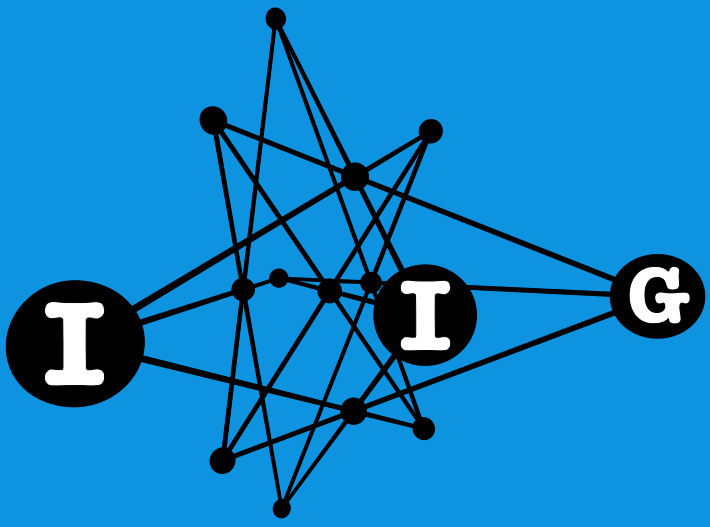
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Sur les groupes algébriques affins : théorèmes fondamentaux de structure ; classification des groupes semisimples et géométries associées

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.79

msp

Sur les groupes algébriques affins : théorèmes fondamentaux de structure ; classification des groupes semisimples et géométries associées

Jacques Tits

[39] Originally published in *Gruppi, anelli di Lie e teoria della coomologia, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Saltino di Vallombrosa, 31 agosto – 8 settembre 1959*, Istituto Matematico dell'Università, Roma (1960). Reused with permission.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E.)

J. T I T S

SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES AFFINS.
THEOREMES FONDAMENTAUX DE STRUCTURE.
CLASSIFICATION DES GROUPES SEMISIMPLES ET GEOMETRIES ASSOCIEES

ROMA - Istituto Matematico dell'Università - 1960

- I -

J.Tits

AVANT-PROPOS

Les notes qui suivent reprennent, dans l'essentiel, la matière de huit leçons faites au C.I.M.E. en septembre 1959, et concernant principalement les résultats fondamentaux de A.Borel sur la structure des groupes algébriques affines (nous dirons "affins") [2], les importants travaux de C.Chevalley donnant la classification des groupes semi-simples [4], et des recherches de l'auteur relatives à l'interprétation géométrique de ces groupes (cf. la bibliographie). Celles-ci ont déterminé, dans une assez large mesure, la perspective dans laquelle se place l'ensemble de l'exposé et le choix des résultats qui en font l'objet.

Il n'était pas possible, dans ce cadre restreint, de donner des démonstrations complètes de tous les résultats énoncés, ni même de la majeure partie d'entre eux [(1)]. Les démonstrations, détaillées ou seulement esquissées, que comporte l'exposé, ont généralement pour but - surtout aux chapitres III et IV - de faire apparaître des liens entre les divers résultats, plutôt que d'établir ceux-ci à partir de "choses connues". Nous avons ainsi été amenés, lorsque cela nous paraissait profitable à la clarté de l'exposé, à adopter un ordre de présentation des propriétés parfois très différent de celui qui conviendrait à un traitement plus strictement déductif.

---

(1) Pour les résultats dûs à A.Borel et à C.Chevalley, des démonstrations complètes peuvent être trouvées dans les articles cités. En ce qui concerne les résultats obtenus par l'auteur, on peut aussi se reporter aux articles mentionnés dans la bibliographie, bien que ceux-ci ne renferment que des indications assez incomplètes; un exposé d'ensemble de ces résultats est en préparation.

- II -

J. Tits

Dans l'ensemble, nous nous sommes surtout attachés à faire ressortir l'aspect "groupal", plutôt que l'aspect algébro-géométrique, des questions étudiées. En particulier, il nous est arrivé de passer sous silence certaines difficultés, spécifiquement algébro-géométriques, en admettant notamment comme "intuitivement évidentes" des propriétés qui, en fait, sont difficiles à établir, au moins en caractéristique p. De façon générale, l'exposé a été conçu en fonction d'auditeurs familiers avec la géométrie algébrique "classique".

L'exposé oral se terminait par un aperçu très bref de généralisations relatives notamment au cas d'un corps non algébriquement clos, et à la possibilité d'associer des classes de géométries à tout diagramme formé de sommets reliés deux à deux par des traits de multiplicités arbitraires. Il n'a pas paru utile de le reprendre ici. On trouvera en effet dans [9] et [10] des indications déjà plus détaillées, quoique encore très générales, sur ces questions.

Le chapitre IV du présent texte a été rédigé alors que les trois premiers chapitres étaient déjà polycopiés. Il en résulte quelques incohérences dans les notations et la terminologie, qui ne semblent toutefois pas devoir compromettre la bonne compréhension de l'exposé.

Nous sommes heureux d'exprimer notre reconnaissance aux responsables du C.I.M.E., et particulièrement à M. le professeur G. Zappa, pour l'aimable invitation qu'ils nous ont adressée et pour la patience dont ils ont fait preuve dans l'attente - fort longue - du présent texte. Une première rédaction de celui-ci, due à MM. V. Checcucci, F. Gherardelli et V. Villani, nous a été fort utile; nous les en remercions très sincèrement.

- III -

J.Tits

TABLE DES MATIERES.

Chap.I. GENERALITES SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES. pag. 1

§ 1. Notions introductives. " 1

§ 2. Sous-groupes. " 2

§ 3. Sous-groupes invariants. " 4

§ 4. Variétés abéliennes et groupes affins. " 11

Chap.II. LES GROUPES AFFINS: THEOREMES DE STRUCTURE; SOUS-GROUPES DE BOREL. " 16

§ 1. Préliminaires: compléments aux propositions 1 et 3. " 16

§ 2. Groupes algébriques de transformations d'une variété complète. " 16

§ 3. Structure des groupes affins résolubles connexes. " 18

§ 4. Sous-groupes de Borel. Radical. " 21

Chap.III. SOUS-GROUPES CONTENANT UN SOUS-GROUPE DE BOREL, I. CLASSIFICATION DES GROUPES SEMI-SIMPLES. " 26

§ 1. Remarque préliminaire. " 26

§ 2. Premier exemple: le groupe projectif PGl (n+1,k). " 26

§ 3. Deuxième exemple: le groupe projectif orthogonal PO(n+1,k) (groupe d'une hyperquadrique). " 29

§ 4. Le treillis des sous-groupes contenant un sous-groupe de Borel. Troisième exemple: les produits directs. " 32

§ 5. Classification des groupes semi-simples. " 35

Chap.IV. SOUS-GROUPES CONTENANT UN SOUS-GROUPE DE BOREL, II. GEOMETRIES ASSOCIEES. " 45

§ 1. Définitions. Interprétation géométrique des groupes "semi-simples". " 45

§ 2. Drapeaux et sous-groupes de Borel. " 50

§ 3. Géométrie associée et schéma de Dynkin. " 55

§ 4. Le point de vue spatial. " 64

BIBLIOGRAPHIE. " 74

J.Tits

CHAPITRE I

GÉNERALITES SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES

§1. NOTIONS INTRODUCTIVES

Soit k un corps algébriquement clos.

On appellera *variété* (algébrique) une variété algébrique projective (complète) définie sur k dont on a éventuellement retranché des sous-variétés (complètes) en nombre fini (cas particulier : les variétés affines)[1]. La *topologie de Zariski* sur une variété V est celle qui a pour fermés les sous-variétés de V relativement complètes (i.e. intersections de V avec des variétés complètes); c'est la moins fine parmi les topologies telles que les fonctions rationnelles à valeur dans k (en général définies seulement en dehors de certaines sous-variétés) soient continues, k étant muni de la topologie dont les ouverts non vides sont les complémentaires des ensembles finis.

Un *groupe algébrique* est une variété V dotée d'une structure de groupe telle que les applications

$$V \times V \longrightarrow V \qquad \text{donnée par} \qquad (a,b) \longrightarrow ab$$

et

$$V \longrightarrow V \qquad \text{donnée par} \qquad a \longrightarrow a^{-1}$$

soient rationnelles. Si V est complète, le groupe algébrique est appelé une *variété abélienne*; on verra que dans ce cas, la

(1) On pourrait plus généralement considérer des variétés abstraites, mais, pour notre propos, la plus grande généralité ainsi obtenue serait illusoire, en vertu de résultats de I. Barsotti [1] et W.L.Chow [3].

structure de groupe est nécessairement commutative (cf. §4).

