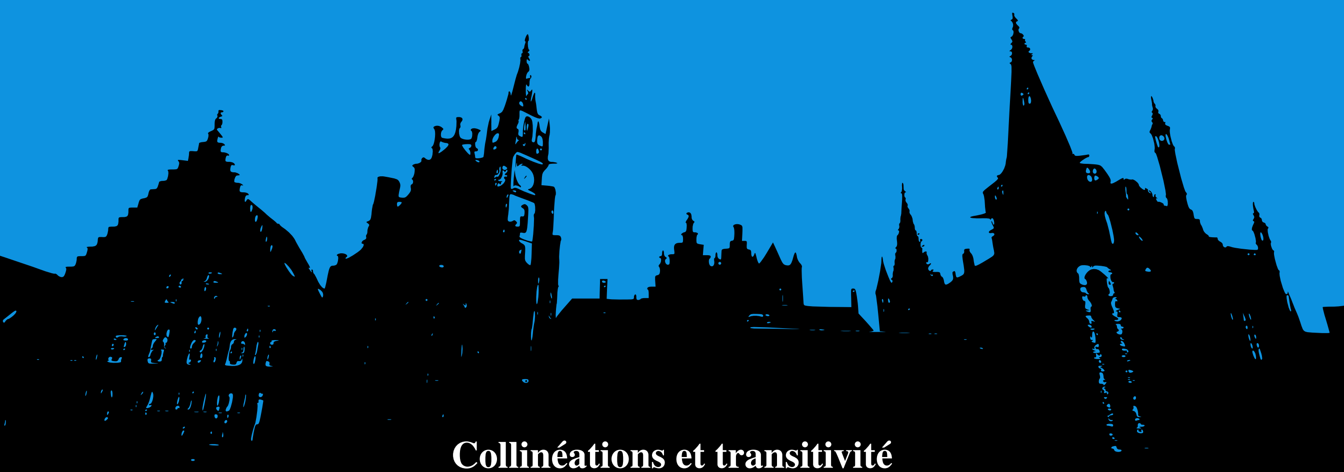
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Collinéations et transitivité

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.17

Collinéations et transitivité

Jacques Tits

[7] Originally published in *III*^{e} *Congrès National des Sciences - Bruxelles 1950*, Brussels, July 1950, 66–67. Reused with permission.

Collinéations et Transitivité

par J. TITS
Aspirant F. N. R. S.

Nous nous proposons de faire quelques remarques concernant le comportement respectif des conditions de transitivité et des conditions de linéarité utilisées comme postulats dans une axiomatique des espaces projectifs propres.

1. Rappelons tout d'abord quelques définitions (¹).

Un *espace projectif propre* peut être défini de la façon suivante :

Soit K un corps commutatif quelconque. Appelons *point* tout ensemble ordonné de $n+1$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$, non tous nuls et donnés à un facteur près. L'ensemble des points ainsi définis est l'espace projectif (propre) à n dimensions construit sur le corps K.

On donne le nom de *collinéations projectives* aux transformations de cet espace définies par les relations $y_i = x_j a_i^j$ $(a_i^i = 0)$. Nous appellerons *groupe projectif*, le groupe de toutes les collinéations projectives d'un espace projectif propre.

Un *espace projectif général* à n dimensions est un ensemble d'éléments, appelés points, dont on distingue certains sous-ensembles privilégiés, les sous-espaces linéaires à -1 dimension (ensemble vide), 0 dimension (points), 1 dimension (droites), ..., $n-1$ dimensions (hyperplans), n dimensions (l'espace tout entier), vérifiant les conditions suivantes : l'intersection de deux sous-espaces linéaires α et β est un sous-espace linéaire $\alpha \cap \beta$; il existe un plus petit sous-espace linéaire $\alpha \cup \beta$ contenant les sous-espaces α et β ; la somme des dimensions des sous-espaces $\alpha \cap \beta$ et $\alpha \cup \beta$ est égale à la somme des dimensions des sous-espaces α et β.

2. Soit E un espace projectif général. Dans cet espace, on peut définir [1], en combinant les opérations de jonction et d'intersection, des *projectivités* entre sous-espaces linéaires de même dimension ; les projectivités sur un sous-espace donné (projectivités entre ce sous-espace et lui-même) forment groupe. Le groupe des projectivités sur une droite est au moins triplement transitif, c'est-à-dire qu'il existe au moins une projectivité du groupe faisant correspondre trois points donnés distincts quelconques à trois points donnés distincts quelconques.

Lorsque l'espace projectif E est propre, ce groupe est exactement triplement transitif et, en particulier, la seule projectivité ayant au moins trois points unis est la transformation identique. Réciproquement, si la seule projectivité (sur une droite) ayant au moins trois points unis est la transformation identique, l'espace E est un espace projectif propre.

