lambda_\infty)}{i_C(n-1)h^{n-1}},$$

où i_C désigne l'indice de Λ_∞ dans Γ_∞ . Le covolume est mesuré par rapport à la structure euclidienne standard sur $\partial \mathbb{H}^n \setminus \{\infty\}$. Travailler avec (N, ds^2) équivaut à normaliser par $h = 1$.

2.3 Minoration du volume des cuspidés

Minorer le volume de C revient à minorer le volume de $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^{n-1}$. En travaillant dans le revêtement universel, nous allons voir que $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^{n-1}$ contient deux boules de diamètre h . Ceci permettra de minorer son volume de manière efficace grâce à un argument de densité.

2.3.1 Empilement de boules dans la variété plate Si C est le représentant maximal de la cuspidé, alors toute horoboule au-dessus de C est tangente à une autre horoboule au-dessus de C . En particulier, B_∞ admet des horoboules tangentes. Celles-ci se projettent orthogonalement sur \mathbb{E}^{n-1} pour former un empilement de boules de diamètre h . Cet empilement est invariant par Γ_∞ , et passe au quotient en un empilement de boules de diamètre h dans la variété plate $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^{n-1}$. À un facteur multiplicatif près, la quantité $h^{n-1}/\text{covol}(\Gamma_\infty)$ représente la densité de cet empilement. Cet empilement est difficile à observer si l'on travaille directement dans la variété M .

2.3.2 Le facteur 2 d'Adams Par maximalité de C , il existe un élément $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ identifiant deux points de ∂B_∞ . Les isométries γ et γ^{-1} envoient B_∞ sur des horoboules qui lui sont tangentes. Pour fixer les idées, posons $\gamma^{-1}(B_\infty) = B_0$ et $\gamma(B_\infty) = B_b$ avec $b \in \mathbb{E}^{n-1}$.

Les horoboules B_0 et B_b n'appartiennent pas à la même orbite sous l'action de Γ_∞ . Sinon il existerait $\tau \in \Gamma_\infty$ tel que $\tau(b) = 0$, et $\tau\gamma$ fixerait le point de tangence entre B_0 et B_∞ , ce qui est impossible car Γ n'a pas d'élément elliptique.

Il s’ensuit que l’empilement de boules de diamètre h dans la variété plate $\Gamma_\infty \setminus \mathbb{E}^{n-1}$ contient au moins deux boules. C Adams mis en évidence ce fait important dans [1]. L’élément $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ jouera un rôle fondamental par la suite.

2.3.3 Densité euclidienne et minoration du volume de la cuspide La variété plate $\Gamma_\infty \setminus \mathbb{E}^{n-1}$ contient deux boules disjointes de diamètre h , nous pouvons donc minorer son volume par le volume des deux boules. Cette minoration s’avère grossière. En effet, C Rogers a montré dans [51] que la densité d’un empilement de boules de même rayon dans une variété plate de dimension n est inférieure ou égale à la densité simpliciale d_n (voir la partie 7.4). Ceci donne directement [35, section 3.2]

$$(2) \quad 2 \frac{(h/2)^{n-1} \omega_{n-1}}{\text{covol}(\Gamma_\infty)} \leq d_{n-1} \quad \text{et} \quad \text{vol}(C) \geq \frac{\omega_{n-1}}{2^{n-2}(n-1)d_{n-1}},$$

où ω_{n-1} désigne le volume de la boule unité de l’espace euclidien \mathbb{E}^{n-1} .

2.4 Minoration du volume de la variété

De la même façon, la minoration du volume de M par le volume de C s’avère très mauvaise. Pour passer de la cuspide à la variété toute entière, il convient d’appliquer un théorème de densité.

2.4.1 Densité des cuspidales En utilisant un théorème de K Böröczky [14, section 6] sur la densité des empilements d’horoboules, R Meyerhoff [45, section 2] et R Kellerhals [35, lemme 3.2] ont obtenu le théorème suivant :

Théorème 2.1 (R Meyerhoff, R Kellerhals) *Soit \mathcal{C} une union de régions cuspidales disjointes d’une variété hyperbolique M^n . La densité de \mathcal{C} dans M satisfait*

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{C})}{\text{vol}(M)} \leq d_n(\infty),$$

où $d_n(\infty)$ désigne la densité simpliciale des horoboules dans \mathbb{H}^n (voir l’appendice).

2.4.2 Minoration du volume de la variété Le théorème ci-dessus combiné avec (2) donne (R Kellerhals [35, théorème 3.5])

$$(3) \quad \text{vol}(M) \geq \frac{\text{covol}(\Gamma_\infty)}{(n-1)d_n(\infty)h^{n-1}} \geq \frac{\omega_{n-1}}{2^{n-2}(n-1)d_{n-1}d_n(\infty)}.$$

Nous utiliserons cette minoration dans la partie 4. En estimant les différents termes du membre de droite (voir l’appendice), nous trouvons

$$\text{vol}_\Delta(M^n) \geq \frac{2^n \pi^{n/2-1} \Gamma(n/2)}{\sqrt{n}(n^2-1)} \simeq \left(\frac{2\pi n}{e}\right)^{n/2} \frac{2}{\sqrt{\pi n^3}}.$$

En dimension 3, on évalue facilement les quantités intervenant dans (3), on trouve

$$\sqrt{3}h^2 \leq \text{covol}(\Gamma_\infty) \quad \text{et} \quad \text{vol}(M^3) \geq v_3.$$

C Adams obtint ces inégalités optimales dans [1], il y montra de plus que la variété de Gieseking (voir parties 3.2 et 7.4) est l'unique (à isométrie près) 3-variété hyperbolique non compacte de volume minimal.

3 Minoration du rayon interne

3.1 Une borne optimale

Théorème 3.1 *Soit M une variété hyperbolique non compacte. Soit P un point de tangence du représentant maximal d'une cuspidale de M avec lui-même, alors*

$$R(M) \geq r_{\text{inj}}(P) \geq \text{arccosh}(\sqrt{5}/2).$$

La variété de Gieseking réalise l'égalité entre ces différentes quantités.

Remarque 3.2 Nous ne savons pas si cette inégalité caractérise la variété de Gieseking à isométrie près.

Démonstration Soit C un représentant maximal d'une cuspidale \mathcal{C} de M . Nous nous plaçons dans la situation habituelle où B_0 et $B_\infty = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_n > 1\}$ sont deux horoboules tangentes au-dessus de C . Appelons \tilde{P} le point de tangence entre ces horoboules, et P son image dans M . Nous avons trivialement $\max_M r_{\text{inj}} \geq r_{\text{inj}}(P)$.

Pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{H}^n$ et un point $x \in \partial\mathbb{H}^n$, notons $\text{Cone}_x(A)$ l'union des géodésiques d'extrémité x passant par un point de A . Sur l'horosphère ∂B_0 (resp. ∂B_∞) munie de sa métrique induite, on considère le disque D_0 (resp. D_∞) centré en \tilde{P} et de rayon $\frac{1}{2}$. Alors

Lemme 3.3 *Le rayon d'injectivité $r_{\text{inj}}(P)$ est supérieur ou égal au rayon de la plus grande boule contenue dans l'intersection des cônes $\text{Cone}_0(D_0) \cap \text{Cone}_\infty(D_\infty)$. Cette boule est centrée en \tilde{P} et de rayon $\text{arccosh}(\sqrt{5}/2)$.*

Démonstration du lemme 3.3 L'intersection $\text{Cone}_0(D_0) \cap \text{Cone}_\infty(D_\infty)$ (figure 2) admet une symétrie de révolution par rapport à la droite (0∞) , ainsi qu'une symétrie par rapport à l'hypersurface géodésique tangente aux horoboules B_0 et B_∞ . En dimension 2, cet ensemble consiste en le quadrilatère convexe $(0 e^{i\pi/3} \infty e^{2i\pi/3})$, que l'on reconnaît comme l'union de deux domaines fondamentaux pour l'action habituelle de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{H}^2 . Clairement, la plus grosse boule contenue dans l'intersection des cônes est centrée en \tilde{P} et de rayon $\text{arccosh}(\sqrt{5}/2)$.

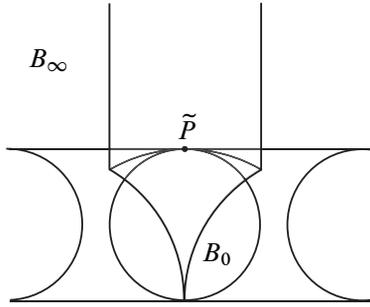


Figure 2: Le double cône $\text{Cone}_0(D_0) \cap \text{Cone}_\infty(D_\infty)$

Maintenant nous montrons que l’intersection des cônes est contenue dans la cellule de Dirichlet centrée en \tilde{P} , ceci suffit pour conclure. Nous ne traitons que le cas de la dimension 2. Soit z un point de $\text{Cone}_0(D_0) \cap \text{Cone}_\infty(D_\infty)$, en raison de la symétrie nous supposons $|z| \geq 1$. Par construction, $\tilde{P} = i$ minimise la distance à z parmi les relevés de P appartenant à l’horosphère $\partial B_\infty = \{lm = 1\}$. Les autres relevés de P appartiennent à la bande $\{lm \leq \frac{1}{2}\}$, car ce sont des points de tangence entre des horoboules de l’empilement. On vérifie facilement que z est au moins aussi proche de \tilde{P} que de n’importe quel point de $\{lm \leq \frac{1}{2}\}$, donc de n’importe quel autre relevé de P . En conclusion z appartient à la cellule de Dirichlet centrée en \tilde{P} . \square

Il reste à montrer qu’il y a égalité lorsque M est la variété de Gieseking, ceci fait l’objet du paragraphe suivant. \square

3.2 Le rayon d’injectivité de la variété de Gieseking

Soit \mathcal{S} un simplexe idéal régulier de \mathbb{H}^3 . Les identifications des faces de \mathcal{S} représentées en figure 3 réunissent toutes les arêtes dans un même cycle. Ainsi, selon un théorème de Poincaré, les isométries réalisant ces identifications engendrent un sous-groupe discret de $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$, construit explicitement à la partie 7.4. Les identifications ne fixant aucun point, ce sous-groupe agit librement et l’espace quotient associé est une variété hyperbolique appelée *variété de Gieseking*, et notée $N1_1$ dans le catalogue SnapPea [57]. Elle réalise le minimum du volume parmi les 3-variétés hyperboliques non compactes (voir partie 2.4.2).

Chaque face du simplexe admet un cercle inscrit, les points de tangence de ces cercles avec les arêtes de \mathcal{S} se projettent sur un même point P dans la variété. Ce point est le seul point de tangence du représentant maximal de la cuspidale de $N1_1$ avec lui-même. On évalue facilement la distance minimale entre deux relevés de P , on

trouve $r_{\text{inj}}(P) = \text{arccosh}(\sqrt{5}/2)$, à comparer avec le rayon de la boule inscrite dans \mathcal{S} qui vaut $\text{arccosh}(3/2\sqrt{2})$.

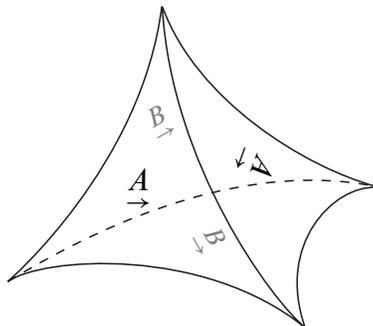


Figure 3: \mathcal{S}

Soient v_1, \dots, v_4 les centres des cercles inscrits dans les faces de \mathcal{S} , et v le centre de la boule inscrite dans \mathcal{S} . Les v_i sont les points de tangence de la boule inscrite. À chaque paire d'indices distincts $\{i, j\}$ on associe l'enveloppe convexe des points v, v_i, v_j et de l'arête adjacente aux faces contenant v_i et v_j (figure 4, droite). De cette façon on décompose \mathcal{S} en 6 polyèdres isométriques. Les translatsés de ces polyèdres adjacents à une même arête de \mathcal{S} forment un nouveau domaine fondamental \mathcal{T} à 12 faces (figure 4, gauche). Chaque face de \mathcal{T} est supportée par un plan totalement géodésique équidistant de deux relevés de P , on en conclut que ce domaine fondamental consiste en la cellule de Dirichlet centrée en un relevé de P .