Exemples de groupes algébriques :

a) Tous les groupes finis.

b) $k^{\times}$, groupe multiplicatif de k.

c) k^{+}, groupe additif de k.

d) Une cubique plane projective Γ, de genre 1, dotée de la structure de groupe suivante: soit O un point fixe de Γ ; A, B étant deux points quelconques de Γ, on note P le point de Γ aligné avec A et B, et on définit comme somme A + B le point de Γ aligné avec O et P (cf. fig. 1).

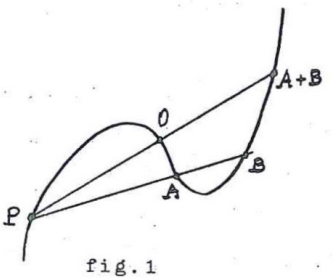


fig. 1

e) Gl(n,k), groupe linéaire de l'espace vectoriel de dimension n, sur k.

f) Sl(n,k), groupe linéaire spécial.

g) PGl(n,k), groupe projectif de l'espace projectif de dimension n-1, sur k.

h) O(n,k), groupe orthogonal.

i) Tous sous-groupe de PGl(n,k) caractérisé par le fait de laisser invariante une variété, une correspondance,..., algébrique.

§2. SOUS-GROUPES

Dans un groupe topologique, un sous-groupe V localement fermé, c'est-à-dire intersection d'un ouvert et d'un fermé, est fermé. En effet, soient $\bar{V}$ sont adhérence et a un élément de $\bar{V}$. V est relativement ouvert (par hypothèse) et partout dense dans $\bar{V}$. Il en est de même (par translation dans le groupe) de aV. Par conséquent,

$V \cap aV \neq \emptyset$. Soit $x \in V \cap aV$. On a $x \in V$ et $a^{-1}.x \in V$, d'où $a = x.(a^{-1}.x)^{-1} \in V$. Ce résultat s'applique en particulier aux groupes algébriques avec topologie de Zariski; les sous-ensembles localement fermés sont alors les sous-variétés non nécessairement relativement complètes, donc

PROPOSITION 1. *Un sous-groupe d'un groupe algébrique qui est en même temps une sous-variété algébrique est une sous-variété relativement complète (i.e. est fermé pour la topologie de Zariski).*

(Rappelons, à titre de comparaison, qu'un sous-groupe analytique d'un groupe analytique n'est pas nécessairement fermé).

On sait que si G est un groupe topologique et H un sous-groupe fermé, l'espace homogène quotient G/H a une structure topologique naturelle, à savoir, la plus fine des topologies telles que la projection canonique

$$p : G \longrightarrow G/H$$

soit continue. (L'existence d'une topologie sur G/H telle que p soit continue caractérise d'ailleurs les sous-groupes fermés; c'est une des raisons de l'importance de ceux-ci). De plus, G opère continûment sur G/H, c'est-à-dire que l'application canonique

$$\pi : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

est continue. On a un résultat analogue pour les groupes algébriques :

PROPOSITION 2. *Soient* G *un groupe algébrique et* H *un sous-groupe fermé. L'espace quotient* G/H *a une structure naturelle de variété algébrique, caractérisée par la propriété que les fonctions rationnelles sur cette variété ont pour images réciproques, relativement à l'application canonique*

$$p : G \longrightarrow G/H ,$$

toutes les fonctions rationnelles sur G *qui sont constantes sur les classes latérales de* H *(images réciproques des points de* G/H*). Avec cette structure,* p *est rationnelle, et il en est de même de l'application canonique*

$$\pi : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

(i.e. G *"opère rationnellement" sur* G/H*).*

Une étape essentielle de la démonstration (1) (que nous ne donnons pas) consiste à montrer que les fonctions rationnelles constantes sur les classes latérales de H sont en "nombre suffisant" pour "séparer" les points de G/H, c'est-à-dire qu'il existe une fonction prenant des valeurs distinctes sur deux classes latérales données arbitrairement.

§3. SOUS-GROUPES INVARIANTS

3.1. GENERALITES.

PROPOSITION 3. *Soient* G *un groupe algébrique et* H *un sous-groupe fermé invariant. Alors le groupe* G/H*, avec la structure de variété algébrique dont il est question dans la proposition* 2*, est un groupe algébrique.*

C'est une conséquence de la proposition 2. Considérons par exemple l'application

$$G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$

---

(1) Etant donné que nous nous sommes restreints à priori à la considération de variétés projectives, la proposition 2 groupe en fait deux théorèmes habituellement séparés dans la littérature, le premier affirmant que G/H est une variété abstraite - c'est à ce premier point que se rapporte notre remarque sur "une étape essentiel-

./.

définissant la structure de groupe de G/H. Pour montrer qu'elle est rationnelle, il suffit de montrer que l'image réciproque d'une fonction rationnelle de G/H est une fonction rationnelle de $G/H \times G/H$, ce qui se déduit facilement du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \longrightarrow & G/H \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & G/H \times G/H & \end{array}$$

Lorsqu'on parle d'*homomorphismes* de groupes algébriques, il s'agit toujours d'homomorphismes des structures de groupes qui sont en même temps des applications rationnelles.

Dans le cas des groupes "abstraits", on sait que si on a un épimorphisme (homomorphisme surjectif) d'un groupe G sur un groupe G', G' est isomorphe au quotient de G par le noyau de l'épimorphisme. La même chose est vraie par exemple pour les groupes de Lie. Elle l'est aussi pour les groupes algébriques, *mais seulement en caractéristique* 0 :

PROPOSITION 4. *Soient* k *un corps de caractéristique* 0, G, G' *deux groupes algébriques et* $\phi : G \longrightarrow G'$ *un épimorphisme. Alors* Ker.ϕ *(noyau de* ϕ*) est fermé et l'application canonique* $G/\mathrm{Ker}.\phi \longrightarrow G'$ *est un isomorphisme de groupes algébriques. En particulier, tout homomorphisme bijectif (i.e. biunivoque) est un isomorphisme.*

En caractéristique p, la situation est bien différente ainsi que le montrent les exemples suivants.

---

le..." - et le second, théorème difficile de W.L.Chow [3], établissant que cette variété est projective.

- 6 -

J.Tits

EXEMPLES :

1. Soit k de caractéristique p. L'application

$$x \longrightarrow x^p \qquad (x \in k)$$

de la droite affine sur elle-même, est bijective et rationnelle, mais non birationnelle.

2. Soient k de caractéristique 2, Γ une conique et θ_Γ le groupe projectif de cette conique (groupe projectif orthogonal). Les tangentes à Γ passent toutes par un même point P, et peuvent de ce fait être considérées abstraitement comme les points d'une droite projective γ; soit θ_γ le groupe projectif de cette droite. θ_Γ opère sur les tangentes à Γ, donc sur γ, ce qui établit un isomorphisme entre les groupes abstraits θ_Γ et θ_γ, lequel est rationnel seulement dans le sens $\theta_\Gamma \longrightarrow \theta_\gamma$ (de même que la bijection $\Gamma \longrightarrow \gamma$ définie par la projection à partir de P est rationnelle mais non birationnelle). Par ailleurs, il faut noter que, Γ étant birationnellement équivalente à une droite projective, les groupes θ_Γ et θ_γ sont aussi isomorphes en tant que groupes algébriques, c'est-à-dire qu'on a affaire ici, comme dans l'exemple précédent, à un *endomorphisme rationnel et bijectif, mais non birationnel,* d'un groupe algébrique. L'exemple suivant, par contre, concerne deux groupes non isomorphes en tant que groupes algébriques.

3. Cet exemple est une généralisation du précédent. Soient k de caractéristique 2, Γ une hyperquadrique dans un espace projectif de dimension paire 2m, θ_Γ le groupe projectif de cette hyperquadrique (groupe projectif orthogonal).

Les hyperplans tangents à Γ passent tous par un même point P. Les droites passant par ce point peuvent être vues abstraitement

comme les points d'un espace projectif γ à 2m-1 dimension. θ_Γ opère sur γ et on peut voir qu'il induit sur γ le groupe projectif symplectique PSp(2m), ce qui établit un homomorphisme (rationnel) bijectif $\theta_\Gamma \longrightarrow PSp(2m)$. Les groupes θ_Γ et PSp(2m) ne sont pas birationnellement isomorphes.

3.2. COMPOSANTE CONNEXE DE L'ELEMENT NEUTRE.

La variété sous-jacente d'un groupe algébrique G est homogène c'est-à-dire qu'elle possède un groupe transitif de transformations birationnelles et birégulières (à savoir, par exemple, le groupe des translations à gauche $x \longrightarrow xa$). Il s'ensuit en particulier que ses composantes irréductibles sont disjointes, donc ouvertes pour la topologie de Zariski, et que ce sont par conséquent aussi les composantes connexes de G. Parmi elles, la composante qui contient l'élément neutre est un sous-groupe invariant de G; c'est le plus petit sous-groupe invariant G_0 tel que G/G_0 soit discret, donc fini (puisque algébrique).

