Innovations in
Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

Généralisation d'un théorème de Kerékjártó

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.13

Généralisation d'un théorème de Kerékjártó

Jacques Tits

[6] Originally published in *III^e Congrès National des Sciences - Bruxelles 1950*, Brussels, July 1950, 64–65. Reused with permission.

64 *III^e Congrès National des Sciences - Bruxelles 1950*

Généralisation d'un Théorème de Kerekjarto

par J. TITS
Aspirant F. N. R. S.

1. On doit à Kerékjártó [1] les théorèmes suivants :

a) Tout groupe triplement transitif de transformations topologiques de la droite projective (réelle) en elle-même est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle (¹).

b) Il n'y a aucun groupe n-uplement transitif de transformations topologiques de la droite projective (réelle) en elle-même, pour $n > 3$.

c) Tout groupe triplement transitif continu de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même est homéomorphe au groupe homographique d'une variable complexe.

d) La sphère est la seule surface qui possède un groupe triplement transitif.

Kerékjártó s'est posé, sans le résoudre, le problème de généraliser ces résultats.

Je me propose de rechercher ici tous les groupes n-uplement transitifs continus de transformations topologiques d'une variété en elle-même, pour $n \geqslant 3$. Bien que cette question soit apparemment assez compliquée, j'ai pu y répondre simplement en faisant usage de résultats obtenus par ailleurs [2] dans une étude générale (non topologique) des groupes n-uplement transitifs, et de diverses autres théories (voir § 3) dont l'intérêt m'a été signalé par M. Hopf, avec qui j'ai étudié ces questions.

2. *Il n'existe pas de groupe continu n-uplement transitif de transformations topologiques d'une variété en elle-même, pour* $n \geqslant 4$; plus généralement, il n'existe pas de groupe n-uplement transitif infini (c'est-à-dire, opérant sur un ensemble infini), pour $n \geqslant 4$; cela résulte de l'énumération des groupes n-uplement transitifs ($n \geqslant 4$) donnée dans ma thèse [2].

Nous sommes ainsi ramenés à la considération du seul cas où $n = 3$.

Nous n'entrerons pas dans le détail des démonstrations.

3. Nos démonstrations sont basées principalement sur trois théories dont nous allons rappeler les éléments essentiels à la compréhension de ce qui suit.

a) *Théorie des bouts* (*Freudenthal*). Dans le cas qui nous occupe (cas des variétés), la notion de bout, introduite par Freudenthal [3], peut être définie de la façon suivante [4], particulièrement intuitive :

Soit V une variété ouverte. On dit qu'une suite de sous-ensembles de V diverge si tout sous-ensemble compact de V à une intersection vide avec presque tous les sous-ensembles de la suite. Une suite divergente $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, de points de V, converge vers un *bout* de la variété s'il est possible de relier les points x_i et x_{i+1} par un arc de courbe C_i, de telle façon que la suite des C_i diverge. Deux suites de points $x_1, x_2, \ldots$, et $y_1, y_2, \ldots$, remplissant cette condition, convergent vers le même bout s'il est possible de relier les points x_i et y_i par un arc de courbe C_i, de telle façon que la suite des C_i diverge.

La variété V peut être complétée par adjonction de ses bouts, considérés comme de nouveaux points ; l'ensemble ainsi obtenu, muni d'une topologie naturelle, est un espace compact.

Freudenthal a démontré que, moyennant certaines hypothèses très générales, un groupe topologique possède au maximum deux bouts; les hypothèses faites sont toujours vérifiées lorsque l'espace du groupe est une variété connexe.

b) *Une caractérisation des groupes projectifs* [2]. Pour qu'un groupe triplement transitif G soit un groupe projectif (groupe de toutes les homographies $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sur un

(¹) Rappelons qu'un groupe de transformations est triplement transitif lorsqu'il existe une et une seule transformation du groupe transformant trois points donnés distincts en trois points donnés distincts.

corps commutatif quelconque), il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante :

Toute transformation de G possédant un couple en involution est une involution.

c) *Corps topologiques.* On appelle corps topologique un corps muni d'une structure topologique telle que xy, $x+y$, et x^{-1} soient des fonctions continues.