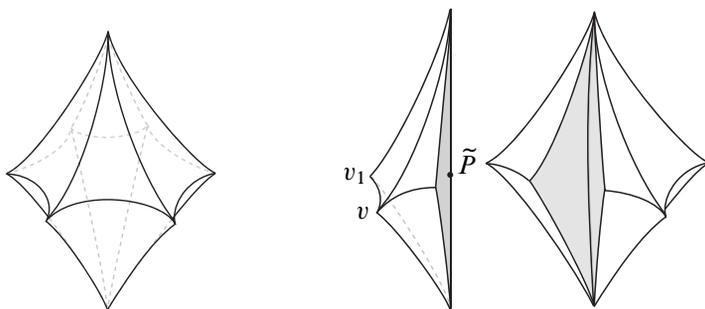


Figure 4: \mathcal{T} (gauche) et découpage de \mathcal{T} (droite)

On peut visualiser les domaines fondamentaux \mathcal{S} et \mathcal{T} grâce au logiciel SnapPea. L'idée de la minoration du rayon interne vient en partie des observations faites avec SnapPea.

Lemme 3.4 *Le maximum du rayon d'injectivité de la variété de Gieseking est atteint au point P uniquement.*

Démonstration Soit C le représentant maximal de la cuspidale, le point P réalise la borne supérieure du rayon d'injectivité sur C . En effet, ce point se situe sur le bord de C , et l'intersection de la boule $B(P, r_{\text{inj}}(P))$ avec une fibre C_0 de C consiste en un empilement optimal de deux disques de même rayon dans une bouteille de Klein plate.

Regardons maintenant les points de la variété se situant en dehors de C . Dans le simplexe \mathcal{S} , l'enveloppe convexe des points se projetant sur P forme un octaèdre. Soit F l'une des faces de cet octaèdre. Une isométrie réalisant une des identifications de \mathcal{S} envoie chaque sommet de F sur un point à distance $2 \operatorname{arccosh}(\sqrt{5}/2)$, et cette même isométrie envoie le centre de \mathcal{S} sur un point à distance $2 \operatorname{arccosh}(3/2\sqrt{2})$. Par le lemme classique ci-dessous, tout point dans l'enveloppe convexe de F et du centre de \mathcal{S} est envoyé à une distance au plus $2 \operatorname{arccosh}(\sqrt{5}/2)$, avec égalité si et seulement si ce point se projette sur P .

Lemme 3.5 *Soit γ une isométrie de \mathbb{H}^n . Alors la fonction $x \mapsto d_{\mathbb{H}^n}(x, \gamma \cdot x)$ est convexe, et même strictement convexe si γ est de type parabolique.*

Démonstration du lemme 3.5 Soit c une géodésique paramétrée par la longueur d'arc, son image $\gamma \cdot c$ est encore une géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Or, nous savons qu'étant données deux géodésiques a et b paramétrées par la longueur d'arc, la fonction $t \mapsto d_{\mathbb{H}^n}(a(t), b(t))$ est convexe, et même strictement convexe si les géodésiques sont distinctes. \square

Ainsi, tout point de la variété se relevant en un point de l'octaèdre a son rayon d'injectivité majoré par $\operatorname{arccosh}(\sqrt{5}/2)$, avec égalité au point P uniquement. Ceci termine la démonstration, car la projection de l'octaèdre dans la variété contient le complémentaire de C . \square

4 Inégalité systolique asymptotique

Soit $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ avec $n \geq 3$ une variété hyperbolique non compacte de volume fini. Nous allons majorer $\cosh(\operatorname{sys}(M)/2)$ en suivant la méthode de C Adams et A Reid décrite à la [partie 1.2](#). La proposition élémentaire ci-dessous fournira un critère permettant de s'assurer que le produit de deux éléments paraboliques est hyperbolique. Nous comparerons ensuite le majorant obtenu avec le minorant du volume simplicial vu à la [partie 2.4.2](#). Le tout donnera une majoration du rapport $\cosh(\operatorname{sys}/2)/\operatorname{vol}_{\Delta}$.

4.1 Sur le produit de deux transformations paraboliques

Un élément de $\text{Mob}(\mathbb{S}^n)$ est dit *purement parabolique* s'il est conjugué à une translation de \mathbb{E}^n . Nous supposons $n \geq 2$.

Proposition 4.1 Soient α et β deux éléments purement paraboliques de $\text{Mob}(\mathbb{S}^n)$, de points fixes distincts. Si le produit $\alpha\beta$ est parabolique, alors α et β stabilisent une même droite conforme de \mathbb{S}^n . Sinon α et β stabilisent un même plan conforme de \mathbb{S}^n , sur lequel le produit $\alpha\beta$ admet deux points fixes distincts.

Remarque 4.2 Si $\alpha\beta$ est parabolique, alors $\langle \alpha, \beta \rangle$ préserve un plan totalement géodésique de \mathbb{H}^{n+1} (en identifiant $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ avec \mathbb{S}^n). L'action de $\langle \alpha, \beta \rangle$ sur ce plan est conjuguée à l'action usuelle du sous-groupe de congruence $\Gamma(2)$ sur \mathbb{H}^2 . En particulier le quotient est un pantalon à 3 points.

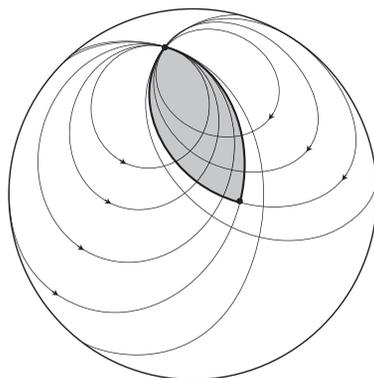


Figure 5: $P_{\alpha, \beta}$

Démonstration Soient α et β deux transformations purement paraboliques, de points fixes respectifs p_{α} et p_{β} . Nous noterons \mathcal{D}_{α} (resp. \mathcal{D}_{β}) l'ensemble des droites conformes de \mathbb{S}^n stables par α (resp. β). Considérons D_{α} (resp. D_{β}) l'unique droite de \mathcal{D}_{α} (resp. de \mathcal{D}_{β}) passant par p_{β} (resp. p_{α}). Les transformations α et β stabilisent une même droite conforme de \mathbb{S}^n si et seulement si D_{α} et D_{β} coïncident.

Supposons $D_{\alpha} \neq D_{\beta}$, et appelons $P_{\alpha, \beta}$ le plan conforme engendré par D_{α} et D_{β} . Ce plan est stable par α et β . La droite D_{β} intersecte transversalement chaque droite de \mathcal{D}_{α} contenue dans $P_{\alpha, \beta}$ en exactement deux points, dont l'un est p_{α} . Ainsi, D_{β} partage $P_{\alpha, \beta}$ en deux cellules C_{β}^{+} et C_{β}^{-} , vérifiant

$$\alpha(\bar{C}_{\beta}^{+}) \subset C_{\beta}^{+} \cup \{p_{\alpha}\} \quad \text{et} \quad \alpha^{-1}(\bar{C}_{\beta}^{-}) \subset C_{\beta}^{-} \cup \{p_{\alpha}\}.$$

De même, la droite D_α partage $P_{\alpha,\beta}$ en deux cellules C_α^+ et C_α^- vérifiant

$$\beta(\bar{C}_\alpha^+) \subset C_\alpha^+ \cup \{p_\beta\} \quad \text{et} \quad \beta^{-1}(C_\alpha^-) \subset C_\beta^- \cup \{p_\beta\}.$$

Les cellules $C^+ = C_\alpha^+ \cap C_\beta^+$ et $C^- = C_\alpha^- \cap C_\beta^-$ sont disjointes et vérifient

$$\alpha\beta(\bar{C}^+) \subset C^+ \quad \text{et} \quad (\alpha\beta)^{-1}(\bar{C}^-) \subset C^-.$$

Par le théorème de Brouwer, $\alpha\beta$ admet deux points fixes sur $P_{\alpha,\beta}$, et n'est donc pas une transformation parabolique. Nous avons représenté ce qui se passe en [figure 5](#). On y voit les familles de droites \mathcal{D}_α et \mathcal{D}_β , ainsi que la cellule C^+ en gris. □

4.2 Inégalité systolique

Théorème 1.2 *Toute variété hyperbolique non compacte de dimension $n \geq 3$ satisfait*

$$\frac{\cosh(\text{sys}/2)}{\text{vol}_\Delta} \leq \frac{\sqrt{\pi n}(n-1)^3(n+1)(n+11)}{2^n \pi^{n/2} \Gamma(n/2)}.$$

Remarque 4.3 Dans la preuve du théorème, nous majorons l'indice de Λ_∞ dans Γ_∞ par $(2(n-1))^{n-1}$. Cette majoration repose sur la classification des groupes finis simples. Il serait intéressant d'en avoir une preuve géométrique.

Démonstration Soit M une variété hyperbolique non compacte de dimension $n \geq 3$. Soit C le représentant maximal d'une cuspidale \mathcal{C} . La région cuspidale C se relève en un empilement d'horoboules, dont deux au moins sont tangentes. Nous nous plaçons dans la situation où deux horoboules tangentes sont centrées en 0 et ∞ , nous notons B_0 et $B_\infty = \{x_n > h\}$ ces horoboules. Nous supposons de plus la normalisation $\text{covol}(\Lambda_\infty) = 1$.

Désignons par m_i le i -ième minima successif de Λ_∞ :

$$m_i = \inf\{\sup(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_i\|^2) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_i) \text{ est une famille libre de } \Lambda_\infty\}.$$

Lemme 4.4 *On a l'inégalité*

$$\cosh(\text{sys}(M)/2) \leq 1 + \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2h^2}.$$

Démonstration du lemme 4.4 Soient λ_1 et λ_2 deux éléments non colinéaires de Λ_∞ réalisant m_1 et m_2 . Soit γ dans Γ tel que $\gamma \cdot 0 = \infty$. Les conjugués $\alpha_1 = \gamma^{-1}\lambda_1\gamma$ et $\alpha_2 = \gamma^{-1}\lambda_2\gamma$ sont des transformations purement paraboliques fixant 0. En prenant $\beta = \lambda_1$ et en appliquant la proposition précédente, il vient qu'une des transformations

$\alpha_1\beta, \alpha_2\beta$ est loxodromique. En effet, les transformations α_1 et α_2 ne peuvent fixer la même droite conforme passant par 0 et ∞ puisque λ_1 et λ_2 ne sont pas colinéaires.

Nous souhaitons estimer la distance de translation de la transformation loxodromique $\alpha_i\beta$. Les transformations α_i et β préservent un plan conforme, sur lequel le produit $\alpha_i\beta$ admet deux points fixes ([proposition 4.1](#)). Il suffit donc de travailler dans le sous-espace totalement géodésique bordé par ce plan, car il contient l'axe de la transformation $\alpha_i\beta$. Il revient au même de se placer dans \mathbb{H}^3 , où nous pouvons représenter α_i et β par les matrices

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où m et m_i sont des nombres complexes de modules $|m| = \sqrt{m_1}$ et $|m_i| = \sqrt{m_i}/h^2$. On trouve

$$\alpha_i\beta = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m_i & mm_i + 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne le résultat voulu *via* le [lemme 5.1](#). □

Le lemme ci-dessus associé à la minoration (3) produit l'inégalité

$$(4) \quad \frac{\cosh(\text{sys}/2)}{\text{vol}}(M) \leq i_c(n-1)d_n(\infty)h^{n-1} \left(1 + \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2h^2} \right).$$

Nous avons opté pour la normalisation $\text{covol}(\Lambda_\infty) = 1$, d'où $\text{covol}(\Gamma_\infty) = 1/i_c$. Le diamètre h dépendant de Γ_∞ , nous pouvons le majorer par une quantité faisant intervenir l'indice i_c . Ceci permettra de compenser partiellement le terme i_c dans l'inégalité ci-dessus. La première inégalité de (2) se reformule en $h^{n-1} \leq A_n/2i_c$, où la quantité auxiliaire A_n est définie par

$$A_n = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{n-1/2} (n-1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

On renvoie à l'[appendice](#) pour plus de détails. La majoration $\pi \leq 4$ et la formule de duplication de la fonction Γ donnent

$$A_n \geq \frac{(n-1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{(n+1)/2-1}} = \frac{(n-1)\Gamma(\frac{n+1}{4})\Gamma(\frac{n+3}{4})}{\sqrt{\pi}} \geq \frac{2\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Ceci implique $h^{n-1}, h^{n-3} \leq A_n i_c^{-(n-3)/(n-1)}$.