3.3. GROUPE DERIVE'.

Le *dérivé* G' d'un groupe G est le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $x.y.x^{-1}.y^{-1}$ $(x, y \in G)$; c'est le plus petit sous-groupe invariant H tel que G/H soit commutatif. Le *dérivé topologique* $\overline{G'}$ d'un groupe topologique G est l'adhérence de son dérivé G'; c'est le plus petit sous-groupe invariant fermé H tel que G/H soit commutatif. Nous verrons plus loin (proposition 5) que dans le cas d'un groupe G algébrique, les deux notions coïncident, c'est-à-dire que le dérivé G' est toujours fermé. Il n'en est pas de même pour les groupes topologiques en général, ni même pour les groupes de Lie, ainsi que le montre l'exemple suivant.

- 8 -

J.Tits

Exemple d'un groupe de Lie dont le dérivé n'est pas fermé.

Soit H un groupe de Lie qui soit son propre dérivé ($H = \overline{H'}$), et dont le centre C(H) renferme un sous-groupe isomorphe au groupe additif Z des entiers (exemple: le revêtement universel de PSl(2,R), groupe projectif de la droite réelle), et soit c le générateur d'un tel sous-groupe, c'est-à-dire un élément non périodique de C(H). Désignons par $T = R/Z$ le groupe des nombres réels mod. 1, et par t un élément non périodique de ce groupe (i.e. un nombre irrationnel mod. 1). Considérons dans le produit $H \times T$ le sous-groupe Γ formé par les éléments (c^i, t^i) $(i \in Z)$, et posons $G = (H \times T)/\Gamma$. Soit

$$\phi : H \times T \longrightarrow G$$

l'homomorphisme canonique de $H \times T$ sur G. Le dérivé G' de G est l'image par ϕ du dérivé de $H \times T$, c'est-à-dire de $H \times \{0_T\}$ où 0_T représente l'élément neutre de T. Je dis que G' est partout dense dans G ($\overline{G'} = G$) sans être G lui-même ($G' \neq G$). Pour l'établir, il suffit de montrer que $\phi^{-1}(G')$ est partout dense dans $H \times T$ sans être $H \times T$ lui-même. Or on a, en désignant par Δ le sous-groupe partout dense de T engendré par t,

$$\phi^{-1}(G') = \phi^{-1}(\phi(H \times \{0_T\})) = (H \times \{0_T\}).\Gamma = H \times \Delta ,$$

d'où la proposition résulte immédiatement.

PROPOSITION 5. *Le dérivé* G' *d'un groupe algébrique* G *est fermé* ($G' = \overline{G'}$).

On supposera pour commencer que G est connexe. Soit

$$\phi : G \times G \longrightarrow G ,$$

l'application donnée par

$$(x,y) \longrightarrow x.y.x^{-1}.y^{-1}.$$

Posons $\phi(G) = U$. On a $U^{-1} = U$. Considérons la suite

$$U \subseteq U^2 \subseteq U^3 \subseteq \ldots \subseteq U^n \subseteq \ldots \subseteq U^\infty = \bigcup U^n = G' ,$$

où $U^n = U.U^{n-1}$ (au sens de la multiplication des parties dans un groupe). La dimension [1] des U^i est croissante, donc stationnaire à partir d'une certaine valeur n de i. Mais alors, $\overline{G'}$ étant un sous-groupe fermé connexe (donc irréductible) de G, on doit avoir pour tout $n \geq i$, $\overline{U^i} = \overline{G'}$. Cela étant, nous allons montrer que $U^{2n} = \overline{G'}$, d'où $G' = \overline{G'}$. En effet, soit $a \in \overline{G'}$. L'ensemble U^n, dont l'adhérence est $\overline{G'}$, renferme une sous-variété relativement ouverte et partout dense dans $\overline{G'}$ (cf. la note au bas), et il en est de même de aU^n. Par conséquent, $U^n \cap aU^n \neq \emptyset$. Soit $x \in U^n \cap aU^n$. On a $x \in U^n$ et $a^{-1}.x \in U^n$, d'où $a = x.(a^{-1}.x)^{-1} \in U^{2n}$. (On notera que ce raisonnement est tout à fait analogue à celui par lequel a été établie la proposition 1).

Pour démontrer la proposition dans le cas où G n'est pas con-

---

(1) L'ensemble U^i n'est généralement pas une sous-variété (i.e. une partie localement fermée) de G, cependant - et c'est ce qui permet de parler de sa dimension - il est toujours la réunion d'une sous-variété et d'une partie de l'adhérence de celle-ci; cela résulte du fait que l'image d'un tel ensemble (et en particulier d'une variété) par une application rationnelle est encore un ensemble de ce type. Un exemple d'une variété dont l'image par une application rationnelle n'est plus une variété est fourni par une quadrique privée d'un de ses points P, et projetée de ce point sur un plan ne passant pas par P; l'image est ici un plan affin plus deux points à l'infini de ce plan. Il y a lieu de noter, cependant, que l'image d'une variété *complète* par une application rationnelle est une variété (complète); cela résulte de ce qu'on vient de voir, et du fait que cette image est fermée (comme image continue d'un espace compact).

nexe, on utilise le lemme suivant (qui ne sera pas démontré ici):

LEMME 1 (R.BAER) : *Soient* G *un groupe et* G_0 *un sous-groupe invariant d'indice fini de* G. *Le groupe* (G, G_0), *engendré par les commutateurs* $x.y.x^{-1}.y^{-1}$ ($x \in G$, $y \in G_0$), *est un sous-groupe d'indice fini de* $G' = (G,G)$.

Dans le cas qui nous occupe, G_0 sera la composante connexe de l'élément neutre de G. Désignons par G_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) les autres composantes connexes de G et posons

$$V_i = \phi(G_0 \times G_i) = \{x.y.x^{-1}.y^{-1} \mid x \in G_0,\ y \in G_i\}\ ,\ (i = 0,1,..,r)$$

$$V = V_0 \cdot V_1 \cdot \ldots \cdot V_r$$

$$U = V.V^{-1}\ .$$

En procédant exactement comme dans le cas connexe, on montre que, pour m suffisemment élevé, $U^m = (G, G_0)$, et que ce groupe est fermé dans G. Il en est donc de même de $G' = (G,G)$ qui, en vertu du lemme précédent, est constitué d'un nombre fini de classes latérales de (G,G_0). Ce qui achève la démonstration.

De la proposition 5, on déduit par récurrence que tous les termes de la suite des dérivés successifs

$$(1) \qquad G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \ldots \supseteq G^{(n)} \supseteq \ldots \qquad (G^{(n)} = G^{(n-1)}, G^{(n-1)}))$$

d'un groupe algébrique G, sont des sous-groupes fermés de G. Utilisant un résultat de R.Baer un peu plus fort que le lemme ci-dessus, on peut montrer qu'il en est de même des termes de la suite centrale descendante

$$(2) \qquad G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq \ldots \qquad (G_n = (G, G_{n-1}))\ .$$

(De façon générale, le commutateur (A,B) de deux sous-groupes in-

variants fermés A,B d'un groupe algébrique, est fermé). Rappelons qu'un groupe est dit *résoluble* (resp. *nilpotent*) si tous les termes de la suite (1) (resp.(2)) sont réduits à l'élément neutre à partir d'un certain rang.

3.4. CENTRE.

Il est clair que le centre d'un groupe algébrique (ou, plus généralement, d'un groupe topologique quelconque) est un sous-groupe fermé.

La proposition suivante est valable quel que soit le groupe topologique G connexe, donc en particulier si G est un groupe algébrique connexe :

PROPOSITION 6. *Soit* G *un groupe connexe. Tout sous-groupe invariant discret (i.e. fini, dans le cas algébrique) de* G *est central.*

En effet, soit en H un tel sous-groupe, h un élément fixe quelconque de H, et $\phi : G \longrightarrow H$ l'application continue définie par

$$\phi(g) = g.h.g^{-1}.h^{-1} \qquad (g \in G) .$$

G étant connexe et H étant discret, $\phi(G)$ doit être réduite à un point, or $\phi(e) = e$ (si e désigne l'élément neutre de G), donc $\phi(G) = e$, c'est-à-dire que $g.h.g^{-1}.h^{-1} = e$ pour tout g, c.q.f.d.