Pontjagin [5] a montré que les seuls corps topologiques localement compacts, localement connexes et connexes sont le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes et le corps des quaternions.

4. Soient V une variété et G un groupe continu triplement transitif de transformations topologiques de cette variété en elle-même. p étant un point de V, nous désignerons par $V-p$ la variété des points de V qui sont distincts de p.

a) *Les variétés V et $V-p$ sont connexes*, car tous les triples de points de V sont équivalents entre eux.

b) *La variété V est compacte.* En effet, soient O et ∞ deux points distincts appartenant à V. Par la considération des transformations de G qui conservent chacun des points O et ∞, on peut définir [2] sur les points de la variété $V-O-\infty$ une loi de composition (multiplication) formant groupe ; $V-O-\infty$ est donc la variété d'un groupe topologique. Si cette variété est connexe, elle ne peut avoir d'autre bout que les points O et ∞ (cf. 3 *a*), par conséquent la variété $V=(V-O-\infty)+O+\infty$ est compacte.

Si $V-O-\infty$ n'est pas connexe, la variété V est déconnectée par tous ses couples de points; elle est donc homéomorphe à la droite affine réelle ou à la droite projective réelle (circonférence réelle) ; le premier cas est d'ailleurs exclu en vertu du *a*).

c) *Le groupe G est projectif.* Reprenons les notations du *b*).

Si la variété $V-O-\infty$ n'est pas connexe, V est homéomorphe à la droite projective réelle, et G est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle, en vertu du théorème 1 *a*.

Supposons donc que la variété $V-O-\infty$ soit connexe, et soit 1 un point donné (choisi arbitrairement) de cette variété. Considérons l'application T, de la variété $V-O-\infty$ dans elle-même, définie de la façon suivante : x étant un point quelconque de $V-O-\infty$, Tx est le transformé du point 1 par la transformation de G qui échange O et ∞ et qui conserve x (1).

Considérée comme sous-ensemble de la variété $V-O-\infty$, l'image $T(V-O-\infty)$ de cette variété est un ensemble ouvert et fermé ; elle coïncide donc avec la variété $V-O-\infty$ elle-même, puisque celle-ci est connexe. Il en résulte que toutes les transformations de G qui échangent O et ∞ possèdent un élément uni et sont donc des involutions (car leurs carrés ont trois éléments unis). Par conséquent, le groupe G est projectif, en vertu de 3 *b*.

d) *Le groupe G est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle ou au groupe homographique d'une variable complexe.*

Le groupe G étant projectif, cela résulte immédiatement du théorème de Pontrjagin (v. § 3 c).

(1) L'application T est univoque, mais généralement non biunivoque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kerékjártó, B. : Sur les groupes transitifs de la droite. *Acta Univ. Szeged Sect. Sc. Math.*, vol. 10 (1941).

Kerékjártó, B. : Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. *Acta Math.*, vol. 74 (1941).

[2] Tits, J. : Généralisations des groupes projectifs. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sc.* - Février, mars, juin, août 1949.

Tits, J. : Généralisations des groupes projectifs basées sur la notion de transitivité. Thèse de doctorat, Bruxelles, mai 1950.

[3] Freudenthal, H. : Ueber die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Zeitschrift*, vol. 33 (1931).

Freudenthal, H. : Neuaufbau der Endentheorie. *Ann. of Math.*, vol. 43 (1942).

[4] Hopf, H. : Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Comment. Math. Helvetici*, vol. 16 (1943-1944).

[5] Pontrjagin, L. : Ueber stetige Körper. *Ann. of Math.*, vol. 33 (1932).

Pontrjagin, L. : Topological groups, Princeton series.

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.