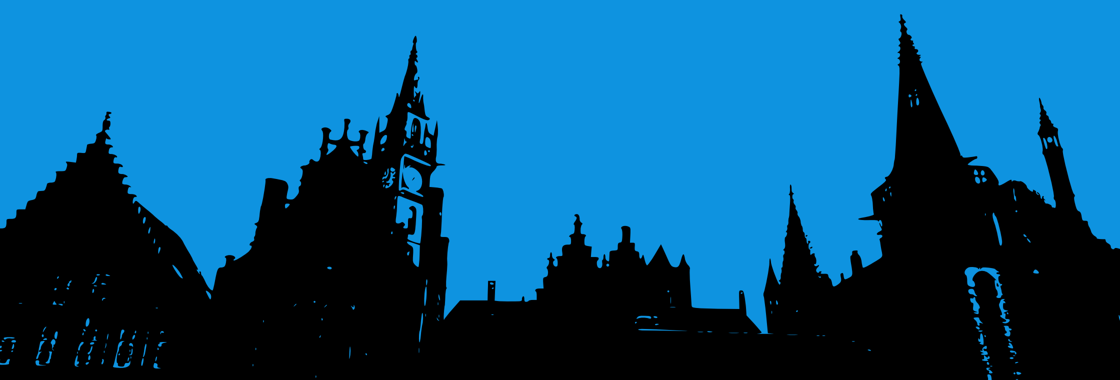
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Sur les R-espaces

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.59

msp

Sur les R-espaces

Jacques Tits

[21] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954), 850–852. Reused with permission.

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur les* R-*espaces*. Note (*) de M. **Jacques Tits**, présentée par M. Jean Leray.

On précise un résultat énoncé dans une Note précédente, et l'on étudie une catégorie d'applications des R-espaces dans des espaces projectifs.

Les R-espaces ont été définis dans une Note antérieure ([1]) dont nous poursuivrons ici la numérotation, et dont nous conserverons les notations. Les numéros renvoient à cette Note.

([3]) *Fund. Math.*, **24**, 1935, p. 213-246.

(*) Séance du 4 octobre 1954.

([1]) *Comptes rendus*, **239**, 1954, p. 466. Nous avons consacré à l'étude des R-espaces une partie d'un Mémoire déposé à la Faculté des Sciences de l'Université de Bruxelles le 4 mai 1954, et qui sera publié ultérieurement. Des recherches indépendantes de A. Borel et A. Weil ont conduit ces auteurs à des résultats recouvrant partiellement les nôtres (cf. *Séminaire Bourbaki*, mai 1954, exposé de J. P. Serre : plus particulièrement le théorème 3 qui est à rapprocher de la proposition du n° 5.1 de la présente Note).

4. Parmi les conséquences des propositions du n° 2 énoncées au n° 3, nous avons indiqué que l'intersection de deux α_5-plans distincts quelconques de l'espace $E = E_6[\alpha_1]$ est un point, une V_1, une V_2, une V_3 ou une V_4^m. On peut, par application des propositions 2.1 et 2.2, obtenir un résultat plus précis, à savoir, que l'intersection de deux α_5-plans est toujours un point ou une V_4^m. En effet, il résulte des propositions en question que les α_5-plans qui contiennent une V_1 donnée δ sont représentés par les points d'un espace projectif à quatre dimensions, une droite de cet espace représentant l'ensemble des α_5-plans qui contiennent une V_4^m donnée passant par δ. Notre affirmation exprime alors simplement le fait que dans cet espace projectif, deux points appartiennent toujours à une même droite.

5. *Plongements des* R-*espaces dans des espaces projectifs.* — 5.1. Soient $G[\Pi]$ un R-espace donné et f une application biunivoque analytique (complexe) de $G[\Pi]$ sur une sous-variété V d'un espace projectif complexe P, telle que toute transformation de V qui est l'image par f d'un élément g de G, considéré comme une transformation de $G[\Pi]$, s'étende en une projectivité γ de P. Supposons en outre que V ne soit contenue dans aucune sous-variété linéaire propre de P; alors, γ est parfaitement déterminée par g et l'application $\varphi : g \to \gamma$ est un homomorphisme de G dans le groupe des projectivités de P, c'est-à-dire une représentation projective de G, que nous désignerons par f_G.

Étant donné un homomorphisme analytique φ d'un groupe semi-simple complexe connexe G *dans le groupe des projectivités d'un espace projectif complexe* P, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un* R-*espace de la forme* $G[\Pi]$ *et une application f de cet espace dans* P *jouissant des propriétés énoncées plus haut et telle qu'on ait $\varphi = f_G$, est que φ soit irréductible. Lorsqu'il en est ainsi,* Π *et f (donc aussi* V*) sont univoquement déterminés par φ; en particulier, si ρ est le poids dominant* (²) *de la représentation φ* Π *se compose de toutes les racines simples α_i telles que $(\rho, \alpha_i) \neq 0$, où (x, y) est la forme bilinéaire de Cartan de* G.

Il résulte de la proposition précédente et de la théorie des représentations linéaires des groupes semi-simples (³) que f est déterminée à une projectivité près par ρ ou ce qui revient au même, par les entiers $a_i = 2(\rho, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i)$ $(\alpha_i \in \Pi)$, qui peuvent prendre indépendamment, pour les divers f, toutes les valeurs entières positives. Dans la suite, nous associerons à f le schéma numéroté obtenu à partir de la figure de Schläfli de G en indiquant auprès de chaque sommet représentant une racine simple $\alpha_i \in \Pi$, la valeur de l'entier a_i correspondant.

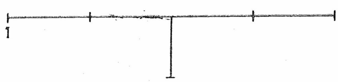
(²) Les poids dominants des représentations et les racines simples α_i doivent être définis à partir d'une même sous-algèbre de Cartan et d'une même relation d'ordre dans cette sous-algèbre.

(³) É. Cartan, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 41, 1913, p. 53-96; E. Dynkin, *Mat. Sbornik*, 30, (72), 1952, p. 353.

5.2. Considérons à présent dans G[Π] un Π′-plan donné ϖ(cf. n° 1), et soit I
a sous-variété linéaire de P sous-tendue par l'image de ϖ dans f. ϖ est u
ι-espace (*cf.* n° 2.1) et la restriction f' de f à ϖ, considérée comme applic
ion de ϖ dans P′, jouit de toutes les propriétés de l'application f énoncées a
lébut du n° 5.1.

*Le schéma numéroté associé à f' s'obtient en retirant du schéma numéroté ass
ié à f les sommets correspondant aux racines simples appartenant à* Π′ (*et e
upprimant éventuellement du schéma ainsi obtenu, les composantes connexes do
ucun sommet n'est numéroté*).

5.3. *Exemple.* — Reprenons les notations du n° 3. L'espace E peut êt
ppliqué dans un espace projectif à 26 dimensions au moyen d'une application
lont le schéma numéroté associé est



Les images par f des Π′-plans de E, avec $\Pi' = \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \{\alpha_4, \alpha_6\}, \alpha$
$\alpha_5, \alpha_6\}, \alpha_6$, sont respectivement des hyperquadriques à huit dimensions e
es variétés linéaires à une, deux, trois, quatre, quatre et cinq dimensions.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.