§4. VARIETES ABELIENNES ET GROUPES AFFINS

Un groupe algébrique G est appelé *variété abélienne* si la variété algébrique sous-jacente est une variété complète connexe, et *groupe affin* si c'est une variété affine, c'est-à-dire une sous-variété fermée (i.e. relativement complète) d'un espace affin. La théorie des variétés abéliennes et la théorie des groupes af-

fins apparaissent à divers égards comme complémentaires l'une de l'autre; en particulier, alors que la première relève principalement de la géométrie algébrique, son contenu "groupal" étant réduit à peu de chose (théorème 1 ci-dessous), la seconde est surtout intéressante au point de vue de la théorie des groupes (théorème 3); d'autre part, tout groupe algébrique connexe se "décompose" en une "partie abélienne" et une "partie affine" (théorème 4). L'étude des groupes affins n'est autre que celle des groupes algébriques linéaires (théorème 2).

THEOREME 1. *Les variétés abéliennes sont des groupes commutatifs.*

En effet, soit en G une variété abélienne de dimension r et

$$\phi : G \times G \longrightarrow G \times G$$

l'application donnée par

$$\phi(x,y) = (x, y^{-1}.x.y)$$

Soit $U = \phi(G \times G)$. U contient évidemment la diagonale Δ de $G \times G$ (il suffit de faire $y = e$ = élément neutre); en particulier $\dim U \geq r$. De plus, U, image d'une variété complète par une application rationnelle, est une variété complète. Considérons dans $G \times G$ la sous-variété $\{e\} \times G$, de dimension r. On vérifie immédiatement que l'intersection $U \cap (\{e\} \times G)$ se réduit au point (e,e), d'où il résulte, pour raisons de dimension, que $\dim U \leq r$ [(1)]. Par conséquent $\dim U = r$, et comme U est irréductible, $U = \Delta$, d'où $x = y^{-1}.x.y$ pour tout x et tout y, c.q.f.d.

THEOREME 2. *Un groupe algébrique est affin si et seulement s'il possède une représentation linéairement birationnelle, c'est-à-dire*

(1) On utilise le "Théorème de dimension" d'après lequel, si deux sous-variétés U et V d'une variété W ont en commun un point simple de W, $\dim (U \cap V) + \dim W \geq \dim U + \dim V$.

J.Tits

s'il est isomorphe (en tant que groupe algébrique) à un sous-groupe fermé d'un Gl(n,k). *En d'autres termes, il y a identité entre les deux notions de groupe algébrique affin, et de groupe algébrique linéaire.*

DEMONSTRATION. Remarquons d'emblée que Gl(n,k), donc aussi tout sous-groupe fermé de Gl(n,k), est un groupe affin. En effet, on obtient une réalisation de Gl(n,k) comme sous-variété fermée d'un espace affin de dimension $n^2 + 1$, en représentant la matrice $||x_{ij}|| \in Gl(n,k)$ ($\det ||x_{ij}|| \neq 0$) par le point de coordonnées $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}, z)$, avec

$$z = \frac{1}{\det ||x_{ij}||}.$$

Réciproquement, nous allons montrer que tout groupe affin G possède une représentation (birationnelle) sur un sous-groupe fermé d'un Gl(N,k). Par hypothèse, G est une sous-variété fermée d'un espace affin dont nous désignerons la dimension par n , et dans lequel nous choisirons un système de coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (les ξ_i sont des fonctions rationnelles sur G). Pour tout élément $g \in G$, la "translation à droite"

$$x \longrightarrow g^{-1}.x$$

transforme toute fonction rationnelle f de G en une fonction fg définie $fg(x) = f(gx)$ ($x \in G$). Si on désigne par $\gamma(g)$: $f \longrightarrow fg$ l'automorphisme ainsi défini de l'espace vectoriel des fonctions rationnelles de G, $\gamma : g \longrightarrow \gamma(g)$ est une représentation linéaire (de dimension infinie) de G. Considérons à présent l'espace vectoriel engendré par toutes les fonctions $\xi_i g$ ($i = 1, \ldots, n$; $g \in G$), c'est-à-dire le plus petit espace vectoriel contenant les ξ_i et invariant par $\gamma(G)$. Nous allons montrer que la dimension de E est

finie, et que la représentation de G dans E induite par γ, représentation que nous désignerons par γ_E, est fidèle et birationnelle.

Le fait que E est de dimension finie résulte immédiatement de l'observation que, G étant une variété affine $\xi_i g(x) = \xi_i(gx)$ est une polynome en les coordonnées $x_i = \xi_i(x)$ et $y_i = \xi_i(g)$, et par conséquent combinaison linéaire d'un nombre fini de polynomes en les x_i seulement (i.e. indépendants de g).

Il est clair que γ_E est fidèle, en effet, si $g \neq e$, $gx \neq x$, donc l'une au moins des fonctions coordonnées ξ_i n'est pas invariante par g.

Il est assez évident que la représentation γ_E est rationnelle. Il nous reste à montrer la réciproque, à savoir que si on pose $\gamma(g) = ||\gamma_{\alpha\beta}(g)||$ (par rapport à une base fixée dans E), les coordonnées $y_i = \xi_i(g)$ de g sont des fonctions rationnelles des $\gamma_{\alpha\beta}(g)$. Or, soient a_α les coordonnées de ξ_i (par rapport à la base choisie dans E). Les coordonnées de $\xi_i g$ sont $\Sigma\gamma_{\alpha\beta}(g)a_\beta$. D'autre part, la fonctionnelle qui associe à tout élément de E, considéré comme fonction sur G, la valeur de cette fonction au point e, est une forme linéaire sur E, et si on désigne par b_α les coefficients de cette forme, on a

$$y_i = \xi_i(g) = \xi_i g(e) = \Sigma\gamma_{\alpha\beta}(g)a_\beta b_\alpha ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. Il est intéressant de noter que PGl(n,k), donc tout sous-groupe fermé de PGl(n,k), est aussi un groupe affin. En effet, les éléments de PGl(n,k) sont les matrices non singulières $||x_{ij}||$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ dont les éléments $||x_{ij}||$ sont donnés à un facteur de proportionnalité près; ils peuvent donc être représentés par les points d'un espace projectif P de dimension n^2-1, à l'exception

des points appartenant à l'hypersurface dét. $||x_{ij}||$ = 0. Pour obtenir la réalisation de P comme variété affine il suffit alors de considérer le modèle projectif de P obtenu à partir des formes d'ordre n (i.e. le modèle dans lequel les hypersurfaces d'ordre n de P deviennent les sections hyperplanes), et de prendre pour hyperplan à l'infini celui qui correspond à la forme dét. $||x_{ij}||$.

Nous nous bornerons à énoncer les deux théorèmes suivants :

THEOREME 3. *La variété sous-jacente d'un groupe affin connexe est une variété rationnelle.*

THEOREME 4. (Barsotti-Chevalley-Rosenlicht) *Tout groupe algébrique connexe* G *possède un unique sous-groupe invariant affin* L *tel que* G/L *soit une variété abélienne.*

J.Tits

CHAPITRE II

LES GROUPES AFFINS : THEOREMES DE STRUCTURE; SOUS-GROUPES DE BOREL

§1. PRELIMINAIRES: COMPLEMENTS AUX PROPOSITIONS 1 ET 3.

Il résulte immédiatement de la proposition 1 qu'*un sous-groupe fermé d'un groupe affin est lui-même un groupe affin.* On peut montrer, d'autre part, que *le groupe quotient d'un groupe affin par un sous-groupe invariant fermé est un groupe affin.* Il n'est pas vrai par contre que l'espace homogène quotient d'un groupe affin par un sous-groupe fermé quelconque soit toujours une variété affine, ainsi que le montre l'exemple de l'espace projectif, espace homogène du groupe projectif $PGl(n,k)$ (lequel, comme nous l'avons vu, est un groupe affin).

§2. GROUPES ALGEBRIQUES DE TRANSFORMATIONS D'UNE VARIETE COMPLETE.

Lorsque nous dirons qu'un groupe algébrique G *opère* sur une variété X (ou est un groupe algébrique de transformations de X), il sera toujours sous-entendu que l'application

$$G \times X \longrightarrow X \qquad \text{donnée par} \qquad (g,x) \longrightarrow xg$$

est rationnelle.

LEMME 2. *Un groupe algébrique* G *opérant sur une variété complète* X *possède au moins une orbite fermée (i.e. il existe un* $x \in X$ *tel que* xG *soit fermé).*

La démonstration se fait par induction sur la dimension de

X. Si Y est une orbite non fermée de G, $\bar{Y} - Y$ est une variété complète, invariante par G, et de dimension strictement inférieure à la dimension de X; G possède donc une orbite fermée dans cette variété, en vertu de l'hypotèse d'induction.

LEMME 3. *Soit G un groupe affin opérant sur une variété complète X. Si G est résoluble et connexe, il possède un point fixe (i.e. une orbite réduite à un point) dans* X.

La démonstration se fait par induction sur la longueur de la suite des dérivés successifs de G (lorsque G = {e}, le théorème est trivial, donc l'induction démarre effectivement).

