Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

Espaces homogènes et isotropes de la relativité

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.63

msp

Espaces homogènes et isotropes de la relativité

Jacques Tits

[25] Originally published in *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie / Cinquantenaire de la théorie de la relativité / Jubilee of relativity theory*, Verhandlungen – Actes – Proceedings, Bern, 11.–16. Juli 1955 = *Helv. Phys. Acta*, Suppl. IV, Birkhäuser Verlag, Basel (1956), 46–47. Reused with permission.

Espaces homogènes et isotropes de la Relativité

par J. TITS (Bruxelles)

1. Soit V_4 une variété à 4 dimensions munie d'une métrique de RIEMANN de signature $+ - - -$. V_4 est *homogène* si elle possède un groupe transitif d'isométries. Nous dirons qu'elle est *isotrope* (sous-entendu: pour les directions lumineuses) en un point p donné si les isométries conservant p sont transitives sur les directions lumineuses ($ds^2 = 0$) issues de ce point; on peut voir que cette condition est équivalente à la suivante (*isotropie d'espace*): il existe en p un élément plan ω à 3 dimensions de genre espace tel que les isométries conservant p et ω soient transitives sur les directions issues de p dans ω.

2. Les seules V_4 homogènes et isotropes sont

l'espace de de SITTER D_4, c'est-à-dire l'extérieur d'une hyperquadrique de signature $+ - - - -$ dans l'espace projectif P_4 à 4 dimensions muni de la métrique cayleyenne, et son revêtement double $D_4^{(2)}$;

l'«intérieur» C_4 d'une hyperquadrique de signature $+ + - - -$ dans P_4 muni de la métrique cayleyenne, et ses divers revêtements (revêtements finis $C_4^{(n)}$ et revêtement universel $C_4^{(\infty)}$);

les produits $M_4 = K_3 \cdot L$, où K_3 est un espace euclidien E_3, elliptique F_3, sphérique S_3 ou hyperbolique H_3 à 3 dimensions, et où L est l'ensemble R des nombres réels ou l'ensemble R_a des nombres réels modulo a (a donné), M_4 étant muni de la métrique $-ds_K^2 + dt^2$, où ds_K est la métrique sur K_3 et t est une variable dans L (en particulier, $E_3 \cdot R$ est l'espace de MINKOWSKI);

l'espace A_4 des variables x, y, z, t muni de la métrique $-a^t \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$ (identique à l'espace de de SITTER dont on a retiré un hyperplan tangent à l'absolu);

l'espace B_4 obtenu à partir de $S_3 \cdot R_a$ défini plus haut en identifiant les couples de points «diamétralement opposés» (p, t) et $(p', t + a/2)$ (p et p' = points diamétralement opposés sur S_3).

3. Parmi les espaces précités, seuls D_4, $D_4^{(2)}$, $C_4^{(\infty)}$, $K_3 \cdot R$ et A_4 sont infinis dans le sens du temps (non-existence de ligne de temps fermée).

4. Des définitions de l'homogénéité et de l'isotropie analogues à celles du n^0 1 peuvent être données pour les variétés V_4 munies seulement d'un champ de cônes quadratiques $ds^2 = 0$ de signature $+ - - -$, en remplaçant les isométries par les transformations conservant ce champ (transformations conformes). Les espaces homogènes et isotropes ainsi définis sont, en plus de ceux obtenus par abstraction à partir des espaces du n^0 2, l'«espace de MINKOWSKI conforme» (surface d'une hyperquadrique de signature $+ + - - - -$ dans l'espace projectif P_5) et ses divers revêtements (finis et universels).

5. En recherchant les V_3 riemanniennes de signature $+ - -$ qui sont homogènes et isotropes dans un sens analogue à celui du n^0 1, on trouve, outre les équivalents tridimensionnels des espaces du n^0 2, des espaces nouveaux $N(K_2, L, b)$ qui peuvent être caractérisés comme suit: $N(K_2, L, b)$ est fibré de base $K_2 = E_2$, S_2 ou H_2 (cf. n^0 2) et de fibre $L = R$ ou R_a, et si U désigne un voisinage de coordonnées dans K_2, la métrique de N dans $U \cdot L$ est donnée par $ds^2 = -ds_K^2 + (dt + b\,\varphi_K)^2$, où b est une constante donnée et φ_K est une forme de PFAFF dans U dont l'intégrale le long de la frontière d'un domaine quelconque mesure l'aire de ce domaine. Lorsque $K_2 = S_2$, on doit avoir $L = R_a$, et a/b doit être un sous-multiple de l'aire totale de K_2.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.