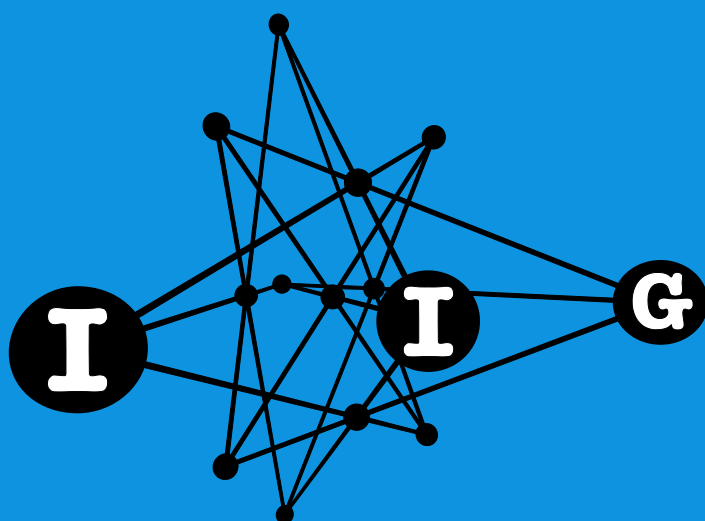


# Innovations in Incidence Geometry

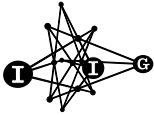
Algebraic, Topological and Combinatorial



Sur un article précédent :  
« Étude de certains espaces métriques »

Jacques Tits





**Innovations in Incidence Geometry**  
Algebraic, Topological and Combinatorial

**vol. 16, no. 1, 2018**  
[dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.47](https://doi.org/10.2140/iig.2018.16.47)



**Sur un article précédent :**  
**« Étude de certains espaces métriques »**

Jacques Tits

[17] Originally published in *Bull. Soc. Math. Belg.* **6** (1953), 126–127. Reused with permission.

**Sur un article précédent :**  
**« Étude de certains espaces métriques » ,**

par J. TITS  
 Chercheur qualifié du F. N. R. S.

Le but de cette note est d'apporter quelques corrections à notre article « Étude de certains espaces métriques » paru dans ce Bulletin (\*), et désigné ci-après par [M] ; nous en conserverons les notations.

— Au n° 4 de [M] nous avons énuméré les couples  $R, G$  formés d'un espace topologique  $R$  de dimension finie et d'un groupe  $G$  d'homéomorphismes de  $R$  satisfaisant aux axiomes A, B, D du n° 2. Cette énumération est cependant incomplète et présente une inexactitude : les transformations  $y = ax^p + b$  de l'alinéa 0<sub>2</sub>) ne forment pas groupe ; nous allons indiquer ici les modifications qu'il y a lieu d'y apporter.

Soient  $\mathcal{E}_i$  ( $i = 7, 8$ ) l'espace euclidien réel à  $i$  dimensions,  $p_i$  un point donné de cet espace,  $\mathcal{S}_i$  une sphère (à  $i - 1$  dimensions) de centre  $p_i$  dans  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{P}_i$  l'espace (à  $i - 1$  dimensions) des points à l'infini de  $\mathcal{E}_i$ ,  $\Gamma_i^+$  le groupe des rotations de  $\mathcal{E}_i$  autour de  $p_i$ , qui conservent un spineur donné de  $\mathcal{E}_i$  si  $i = 7$  et un semi-spineur donné de  $\mathcal{E}_i$  si  $i = 8$  <sup>(1)</sup>,  $\Gamma_7$  le groupe engendré par  $\Gamma_7^+$  et par la symétrie de  $\mathcal{E}_7$  par rapport à  $p_7$ , et enfin  $\Delta_i^+$  (resp.  $\Delta_7$ ) le groupe engendré par  $\Gamma_i^+$  (resp.  $\Gamma_7$ ) et par les translations de  $\mathcal{E}_i$  (resp.  $\mathcal{E}_7$ ). Le groupe  $\Gamma_i^+$  (resp.  $\Gamma_7$ ) induit sur la sphère  $\mathcal{S}_i$  (resp.  $\mathcal{S}_7$ ) et sur l'espace  $\mathcal{P}_i$  des groupes de transformations que nous désignerons encore par  $\Gamma_i^+$  (resp.  $\Gamma_7$ ). Cela étant, les paires suivantes

- (1)  $R = \mathcal{E}_7, G = \Delta_7$  ou  $\Delta_7^+$  ;
- (2)  $R = \mathcal{S}_7, G = \Gamma_7$  ou  $\Gamma_7^+$  ;
- (3)  $R = \mathcal{P}_7, G = \Gamma_7^+$  ;
- (4)  $R = \mathcal{E}_8, G = \Delta_8^+$  ;
- (5)  $R = \mathcal{S}_8, G = \Gamma_8^+$  ;
- (6)  $R = \mathcal{P}_8, G = \Gamma_8^+$  ;

(\*) *Bull. Soc. Math. de Belgique*, Année 1952 (publié en 1953).