L'ensemble E des points fixes de G' (dérivé de G), qui n'est pas vide par l'hypothèse d'induction, est fermé dans X. E étant l'ensemble de tous les points fixes d'un sous-groupe invariant G' de G, est lui-même invariant par G. Soient F une orbite complète de G dans E (cf. lemme 1), p un point de cette orbite, et H le groupe des éléments de G conservant p (groupe d'isotropie). H contient G' (puisque $p \in E$); par conséquent H est un sous-groupe invariant de G (tout sous-groupe contenant le dérivé est invariant car G/G' est commutatif); il s'ensuit (cf. §1) que G/H est une variété affine (et même un groupe affin). D'autre part, puisque G est transitif sur F et que H est le sous-groupe d'isotropie, on a une application bijective et rationnelle (en caractéristique 0, cela implique "birationnelle") de G/H sur la variété complète F, d'où on peut déduire (utilisant le fait que F est normal - nous laissons de côté cette partie, purement algébro-géométrique, de la démonstration) que G/H est elle-même complète. Etant simultanément complète, connexe et affine, la variété G/H, donc aussi l'orbite F, doit être réduite à un point, c.q.f.d.

§3. STRUCTURE DES GROUPES AFFINS RESOLUBLES CONNEXES.

Soit E un espace vectoriel à n dimensions. On appelle *drapeau* de E une collection $\{E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ formée d'un rayon (droite passant par O) E_1, d'un plan E_2 contenant E_1, d'une variété linéaire E_3 à 3 dimensions contenant $E_2, \ldots$, et d'un hyperplan E_{n-1} contenant E_{n-2}. Si on choisit dans E un système de réference dont le premier vecteur soit dans E_1, le second dans $E_2, \ldots$, les automorphismes de E conservant le drapeau sont représentées par les matrices triangulaires (matrices dont tous les éléments situés sous la diagonale principale sont nulles) inversibles; on désignera par $\Delta(n,k)$ le groupe formé par ces matrices.

PROPOSITION 7. *Soit* G *un groupe algébrique connexe d'automorphismes d'un espace vectoriel* E. *Pour que* G *soit résoluble, il faut et il suffit qu'il laisse invariant un drapeau, c'est-à-dire que tous ses éléments puissent être mis simultanément sous la forme triangulaire, pour un choix convenable du système de référence dans* E. *En particulier, le sous-groupes résolubles connexes maximaux de* $Gl(n,k)$ *sont les stabilisateurs des drapeaux, c'est-à-dire le groupe* $\Delta(n,k)$ *de toutes les matrices triangulaires, et ses conjugués.*

DEMONSTRATION: G opère sur la variété des drapeaux de E qui est une variété projective complète. S'il est résoluble, il laisse donc invariant un drapeau, en vertu du lemme 3. Pour prouver la réciproque, il suffit de montrer que le groupe $\Delta(k,n)$ lui-même (groupe de tous les automorphismes conservant un drapeau) est résoluble, or ce groupe admet la suite normale

$$\Delta(n,k) \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n = \{I_n\} \ ,$$

où

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & a_{n-1,n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ & 1 & 0 & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

..., I_n = matrice unité,

dont les quotients

$$\Delta(n,k)/U_1 \cong (k^\times)^n \quad ; \quad U_1/U_2 \cong (k^+)^{n-1} \quad ;$$

$$U_2/U_3 \cong (k^+)^{n-2} \quad ; \ \ldots$$

sont commutatifs, c.q.f.d.

PROPOSITION 8. *Le dérivé d'un groupe affin résoluble connexe est nilpotent.*

En effet, soit $G \subseteq \Delta(k,n)$ le groupe en question (cf. proposition 7). On a $G' \subseteq \Delta'(k,n) = U_1$. Or, la suite centrale descendante de U_1 n'est autre que

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n = \{I_n\}$$

(avec les notations introduites plus haut), donc U_1, et par conséquent aussi G', est nilpotent.

Nous ne démontrerons pas la

PROPOSITION 9. *Tout groupe affin de dimension* 1 *est isomorphe à* $k^\times$ *ou à* k^+.

PROPOSITION 10. *Tout groupe affin résoluble connexe possède une suite de composition dont les quotients sont tous isomorphes à* $k^\times$ *ou à* k^+.

- 20 -

J.Tits

En reprenant la démonstration de la proposition 7, on voit que $\Delta(k,n)$ possède une suite de composition

$$\Delta(k,n) \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T_n = U_1 \supset T_{n+1} \supset \ldots \supset T_{2n-1} = U_2 \supset \ldots$$

dont les n premiers quotients sont isomorphes à $k^\times$ tandis que les autres sont isomorphes à k^+. Soit $G \subseteq \Delta(k,n)$ le groupe considéré dans l'énoncé. Posons $G_i = G \cap T_i$, et désignons par G_i° la composante connexe de G_i. L'immersion

$$G_i \longrightarrow T_i$$

induit un monomorphisme rationnel

$$G_i/G_{i+1} \longrightarrow T_i/T_{i+1} \cong k^\times \quad \text{ou} \quad k^+ .$$

Il s'ensuit que les quotients G_i/G_{i+1}, donc aussi leurs composantes connexes G_i°/G_{i+1}°, ont tous la dimension 1 ou 0. Par conséquent, en vertu de la proposition 9,

$$G_i^\circ/G_{i+1}^\circ \cong k^\times \ ; \ k^+ \quad \text{ou} \quad \{e\} \ ,$$

et la suite

$$G = G_0^\circ \supseteq G_1^\circ \supseteq G_2^\circ \supseteq \ldots \ ,$$

ou plus exactement celle qu'on en déduit en supprimant tous les G_i° tels que $G_i^\circ = G_{i-1}^\circ$, possède la propriété énoncée.

REMARQUE. Dans la démonstration précédente, on n'a pas utilisé toute la force de la proposition 9, mais seulement le fait qu'un groupe connexe de dimension 1 qui possède une représentation rationnelle fidèle dans $k^\times$ ou k^+ est lui-même isomorphe à $k^\times$ ou k^+.

J.Tits

§4. SOUS-GROUPES DE BOREL. RADICAL.

Soit G un groupe affin connexe. On appelle *sous-groupe de Borel de* G, tout sous-groupe (fermé) résoluble connexe maximal de G. L'existence de tels sous-groupes est évidente.

THEOREME 5. *Soient* G *un groupe affin connexe et* H *un sous-groupe (fermé). Pour que* G/H *soit une variété complète, il faut et il suffit que* H *contienne un sous-groupe de Borel.*

DEMONSTRATION. Soit B un sous-groupe de Borel de G. En tant que sous-groupe de G, il opère sur la variété G/H. Si celle-ci est complète, B possède un point fixe (cf. lemme 3), soit Hg, et on a

$$HgB = Hg \ ,$$

d'où

$$HgBg^{-1} = H \ ,$$

c'est-à-dire que H contient le sous-groupe de Borel gBg^{-1}.

Réciproquement, supposons que H contienne un sous-groupe de Borel B. Nous pouvons supposer, d'autre part, que G est un groupe algébrique d'automorphismes d'un espace vectoriel E. (théorème 2). G opère sur la variété des drapeaux de E et possède dans celle-ci au moins une orbite complète (lemme 2), soit X. Etant résoluble et connexe, le groupe B possède au moins un point fixe dans X (lemme 3), soit p. Le groupe G_p des éléments de G laissant invariant p (qui est, rappelons-le, un drapeau de E) est résoluble (proposition 7), donc sa composante connexe ne peut être que B (puisque B est, par hypothèse, un sous-groupe résoluble connexe *maximal* de G). Il s'ensuit que G/B est un revêtement fini de G/G_p (car G_p/B, étant un groupe algébrique discret, est fini). D'autre part, G étant transitif sur X avec G_p comme groupe d'isotropie, on a une bije-

otion rationnelle $G/G_p \longrightarrow X$. On peut en déduire que G/G_p est complète, ainsi que son revêtement G/B (comme dans la démonstration du lemme 3, nous laissons de côté cette partie purement algébro-géometrique du raisonnement). Mais il en est alors de même de G/H qui est l'image de G/B par une application rationnelle (en fait, G/B est un espace fibré de base G/H et de fibre H/B).

THEOREME 6. *Les sous-groupes de Borel d'un groupe affin connexe* G *sont tous conjugués entre eux.*

En effet, soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel. B_2 opère sur la variété G/B_1, qui est complète en vertu du théorème précédent. Il possède donc (lemme 3) un point fixe sur cette variété, soit $B_1 g$, et on a

$$B_1 g B_2 = B_1 g \quad ,$$

d'où

$$B_2 \subseteq g^{-1} B_1 g \quad .$$

Mais puisque B_2 est maximal, l'inclusion stricte est à rejecter et on doit avoir $B_2 = g^{-1} B_1 g$, c.q.f.d.

THEOREME 7. *Le normalisateur* $\mathfrak{N}B$ *d'un sous-groupe de Borel* B *coïncide avec* B.