Par le théorème des minima successifs (voir [44, page 50]), nous avons $\sqrt{m_1 m_2} \leq \gamma_{n-1}$. La constante d'Hermite vérifiant l'inégalité $\gamma_n < 1 + n/4$ (voir [44, page 53]), nous

arrivons à $\sqrt{m_1 m_2} < (n + 3)/4$. Nous en déduisons

$$h^{n-1} \left(1 + \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2h^2} \right) \leq h^{n-1} + h^{n-3} \frac{n+3}{8} \leq \frac{n+11}{8} A_n i_C^{-(n-3)/(n-1)}.$$

En injectant ce majorant dans (4) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(\text{sys}/2)}{\text{vol}_\Delta}(M^n) &\leq \frac{(n-1)(n+11)}{8} d_n(\infty) A_n i_C^{2/(n-1)} \\ &\leq \sqrt{n} \frac{(n-1)(n+1)(n+11)}{8\pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n)} i_C^{2/(n-1)} \\ &\leq \sqrt{n} \frac{(n-1)(n+1)(n+11)}{2^{n+2}\pi^{n/2-1}} \frac{i_C^{2/(n-1)}}{\Gamma(n/2)}. \end{aligned}$$

Le dernier passage fait encore appel à la formule de duplication de la fonction Γ .

Il reste à majorer l'indice i_C . Le groupe $\Gamma_\infty/\Lambda_\infty$ est isomorphe à un sous-groupe fini de $GL(n-1, \mathbb{Z})$ d'ordre i_C . Les sous-groupes finis maximaux de $GL(n, \mathbb{Z})$ ont été déterminés par W Feit (nous n'avons pu consulter [18], mais S Friedland y fait référence dans [20]). Pour $n = 1, 3, 5$ et pour $n > 10$ les sous-groupes finis maximaux de $GL(n, \mathbb{Z})$ sont conjugués à $O(n, \mathbb{Z})$ dans $GL(n, \mathbb{Q})$. Dans les autres cas, nous devons tenir compte des groupes de Weyl des réseaux de racines exceptionnels. Différents auteurs, dont W Plesken et M Pohst [47], ont montré que les groupes $W(F_4), O(5, \mathbb{Z}), W(E_6), W(E_7), W(E_8), O(9, \mathbb{Z}), O(10, \mathbb{Z})$ sont d'ordres maximaux parmi les sous-groupes finis \mathbb{C} -irréductibles de $GL(n, \mathbb{Z})$. Il s'ensuit que tout sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{Z})$ est d'ordre inférieur à $(2n)^n$, ce qui suffit pour notre théorème. □

5 Préliminaires en dimension 3

Avant d'attaquer la démonstration de l'inégalité optimale (théorème 1.1), nous devons nous armer de lemmes spécifiques à la dimension 3. Après quelques rappels sur le groupe des isométries de \mathbb{H}^3 , nous exprimons la distance de translation d'un élément loxodromique en fonction de sa trace (partie 5.2). Nous décrivons ensuite le cadre général de notre étude (partie 5.3). Nous étudions en détails les éléments γ d'un réseau sans torsion Γ qui envoient une horoboule B_0 sur une horoboule B_∞ (parties 5.4, 5.5 et 5.6). Grâce à ces éléments nous pourrions contrôler la systole d'une 3-variété hyperbolique non compacte (partie 7). Les notations et les objets introduits dans cette partie seront repris en partie 7.

Par abus de langage nous parlerons de la trace d'un élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ au lieu de parler de la trace d'un de ses relevés à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Nous confondrons la sphère \mathbb{S}^2 et la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

5.1 Le groupe des isométries hyperboliques

Le groupe $\mathrm{Mob}(\mathbb{S}^2)$ se décompose en le produit semi-direct $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ici on identifie $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ à $\mathrm{Mob}^+(\mathbb{S}^2)$ via son action par homographie sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au sous-groupe engendré par la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$. L'automorphisme de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ induit par $-1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ consiste en la conjugaison $A \mapsto \bar{A}$. Une transformation conforme $\gamma \in \mathrm{Mob}(\mathbb{S}^2)$ s'écrit donc de manière unique

$$\gamma: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ou} \quad \gamma: z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ tels que } ad - bc = 1.$$

Cette action conforme de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se prolonge à $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ par extension de Poincaré. D'un point de vue analytique, cela consiste à regarder \mathbb{H}^3 comme le sous-ensemble $\{x_1 + x_2i + x_3j \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ et } x_3 > 0\}$ de l'algèbre des quaternions, et à étendre $z \mapsto \bar{z}$ en la réflexion suivant le plan bordé par $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ce prolongement coïncide bien avec l'action par isométries pour la métrique hyperbolique, on identifie ainsi $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$.

Si γ est positif, on détermine son type en calculant sa trace. Si γ est négatif, on détermine son type en calculant la trace de son carré, donnée par

$$\mathrm{Tr}(\gamma^2) = |a|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}(b\bar{c})$$

si

$$\gamma(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ tels que } ad - bc = 1.$$

L'égalité $|a|^2 + |d|^2 = (|a| - |d|)^2 + 2|ad|$ associée à l'inégalité $|ad| - |bc| \geq -1$ entraîne $\mathrm{Tr}(\gamma^2) \geq -2$. En particulier, si $\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est loxodromique négatif, alors $\mathrm{Tr}(\gamma^2)$ est positive car de module plus grand que 2. Soulignons que pour un élément $(A, -1)$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le module de la trace n'est pas invariant par conjugaison.

5.2 Une formule pour la distance de translation

Soit γ un élément loxodromique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Nous désignerons respectivement par ℓ_γ et θ_γ la distance de translation et l'angle de rotation de γ le long de son axe. Nous conviendrons que θ_γ est défini par rapport à l'orientation canonique de \mathbb{C} au point fixe répulsif de γ .

Ces caractéristiques géométriques s’expriment en fonction des valeurs propres. Si λ_γ est la valeur propre de module plus grand que 1 de γ , alors

$$\lambda_\gamma = \pm \exp\left(\frac{\ell_\gamma + i\theta_\gamma}{2}\right) \text{ ou de manière équivalente } \begin{cases} \ell_\gamma &= 2 \ln |\lambda_\gamma|, \\ \theta_\gamma &= 2 \arg(\lambda_\gamma) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Ainsi ℓ_γ s’exprime en fonction de la trace de γ , puisque les valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique. Malheureusement la formule obtenue s’avère difficile à manipuler. Il semble plus naturel de travailler avec $2 \cosh(\ell_\gamma/2)$ qui s’exprime plus simplement en fonction de la trace. Le lemme ci-dessous généralise la formule $2 \cosh(\ell_\gamma/2) = |\text{Tr}(\gamma)|$ valable pour tout élément *hyperbolique* γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Dans le cas positif, cette généralisation se déduit directement d’une formule obtenue par D Gabai, R Meyerhoff et P Milley dans la preuve du corollaire 3.6 de [22]. Afin de préserver l’unité du texte, nous reproduisons leur raisonnement dans la démonstration du lemme.

Lemme 5.1 *La distance de translation d’un élément γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de type loxodromique est donnée par*

$$2 \cosh\left(\frac{\ell_\gamma}{2}\right) = \begin{cases} \left| \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma) - 1 \right| + \left| \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma) + 1 \right| & \text{si } \gamma \text{ est positif,} \\ \sqrt{\text{Tr}(\gamma^2) + 2} & \text{si } \gamma \text{ est négatif.} \end{cases}$$

Démonstration Cas γ positif. Fixons un réel u et considérons $\mathcal{E}_u \subset \mathbb{C}$ défini par

$$\mathcal{E}_u = \{\cosh(u + iv) \mid v \in \mathbb{R}\}.$$

Grâce à l’identité $\cosh(u + iv) = \cosh(u) \cos(v) + i \sinh(u) \sin(v)$, nous identifions \mathcal{E}_u avec l’ensemble des points (X, Y) de \mathbb{R}^2 satisfaisant l’équation

$$(X/\cosh u)^2 + (Y/\sinh u)^2 = 1.$$

Le sous-ensemble \mathcal{E}_u est donc une ellipse de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ de foyers 1 et -1 , ainsi

$$2 \cosh(u) = |\cosh(u + iv) - 1| + |\cosh(u + iv) + 1| \quad \text{for all } v \in \mathbb{R}.$$

L’expression souhaitée vient en prenant $u + iv = (\ell_\gamma + i\theta_\gamma)/2$.

Cas γ négatif. La transformation $\gamma^2 \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ étant de type hyperbolique, on exprime sa distance de translation par la formule $2 \cosh(\ell_{\gamma^2}/2) = \text{Tr}(\gamma^2)$. On conclut en remarquant que $\ell_{\gamma^2} = 2\ell_\gamma$ et en utilisant une identité trigonométrique. \square

5.3 Cadre général

Considérons M une 3-variété hyperbolique non compacte mais de volume fini. Soit Γ un groupe uniformisant M , et soit C un représentant maximal d'une cuspede de M que nous relevons à \mathbb{H}^3 en un empilement d'horoboules. Quitte à conjuguer Γ nous supposons que deux horoboules tangentes de l'empilement sont respectivement centrées en 0 et ∞ . Nous notons B_x l'horoboule de l'empilement centrée en $x \in \partial\mathbb{H}^3$.

Soit γ une isométrie envoyant B_0 sur B_∞ , nous avons déjà vu une telle isométrie à la [partie 2.3.2](#). L'horoboule B_b image de B_∞ par γ est tangente à B_∞ , mais n'appartient pas à l'orbite de B_0 sous l'action de Γ_∞ . Les conditions $\gamma(0) = \infty$ et $\gamma(\infty) = b$ entraînent

$$\gamma = (A, \pm 1) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} cb & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour un certain } c \in \mathbb{C}^*.$$

Lorsque $\gamma = (A, -1)$ nous avons

$$\gamma^2 = (A\bar{A}, 1) \quad \text{avec} \quad A\bar{A} = \begin{pmatrix} |bc|^2 - \bar{c}/c & -bc/\bar{c} \\ \bar{b}|c|^2 & -c/\bar{c} \end{pmatrix}.$$

Le point de tangence entre B_0 et B_∞ étant envoyé sur le point de tangence entre B_b et B_∞ , nous avons $c = e^{i\theta}/h$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ tel que $B_\infty = \{x_3 > h\}$. Ainsi γ s'écrit

$$\gamma: z \mapsto b - \frac{h^2 e^{-2i\theta}}{z} \quad \text{ou} \quad \gamma: z \mapsto b - \frac{h^2 e^{-2i\theta}}{\bar{z}}.$$

En particulier, suivant que γ est positif ou négatif nous trouvons

$$\text{Tr}(\gamma) = bc \quad \text{ou} \quad \text{Tr}(\gamma^2) = \frac{|b|^2}{h^2} - 2 \cos(2\theta).$$

Notez que si γ est de type parabolique négatif, alors nécessairement $\text{Tr}(\gamma^2) = 2$.

