Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

Espaces homogènes et isotropes, et espaces doublement homogènes

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.55

Espaces homogènes et isotropes, et espaces doublement homogènes

Jacques Tits

[20] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954), 526–527. Reused with permission.

THÉORIE DES GROUPES. — *Espaces homogènes et isotropes, et espaces doublement homogènes.* Note (*) de M. **Jacques Tits**, présentée par M. Jean Leray.

On détermine tous les espaces homogènes connexes $S = G/H$ de groupes de Lie, tels que G soit transitif sur les directions tangentes à S, et tous les espaces S de dimension suffisamment grande (supérieure à 124) tels que G soit doublement transitif sur S.

1. Les groupes dont il est question dans cette Note sont tous des groupes de Lie; l'algèbre de Lie d'un groupe G et sa complexifiée seront désignées respectivement par $\overline{G}$ et $\tilde{G}$. Les espaces projectifs considérés sont les espaces projectifs réels, complexes et quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley. Dans ces espaces, on peut définir des polarités [1]; les polarités envisagées ici sont toujours supposées hermitiennes (dans le cas réel, les polarités hermitiennes sont les polarités symétriques ordinaires). Nous nommerons *espace elliptique* $E = E(P, \tau)$ un espace projectif P dans lequel est donnée une polarité τ sans point uni, *quadrique ovale* $Q = Q(P, \tau')$ l'espace des points unis d'une polarité τ' possédant des points unis mais non des droites unies, et *espace hyperbolique* $H = H(P, \tau')$ l'espace des points de P intérieurs à cette quadrique. Les automorphismes de E sont les automorphismes de P qui conservent τ; les automorphismes de Q (de H) sont les automorphismes de P qui conservent τ', considérés comme opérant sur Q (sur H). Les groupes d'automorphismes des espaces projectifs, des espaces elliptiques, des espaces hyperboliques et des quadriques ovales réelles sont transitifs sur les directions tangentes à ces espaces ou ces quadriques; les groupes d'automorphismes des espaces projectifs et des quadriques ovales sont doublement transitifs. Nous dirons qu'un espace homogène donné $S = G/H$ est *isotrope* (resp. *doublement* ou *triplement homogène*) si G est transitif sur les directions tangentes à S (resp. sur les couples ou les triples de points de S).

2. Soit $S = G/H$ un espace homogène connexe de dimension $n \geqq 2$.

Théorème I. — *Si* S *est isotrope, l'une des conditions suivantes est remplie :* (A) S *a une structure d'espace affin et* G *est le produit du groupe des translations par un groupe d'affinités conservant un point p, donné arbitrairement;* (B) S *est un espace projectif, un espace elliptique, un espace hyperbolique, une quadrique ovale réelle, une sphère euclidienne ou le recouvrement universel d'un espace projectif, et* G *est le groupe, ou un sous-groupe ouvert du groupe, des automorphismes de cet espace, cette quadrique, etc.;* (C) S *est une sphère ou un espace elliptique réel à* 8 (*resp.* 7) *dimensions et* $G = \widehat{B}_3$ (*resp.* $G = \widehat{G}_2$ *ou éventuelle-*

(*) Séance du 9 août 1954.

(1) Pour le cas du plan projectif des octaves, *cf.* J. Tits, *Acad. Roy. Belg.*, *Bull. Cl. Sc.*, 39, 1953, p. 309-329 et 40, 1954, p. 29-40.

ment, dans le cas de la sphère, $G = \widehat{G}_2 \times I_2$), $\widehat{B}_3$, $\widehat{G}_2$ *et* I_2 *étant respectivement les formes compactes simplement connexes de* B_3 *et* G_2 *et un groupe cyclique d'ordre* 2.

Théorème II. — *Soit* $\tilde{G} \neq G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$. *Alors, si* S *est doublement homogène,* S *et* G *satisfont à la condition* (A) *ci-dessus ou bien* S *est un espace projectif ou une quadrique ovale et* G *est le groupe, ou un sous-groupe ouvert du groupe, des automorphismes de cet espace ou cette quadrique.*

Conjecture — Ce théorème reste vrai quel que soit G.

Remarque. — La détermination des espaces S isotropes ou doublement homogènes satisfaisant à (A) se fait aisément par application d'une méthode de E. Cartan ([2]).

Théorème III. — *Si* S *est triplement homogène, c'est une quadrique ovale réelle* (*espace conforme*), *et* G *est le groupe, ou la composante connexe du groupe, des automorphismes de cette quadrique.*

3. Nous donnerons quelques indications sur la démonstration de ces théorèmes. Soit $S = G/H$ un espace homogène connexe (+) isotrope ou (‡) doublement homogène. On montre aisément que

3.1. $\overline{H}$ *est une sous-algèbre maximale de* $\overline{G}$ [dans le cas (‡), H est même un sous-groupe maximal de G];

3.2. *Tout sous-groupe invariant non discret* [et même, dans le cas (‡), tout sous-groupe invariant non trivial] *de* G *est transitif sur* S;

3.3. *Si g et h sont les dimensions respectives de* G *et* H, *on a* $2h+1 \geq g$ [dans le cas (‡), $2h \geq g$].

En vertu de 3.2 et d'un lemme antérieur ([3]) on a l'une des éventualités suivantes : 1° la condition (A) est remplie; 2° $\overline{G}$ est simple; ou 3° on peut définir sur S une structure de groupe simple telle que la composante connexe de G soit engendrée par les translations à gauche et à droite de ce groupe. Ceci permet de ramener la démonstration des théorèmes du n° 2 à l'étude du seul cas où $\overline{G}$ est simple.

Si $\tilde{H}'$ est une sous-algèbre maximale de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{H}$, on a, d'après 3.1, $\overline{H} = \overline{G} \cap \tilde{H}'$. D'autre part, les sous-algèbres maximales des algèbres complexes semi-simples sont connues ([4]). Lorsque $\tilde{G}$ ou $\overline{G}$ est une algèbre classique, on peut ainsi obtenir une description géométrique explicite des sous-algèbres maximales de dimension $h \geq (g-1)/2$ de $\overline{G}$ et la démonstration des théorèmes I à III s'achève sans difficulté. Le cas où $\tilde{G}$ ou $\overline{G}$ est exceptionnelle nécessite un traitement spécial sur lequel nous ne nous étendrons pas ici.

([2]) *J. Math. Pures et Appl.*, **10**, 1914, p. 149-186.

([3]) *Acad. Roy. Belg.*, *Bull. Cl. Sci.*, **39**, 1953, p. 316 et **40**, 1954, p. 30.

([4]) *Cf.* E. Dynkin, *Mat. Sbornik*, **30** (72), 1952, p. 349-462.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.