Nous montrerons seulement que la composante connexe $\mathfrak{N}^\circ B$ de $\mathfrak{N}B$ coïncide avec B. Pour cela, il suffit de remarquer que la variété $\mathfrak{N}^\circ B/B$ est à la fois complète (théorème 5), affine (car B est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{N}^\circ B$, cf. §1) et connexe, donc réduite à un point.

THEOREME 8. G *est la réunion de ses sous-groupes de Borel, c'est-à-dire que tout élément de* G *appartient à un groupe de Borel au moins.*

Nous nous bornerons à donner la démonstration dans le cas où

k est le *corps des nombres complexes.*

Soient $\mathcal{B}$ la réunion des sous-groupes de Borel de G, et B un sous-groupe de Borel donné. L'ensemble $\mathcal{B}$ est l'image de la variété $G \times B$ par l'application

$$G \times B \longrightarrow G \qquad \text{définie par} \qquad (g,b) \longrightarrow gbg^{-1} ;$$

il est donc (cf. note au bas de la page 9) la réunion d'une variété $\mathcal{B}^\circ$ et d'une partie de l'adhérence de Zariski de celle-ci (i.e. $\mathcal{B}^\circ$ est relativement ouverte et dense dans $\mathcal{B}$). D'autre part, on sait que tout élément de G suffisamment voisin de l'élément neutre (au sens de la topologie usuelle) appartient à un sous-groupe à un paramètre de G, donc aussi à un sous-groupe de Borel (puisque les sous-groupes à un paramètre sont commutatifs, donc résolubles); par conséquent, $\mathcal{B}$ contient un ouvert de G (au sens de la topologie usuelle), et on a $\dim.\mathcal{B} = \dim.\mathcal{B}^\circ = \dim.G$. Il s'ensuit, puisque G est une variété irréductible, que $\mathcal{B}^\circ$, donc aussi $\mathcal{B}$, est partout dense dans G, c'est-à-dire que tout élément $g \in G$ est limite d'une suite d'éléments $g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots$ appartenant tous à $\mathcal{B}$. Chacun des g_i définit une transformation de la variété G/B possédant un point fixe, en vertu du lemme 3 et du fait que g_i appartient à un sous-groupe de Borel. G/B étant une variété complète, donc compacte (pour la topologie usuelle), il en résulte immédiatement, par passage à la limite, que G possède aussi un point fixe dans G/B, soit Bf, et on a

$$Bfg = Bf ,$$

d'où

$$g \in f^{-1}Bf \subseteq \mathcal{B} ,$$

c.q.f.d.

DEFINITIONS. Il est clair que l'intersection R des sous-groupes

de Borel d'un groupe affin connexe G est un sous-groupe invariant fermé de G. La composante connexe R° de ce sous-groupe est appelée le *radical* de G. Un groupe dont le radical est réduit à l'élément neutre est dit *semi-simple*.

THEOREME 9. *Le radical* R° *de* G *est le sous-groupe invariant résoluble connexe maximum de* G.

En effet, tout sous-groupe invariant résoluble connexe S est contenu dans un sous-groupe de Borel, donc dans tous les sous-groupes de Borel, puisque ceux-ci sont conjugués entre eux et que S coïncide avec ses conjugués.

THEOREME 10. *L'intersection* R *des sous-groupes de Borel de* G *contient le centre* C(G) *de* G. *Si* G *est semi-simple,* R = C(G).

En effet, soit c un élément de C(G). En vertu du théorème 8, c appartient à un sous-groupe de Borel, donc à tous les sous-groupes de Borel puisque ceux-ci sont conjugués entre eux et que c coïncide avec ses conjugués. Si en outre G est semi-simple, R est un sous-groupe invariant discret, donc central (proposition 6, chap.I), et on doit avoir R = C(G).

DEFINITIONS. Dans la suite, le sous-groupe R jouera un rôle plus important que sa composante connexe R°. Pour cette raison, nous nous écarterons de la terminologie reçue et nous appellerons "*radical*" le groupe R lui-même, en laissant cependant le mot entre guillemets pour éviter toute confusion. De même, nous dirons qu'un groupe est "*semi-simple*" (entre guillemets) si son "radical" est réduit à l'élément neutre; cela signifie, en vertu du théorème précédent, que le groupe en question est semi-simple (au sens ordinaire) et que son centre est réduit à l'élément neutre. Enfin, nous appellerons *quotient "semi-simple"* d'un groupe G, le quotient de G par son *"radical"*.

- 25 -

J. Tits

EXEMPLES. Le "radical" du groupe linéaire Gl(n,k) est constitué par les matrices scalaires; étant connexe, il coïncide avec le radical au sens ordinaire. Le "radical" du groupe linéaire spécial Sl(n,k) est constitué par les matrices scalaires de déterminant 1, c'est-à-dire les matrices scalaires correspondant aux racines n-ièmes de l'unité; son radical, au sens ordinaire, est donc réduit à l'élément neutre (c'est-à-dire que Sl(n,k) est semi-simple, mais non "semi-simple"). Gl(n,k) et Sl(n,k) ont le même quotient "semi-simple" PGl(n,k) (il est opportun de rappeler que k est algébriquement clos).

J.Tits

CHAPITRE III

SOUS-GROUPES CONTENANT UN SOUS-GROUPE DE BOREL, I; CLASSIFICATION DES GROUPES SEMI-SIMPLES.

§1: REMARQUE PRELIMINAIRE.

L'objet de ce chapitre et du suivant peut être caractérisé brièvement comme étant la description des groupes algébriques affins connexes par l'intermédiaire de l'étude des espaces homogènes qui sont des variétés projectives complètes. On a vu (théorème 5) que cette étude est étroitement liée à celle de sous-groupes contenant un sous-groupe de Borel. Notons d'autre part que les seuls groupes intervenant effectivement sont les groupes semi-simples dont le centre est réduit à l'élément neutre (groupes "semi-simples"). En effet, soient G un groupe affin connexe et R son "radical"; si G/H est une variété projective complète, H contient R (en vertu du théorème 5), lequel, étant un sous-groupe invariant de G, opère trivialement sur G/H, d'où il résulte que l'étude des espaces homogènes de G qui sont des variétés complètes fournit seulement une description du quotient "semi-simple" G/R de G, et non du groupe G lui-même.

§2. PREMIER EXEMPLE: LE GROUPE PROJECTIF PGl(n+1,k).

Soit G = PGl(n+1,k) le groupe des projectivités d'un espace projectif $P_n(k)$ de dimension n. Il résulte immédiatement de la proposition 7 qu'un sous-groupe de Borel B de G est constitué par toutes les projectivités laissant invariant un drapeau $D = \{V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots \subset V_n\}$ formé d'un point V_1, d'une droite

V_2 contenant ce point, etc. Soient S_i le stabilisateur de V_i dans G (i.e. le groupe de tous les éléments de G qui conservent V_i), et

$$S_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_k}$$

$$(i \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n),$$

le stabilisateur du *drapeau partiel* $\{ V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k} \}$.

PROPOSITION 11. *Les* $S_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ *sont les seuls sous-groupes de* PGl(n+1,k) *contenant le sous-groupe de Borel* B. *En particulier, les* S_i *sont les seuls sous-groupes maximaux contenant* B.

DEMONSTRATION. Par induction sur n. On supposera la proposition établie pour les espaces projectifs de dimension strictement inférieure à n (le cas n = 0 ne présente pas grande difficulté!). Soit H un sous-groupe de G contenant B. Remarquons tout d'abord que B est transitif sur les ensembles $V_{i+1} - V_i$ (i = 0,...,n; on pose $V_0 = \emptyset$ et $V_{n+1} = P_n$). Par conséquent, les orbites de H sont des réunions de tels ensembles. On en déduit immédiatement, que si $V_{i_0} = V_0, V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}, V_{i_{k+1}} = P_n$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$ désignent celles des variétés V_i qui sont invariantes par H, les orbites de H sont les ensembles $V_{i_{p+1}} - V_{i_p}$ (p = 0,..., k), d'ou il résulte en particulier que les V_{i_p} (p = 1,...,k) sont les seules sous-variétés linéaires propres de P_n invariantes par H. Nous distinguerons à présent deux cas.