5.4 Éléments loxodromiques

Parmi les éléments $\gamma \in \Gamma$ envoyant B_0 sur B_∞ , ceux minimisant $|b|$ sont des candidats naturels pour réaliser la systole de M . Dans le cas où ils sont loxodromiques, nous contrôlons leur distance de translation à l'aide du lemme suivant :

Lemme 5.2 *Si γ est un élément loxodromique de Γ envoyant B_0 sur B_∞ , alors*

$$2 \cosh(\ell_\gamma/2) \leq \frac{\sqrt{4h^2 + |b|^2}}{h}.$$

Démonstration Si γ préserve l'orientation, alors

$$2 \cosh(\ell_\gamma/2) = \left| \frac{bc}{2} - 1 \right| + \left| \frac{bc}{2} + 1 \right| \leq \frac{\sqrt{4h^2 + |b|^2}}{h}.$$

Le dernier terme vient de ce que le petit axe de l'ellipse \mathcal{E}_u du lemme 5.1 est vertical. Si γ renverse l'orientation, en combinant le lemme 5.1 avec l'expression de $\text{Tr}(\gamma^2)$ nous trouvons

$$2 \cosh(\ell_\gamma/2) = \sqrt{\text{Tr}(\gamma^2) + 2} = \frac{\sqrt{|b|^2 + 2h^2(1 - \cos 2\theta)}}{h} \leq \frac{\sqrt{|b|^2 + 4h^2}}{h}. \quad \square$$

5.5 Éléments paraboliques positifs

Un élément $\tau \in \Gamma_\infty$ agit par translation, ou par translation-réflexion, sur l'horosphère ∂B_∞ munie de la métrique euclidienne induite. On définit sa *distance de translation horosphérique* $\|\tau\|_\Gamma$ comme la distance minimale sur ∂B_∞ entre un point $p \in \partial B_\infty$ et son image $\tau(p)$. Remarquez que $\|\tau\|_\Gamma$ est invariant par conjugaison par un élément du normalisateur de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Tout élément $\tau \in \Lambda_\infty$ vérifie la minoration $\|\tau\|_\Gamma \geq 1$ car il envoie B_0 sur une horoboule tangente à B_∞ disjointe de B_0 .

Ceci nous amène à considérer le *tour de taille* (*waist size* en anglais) de la cuspide \mathcal{C} :

$$w(\mathcal{C}) = \min_{\tau \in \Gamma_\infty \setminus \{\text{id}\}} \|\tau\|_\Gamma.$$

Il s'agit de la systole de la surface plate $\Gamma_\infty \backslash \partial B_\infty$, appelée N précédemment. Cet invariant a été introduit par C Adams dans [3]. Le résultat principal de son article donne une caractérisation du complément du nœud de huit en terme de tour de taille.

Théorème 5.3 (C Adams) *Soient M une 3-variété hyperbolique orientable, et \mathcal{C} une cuspide de M . Alors $w(\mathcal{C}) \geq 1$ avec égalité si et seulement si M est isométrique au complément du nœud de huit.*

Toute la difficulté du théorème réside dans la condition nécessaire du cas d'égalité. La proposition suivante repose sur cette condition nécessaire.

Proposition 5.4 *Si M a une seule cuspide, et s'il existe un élément parabolique positif γ de Γ envoyant B_0 sur B_∞ , alors M est isométrique au complément du nœud de huit ou à la variété de Gieseking.*

Démonstration Nous avons $\text{Tr}(\gamma) = \pm 2$ et le point fixe de γ est $b/2$. En particulier il y a une horoboule $B_{b/2}$ de l'empilement posée en $b/2$. Comme γ envoie 0 sur ∞ et ∞ sur b , nous voyons clairement que γ stabilise le plan de \mathbb{H}^3 engendré par 0, ∞ et b . La trace de ce plan sur l'horosphère $\partial B_{b/2}$ est une droite conforme de $\partial B_{b/2}$ elle aussi stabilisée par γ .

Évaluons la distance de translation $\|\gamma\|_\Gamma$ de γ sur l'horosphère $\partial B_{b/2}$ munie de la métrique induite. Elle coïncide avec la distance sur $\partial B_{b/2}$ entre les points d'intersection de $\partial B_{b/2}$ avec les droites hyperboliques $(0, b/2)$ et $(\infty, b/2)$. Nous pourrions expliciter cette distance en fonction du diamètre euclidien d de $B_{b/2}$. Nous nous contenterons de deux remarques évidentes : cette distance croît en fonction de d , et décroît en fonction de $|b|$. Ces grandeurs étant soumises aux contraintes d'empilement $d \leq h$ et $|b| \geq h$, on en déduit que la valeur maximale de $\|\gamma\|_\Gamma$ est atteinte lorsque les horoboules B_0 , B_∞ et $B_{b/2}$ sont mutuellement tangentes, d'où $\|\gamma\|_\Gamma \leq 1$. Si M est orientable on conclut par le théorème d'Adams.

Si M est non orientable, on considère son revêtement double orientable M^+ . Rappelons que $M^+ \simeq \Gamma^+ \backslash \mathbb{H}^3$ où Γ^+ désigne le sous-groupe d'indice deux formé des éléments positifs de Γ . Ce revêtement double a une ou deux cuspidés suivant que la cuspidé de M fibre en bouteilles de Klein ou en tores. Le représentant maximal d'une cuspidé de M^+ se projette exactement sur le représentant maximal de \mathcal{C} car γ est positif. Nous en déduisons que le tour de taille des cuspidés de M^+ vaut 1. En conclusion, M^+ est isométrique au complément du nœud de huit, et M est isométrique à la variété de Gieseking (unique 3-variété hyperbolique non compacte de volume v_3). \square

5.6 Éléments paraboliques négatifs

Supposons qu'il existe un élément parabolique négatif $\gamma \in \Gamma$ envoyant B_0 sur B_∞ . Selon la discussion de la [partie 5.3](#) nous avons $\text{Tr}(\gamma^2) = 2$ et

$$|b| = 2h|\cos \theta|.$$

Nous déterminons par un calcul direct le point fixe P_γ de γ et γ^2 :

$$P_\gamma = \frac{b}{2} + ib \frac{h^2}{|b|^2} \sin(2\theta) = \frac{b}{2} + i \frac{b}{2} \tan \theta = \frac{b}{2} \frac{e^{i\theta}}{\cos \theta}.$$

Le point P_γ appartient à la médiatrice de $[0, b]$, et se trouve à une distance h de 0 et de b .

La distance de translation de γ^2 sur l'horosphère ∂B_{P_γ} coïncide avec la distance entre les points d'intersection P_0 et P_b des droites hyperboliques $(0, P_\gamma)$ et (b, P_γ) avec ∂B_{P_γ} . Nous supposons dans un premier temps le diamètre euclidien de B_{P_γ} égal à h . Les points P_0 et P_b sont alors les points de tangence de B_{P_γ} avec B_0 et B_b . Les horoboules B_∞ et B_{P_γ} jouent des rôles symétriques. En appliquant l'inversion suivant le cercle centré en P_γ passant par 0 et b , on voit que la distance recherchée vaut $|b|/h$, soit $2|\cos \theta|$. Supposons maintenant le diamètre d de B_{P_γ} quelconque. La

distance hyperbolique entre ∂B_{P_γ} et l’horosphère de diamètre h vaut $|\ln(h/d)|$. En envoyant P_γ sur ∞ on voit facilement que

$$\|\gamma^2\|_\Gamma = 2\frac{d}{h}|\cos \theta|.$$

Les horoboules B_0 et B_b étant disjointes nous avons $|b| \geq h$, avec $|b| = 2h|\cos \theta|$ cela donne

$$|\cos \theta| \geq \frac{1}{2}.$$

Pour finir, remarquons que dans le cas où M a une seule cuspidé, l’horoboule B_{P_γ} fait partie de l’empilement au-dessus de C , ce qui implique $h \geq d$.

6 Une proposition sur les surfaces plates

Nous verrons à la [partie 7.1](#) comment l’étude du rapport $\cosh(\text{sys}/2)/\text{vol}$ se ramène à un problème d’empilement de disques dans des surfaces plates. Nous allons consacrer cette partie à démontrer la proposition ci-dessous, avec laquelle nous établirons la [proposition 7.2](#).

Proposition 6.1 *Soit N un tore ou une bouteille de Klein munie d’une métrique plate. Si N contient deux disques plongés disjoints de diamètre h , dont les centres sont à distance d l’un de l’autre. Alors*

$$\frac{h\sqrt{4h^2 + d^2}}{\text{vol}(N)} \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

avec égalité ssi l’empilement de disques se relève en l’empilement hexagonal.

Soit S le tore ou la bouteille de Klein, nous notons $\mathcal{M}(S)$ l’espace des modules des structures conformes sur S avec deux points marqués p_1 et p_2 . Considérons la fonction

$$f: \mathcal{M}(S) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,$$

$$[m] \longmapsto h\sqrt{4h^2 + d^2}/\text{vol}(m),$$

où étant donné une métrique plate m , nous désignons par d la distance entre les points p_i , et par h le plus grand diamètre de deux disques plongés et disjoints centrés aux p_i . Cette fonction est bien définie et continue.

Démonstration La fonction f admet un maximum global sur $\mathcal{M}(S)$ ([lemme 6.2](#)), et aux points réalisant ce maximum nous avons $h\sqrt{4h^2 + d^2}/\text{vol} = \sqrt{5}h^2/\text{vol}$ ([lemme 6.3](#)). À un facteur multiplicatif près, h^2/vol représente la densité des deux disques dans

la surface plate. Or, par un théorème de A Thue (voir [14; 51]) nous savons que $\text{vol} \geq \sqrt{3}h^2$, avec égalité si et seulement si l'empilement se relève en l'empilement hexagonal. \square

6.1 Réalisation de la borne supérieure

Lemme 6.2 *La fonction f admet un maximum global sur $\mathcal{M}(S)$.*

Démonstration Nous regardons $\mathcal{M}(S)$ comme l'espace des classes d'isométrie de métriques plates d'aire 1 sur S . Par isométrie, nous entendons isométrie fixant chaque point marqué. Avec cette normalisation, on va à l'infini dans l'espace des modules (*ie* on sort de tout compact) si et seulement si la longueur du plus court segment géodésique avec extrémités dans $\{p_1, p_2\}$ tend vers 0.

Soit m une métrique plate de d'aire 1, et soit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ la longueur du plus court segment géodésique avec extrémités dans $\{p_1, p_2\}$. Si ce segment relie p_1 à p_2 , alors $h, d \leq \varepsilon$ et $f([m]) \leq \sqrt{5}\varepsilon^2$. Si ce segment est un lacet géodésique, alors il existe une géodésique orientable (*ie* admettant un voisinage transversalement orientable) de longueur η avec $\varepsilon \leq \eta \leq 2\varepsilon$. Dans le revêtement universel \mathbb{E}^2 , il existe un domaine fondamental rectangulaire avec un côté de longueur η . Le diamètre de m étant inférieur à la longueur de la diagonale du rectangle, nous trouvons $d \leq \sqrt{\eta^2 + \eta^{-2}} \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}}$, d'où $f([m]) \leq \varepsilon\sqrt{5\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}}$. Nous concluons en faisant tendre ε vers 0. \square

6.2 Rayon d'injectivité des bouteilles de Klein

Soit \mathbf{KI} une bouteille de Klein plate. Le groupe fondamental, vu comme groupe des automorphismes du revêtement universel, admet un système de générateurs (α, β) tel que : α est une translation-réflexion, β est une translation, les directions de α^2 et β sont orthogonales. Un tel système sera appelé une *base orthogonale* de $\pi_1(\mathbf{KI})$. Étant fixée une base orthogonale (α, β) , le groupe fondamental admet la présentation $\pi_1(\mathbf{KI}) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta^{-1}\alpha \rangle$. En particulier, tout élément de $\pi_1(\mathbf{KI})$ s'écrit sous la forme normale $\alpha^k\beta^l$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$. À inverse et conjugaison près, il y a deux translation-réflexions primitives (une pour chaque plan projectif), correspondant à α et $\alpha\beta$. Nous avons représenté en [figure 6](#) les axes des translation-réflexions, ainsi que certaines droites dirigées suivant le vecteur β ; les zones grisées mettent en évidence deux domaines fondamentaux.

Le couple (α^2, β) forme une base orthogonale du réseau euclidien d'indice deux de $\pi_1(\mathbf{KI})$. Une systole de \mathbf{KI} appartient à la classe d'homotopie libre de α , $\alpha\beta$ ou β . Une géodésique orientable de longueur minimale appartient à la classe d'homotopie libre de α^2 ou β .

