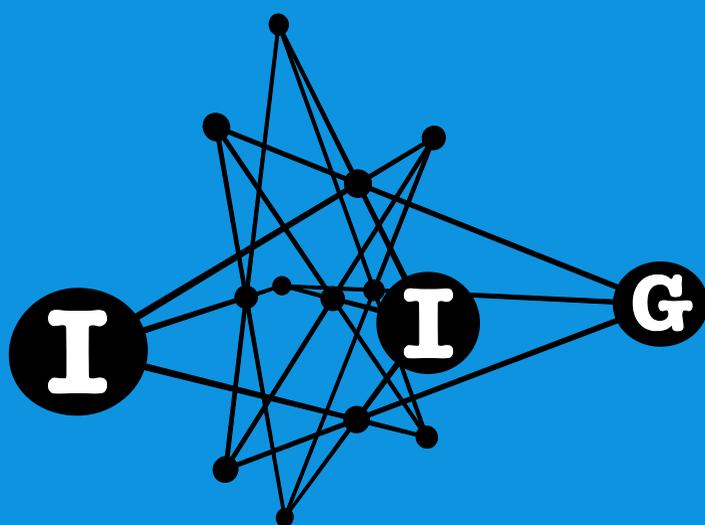


# Innovations in Incidence Geometry

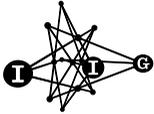
Algebraic, Topological and Combinatorial



**Sur les R-espaces**

Jacques Tits





**Innovations in Incidence Geometry**  
Algebraic, Topological and Combinatorial

**vol. 16, no. 1, 2018**  
[dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.59](https://doi.org/10.2140/iig.2018.16.59)



## Sur les R-espaces

Jacques Tits

[21] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954), 850–852. Reused with permission.

THÉORIE DES GROUPEs. — *Sur les R-espaces*. Note (\*) de M. **JACQUES TITS**, présentée par M. Jean Leray.

On précise un résultat énoncé dans une Note précédente, et l'on étudie une catégorie d'applications des R-espaces dans des espaces projectifs.

Les R-espaces ont été définis dans une Note antérieure <sup>(1)</sup> dont nous pourrions ici la numérotation, et dont nous conserverons les notations. Les numéros renvoient à cette Note.

---

(<sup>3</sup>) *Fund. Math.*, **24**, 1935, p. 213-246.

(\*) Séance du 4 octobre 1954.

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, **239**, 1954, p. 466. Nous avons consacré à l'étude des R-espaces une partie d'un Mémoire déposé à la Faculté des Sciences de l'Université de Bruxelles le 4 mai 1954, et qui sera publié ultérieurement. Des recherches indépendantes de A. Borel et A. Weil ont conduit ces auteurs à des résultats recouvrant partiellement les nôtres (cf. *Séminaire Bourbaki*, mai 1954, exposé de J. P. Serre : plus particulièrement le théorème 3 qui est à rapprocher de la proposition du n° 5.1 de la présente Note).

SÉANCE DU 11 OCTOBRE 1954.

851

4. Parmi les conséquences des propositions du n° 2 énoncées au n° 3, nous avons indiqué que l'intersection de deux  $\alpha_3$ -plans distincts quelconques de l'espace  $E = E_6[\alpha_4]$  est un point, une  $V_1$ , une  $V_2$ , une  $V_3$  ou une  $V_4^m$ . On peut, par application des propositions 2.1 et 2.2, obtenir un résultat plus précis, à savoir, que l'intersection de deux  $\alpha_3$ -plans est toujours un point ou une  $V_4^m$ . En effet, il résulte des propositions en question que les  $\alpha_3$ -plans qui contiennent une  $V_1$  donnée  $\delta$  sont représentés par les points d'un espace projectif à quatre dimensions, une droite de cet espace représentant l'ensemble des  $\alpha_3$ -plans qui contiennent une  $V_4^m$  donnée passant par  $\delta$ . Notre affirmation exprime alors simplement le fait que dans cet espace projectif, deux points appartiennent toujours à une même droite.

5. *Plongements des R-espaces dans des espaces projectifs.* — 5.1. Soient  $G[\Pi]$  un R-espace donné et  $f$  une application biunivoque analytique (complexe) de  $G[\Pi]$  sur une sous-variété  $V$  d'un espace projectif complexe  $P$ , telle que toute transformation de  $V$  qui est l'image par  $f$  d'un élément  $g$  de  $G$ , considéré comme une transformation de  $G[\Pi]$ , s'étende en une projectivité  $\gamma$  de  $P$ . Supposons en outre que  $V$  ne soit contenue dans aucune sous-variété linéaire propre de  $P$ ; alors,  $\gamma$  est parfaitement déterminée par  $g$  et l'application  $\varphi: g \rightarrow \gamma$  est un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des projectivités de  $P$ , c'est-à-dire une représentation projective de  $G$ , que nous désignerons par  $f_G$ .