1) H *laisse fixe au moins une sous-variété linéaire propre de* P_n (i.e. $k \neq 0$). Désignons par $P^* = P_n/V_{i_k}$ l'espace projectif à $n-i_k$ dimensions dont les points sont les variétés linéaires à i_k dimensions de P_n qui contiennent V_{i_k}, par H° (resp. B°) le sous-groupe des éléments de H (resp. B) qui induisent l'identité sur V_{i_k} et par H^* (resp. B^*) le sous-groupe des éléments de H

(resp. B) qui induisent l'identité sur P^*. On vérifie immédiatement que B^* induit sur V_{i_k} le stabilisateur du drapeau $\{V_1, V_2, \ldots, V_{i_k-1}\}$. Il s'ensuit par l'hypothèse d'induction, que H^*, qui contient B^*, induit sur V_{i_k} le stabilisateur d'une partie de ce drapeau, laquelle ne peut être que $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k-1}\}$; en effet, H^* est un sous-groupe invariant de H, donc l'ensemble des variétés fixes de H^* est aussi invariant par H. On montre de même que H^o induit sur P^* le groupe de toutes les projectivités de cet espace. Cela étant, soit g une projectivité quelconque conservant $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$. En vertu de ce qui précède, il existe une projectivité $h^o \in H^o$ et une projectivité $h^* \in H^*$ qui induisent respectivement sur P^* et sur V_{i_k} les mêmes projectivités que g. Mais alors, la projectivité $b = g.h^{o-1}.h^{*-1}$ induit l'identité sur P^*_n et sur V_{i_k}. En particulier, elle appartient à B, et $g = b.h^*.h^o$ appartient à H, ce qui démontre la proposition dans ce cas-ci.

2) H *ne laisse fixe aucune sous-variété linéaire propre de* P_n. il faut montrer que H coïncide avec G, ou encore, puisque H est transitif sur P_n (d'après les remarques générales faites au début de la démonstration), que le sous-groupe H_1 des éléments de H qui conservent le point V_1 est le groupe de toutes les projectivités conservant ce point. Supposons qu'il en soit autrement. Alors, en vertu du 1), H_1 laisse fixe au moins une autre variété, soit V_j $(j > 1)$. Comme H opère transitivement sur P_n, le groupe H_x des éléments de H qui laissent fixe un point quelconque $x \in P_n$ conservera aussi une variété $W_j(x)$ à j-1 dimensions contenant x. En particulier $W_j(x)$ est invariante par le groupe B_x $(\subset H_x)$ des éléments de B qui conservent x. Or, on vérifie aisé-

ment que la seule variété à j-1 dimensions contenant x et invariante par B_x est la variété joignant x à V_{j-1} si $x \notin V_{j-1}$, et la variété V_j si $x \in V_{j-1}$. Dans tous les cas, $W_j(x)$ contient la variété V_{j-1}. Cette dernière est donc l'intersection des $W_j(x)$, laquelle doit être invariante par H, ce qui contredit notre hypothèse. La proposition est ainsi démontrée.

REMARQUE. De la proposition précédente, il résulte que les espaces homogènes $PGl(n+1,k)/S_i$, quotients de $PGl(n+1,k)$ par les sous-groupes maximaux contenant un sous-groupe de Borel, ne sont autres que les grassmanniennes (ensembles des sous-variétés linéaires de dimension donnée) de l'espace projectif P_n. Cette définition purement "groupale" des grassmanniennes est à l'origine de la méthode d'interprétation géométrique des groupes semi-simples, développée au chapitre suivante.

§3. DEUXIEME EXEMPLE : LE GROUPE PROJECTIF ORTHOGONAL PO(n+1,k) (GROUPE D'UNE HYPERQUADRIQUE).

Considérons dans l'espace projectif $P_n(k)$ une hypdrquadrique Q (qui a donc la dimension n-1), et soit G(Q) le groupe des projectivités de P_n conservant Q. Deux cas essentiellement distincts se présentent :

a) $n = 2m$; Q possède alors une seule famille de sous-variétés linéaires de dimension maximum m-1; G(Q) est connexe.

b) $n = 2m-1$; Q possède alors deux familles algébriques distinctes Σ' et Σ'' de sous-variétés linéaires de dimension maximum m-1; toute sous-variété linéaire de Q de dimension m-2 détermine deux sous-variétés de dimension m-1, appartenant respectivement à Σ' et à Σ'', dont elle est l'intersection; G(Q) possède deux composantes connexes, la composante connexe de l'élément neutre $G^+(Q)$

étant formée par les projectivités qui laissent invariante chacune des deux familles Σ' et Σ''.

Dans l'un et l'autre cas, on appellera *drapeau de* Q une collection

(1) $$\{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m\} \quad ,$$

où V_i désigne une sous-variété linéaire de Q de dimension i-1. Lorsque n = 2m-1, il existe deux espèces de drapeaux selon que V_m appartient à Σ' ou à Σ''. Tout drapeau partiel $\{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{m-1}\}$ peut être prolongé de façon unique en un drapeau d'espèce donnée et il existe donc une correspondance biunivoque canonique entre les deux espèces de drapeaux; deux drapeaux d'espèces différentes qui se correspondent (c'est-à-dire dont les parties $\{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{m-1}\}$ coïncident) seront dits *associés*.

PROPOSITION 12. *Les sous-groupes de Borel de la composante connexe* G (= G(Q) *ou* $G^+(Q)$ *selon que* n = 2m *ou* 2m-1) *de* G(Q) *sont les stabilisateurs des drapeaux de* Q. *Lorsque* n = 2m-1, *deux drapeaux associés ont même stabilisateur.*

DEMONSTRATION. La variété des drapeaux de Q est une variété complète (connexe ou non selon que n = 2m ou 2m-1), donc, en vertu du lemme 3, tout sous-groupe de Borel B de G conserve au moins un drapeau, soit $\{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m\}$. Désignons par S le stabilisateur de ce drapeau et par V_{n-i} la variété linéaire de dimension n-i-1 polaire de V_i par rapport à Q (cette notation n'est pas contradictoire lorsque n = 2m, d'où n-m = m, parce que, dans ce cas, V_m est sa propre polaire par rapport à Q). Le groupe S laisse invariante la collection $\{V_1 \subset \dots \subset V_n\}$, qui est un drapeau de l'espace projectif P, donc S est résoluble (proposition 7); de plus, on peut vérifier, par exemple analytiquement, que S est connexe (nous n'entrerons pas dans le détail de cette vérification).

Par conséquent, S = B. Tenant compte du fait (facile à démontrer) que G(Q) est transitif sur les drapeaux de Q , on en déduit que le stabilisateur de tout drapeau est un sous-groupe de Borel de G . La dernière partie de la proposition est immédiate.

Nous ne démontrerons pas les deux propositions suivantes. Les démonstrations sont d'ailleurs assez semblables à celle de la proposition 11.

PROPOSITION 13. *Soit* n = 2m. *Soient* $\{V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_m\}$ *un drapeau de* Q , B *son stabilisateur,* S_i *le stabilisateur de* V_i , *et* $S_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_k}$ *le stabilisateur de* $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}\}$. *Les groupes* $S_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, *qui sont tous distincts entre eux, sont les seuls sous-groupes de* G = G(Q) *contenant* B ; *en particulier, les* S_i *sont les seuls sous-groupes maximaux de* G *contenant* B .

PROPOSITION 14. *Soit* n = 2m-1. *Soient*

$$\left\{ V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset \begin{matrix} V_{m'} \\ V_{m''} \end{matrix} \right\}$$

une paire de drapeaux associés, B *le stabilisateur de ceux-ci,* S_i *le stabilisateur de* V_i *et* $S_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_k}$ *le stabilisateur de* $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}\}$. *Les groupes* $S_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ *où* $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ *est une partie de l'ensemble d'indices* $(1,2,\ldots,m-2,m',m'')$, *sont tous distincts entre eux et sont les seuls sous-groupes de* $G = G^+(Q)$ *contenant* B ; *en particulier,* $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}, S_{m'}$ *et* $S_{m''}$ *sont les seuls sous-groupes maximaux de* G *contenant* B .

REMARQUE. L'absence de l'indice m-1 dans l'énoncé précédent provient du fait que $S_{m-1} = S_{m',m''} = S_{m'} \cap S_{m''}$ (en particulier, S_{m-1} n'est pas un sous-groupe maximal de G).

- 32 -

J.Tits

Lorsqu'on compare la proposition précédente aux propositions 11 et 13, il paraît naturel de changer la terminologie introduite plus haut lorsque n = 2m-1, et d'appeler, dans ce cas, drapeau de Q, la collection

$$\left\{ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{m-2} \subset \begin{matrix} V_{m'} \\ V_{m''} \end{matrix} \right\}$$

(il n'est pas nécessaire de préciser, dans la définition, que l'intersection $V_{m'} \cap V_{m''}$ est une variété V_{m-1} de dimension m-2; cela résulte en effet de ce que $V_{m'}$ et $V_{m''}$ sont d'espèces différentes et contiennent une même variété V_{m-2} de dimension m-3). Avec cette nouvelle définition, on peut donner des propositions 11, 13 et 14 l'énoncé commun suivant, où G désigne le plus grand groupe connexe de projectivités d'un espace projectif P ou d'une hyperquadrique Q, indifféremment :

Les seuls sous-groupes de G *contenant le stabilisateur* B *d'un drapeau* $\mathfrak{D}$ *(de* P *ou de* Q*) sont les stabilisateurs des parties de* $\mathfrak{D}$*; deux parties de* $\mathfrak{D}$ *différentes ont des stabilisateurs différents; les seuls sous-groupes maximaux de* G *contenant* B *sont les stabilisateurs des éléments de* $\mathfrak{D}$.