Bien que \mathbf{KI} ne soit pas homogène, le groupe à 1-paramètre $t \mapsto t\alpha^2$ passe au quotient en une action par isométries de \mathbb{S}^1 sur \mathbf{KI} . Parmi les géodésiques dans la classe d’homotopie libre de α (resp. $\alpha\beta$), il y en a exactement une de longueur minimale, nous la noterons encore α (resp. $\alpha\beta$). La découpe des géodésiques α et $\alpha\beta$ produit un cylindre plat dont les bords sont de longueur $\|\alpha^2\| = 2\|\alpha\|$, tandis que la distance séparant les bords est $\|\beta\|/2$.

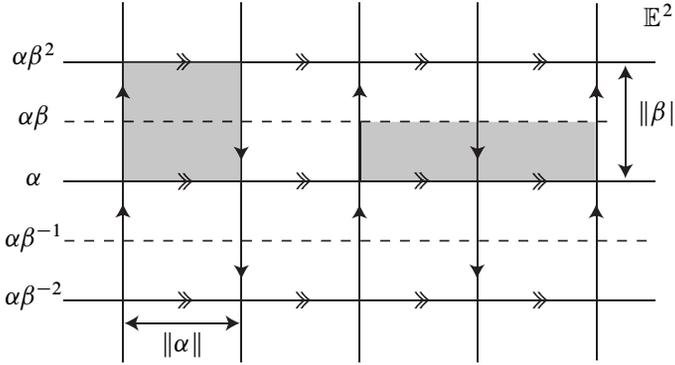


Figure 6: Revêtement universel de \mathbf{KI}

En tout point p de \mathbf{KI} , le rayon d’injectivité est réalisé par une géodésique fermée simple, librement homotope à α , $\alpha\beta$, α^2 ou β . Si p est à distance y de α (resp. $\alpha\beta$), alors la géodésique passant par p dans la classe d’homotopie libre de α (resp. $\alpha\beta$) est de longueur $\sqrt{\|\alpha\|^2 + 4y^2}$. En particulier, les points sur la géodésique équidistante de α et $\alpha\beta$ réalisent le maximum du rayon d’injectivité.

6.3 Condition $d = h$

Lemme 6.3 Soit m une métrique plate réalisant le maximum global de f sur $\mathcal{M}(S)$, alors nous avons $d = h$ pour la métrique m .

Démonstration Supposons par l’absurde $d > h$. Par définition de h , l’adhérence d’un des disques contient un lacet géodésique non contractile. Si la surface est un tore, l’adhérence de chaque disque contient exactement une géodésique fermée simple non triviale. Nous avons unicité car les disques sont disjoints. Si la surface est une bouteille de Klein, plusieurs cas se présentent (nous reprenons les remarques du [partie 6.2](#)) :

- (1) L’adhérence de chaque disque contient une géodésique fermée appartenant à β .
- (2) L’adhérence de chaque disque contient une géodésique fermée appartenant à α^2 .
- (3) L’adhérence d’un disque contient un lacet géodésique librement homotope à α .
- (4) L’adhérence d’un disque contient un lacet géodésique librement homotope à $\alpha\beta$.

Les deux disques étant disjoints, nous avons au plus un disque contenant un lacet homotope à α , et au plus un disque contenant un lacet homotope à $\alpha\beta$. Pour la même raison, le cas (1) exclut tous les autres cas, et les cas (3) et (4) ne peuvent se produire simultanément pour un même disque.

Appelons K la réunion des lacets géodésiques de longueur h contenus dans l'adhérence des disques et passant par un des centres. En traitant séparément les différents cas (cas du tore, cas (1)–(4) de la bouteille de Klein), nous montrons sans difficulté qu'il existe une bande totalement géodésique \mathcal{B}_ε de largeur ε disjointe de K . Les géodésiques bordant \mathcal{B}_ε sont parallèles aux géodésiques fermées orientables contenues dans l'adhérence des disques, en particulier elles sont de longueur inférieure à $2h$. La distance entre les centres des disques est réalisée par un segment géodésique de longueur d . Soient u la distance parcourue par ce segment dans la direction définie par les bords de \mathcal{B}_ε , et v la distance parcourue par ce segment dans la direction orthogonale, nous avons $d = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Procédons à la chirurgie suivante : nous découpons les géodésiques bordant \mathcal{B}_ε , nous enlevons \mathcal{B}_ε , et nous recollons les bords restants de manière à préserver l'alignement des géodésiques orthogonales à $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$. Pour ε suffisamment petit, cette chirurgie produit une nouvelle configuration de deux disques disjoints dans une surface plate (les disques restent plongés car \mathcal{B}_ε n'intersecte pas K). Nous avons représenté en [figure 7](#) un exemple de telle chirurgie sur un tore plat, notez que la chirurgie change la pente des côtés non horizontaux du parallélogramme.

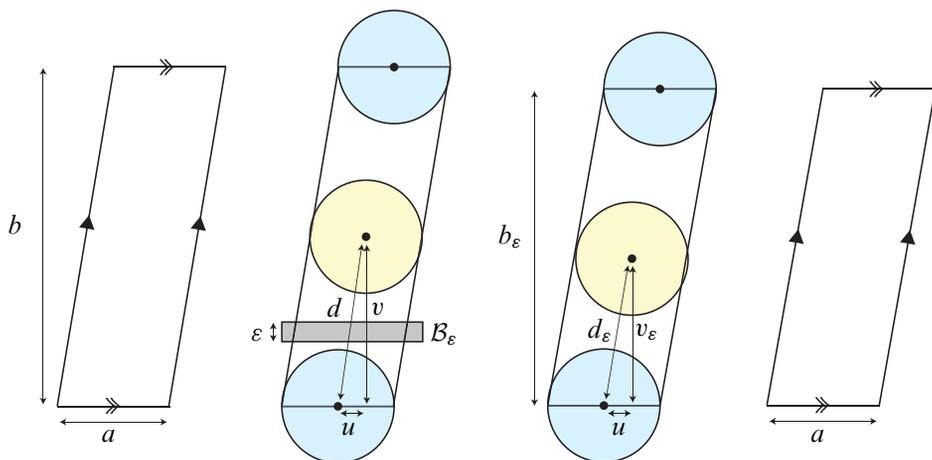


Figure 7: Chirurgie sur un tore plat

En marquant d'un indice ε les grandeurs relatives à la nouvelle configuration nous avons : $h_\varepsilon = h$, $u_\varepsilon = u$, $v_\varepsilon = v - \varepsilon$, $d_\varepsilon^2 = d^2 - 2v\varepsilon + \varepsilon^2$. Le calcul de d_ε dépend du

choix du segment réalisant la distance entre les centres des disques, nous prenons celui dont la longueur décroît le plus par chirurgie. La surface fibre en géodésiques parallèles aux bords de \mathcal{B}_\uparrow , et son aire s'écrit sous la forme $\text{vol} = ab$, avec a et b satisfaisant : $a \geq h$ et $b \geq v$. Nous avons $\text{vol}_\varepsilon = \text{vol}(1 - \varepsilon/b)$ et

$$\frac{h_\varepsilon \sqrt{4h_\varepsilon^2 + d_\varepsilon^2}}{\text{vol}_\varepsilon} = \frac{h \sqrt{4h^2 + d^2}}{\text{vol}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{b} - \frac{v\varepsilon}{4h^2 + d^2} + o(\varepsilon) \right).$$

Ou bien $4h^2 + d^2 > bv$, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit nous avons

$$\frac{h_\varepsilon \sqrt{4h_\varepsilon^2 + d_\varepsilon^2}}{\text{vol}_\varepsilon} > \frac{h \sqrt{4h^2 + d^2}}{\text{vol}}.$$

Ou bien $4h^2 + d^2 \leq bv$, alors en utilisant $h \leq a$ et $v \leq b$ il vient $h \sqrt{4h^2 + d^2} / \text{vol} \leq 1$. Dans les deux cas m ne réalise pas le maximum global de f , confirmant l'hypothèse d'absurde. \square

7 Une inégalité systolique optimale en dimension 3

Dans cette partie nous prouvons :

Théorème 7.1 *Toute 3–variété hyperbolique non compacte satisfait*

$$\frac{\cosh(\text{sys}/2)}{\text{vol}_\Delta} \leq \frac{\sqrt{5}}{2},$$

sauf si elle est isométrique à la variété de Gieseking, auquel cas

$$\frac{\cosh(\text{sys}/2)}{\text{vol}_\Delta} = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}.$$

Soit M une 3–variété hyperbolique non compacte mais de volume fini. Considérons un groupe Γ uniformisant M , et C un représentant maximal de la cuspidale de plus petit volume de M . Nous relevons C à \mathbb{H}^3 en un empilement d'horoboules. Quitte à conjuguer Γ nous supposons que deux horoboules tangentes de l'empilement sont respectivement centrées en 0 et ∞ . Nous posons $B_\infty = \{x_3 > h\}$ avec $h > 0$.

Pour contrôler le rapport $\cosh(\text{sys}/2)/\text{vol}_\Delta$, nous devons minorer le volume simplicial et majorer la systole. À l'aide du théorème de Meyerhoff–Kellerhals et de l'égalité (1) nous obtenons une première minoration du volume simplicial :

$$\text{vol}_\Delta(M) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{vol}(C) = \frac{\text{covol}(\Gamma_\infty)}{\sqrt{3}h^2}.$$

Le covolume de Γ_∞ sera minoré par une méthode *ad hoc*, ou par un argument classique de densité qui donne $\text{covol}(\Gamma_\infty) \geq \sqrt{3}h^2$ (voir [partie 2.3.3](#) et [2.4.2](#)). Nous majorons la systole par la distance de translation d'un élément de Γ envoyant B_0 sur B_∞ . Parmi les éléments envoyant B_0 sur B_∞ , nous appelons γ celui minimisant le module de $b = \gamma(\infty)$ parmi les points de l'orbite $\Gamma_\infty \cdot b$ (γ n'est pas toujours unique). Lorsque cet élément est loxodromique (resp. parabolique positif) nous concluons rapidement grâce à la [proposition 6.1](#) (resp. grâce à la [proposition 5.4](#)). Le cas parabolique négatif demande un peu plus de travail.

D'une manière générale nous reprenons les notations introduites à la [partie 5.3](#). Toutefois nous travaillons avec la normalisation suivante : $\eta : z \mapsto z + 1$ est un vecteur minimal du réseau euclidien Λ_∞ . Remarquez que cela implique $\text{Re}(b) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $h \leq 1$, $\text{covol}(\Lambda_\infty) \geq \sqrt{3}/2$ et $\text{covol}(\Gamma_\infty) \geq \frac{1}{2}$.

7.1 Si γ est loxodromique

Proposition 7.2 *Si γ est loxodromique (positif ou négatif), alors*

$$\frac{\cosh(\ell_\gamma/2)}{\text{vol}_\Delta(M)} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Démonstration Le [lemme 5.2](#) associé à $\text{vol}_\Delta(M) \geq \text{covol}(\Gamma_\infty)/\sqrt{3}h^2$ donne

$$\frac{\cosh(\ell_\gamma/2)}{\text{vol}_\Delta(M)} \leq \frac{\sqrt{3} h \sqrt{4h^2 + |b|^2}}{2 \text{covol}(\Gamma_\infty)}.$$

Les horoboules des orbites $\Gamma_\infty \cdot B_0$ et $\Gamma_\infty \cdot B_b$ se projettent orthogonalement sur le bord $\mathbb{E}^2 = \partial\mathbb{H}^n \setminus \{\infty\}$ pour former un empilement de disques de diamètre h . Cet empilement passe au quotient en un empilement de deux disques de diamètre h dans $\Gamma_\infty \setminus \mathbb{E}^2$. Comme b est supposé de module minimal parmi les points de $\Gamma_\infty \cdot b$, les centres des deux disques sont à distance $|b|$ l'un de l'autre. On conclut en appliquant la [proposition 6.1](#). \square

7.2 Si γ est parabolique positif

Proposition 7.3 *Si γ est parabolique positif, ou bien M a plusieurs cuspidés et*

$$\frac{\cosh(\ell_{\eta \pm 1 \gamma}/2)}{\text{vol}_\Delta(M)} \leq \frac{\sqrt{5}}{2},$$

ou bien M est isométrique à la variété de Gieseking ou au complément du nœud de huit.