*Étant donné un homomorphisme analytique  $\varphi$  d'un groupe semi-simple complexe connexe  $G$  dans le groupe des projectivités d'un espace projectif complexe  $P$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un R-espace de la forme  $G[\Pi]$  et une application  $f$  de cet espace dans  $P$  jouissant des propriétés énoncées plus haut et telle qu'on ait  $\varphi = f_G$ , est que  $\varphi$  soit irréductible. Lorsqu'il en est ainsi,  $\Pi$  et  $f$  (donc aussi  $V$ ) sont univoquement déterminés par  $\varphi$ ; en particulier, si  $\rho$  est le poids dominant <sup>(2)</sup> de la représentation  $\varphi$   $\Pi$  se compose de toutes les racines simples  $\alpha_i$  telles que  $(\rho, \alpha_i) \neq 0$ , où  $(x, y)$  est la forme bilinéaire de Cartan de  $G$ .*

Il résulte de la proposition précédente et de la théorie des représentations linéaires des groupes semi-simples <sup>(3)</sup> que  $f$  est déterminée à une projectivité près par  $\rho$  ou ce qui revient au même, par les entiers  $a_i = 2(\rho, \alpha_i) / (\alpha_i, \alpha_i)$  ( $\alpha_i \in \Pi$ ), qui peuvent prendre indépendamment, pour les divers  $f$ , toutes les valeurs entières positives. Dans la suite, nous associerons à  $f$  le schéma numéroté obtenu à partir de la figure de Schläfli de  $G$  en indiquant auprès de chaque sommet représentant une racine simple  $\alpha_i \in \Pi$ , la valeur de l'entier  $a_i$  correspondant.

<sup>(2)</sup> Les poids dominants des représentations et les racines simples  $\alpha_i$  doivent être définis à partir d'une même sous-algèbre de Cartan et d'une même relation d'ordre dans cette sous-algèbre.

<sup>(3)</sup> É. CARTAN, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 41, 1913, p. 53-96; E. DYNKIN, *Mat. Sbornik*, 30, (72), 1952, p. 353.

52

ACADÉMIE DES SCIENCES.

5.2. Considérons à présent dans  $G[\Pi]$  un  $\Pi'$ -plan donné  $\varpi$  (cf. n° 1), et soit  $L$  la sous-variété linéaire de  $P$  sous-tendue par l'image de  $\varpi$  dans  $f$ .  $\varpi$  est un  $\mathbb{A}^1$ -espace (cf. n° 2.1) et la restriction  $f'$  de  $f$  à  $\varpi$ , considérée comme application de  $\varpi$  dans  $P'$ , jouit de toutes les propriétés de l'application  $f$  énoncées au début du n° 5.1.

*Le schéma numéroté associé à  $f'$  s'obtient en retirant du schéma numéroté associé à  $f$  les sommets correspondant aux racines simples appartenant à  $\Pi'$  (et en supprimant éventuellement du schéma ainsi obtenu, les composantes connexes dont aucun sommet n'est numéroté).*

5.3. *Exemple.* — Reprenons les notations du n° 3. L'espace  $E$  peut être appliqué dans un espace projectif à 26 dimensions au moyen d'une application dont le schéma numéroté associé est



Les images par  $f$  des  $\Pi'$ -plans de  $E$ , avec  $\Pi' = \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \{\alpha_4, \alpha_6\}, \alpha_1, \{\alpha_5, \alpha_6\}, \alpha_6$ , sont respectivement des hyperquadriques à huit dimensions et des variétés linéaires à une, deux, trois, quatre, quatre et cinq dimensions.

# Innovations in Incidence Geometry

[msp.org/iig](http://msp.org/iig)

## MANAGING EDITOR

Tom De Medts    Ghent University  
tom.demedts@ugent.be

Linus Kramer    Universität Münster  
linus.kramer@wwu.de

Klaus Metsch    Justus-Liebig Universität Gießen  
klaus.metsch@math.uni-giessen.de

Bernhard Mühlherr    Justus-Liebig Universität Gießen  
bernhard.m.muehlherr@math.uni-giessen.de

Joseph A. Thas    Ghent University  
thas.joseph@gmail.com

Koen Thas    Ghent University  
koen.thas@gmail.com

Hendrik Van Maldeghem    Ghent University  
hendrik.vanmaldeghem@ugent.be

## HONORARY EDITORS

Jacques Tits  
Ernest E. Shult †

## EDITORS

Peter Abramenko    University of Virginia

Francis Buekenhout    Université Libre de Bruxelles

Philippe Cara    Vrije Universiteit Brussel

Antonio Cossidente    Università della Basilicata

Hans Cuypers    Eindhoven University of Technology

Bart De Bruyn    University of Ghent

Alice Devillers    University of Western Australia

Massimo Giulietti    Università degli Studi di Perugia

James Hirschfeld    University of Sussex

Dimitri Leemans    Université Libre de Bruxelles

Oliver Lorscheid    Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

Guglielmo Lunardon    Università di Napoli “Federico II”

Alessandro Montinaro    Università di Salento

James Parkinson    University of Sydney

Antonio Pasini    Università di Siena (emeritus)

Valentina Pepe    Università di Roma “La Sapienza”

Bertrand Rémy    École Polytechnique

Tamás Szonyi    ELTE Eötvös Loránd University, Budapest

## PRODUCTION

Silvio Levy    (Scientific Editor)  
production@msp.org

---

See inside back cover or [msp.org/iig](http://msp.org/iig) for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US \$275/year for the electronic version, and \$325/year (+\$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

---

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY  
 **mathematical sciences publishers**  
nonprofit scientific publishing  
<http://msp.org/>  
© 2019 Mathematical Sciences Publishers

# Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1

2018

Complement to the Collected Works of  
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series *Heritage of European Mathematics*.

