Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

Étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.51

msp

Étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes

Jacques Tits

[19] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954), 466–468. Reused with permission.

THÉORIE DES GROUPES. — *Étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes.* Note de M. **Jacques Tits**, présentée par M. Jean Leray.

On définit, pour une classe donnée d'espaces homogènes, des « Π'-plans » qui généralisent les variétés linéaires des espaces projectifs, et on énonce à leur sujet une série de propositions, concernant notamment leurs relations d'inclusion et d'intersection, qui redonnent dans le cas particulier des espaces projectifs les principales propriétés d'inclusion des variétés linéaires.

1. Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, $\overline{G}$ son algèbre de Lie, $\overline{C}$ une sous-algèbre de Cartan, $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ un système de

racines simples de $\overline{G}$ et Π, Π', Π'', etc. des parties de Σ (c'est-à-dire des ensembles de racines appartenant à Σ). Quel que soit $\Pi \subseteq \Sigma$, nous appellerons $\overline{G}(\Pi)$ la sous-algèbre de $\overline{G}$ engendrée par $\overline{C}$ et par les vecteurs propres e_α correspondant aux racines $\alpha = \Sigma k_i \alpha_i$ (k_i entiers) telles que $k_i \geqq 0$ pour tout $\alpha_i \in \Pi$, $G(\Pi)$ le sous-groupe connexe de G engendré par $\overline{G}(\Pi)$, $G[\Pi]$ l'espace homogène $G/G(\Pi)$ et $p(\Pi)$ le point de $G[\Pi]$ représentant $G(\Pi)$.

L'espace $G[\Pi]$ *est entièrement déterminé par* $\overline{G}$ *et* Π. Les espaces $G[\Pi]$ définis à partir des divers groupes G et des divers ensembles de racines Π seront nommés R-*espaces*. A tout R-espace $G[\Pi]$ nous associerons le schéma obtenu à partir de la figure de Schläfli de Σ en y marquant d'un ● les sommets représentant les racines simples appartenant à Π; ainsi les schémas ●—·—·—· et ●—·—·—· représentent respectivement un espace projectif à quatre dimensions et une hyperquadrique à huit dimensions. Deux R-espaces sont isomorphes si et seulement si leurs schémas diffèrent seulement par des composantes connexes dont aucun sommet n'est marqué.

Nous dirons que Π'' sépare Π et Π', et nous écrirons $\Pi | \Pi'' | \Pi'$, si aucune composante connexe de la figure de Schläfli du complémentaire de Π'' dans Σ ne contient simultanément des racines simples appartenant à Π et des racines simples appartenant à Π'. La plus petite partie Π'' de Π' telle que $\Pi | \Pi'' | \Pi'$ sera nommée $\Pi' \bmod \Pi$; si $\Pi' = \Pi' \bmod \Pi$, Π' sera dit réduit $\bmod \Pi$.

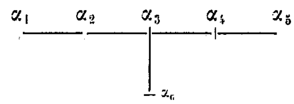
Nous dirons encore qu'un point de $G[\Pi]$ et un point de $G[\Pi']$ sont incidents s'ils sont transformés des points $p(\Pi)$ et $p(\Pi')$ par un même élément de G, et nous appellerons Π'-plan de $G[\Pi]$ le lieu des points de $G[\Pi]$ qui sont incidents à un point donné de $G[\Pi']$. Les Π'-plans de $G[\Pi]$ ne dépendent que de $\Pi'' = \Pi' \bmod \Pi$ et si $\Pi'' = \Pi'$, la correspondance entre les points de $G[\Pi']$ et les Π'-plans de $G[\Pi]$ est biunivoque; dans ce cas, $G[\Pi']$ peut donc être interprété géométriquement comme l'espace des Π'-plans de $G[\Pi]$.

2. *Propriétés des* Π'-*plans*. — 2.1. Soient ϖ un Π'-plan donné de $G[\Pi]$. Le sous-groupe des éléments de G qui conservent ϖ induit sur ϖ un groupe transitif de transformations; ϖ est donc lui-même un espace homogène. *Considéré de ce point de vue,* ϖ *est un* R-*espace et son schéma s'obtient en retirant du schéma de* $G[\Pi]$ *les sommets appartenant à* Π'.

2.2. *Soient* Π' *et* Π'' *réduits mod* Π. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un* Π'-*plan de* $G[\Pi]$ *puisse contenir un* Π''-*plan est* $\Pi | \Pi'' | \Pi'$. *Lorsqu'elle est remplie, un point* p' *de* $G[\Pi']$ *et un point* p'' *de* $G[\Pi'']$ *sont incidents si et seulement si le* Π'-*plan* ϖ' *et le* Π''-*plan* ϖ'' *de* $G[\Pi]$ *qu'ils représentent respectivement sont incidents au sens usuel (c'est-à-dire si* $\varpi' \supset \varpi''$); *de plus, les* Π''-*plans contenus dans un* Π'-*plan donné* ϖ' *sont les* Π'''-*plans de* ϖ' (*cette expression a un sens en vertu de* 2.1), *où* Π''' *s'obtient en retirant de* Π'' *l'intersection* $\Pi' \cap \Pi''$.

2.3. *Si un* Π'-*plan donné* ϖ' *et un* Π''-*plan donné* ϖ'' *de* $G[\Pi]$ *se coupent, leur intersection est un* Π'''-*plan, où* Π''' *dépend des* ϖ' *et* ϖ'' *envisagés.*

3. *Applications.* — Soit par exemple $\overline{G} = E_6$, les α_i étant numérotés comme suit :



L'espace $E = G[\alpha_1]$ a 16 dimensions ; c'est le « complexifié » du plan projectif des octaves de Cayley. Nous énoncerons à présent quelques propriétés de E qui sont conséquences immédiates des propositions du n° 2 ; nous ferons usage de la notation abrégée suivante : V_i = variété linéaire à i dimensions. Les α_5-plans de E sont des hyperquadriques Q_8 à 8 dimensions. Les Π'-plans, avec $\Pi' = \{\alpha_2\}$, $\{\alpha_3\}$, $\{\alpha_4, \alpha_6\}$, $\{\alpha_4\}$, $\{\alpha_5, \alpha_6\}$, sont respectivement les V_1, les V_2, les V_3 et les V_4 des deux modes, soient V_4^m et V_4^n, de ces Q_8. Deux α_5-plans distincts quelconques se coupent suivant un point, une V_1, une V_2, une V_3 ou une V_4^m. L'espace des α_5-plans qui passent par un point (resp. une V_1, une V_2, une V_3, une V_4^m) donné est isomorphe à une hyperquadrique à 8 dimensions (resp. un espace projectif à 4, 2, 1, 1 dimensions). Les α_6-plans sont des espaces projectifs à 5 dimensions. Si un α_6-plan donné rencontre un α_5-plan donné, il le coupe suivant une droite (V_1) ou une V_4, etc. De nombreux problèmes relatifs à la géométrie de E peuvent ainsi être ramenés à des problèmes concernant des espaces plus simples (espaces projectifs, hyperquadriques, etc.).

On peut étudier de façon analogue les autres R-espaces de E_6, ainsi que les R-espaces des autres groupes exceptionnels.

Innovations in Incidence Geometry
msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
mathematical sciences publishers
nonprofit scientific publishing
http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of

Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.