Démonstration Nous supposons γ parabolique positif. Si M a une seule cuspidale, nous savons grâce à la [proposition 5.4](#) que M est isométrique à la variété de Gieseking ou au complément du nœud de huit. Nous supposons désormais que M possède plusieurs cuspides.

Puisque γ est parabolique positif, nous avons $\text{Tr}(\gamma) = bc = \pm 2$. Un calcul immédiat donne $\text{Tr}(\eta^{\pm 1}\gamma) = bc \pm c$, et nous en déduisons que l'une des transformations $\eta^{\pm 1}\gamma$ est loxodromique. En appliquant le [lemme 5.1](#) et en se rappelant que $|c| = 1/h$ nous avons :

$$\cosh(\ell_{\eta^{\pm 1}\gamma}/2) \leq 1 + \frac{1}{2h}.$$

Soit C' une cuspidale de M distincte de C , et soit C' son représentant de plus grand volume parmi ceux disjoints de C . Une analyse des points de tangence entre C et C' montre que

$$\text{vol}(C) \geq \sqrt{3}/2 \quad \text{et} \quad \text{vol}(C') \geq \sqrt{3}/2,$$

ou

$$\text{vol}(C) \geq 3\sqrt{3}/4 \quad \text{et} \quad \text{vol}(C') \geq \sqrt{3}/4.$$

Dans tous les cas nous avons $\text{vol}_{\Delta}(M) \geq (2/\sqrt{3}) \text{vol}(C \cup C') \geq 2$. Ce raisonnement et ce résultat se trouvent dans l'article [\[2\]](#) de C Adams. Cette minoration avec le majorant ci-dessus permet de conclure lorsque $h \geq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. En utilisant les minoration

$$\text{vol}(C) = \frac{\text{covol}(\Gamma_{\infty})}{2h^2} \geq \frac{1}{4h^2} \quad \text{et} \quad \text{vol}(C') \geq \frac{\sqrt{3}}{4},$$

nous trouvons $\text{vol}_{\Delta}(M) \geq (2/\sqrt{3}) \text{vol}(C \cup C') \geq \frac{1}{2}(1 + 1/(\sqrt{3}h^2))$. Cette minoration avec le majorant ci-dessus nous donne une fonction croissante de h sur $]0, 1]$, qui prend une valeur inférieure à $\sqrt{5}/2$ en $h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. □

7.3 Si γ est parabolique négatif

7.3.1 Unicité de la cuspidale et conséquences

Lemme 7.4 *Si γ est parabolique négatif, et si M a plusieurs cuspides, alors*

$$\frac{\cosh(\ell_{\eta^{\pm 1}\gamma}/2)}{\text{vol}_{\Delta}(M)} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Démonstration Supposons γ parabolique négatif, nous avons $|b| = 2h|\cos \theta|$ vue la [partie 5.6](#). L'une des transformations $\eta^{\pm 1}\gamma$ est loxodromique, et par le [lemme 5.1](#) il

vient

$$\begin{aligned} 2 \cosh(\ell_{\eta^{\pm 1} \gamma} / 2) &= \frac{1}{h} \sqrt{|b \pm 1|^2 + 4h^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{h} \sqrt{|b|^2 \pm 2\operatorname{Re}(b) + 1 + 4h^2 \sin^2 \theta} \leq \frac{1}{h} \sqrt{4h^2 + 2}. \end{aligned}$$

Supposons que M possède plusieurs cuspidés. Nous reprenons les minoration du volume simplicial vues dans la preuve de la proposition précédente. Si $h \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en associant la minoration $\operatorname{vol}_{\Delta}(M) \geq 2$ avec la majoration ci-dessus nous obtenons l'inégalité souhaitée. Si $h \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, nous concluons en utilisant la minoration $\operatorname{vol}_{\Delta}(M) \geq \frac{1}{2}(1 + 1/(\sqrt{3}h^2))$. \square

À partir de maintenant nous supposons que M a une seule cuspide. Dans ce cas, il existe un élément $\alpha \in \Gamma_{\infty}$ conjugué à γ dans Γ .

Lemme 7.5 *Si γ est parabolique négatif, et si M a une seule cuspide, alors α^2 et η sont égaux à inverse près.*

Démonstration D'après la [partie 5.6](#) nous avons $\|\alpha\|_{\Gamma} = \|\gamma\|_{\Gamma} = \frac{d}{h} |\cos \theta|$. Ainsi, le vecteur de translation de α (vu comme isométrie de \mathbb{E}^2) est de norme

$$\|\alpha\|_{\mathbb{E}} = d |\cos \theta| \leq h \leq 1.$$

Ceci implique que α est un élément primitif de Γ_{∞} (α n'est pas une puissance non triviale d'un élément de Γ_{∞}), car les vecteurs minimaux de Λ_{∞} sont de norme 1.

Les vecteurs α^2 et η étant des éléments primitifs de Λ_{∞} , leur colinéarité implique leur égalité à inverse près. Aussi nous supposons par l'absurde α^2 orthogonal à η . Par définition, le point b minimise le module parmi les points de son orbite sous l'action de Λ_{∞} , d'où $|\operatorname{Re}(b)| \leq \frac{1}{2}$ et $|\operatorname{Im}(b)| \leq d |\cos \theta|$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} |b|^2 &\leq d^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4}, \\ 4h^2 \cos^2 \theta &\leq h^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4}, \\ 2h |\cos \theta| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Finalement $\|\alpha^2\|_{\mathbb{E}} = 2d |\cos \theta| \leq 1/\sqrt{3}$, ce qui contredit l'hypothèse η vecteur minimal. \square

Nous supposons que γ est parabolique négatif, et que M a une seule cuspide. Par le lemme ci-dessus nous avons $\|\alpha^2\|_{\mathbb{E}} = \|\eta\|_{\mathbb{E}} = 1$, ce qui entraîne (voir [partie 5.6](#))

$$d = \frac{1}{2|\cos \theta|} \quad \text{et} \quad |b| = \frac{h}{d}.$$

Comme $h \geq d$ (voir [partie 5.6](#)), il vient

$$h \geq d \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2h \geq |b| \geq 1.$$

7.3.2 Dichotomie Nous poursuivons avec les mêmes hypothèses (γ est parabolique négatif et M a une seule cuspide). Nous distinguons deux cas suivant que le point fixe de γ (noté P_γ) appartient ou non à l’une des orbites $\Gamma_\infty \cdot 0$ ou $\Gamma_\infty \cdot b$.

Lemme 7.6 *Si P_γ appartient à l’une des orbites $\Gamma_\infty \cdot 0$ ou $\Gamma_\infty \cdot b$, alors M est isométrique à la variété de Gieseking.*

Démonstration Supposons que P_γ appartient à l’une des orbites, disons à $\Gamma_\infty \cdot 0$. Alors, l’horoboule B_{P_γ} est de même diamètre que B_0 , soit $d = h$. Nous en déduisons d’une part que les horoboules B_0 et B_b sont tangentes à B_{P_γ} (voir [partie 5.6](#)), et d’autre part que $|b| = h/d = 1$. Par hypothèse b et 0 réalisent la distance entre les orbites $\Gamma_\infty \cdot 0$ et $\Gamma_\infty \cdot b$, ainsi nous avons $1 = |b| \leq |b - P_\gamma| = h \leq 1$. Finalement $h = 1$ et la distance de translation horosphérique de α^2 vaut $\|\alpha^2\|_\Gamma = 1$. Comme M a une seule cuspide qui fibre en bouteilles de Klein, M^+ a une seule cuspide qui fibre en tores. Ainsi $\|\alpha^2\|_{\Gamma^+} = 1$ et par le théorème d’Adams ([partie 5.5](#)) M^+ est isométrique au complément du nœud de huit, donc M est isométrique à la variété de Gieseking. \square

Lemme 7.7 *Si P_γ n’appartient pas à l’une des orbites $\Gamma_\infty \cdot 0$ ou $\Gamma_\infty \cdot b$, alors*

$$\frac{\cosh(\ell_{\eta^{\pm 1}\gamma}/2)}{\text{vol}_\Delta(M)} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Démonstration Nous connaissons déjà la majoration $\cosh(\ell_{\eta^{\pm 1}\gamma}/2) \leq \sqrt{1 + 1/2h^2}$ (voir la preuve du [lemme 7.4](#)). Il s’agit donc de minorer $\text{vol}_\Delta(M) \geq \text{covol}(\Gamma_\infty)/\sqrt{3h^2}$. Afin d’estimer le covolume de Γ_∞ , nous allons regarder comment certaines horoboules se projettent dans la bouteille de Klein plate $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^2$. Rappelons qu’une horoboule se projette orthogonalement sur un disque de \mathbb{E}^2 , qui passe au quotient en un disque de $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^2$.

L’isométrie parabolique négative γ envoie l’horoboule B_0 sur une horoboule qui lui est tangente (en l’occurrence B_∞). L’isométrie α se comporte de la même manière puisqu’elle est conjuguée à γ dans Γ : elle envoie une certaine horoboule B_P sur une horoboule qui lui est tangente. Comme B_0 est à distance $\ln(h/d)$ de B_{P_γ} , il vient que B_P est de diamètre d .

Les horoboules B_0 et B_b se projettent sur deux disques D_0 et D_b de diamètre h dans la bouteille de Klein plate $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^2$. Les centres des disques sont à distance $|b| \geq 1$

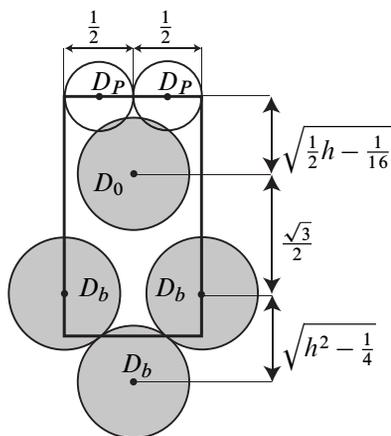


Figure 8: Configuration optimale

l'un de l'autre. L'horoboule B_P se projette sur un disque D_P de diamètre $d \geq \frac{1}{2}$ dans $\Gamma_\infty \setminus \mathbb{E}^2$. Comme α envoie B_P sur une horoboule qui lui est tangente, le centre de D_P est à distance minimale de la géodésique α . Dans la suite nous supposons $|b| = 1$, $d = \frac{1}{2}$ et le centre de D_P supporté par α . Ceci ne pose pas de problème car nous minorons le volume de $\Gamma_\infty \setminus \mathbb{E}^2$.

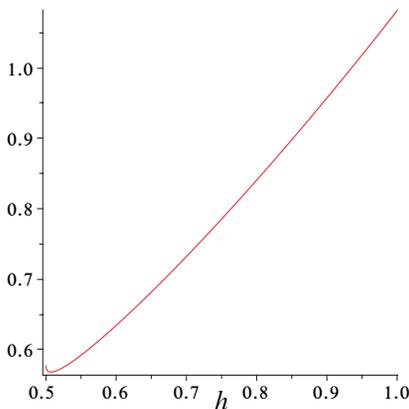


Figure 9: Graphe du majorant

Nous regardons la bouteille de Klein comme un cylindre dont chaque bord est auto-recollé par antipodie. Les deux bords s'identifient aux géodésiques α^2 et $(\alpha\beta)^2$ qui sont de longueur 1. Les disques D_0 et D_b sont clairement disjoints, en revanche D_P peut intersecter un de ces disques (il convient de se représenter la situation dans \mathbb{H}^3). Par exemple, si les horoboules B_P et B_0 sont tangentes, alors les centres de D_P et D_0 sont à distance $\sqrt{h/2}$ l'un de l'autre, et les disques s'intersectent. Nous avons représenté en

figure 8 la configuration minimisant le volume de $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{E}^2$. Le rectangle est un domaine fondamental pour l'action de Γ_∞ sur \mathbb{E}^2 , les côtés horizontaux correspondent à α^2 et $(\alpha\beta)^2$, c'est-à-dire aux bords du cylindre évoqué précédemment. On trouve

$$\text{covol}(\Gamma_\infty) \geq \sqrt{\frac{1}{2}h - \frac{1}{16}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{16}},$$

et

$$\frac{\cosh(\ell_{\eta^{\pm 1}, \gamma}/2)}{\text{vol}_\Delta(M)} \leq \frac{h\sqrt{3h^2 + \frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}h - \frac{1}{16}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{16}}}.$$

Une étude (fastidieuse) des variations du majorant montrerait qu'il atteint son maximum en $h = 1$ sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$, et que ce maximum est inférieur à $\sqrt{5}/2$. Nous préférons donner une représentation graphique de ce majorant (figure 9). □

7.4 La systole de la variété de Gieseking

En utilisant l'algorithme de C Hodgson et J Weeks [32, section 3], le logiciel SnapPea trouve l'approximation $\text{sys}(N1_1) \simeq 1.087$. Or, depuis la thèse de H Gieseking [24, page 185], on sait construire un sous-groupe Γ de $\text{PGL}(2, \mathcal{O}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ uniformisant $N1_1$. Ceci justifie $\text{sys}(N1_1) = 2 \text{ arccosh}((1 + \sqrt{13})/4)$. Nous rappelons ci-dessous la construction de Γ , et déterminons des éléments réalisant la systole.