Revenons au cas général. On peut définir, au moyen de jonctions et d'intersections, une opération de multiplication sur les points d'une droite donnée d, à l'exception de l'un d'entre eux, le point ∞. Dans la construction de cette opération interviennent certains éléments arbitraires (tels que la droite d et le point ∞, par exemple) ; mais le système obtenu ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix de ces éléments.

Lorsque l'espace E est un espace projectif propre, l'opération de multiplication associée est commutative et réciproquement.

3. Les propriétés énoncées au § 2 sont valables dès que la dimension de l'espace considéré est supérieure ou égale à 2. Cependant, lorsqu'on étudie avec plus de détails les espaces projectifs généraux, on constate que, parmi eux, les espaces à 2 dimensions jouent un rôle particulier, en ce sens qu'ils sont beaucoup moins riches en propriétés que les espaces de dimensions supérieures (on sait, par exemple, que le théorème de Desargues, valable pour les espaces de 3 dimensions et plus, ne l'est en général plus à 2 dimensions). En d'autres

(¹) Notre terminologie est celle de VEBLEN et YOUNG [1].

termes, le contenu de la notion d'espace projectif général s'appauvrit lorsqu'on passe de 3 à 2 dimensions ; à 1 dimension, cette notion (ou, plus exactement, la définition qui en a été donnée plus haut) perd son sens et ne peut donc pas servir de base à une axiomatique des espaces projectifs propres (unidimensionnels).

Construisant une telle axiomatique, M. P. Libois [2] a eu l'idée de prendre pour nouvelle propriété de base la propriété de triple transitivité. Il est remarquable qu'étant donné un ensemble E et un groupe triplement transitif G opérant sur cet ensemble, on puisse à nouveau définir une opération de multiplication sur les points de E à l'exception de l'un d'entre eux (le point ∞), et que la commutativité de cette opération soit une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe G soit un groupe projectif (c'est-à-dire le groupe de toutes les collinéations projectives d'un espace projectif propre unidimensionnel) [3].

Remarque. Cette dernière propriété peut encore être énoncée de la façon suivante :

Pour qu'un groupe triplement transitif G soit projectif, il faut et il suffit que les transformations du groupe qui conservent deux points donnés distincts soient permutables.

Lorsqu'elle est mise sous cette forme, on peut y remplacer la condition, pour le groupe G, d'être triplement transitif, par la condition plus faible d'être au moins triplement transitif (v. § 2).

4. Au § 3, nous avons pris comme base d'une axiomatique des espaces projectifs propres à 1 dimension la propriété de triple transitivité. La question se pose de savoir si on pourrait, de façon générale, baser sur des propriétés de transitivité une axiomatique des espaces projectifs propres à un nombre quelconque de dimensions.

En étudiant cette question, j'ai été amené [3] à considérer une classe de groupe de transformations, que j'appelle *groupes à peu près n-uplement transitifs du type projectif.* La définition que j'en ai donnée fait intervenir essentiellement une condition de transitivité et une condition de linéarité très affaiblie ; elle est équivalente à la définition suivante, qui est moins naturelle (car, contrairement à la précédente, elle présuppose la donnée *a priori*, dans l'ensemble sur lequel opère le groupe, d'une structure déterminée), mais plus maniable :

Soit E un espace projectif général à $n-2$ dimensions ; nous dirons qu'un groupe de transformations G, opérant dans E, est à peu près n-uplement transitif du type projectif, s'il existe une et une seule transformation du groupe transformant n points donnés quelconques de E non situés $n-1$ à $n-1$ dans un même hyperplan, en n points donnés quelconques de E vérifiant la même condition.

Si E est un espace projectif propre, et G le groupe des collinéations projectives de cet espace, alors :

a) les transformations de G qui conservent trois points d'une droite conservent tous les points de cette droite,

b) les transformations induites sur une droite donnée d par les transformations de G qui conservent d et deux points distincts donnés de d, sont permutables,

c) les transformations de G qui conservent $n-1$ points donnés de E, non situés dans un même hyperplan, sont permutables.

Réciproquement, si un groupe du type projectif G possède l'une quelconque des propriétés *a*), *b*) ou *c*), l'espace E dans lequel il opère est un espace projectif propre, et G est le groupe des collinéations projectives de cet espace.

Ceci nous permet de donner une définition axiomatique simultanée des espaces projectifs propres et des groupes projectifs à un nombre quelconque de dimensions ; il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux du § 2 qui concernaient uniquement les espaces projectifs propres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Veblen, O. et Young, J. W. : *Projective geometry*, vol. I et II.

[2] Libois, P. : Synthèse des axiomatiques de l'algèbre et des géométries projective, affine et affine centrale. *Assoc. Fr. Avancem. Sci. C. R.*, 1946.

[3] Tits, J. : Généralisations des groupes projectifs. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sc.*, févr., mars, juin, août 1949.

Tits, J. : Généralisations des groupes projectifs basées sur la notion de transitivité. Thèse de doctorat, Bruxelles, mai 1950.

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
mathematical sciences publishers
nonprofit scientific publishing
http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.