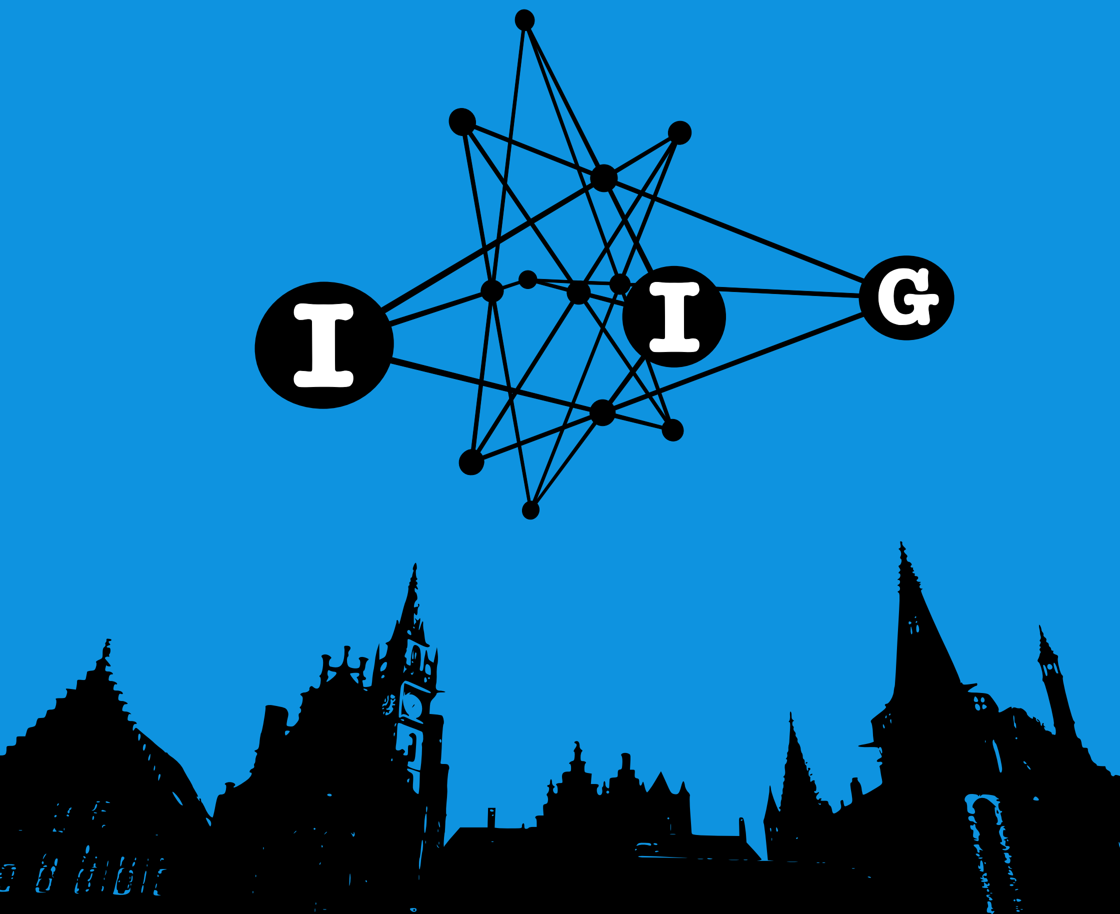
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Groupes triplement transitifs et généralisations

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.9

msp

Groupes triplement transitifs et généralisations

Jacques Tits

[5] Originally published in *Algèbre et théorie des nombres, Paris, 25 septembre – 1er octobre 1949*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique **24**, CNRS, Paris (1950), 207–208. Reused with permission.

GROUPES TRIPLEMENT TRANSITIFS ET GÉNÉRALISATIONS

par M. TITS.

Nous dirons qu'un groupe de transformations est n-uplement transitif s'il existe une et une seule transformation du groupe transformant n points donnés distincts quelconques respectivement en n points donnés distincts quelconques.

Groupes triplement transitifs. — Dans une série de quatre articles parus au *Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique*, j'ai étudié les groupes triplement transitifs généraux (j'y construis notamment un formalisme analogue à celui des corps et approprié à l'étude des groupes triplement transitifs), puis, plus particulièrement, certaines classes de groupes triplement transitifs, à savoir :

D'une part, les groupes projectifs (groupes des homographies $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ dans un corps commutatif quelconque) et des groupes plus généraux que j'ai appelés « groupes semi-projectifs », caractérisés les uns et les autres par des propriétés de nature groupale;

De l'autre, les groupes triplement transitifs finis, caractérisés par le fait que l'ensemble sur lequel ils opèrent n'a qu'un nombre fini de points (j'ai construit tous ces groupes).