Partons du tétraèdre idéal régulier $T = (0 \ 1 \ \omega \ \infty)$ avec $\omega = e^{i\pi/3}$. Nous construisons sans difficulté deux homographies identifiant les faces de T comme indiqué en figure 3. Voici les expressions analytiques et matricielles de ces homographies (en fait ce ne sont pas des matrices mais des éléments de $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où l'indice -1) :

$$f: z \mapsto \frac{\bar{z} - 1}{-\omega}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}_{-1}, \quad (\infty, \omega, 1) \mapsto (\infty, 1, 0),$$

$$g: z \mapsto \frac{\omega \bar{z}}{\bar{z} + \omega}, \quad G = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}_{-1}, \quad (0, \omega, \infty) \mapsto (0, 1, \omega).$$

Ces transformations engendrent un sous-groupe $\Gamma = \langle f, g \rangle$ de $\text{PGL}(2, \mathcal{O}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où \mathcal{O}_3 désigne l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Le théorème de Poincaré donne la présentation $\Gamma = \langle f, g \mid g^{-1}f^{-1}g^2f^2 \rangle$. Le quotient de \mathbb{H}^3 par $\text{PGL}(2, \mathcal{O}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\text{PGL}(2, \mathcal{O}_3)$) est la 3-orbivariété hyperbolique non compacte (resp. non compacte orientable) de plus petit volume (R Meyerhoff [45]). Le groupe $\text{PGL}(2, \mathcal{O}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est associé à un orthoschéme de Coxeter, en figure 4 (droite) nous avons décomposé le tétraèdre idéal régulier en 6 polyèdres, chacun de ces polyèdres se décompose à nouveau en 4 orthoschémes de Coxeter, montrant ainsi que l'indice de Γ dans $\text{PGL}(2, \mathcal{O}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est égal à 24.

Les translation-réflexions f et $(fg^2)^{-1}g(fg^2)$ engendrent le stabilisateur Γ_∞ . Elles ont pour axes les droites $\frac{1}{2} + \mathbb{R}\omega$ et $-\frac{3}{2} + \mathbb{R}\omega$, et pour vecteurs de translation $-\omega/2$ et $\omega/2$. Les horoboules tangentes à B_∞ sont de diamètre 1, elles se projettent en un empilement de disques de diamètre 1 sur \mathbb{C} . Cet empilement se divise en deux orbites sous l'action de Γ_∞ : $\Gamma_\infty \cdot B_0$ et $\Gamma_\infty \cdot B_{\omega^2}$. Les deux horoboules de $\Gamma_\infty \cdot B_{\omega^2}$ tangentes à B_0 sont B_{ω^2} et B_{-1} . Notons τ_ω la translation suivant le vecteur ω . La transformation $g^{-1}\tau_\omega$ envoie B_0 sur B_∞ et B_∞ sur B_{ω^2} , elle correspond à l'élément γ étudié lors des paragraphes précédents (nous aurions pu tout aussi bien considérer $\tau_{-\omega}g^{-1}\tau_\omega$). Cet élément est parabolique négatif (de même que $\tau_{-\omega}g^{-1}\tau_\omega$). Les horoboules de $\Gamma_\infty \cdot B_{\omega^2}$ les plus proches de B_0 sans en être tangentes sont $B_{-1-\omega}$, B_{ω^2-1} , $B_{i\sqrt{3}}$ et $B_{1-\omega}$. Les transformations envoyant B_0 sur B_∞ et B_∞ sur $B_{-1-\omega}$ ou $B_{i\sqrt{3}}$ sont loxodromiques négatives, leur distance de translation vaut $2 \operatorname{arccosh}(\sqrt{3}/2)$. Les transformations envoyant B_0 sur B_∞ et B_∞ sur B_{ω^2-1} ou $B_{1-\omega}$ sont loxodromiques positives, leur distance de translation vaut $2 \operatorname{arccosh}((1 + \sqrt{13})/4)$.

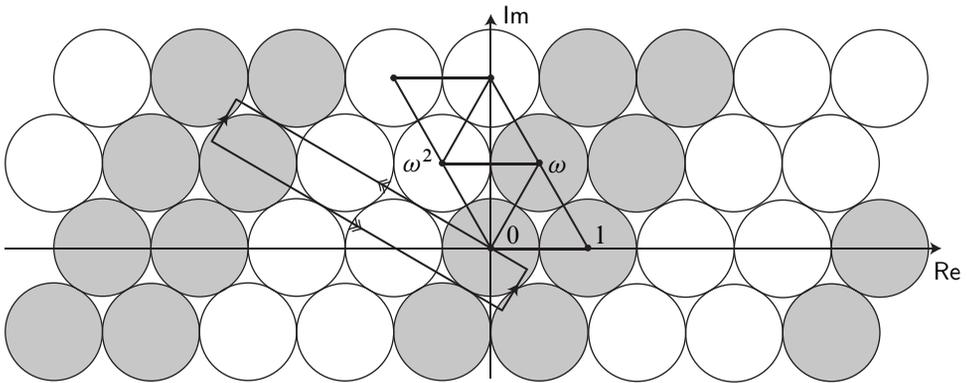


Figure 10: Empilement d'horoboules pour $N1_1$

Nous avons représenté en [figure 10](#) la projection sur \mathbb{C} des horoboules tangentes à B_∞ . Les deux couleurs permettent de distinguer les deux orbites sous l'action de Γ_∞ . Nous avons dessiné deux domaines fondamentaux : l'un constitué de triangles équilatéraux, l'autre formé d'un rectangle marqué des identifications habituelles. Le domaine fondamental formé de quatre triangles correspond évidemment au *link* associé au domaine fondamental tétraédral. Alternativement, considérons le pavage hexagonal de \mathbb{C} formé des cellules de Dirichlet-Voronoi de l'empilement de disques, alors l'union de deux cellules associées à deux disques de couleurs différentes forme un nouveau domaine fondamental, il s'agit du *link* associé au domaine fondamental de la [figure 4](#) (gauche).

Appendice: Densités simpliciales

Les densités d_n et $d_n(\infty)$ définies ci-dessous ont été calculées par R Kellerhals dans [34, théorèmes 3.1 et 3.2]. Nous présentons ici des formules plus simples avec des démonstrations élémentaires. Les estimées de la [partie A.3](#) interviennent dans la minoration du volume ([partie 2.4.2](#)), et dans la majoration du rapport $\cosh(\text{sys}/2)/\text{vol}_\Delta$ ([partie 4.2](#)).

A.1 Densité simpliciale euclidienne

Définition A.1 La *densité simpliciale* dans \mathbb{E}^n , notée d_n , est la densité de $n + 1$ boules mutuellement tangentes dans le simplexe engendré par leurs centres.

Pour exprimer d_n , on commence par calculer le volume d'un simplexe euclidien régulier. Considérons le simplexe S^n consistant en l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique de \mathbb{E}^{n+1} . Il s'agit d'un simplexe régulier dont les arêtes sont de longueur $\sqrt{2}$. En intégrant suivant une direction orthogonale à une face, on trouve

$$\text{vol}(S^n) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{1}{n} \text{vol}(S^{n-1}) = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

Maintenant, il s'agit d'exprimer le volume de l'intersection d'une boule tangente avec le simplexe. Clairement, l'intersection de la sphère tangente avec le simplexe consiste en un simplexe sphérique régulier. Nous en déduisons que l'intersection d'une boule tangente avec le simplexe a pour volume $\text{vol}(S_1^{n-1})2^{-n/2}/n$, où $S_1^{n-1} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ désigne le simplexe sphérique régulier avec une longueur d'arête de $\pi/3$. Finalement, nous obtenons

$$d_n = 2^{-n/2} \frac{n+1}{n} \frac{\text{vol}(S_1^{n-1})}{\text{vol}(S^n)} = 2^{-n/2} \sqrt{n+1} (n-1)! \text{vol}(S_1^{n-1}).$$

Il semble difficile de calculer explicitement le volume de S_1^{n-1} , néanmoins nous obtenons un majorant comme suit : une boule de rayon $\sqrt{n+1/n}$ centrée en un sommet de S^n est tangente à la face opposée, la trace de la boule dans S^n ayant un volume inférieure à celui de S^n , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2} \text{vol}(S_1^{n-1}) &\leq \text{vol}(S^n), \\ \text{vol}(S_1^{n-1}) &\leq \text{vol}(S^{n-1}) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n-1)/2}, \\ \text{vol}(S_1^{n-1}) &\leq \text{vol}(S^{n-1}) \sqrt{\frac{n}{n+1}} \text{ pour } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ce majorant est presque optimal puisque $\text{vol}(S_1^{n-1}) \simeq e^{-1} \text{vol}(S^{n-1})$ lorsque n tend vers l'infini (T Marshall [42]). L'asymptotique trouvée par T Marshall donne

$$d_n \simeq \frac{n}{e^{2n/2}}.$$

Ce qui était déjà connu de H Daniels (voir [51]).

A.2 Densité simpliciale des horoboules

Définition A.2 La *densité simpliciale des horoboules* dans \mathbb{H}^n , notée $d_n(\infty)$, est la densité de $n + 1$ horoboules mutuellement tangentes de \mathbb{H}^n dans le simplexe idéal régulier engendré par leurs centres.

Considérons S^n un simplexe idéal régulier de \mathbb{H}^n . Nous supposons qu'un des sommets se trouve à l'infini, et que les autres sommets forment un simplexe régulier de \mathbb{E}^{n-1} dont les arêtes sont de longueur $\sqrt{2}$. Dans cette configuration, les horoboules mutuellement tangentes centrées aux sommets appartenant à \mathbb{E}^{n-1} ont un diamètre euclidien de $\sqrt{2}$, et l'horoboule tangente centrée à l'infini est $\{x_n > \sqrt{2}\}$. L'intersection de l'horoboule centrée à l'infini avec S^n consiste en l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{H}^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in S^{n-1} \text{ et } x_n > \sqrt{2}\}$$

de volume $\text{vol}(S^{n-1})2^{-(n-1)/2}/(n-1)$. Nous en déduisons immédiatement la formule

$$d_n(\infty) = \frac{n+1}{n-1} \text{vol}(S^{n-1}) \frac{2^{-(n-1)/2}}{v_n} = \frac{n+1}{n-1} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \frac{2^{-(n-1)/2}}{v_n}.$$

J Milnor donna dans [46, page 207] une formule explicite exprimant le volume du simplexe idéal régulier de \mathbb{H}^n , il en déduisit l'équivalent $v_n \simeq e\sqrt{n}/n!$ (voir aussi [30, page 11]). En l'injectant dans la formule ci-dessus cela donne

$$d_n(\infty) \simeq \frac{n}{e^{2(n-1)/2}}.$$

A.3 Quelques estimées utiles

Les lignes suivantes ont pour unique but de faciliter la lecture de l'article.