<sup>(1)</sup> Cf. E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*. II. *Actualités Sci. et Ind.*, n° 701. Paris, Hermann, 1938.

satisfont aux axiomes A, B, D du n° 2 de [M]. De façon plus précise, on obtient l'énumération complète des couples  $R, G$  formés d'un espace topologiques  $R$  <sup>(1)</sup> et d'un groupe complet <sup>(2)</sup>  $G$  d'homéomorphismes de  $R$ , satisfaisant aux axiomes A, B, C, en remplaçant dans l'énumération du n° 4 de [M] les couples  $0_1$  et  $0_2$  par les couples (1) à (6) ci-dessus.

Notons que les couples  $0_1$  du n° 4 de [M] ne sont autres que les couples (1) décrits plus haut.

— Les couples (1), (4), (5) et (6) définis plus haut satisfont à l'axiome  $D_2$  énoncé au n° 2 de [M] ; parmi eux, le couple (4) satisfait aussi à l'axiome  $D_3$ . Il en résulte que la proposition du n° 6 de [M] n'est valable que si on suppose la dimension de  $R$  différente de 7 et 8. De façon plus précise, on peut énoncer la proposition suivante :

*Soient  $R$  un espace topologique et  $G$  un groupe complet d'homéomorphismes de  $R$  satisfaisant aux axiomes A, B, D et  $D_2$ .  $R$  a alors une structure d'espace de Riemann à courbure constante et  $G$  est le groupe de toutes les isométries de cet espace, sauf peut-être si  $R$  est un espace euclidien, elliptique ou sphérique à 7 dimensions, ou un espace euclidien à 8 dimensions, auquel cas  $G$  peut être un sous-groupe propre du groupe de toutes les isométries de  $R$ .*

Pour pouvoir assurer dans tous les cas que  $G$  est le groupe de toutes les isométries de  $R$ , il suffit, par exemple, de faire l'hypothèse supplémentaire qu'il satisfait aux axiomes  $D_3$  et  $D_4$  du n° 2 de [M].

---

<sup>(1)</sup> Ainsi que nous l'avions déjà laissé à entendre dans [M] (cf. p. 48), l'hypothèse de dimension finie est superflue.

<sup>(2)</sup> Cf. [M], note (5).



# Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

## MANAGING EDITOR

Tom De Medts    Ghent University  
tom.demedts@ugent.be

Linus Kramer    Universität Münster  
linus.kramer@wwu.de

Klaus Metsch    Justus-Liebig Universität Gießen  
klaus.metsch@math.uni-giessen.de

Bernhard Mühlherr    Justus-Liebig Universität Gießen  
bernhard.m.muehlherr@math.uni-giessen.de

Joseph A. Thas    Ghent University  
thas.joseph@gmail.com

Koen Thas    Ghent University  
koen.thas@gmail.com

Hendrik Van Maldeghem    Ghent University  
hendrik.vanmaldeghem@ugent.be

## HONORARY EDITORS

Jacques Tits  
Ernest E. Shult †

## EDITORS

Peter Abramenko    University of Virginia

Francis Buekenhout    Université Libre de Bruxelles

Philippe Cara    Vrije Universiteit Brussel

Antonio Cossidente    Università della Basilicata

Hans Cuypers    Eindhoven University of Technology

Bart De Bruyn    University of Ghent

Alice Devillers    University of Western Australia

Massimo Giulietti    Università degli Studi di Perugia

James Hirschfeld    University of Sussex

Dimitri Leemans    Université Libre de Bruxelles

Oliver Lorscheid    Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

Guglielmo Lunardon    Università di Napoli “Federico II”

Alessandro Montinaro    Università di Salento

James Parkinson    University of Sydney

Antonio Pasini    Università di Siena (emeritus)

Valentina Pepe    Università di Roma “La Sapienza”

Bertrand Rémy    École Polytechnique

Tamás Szonyi    ELTE Eötvös Loránd University, Budapest

## PRODUCTION

Silvio Levy    (Scientific Editor)  
production@msp.org

---

See inside back cover or [msp.org/iig](http://msp.org/iig) for submission instructions.

---

The subscription price for 2019 is US \$275/year for the electronic version, and \$325/year (+\$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

---

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

---

IIG peer review and production are managed by EditFlow<sup>®</sup> from MSP.

PUBLISHED BY  
 **mathematical sciences publishers**  
nonprofit scientific publishing  
<http://msp.org/>  
© 2019 Mathematical Sciences Publishers

# Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1

2018

Complement to the Collected Works of  
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series *Heritage of European Mathematics*.