Groupes n-uplement transitifs. — Pour $n>3$, les seuls groupes n-uplement transitifs existants sont :

Les groupes symétriques de degrés $k \geqslant 4$ (à la fois k-uplement et $(k-1)$-uplement transitifs);

Les groupes alternés de degrés $k \geqslant 6$ [$(k-2)$-uplement transitifs];

Le groupe de Mathieu de degré 12 (5 fois transitif);

Le groupe quatre fois transitif de degré 11 obtenu à partir du précédent en fixant un point.

Groupes à peu près n-uplement transitifs. — Nous dirons qu'un groupe de transformations est à peu près n-uplement transitif s'il jouit des propriétés suivantes :

1. Étant donnés $n-1$ points arbitraires, il existe au moins une transformation non identique du groupe qui les conserve individuellement. Par contre, il existe des n-uples de points (que nous appellerons n-uples non singuliers) dont les éléments ne sont conservés simultanément par aucune transformation non identique du groupe;

2. Il existe une et une seule transformation du groupe transformant n points donnés formant un n-uple non singulier respectivement en n points donnés formant un n-uple non singulier, et cela quels que soient les n-uples non singuliers considérés.

Remarquons que les groupes projectifs, affins et affins centrés à plus d'une dimension, les groupes que l'on obtient à partir de ceux-là en fixant des points linéairement indépendants, et le groupe des transformations induites sur une quadrique par les projectivités de l'espace qui la conservent sont des cas particuliers de groupes à peu près n-uplement transitifs.

Étant donné un groupe à peu près n-uplement transitif, nous pouvons définir pour $k \leqslant n$ des k-uples singuliers (k-uples qui ne sont contenus dans aucun n-uple non singulier). Nous appellerons sous-ensemble singulier déterminé par un k-uple non singulier, l'ensemble des points qui forment avec ce k-uple un $(k+1)$-uple singulier (il peut être trivial, c'est-à-dire se composer exclusivement des sous-ensembles déterminés par les points du k-uple pris $k-1$ à $k-1$), et nous dirons que ce sous-ensemble est homogène s'il est déterminé de la même façon par n'importe lequel de ses k-uples non singuliers.

Considérons un groupe à peu près n-uplement transitif ($n \geqslant 2$) homogène (dont tous les sous-ensembles singuliers non triviaux sont homogènes), et désignons par d et f respectivement le plus petit et le plus grand nombre de points déterminant des sous-ensembles singuliers homogènes; nous supposerons, pour la simplicité des énoncés, que $d \geqslant 2$. Alors, si $d \leqslant k \leqslant f$, tout k-uple non singulier détermine un sous-ensemble singulier homogène. De plus, si l'on n'est pas dans un des cas suivants :

$f=n-1$ (cas des groupes affins par exemple);

$d=2$ et $f=n-2$ (cas des groupes projectifs par exemple),

le nombre de points de l'ensemble sur lequel opère le groupe est fini et on peut en donner une limitation dépendant uniquement de n, d et f; autrement dit, à des valeurs données de n, d et f, autres que les valeurs indiquées, ne correspondent qu'un nombre fini de groupes (il n'en correspond même en général aucun), qui opèrent tous sur un nombre fini de points.

Exemple d'application. — Pour qu'un groupe à peu près quadruplement transitif, homogène, du type projectif ($d = f = 2$), soit un groupe projectif à deux dimensions, il faut et il suffit que le groupe des transformations induites sur un sous-ensemble singulier par les transformations du groupe qui conservent ce sous-ensemble soit triplement transitif.

BIBLIOGRAPHIE.

De Seguier (J.-A.). — Éléments de la théorie des groupes de substitutions (1912).

Zassenhaus (H.). — Über endliche Fastkörper. *Hamburger Abhandlungen*, vol. 11 (1936) [1].

De Kerekjarto (B.). — Sur les groupes transitifs de la droite. *Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math.*, vol. 10 (1941).

De Kerekjarto (B.). — Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. *Acta Math.*, vol. 74 (1941).

Libois (P.). — Synthèse des axiomatiques de l'algèbre et des géométries projective, affine et affine centrale. *Assoc. Franç. Avancem. Sci. C. R.* (1946).

Tits (J.). Généralisations des groupes projectifs. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, février, mars, juin, août 1949.

---

[1] Au moment de la publication de mes quatre articles, déjà cités, je n'avais pas connaissance de ces travaux de M. Zassenhaus, que M. le Professeur Artin a eu l'obligeance de me signaler

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of

Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.