Volume des simplexes réguliers

$$\text{vol}(S^{n-2}) = \frac{\sqrt{n-1}}{\Gamma(n-1)},$$

$$\text{vol}(S_1^{n-2}) \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \text{vol}(S^{n-2}) \leq \frac{n-1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\Gamma(n-1)}.$$

Densités simpliciales

$$d_{n-1} = 2^{-(n-1)/2} \sqrt{n} \Gamma(n-1) \text{vol}(S_1^{n-2}) \leq 2^{-(n-1)/2} (n-1),$$

$$d_n(\infty) = \frac{n+1}{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n)} \frac{2^{-(n-1)/2}}{v_n}.$$

Volumes de la boule unité de l'espace euclidien \mathbb{E}^{n-1}

$$\omega_{n-1} = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Une quantité intervenant à la partie 4.2 dans la majoration de $\cosh(\text{sys}/2)/\text{vol}_\Delta$

$$\frac{\omega_{n-1}}{2^{n-2} d_{n-1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(n-1)/2} \frac{2}{\sqrt{n} \Gamma(n-1) \Gamma(\frac{n+1}{2}) \text{vol}(S_1^{n-2})}$$

$$\geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1/2} \frac{2}{(n-1) \Gamma(\frac{n+1}{2})} \geq \frac{2}{A_n}.$$

Une quantité intervenant à la partie 2.4.2 dans la minoration du volume

$$\frac{\omega_{n-1}}{2^{n-2} (n-1) d_{n-1} d_n(\infty)} = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{n(n+1)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1) \Gamma(\frac{n+1}{2})} \frac{v_n}{\text{vol}(S_1^{n-2})}$$

$$\geq \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}} \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} v_n$$

$$\geq \frac{4\pi^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}(n^2-1)} \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} v_n \geq \frac{2^n \pi^{n/2-1} \Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{n}(n^2-1)} v_n.$$

Le dernier enchaînement s'effectue grâce à la formule de duplication de la fonction Γ :

$$\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n/2).$$

L'inégalité ci-dessus améliore celle de [35, corollaire 3.6]. Cette amélioration vient uniquement de la majoration de $\text{vol}(S_1^{n-2})$, noté $\text{vol}_{n-2}(S_0)$ dans [35].

Bibliographie

[1] C C Adams, *The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987) 601–606 MR894423

- [2] **C C Adams**, *Volumes of N -cusped hyperbolic 3-manifolds*, J. London Math. Soc. 38 (1988) 555–565 [MR972138](#)
- [3] **C C Adams**, *Waist size for cusps in hyperbolic 3-manifolds*, Topology 41 (2002) 257–270 [MR1876890](#)
- [4] **C C Adams**, *Hyperbolic knots*, from: “Handbook of knot theory”, (W Menasco, M Thistlethwaite, editors), Elsevier, Amsterdam (2005) 1–18 [MR2179259](#)
- [5] **C C Adams, A W Reid**, *Systoles of hyperbolic 3-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 128 (2000) 103–110 [MR1724432](#)
- [6] **I Agol**, *Systoles of hyperbolic 4-manifolds* [arXiv:math/0612290](#)
- [7] **R Bacher, A Vdovina**, *Counting 1-vertex triangulations of oriented surfaces*, Discrete Math. 246 (2002) 13–27 [MR1884884](#)
- [8] **C Bavard**, *La systole des surfaces hyperelliptiques*, prépublication de l’ENS Lyon (1992)
- [9] **C Bavard**, *Disques extrémaux et surfaces modulaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5 (1996) 191–202 [MR1413853](#)
- [10] **C Bavard**, *Systole et invariant d’Hermite*, J. Reine Angew. Math. 482 (1997) 93–120 [MR1427658](#)
- [11] **M V Belolipetsky, S A Thomson**, *Systoles of hyperbolic manifolds*, Algebr. Geom. Topol. 11 (2011) 1455–1469 [MR2821431](#)
- [12] **N Bergeron, F Haglund, D T Wise**, *Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds*, J. Lond. Math. Soc. 83 (2011) 431–448 [MR2776645](#)
- [13] **F Bonahon, J-P Otal**, *Variétés hyperboliques à géodésiques arbitrairement courtes*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988) 255–261 [MR931188](#)
- [14] **K Böröczky**, *Packing of spheres in spaces of constant curvature*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 32 (1978) 243–261 [MR512399](#)
- [15] **P Buser, H Karcher**, *Gromov’s almost flat manifolds*, Astérisque 81, Soc. Math. France, Paris (1981) [MR619537](#)
- [16] **P Buser, P Sarnak**, *On the period matrix of a Riemann surface of large genus*, Invent. Math. 117 (1994) 27–56 [MR1269424](#)
- [17] **J DeBlois**, *The centered dual and the maximal injectivity radius of hyperbolic surfaces*, Geom. Topol. 19 (2015) 953–1014 [MR3336276](#)
- [18] **W Feit**, *Orders of finite linear groups*, from: “Proceedings of the First Jamaican Conference on Group Theory and its Applications”, (T Foguel, J Minty, editors), Univ. West Indies, Kingston (1996) 9–11 [MR1484185](#)

- [19] **S Friedland**, *Discrete groups of unitary isometries and balls in hyperbolic manifolds*, from: “Proceedings of the Fourth Conference of the International Linear Algebra Society”, (H Bart, L F Elsner, A C M Ran, editors), Linear Algebra Appl. 241/243 (1996) 305–341 [MR1400448](#)
- [20] **S Friedland**, *The maximal orders of finite subgroups in $GL_n(\mathbf{Q})$* , Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 3519–3526 [MR1443385](#)
- [21] **S Friedland**, **S Hersonsky**, *Jorgensen’s inequality for discrete groups in normed algebras*, Duke Math. J. 69 (1993) 593–614 [MR1208812](#)
- [22] **D Gabai**, **R Meyerhoff**, **P Milley**, *Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009) 1157–1215 [MR2525782](#)
- [23] **M Gendulphe**, *Paysage systolique des surfaces hyperboliques de caractéristique -1* , prépublication [arXiv:math/0508036](#)
- [24] **H Giesecking**, *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen*, PhD thesis, Münster (1912) Available at <http://www.hti.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABR1814>
- [25] **E Girondo**, **G González-Diez**, *On extremal discs inside compact hyperbolic surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999) 57–60 [MR1703263](#)
- [26] **M Gromov**, *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. 18 (1983) 1–147 [MR697984](#)
- [27] **M Gromov**, *Systoles and intersystolic inequalities*, from: “Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle”, (A L Besse, editor), Sémin. Congr. 1, Soc. Math. France, Paris (1996) 291–362 [MR1427763](#)
- [28] **L Guth**, *Notes on Gromov’s systolic estimate*, Geom. Dedicata 123 (2006) 113–129 [MR2299729](#)
- [29] **L Guth**, *Metaphors in systolic geometry*, from: “Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vo II”, (R Bhatia, A Pal, G Rangarajan, V Srinivas, M Vaninathan, editors), Hindustan Book Agency, New Delhi (2010) 745–768 [MR2827817](#)
- [30] **U Haagerup**, **H J Munkholm**, *Simplices of maximal volume in hyperbolic n -space*, Acta Math. 147 (1981) 1–11 [MR631085](#)
- [31] **S Hersonsky**, *Covolume estimates for discrete groups of hyperbolic isometries having parabolic elements*, Michigan Math. J. 40 (1993) 467–475 [MR1236173](#)
- [32] **C D Hodgson**, **J R Weeks**, *Symmetries, isometries and length spectra of closed hyperbolic three-manifolds*, Experiment. Math. 3 (1994) 261–274 [MR1341719](#)
- [33] **F Jenni**, *Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf ausgewählten Beispielen kompakter Riemannscher Flächen*, Comment. Math. Helv. 59 (1984) 193–203 [MR749104](#)
- [34] **R Kellerhals**, *Ball packings in spaces of constant curvature and the simplicial density function*, J. Reine Angew. Math. 494 (1998) 189–203 [MR1604407](#)

- [35] **R Kellerhals**, *Volumes of cusped hyperbolic manifolds*, *Topology* 37 (1998) 719–734
[MR1607720](#)
- [36] **R Kellerhals**, *Collars in $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{H})$* , *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 26 (2001) 51–72
[MR1816562](#)
- [37] **R Kellerhals**, *Quaternions and some global properties of hyperbolic 5-manifolds*, *Canad. J. Math.* 55 (2003) 1080–1099 [MR2005283](#)
- [38] **R Kellerhals**, *On the structure of hyperbolic manifolds*, *Israel J. Math.* 143 (2004) 361–379 [MR2106991](#)
- [39] **G S Lakeland, C J Leininger**, *Systoles and Dehn surgery for hyperbolic 3-manifolds*, *Algebr. Geom. Topol.* 14 (2014) 1441–1460 [MR3190600](#)
- [40] **W Magnus**, *Residually finite groups*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969) 305–316
[MR0241525](#)
- [41] **A Marden**, *Outer circles*, Cambridge Univ. Press (2007) [MR2355387](#)
- [42] **T H Marshall**, *Asymptotic volume formulae and hyperbolic ball packing*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 24 (1999) 31–43 [MR1677993](#)
- [43] **G J Martin**, *Balls in hyperbolic manifolds*, *J. London Math. Soc.* 40 (1989) 257–264
[MR1044273](#)
- [44] **J Martinet**, *Perfect lattices in Euclidean spaces*, *Grundle. Math. Wissen.* 327, Springer, Berlin (2003) [MR1957723](#)
- [45] **R Meyerhoff**, *Sphere-packing and volume in hyperbolic 3-space*, *Comment. Math. Helv.* 61 (1986) 271–278 [MR856090](#)
- [46] **J Milnor**, *Collected papers, Vol. 1: Geometry*, Publish or Perish, Houston, TX (1994)
[MR1277810](#)
- [47] **W Plesken, M Pohst**, *On maximal finite irreducible subgroups of $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$, V: The eight-dimensional case and a complete description of dimensions less than ten*, *Math. Comp.* 34 (1980) 277–301, loose microfiche suppl [MR551305](#)
- [48] **A Przeworski**, *Cones embedded in hyperbolic manifolds*, *J. Differential Geom.* 58 (2001) 219–232 [MR1913942](#)
- [49] **J S Purcell, J Souto**, *Geometric limits of knot complements*, *J. Topol.* 3 (2010) 759–785
[MR2746337](#)
- [50] **A Reznikov**, *The volume and the injectivity radius of a hyperbolic manifold*, *Topology* 34 (1995) 477–479 [MR1318888](#)
- [51] **C A Rogers**, *The packing of equal spheres*, *Proc. London Math. Soc.* 8 (1958) 609–620
[MR0102052](#)
- [52] **P Schmutz**, *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length*, *Geom. Funct. Anal.* 3 (1993) 564–631 [MR1250756](#)

- [53] **P Schmutz**, *Congruence subgroups and maximal Riemann surfaces*, J. Geom. Anal. 4 (1994) 207–218 [MR1277506](#)
- [54] **W P Thurston**, *The geometry and topology of three-manifolds*, lecture notes, Princeton University (1978) Available at <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
- [55] **M Wada**, *Conjugacy invariants of Möbius transformations*, Complex Variables Theory Appl. 15 (1990) 125–133 [MR1058518](#)
- [56] **P L Waterman**, *An inscribed ball for Kleinian groups*, Bull. London Math. Soc. 16 (1984) 525–530 [MR751826](#)
- [57] **J R Weeks**, *SnapPea* Available at <http://www.geometrygames.org/SnapPea/index.html>
- [58] **A Yamada**, *On Marden's universal constant of Fuchsian groups, II*, J. Analyse Math. 41 (1982) 234–248 [MR687954](#)

Département de Mathématiques, Université de Fribourg
Chemin du Musée 23, CH-1700 Fribourg Péroilles, Switzerland
gendulphe@mat.uniroma1.it, Matthieu@Gendulphe.com
<http://Matthieu.Gendulphe.com>

Proposed: Jean-Pierre Otal
Seconded: Leonid Polterovich, Martin R Bridson

Received: 21 June 2013
Revised: 11 September 2014