Sous cette forme, la proposition se généralise à un groupe semi-simple quelconque, moyennant une extension convenable de la notion de drapeau (cf. le §4 et le chap. suivant).

§4. LE TREILLIS DES SOUS-GROUPES CONTENANT UN SOUS-GROUPE DE BOREL. TROISIEME EXEMPLE: LES PRODUITS DIRECTS

Dans les deux exemples examinés plus haut, les sous-groupes contenant un sous-groupe de Borel étaient toujours des intersec-

tions de sous-groupes maximaux ayant cette propriété. Il s'agit là d'un fait général. De façon précise, on a le

THEOREME 11. *Soient* G *un groupe affin connexe et* B *un sous-groupe de Borel. Les sous-groupes maximaux de* G *contenant* B *sont en nombre fini* r. *Si on les désigne par* $S_1, \ldots, S_r$, *tout sous-groupe de* G *contenant* B *peut s'écrire d'une et une seule façon comme une intersection* $S_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_k}$. *En d'autres termes, le treillis des sous-groupes de* G *contenant* B *est isomorphe au treillis des parties d'un ensemble de* r *éléments.*

DEFINITION. Le nombre r des sous-groupes maximaux contenant B sera appelé le *"rang"* de G, le mot étant placé entre guillemets parce que le sens qu'on lui donne ordinairement est différent de celui-ci. (r n'est autre que le rang - au sens ordinaire - du quotient semi-simple de G; en particulier, les deux notions coincident lorsque G est semi-simple).

COROLLAIRE 1. *Tout sous-groupe contenant un sous-groupe de Borel* B *de* G *est son propre normalisateur dans* G.

En effet, soit $S = S_{i_1,\ldots,i_p}$ le sous-groupe en question; son normalisateur $\mathfrak{N}(S)$ contient aussi B et on peut donc écrire, en supposant les indices $i_1 \ldots i_p$ convenablement ordonnés, $\mathfrak{N}(S) = S_{i_1,\ldots,i_q}$ $(q \leq p)$. Le groupe $T = S_{i_{q+1},\ldots,i_p}$ est le plus grand sous-groupe de G dont l'intersection avec $\mathfrak{N}(S)$ est S; il est donc invariant par les automorphismes intérieurs de G correspondant aux éléments de $\mathfrak{N}(S)$. Il en résulte que T est un sous-groupe invariant du sous-groupe de G engendré par $\mathfrak{N}(S)$ et T, lequel n'est autre que G lui-même (parce que les ensembles d'indices $\{i_1,\ldots,i_q\}$ et $\{i_{q+1},\ldots,i_p\}$ sont disjoints). Puisque T est invariant dans G et qu'il contient un sous-groupe de Borel, il les contient tous (théorème 6) et est donc confondu avec G (théorème 8).

Par conséquent, $\{i_{q+1},\ldots,i_p\}$ est l'ensemble vide, et $\mathcal{N}(S) = S$.

COROLLAIRE 2. *Tout sous-groupe de* G *contenant un sous-groupe de Borel est connexe.*

En effet, si S désigne le sous-groupe en question, les sous-groupes de Borel contenus dans S sont contenus dans la composante connexe S° de S, et on a, en vertu du corollaire précédent,

$$S^\circ \subseteq S \subseteq \mathcal{N}(S^\circ) = S^\circ ,$$

d'où $S = S^\circ$.

Il ne nous est pas possible de donner ni même d'esquisser ici la démonstration du théorème 11, qui repose sur la théorie des racines des groupes semi-simples, développée par E.Cartan dans le cas du corps des complexes et par C.Chevalley dans le cas général (Séminaire C.Chevalley, 1956-58). Bornons nous à observer que si G est l'un des groupes particuliers étudiés aux §§2 et 3, le théorème est une conséquence immédiate des propositions 11, 13 et 14, et que d'autre part, la vérification du théorème pour un groupe G qui est le produit direct de deux groupes $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ se ramène aisément, par la proposition 15 ci-dessous et la démonstration que nous en donnons, aux vérifications pour $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ (cette remarque n'est d'ailleurs d'aucune utilité dans la démonstration générale du théorème).

PROPOSITION 15. *Soient* $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ *deux groupes affins connexes, et* $G = G^{(1)} \times G^{(2)}$ *leur produit direct. Les sous-groupes de Borel de* G *sont les produits* $B = B^{(1)} \times B^{(2)}$, *d'un sous-groupe de Borel* $B^{(1)}$ *de* $G^{(1)}$ *et d'un sous-groupe de Borel* $B^{(2)}$ *de* $G^{(2)}$. *Les seuls sous-groupes de* G *contenant* B *sont les sous-groupes de la forme* $S^{(1)} \times S^{(2)}$, *avec* $B^{(i)} \subseteq S^{(i)} \subseteq G^{(i)}$. *En particulier, les seuls sous-groupes maximaux de* G *contenant* B *sont les sous-groupes de la forme* $S^{(1)} \times G^{(2)}$ *ou* $G^{(1)} \times S^{(2)}$, *où* $S^{(i)}$ *désigne cette fois*

J.Tits

un sous-groupe maximal de $G^{(i)}$ *contenant* $B^{(i)}$.

DEMONSTRATION. Soient B un sous-groupe de Borel de G, $B^{*(i)}$ sa projection sur $G^{(i)}$, qui est un sous-groupe résoluble connexe de $G^{(i)}$, et $B^{(i)}$ un sous-groupe de Borel de $G^{(i)}$ contenant $B^{*(i)}$. Le produit $B^{(1)} \times B^{(2)}$ est un sous-groupe résoluble connexe de G contenant B; on doit donc avoir $B = B^{(1)} \times B^{(2)}$ (et en particulier, $B^{*(i)} = B^{(i)}$). Réciproquement, soient $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ des sous-groupes de Borel de $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ respectivement, et B un sous-groupe de Borel de G contenant $B^{(1)} \times B^{(2)}$. La projection de B sur $G^{(i)}$ est un sous-groupe résoluble connexe de $G^{(i)}$ contenant $B^{(i)}$; elle est donc confondue avec $B^{(i)}$ et on a de nouveau $B = B^{(1)} \times B^{(2)}$ (cette réciproque est d'ailleurs aussi une conséquence immédiate du théorème 6).

Soient S un sous-groupe de G contenant B, et $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ ses projections sur $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$. Identifions les $G^{(i)}$ avec des sous-groupes de G, de la façon usuelle. Puisque $G^{(i)}$ est un sous-groupe invariant de G, $G^{(i)} \cap S$ est un sous-groupe invariant de S, donc aussi, par projection sur $G^{(i)}$, un sous-groupe invariant de $S^{(i)}$. Mais alors, $G^{(i)} \cap S = S^{(i)}$, en vertu du corollaire 1 ci-dessus, donc

$$S^{(1)} \times S^{(2)} \subseteq S \subseteq S^{(1)} \times S^{(2)}$$

et $S = S^{(1)} \times S^{(2)}$, c.q.f.d.

§5. CLASSIFICATION DES GROUPES SEMI-SIMPLES.

5.1. REMARQUES PRELIMINAIRES. PRINCIPE DE LA METHODE.

Soient G un groupe affin connexe de "rang " r, B un sous-groupe de Borel et $S_1, \ldots, S_r$ les sous-groupes maximaux de G contenant B. Ces sous-groupes sont de "rang" r-1; en effet, B est évidemment

un sous-groupe de Borel de S_i et les sous-groupes maximaux de S_i contenant B, sont les sous-groupes $S_{i,j} = S_i \cap S_j$, $i \neq j$, en vertu du théorème 11. Plus généralement, $S_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_k}$ est un groupe de "rang" r-k.

L'exposé qui suit est basé sur le fait que *grosso modo* (i.e. moyennant une précision qui sera donnée plus loin, au n.5.5), le quotient "semi-simple" de G est entièrement caractérisé par la donnée des quotients "semi-simples" des S_i, pour autant que le "rang" de G soit strictement supérieur à 2. Cela fournit un moyen de décrire les groupes "semi-simples" de rang r à partir des groupes de rang r-1 ou, en itérant le procédé, à partir des groupes de rang 2, d'où l'importance de ceux-ci (cf. n.5.3). Il importe de noter qu'il s'agit là d'une méthode permettant seulement, au moins jusqu'à présent, d'exposer *a posteriori* des résultats qui doivent être obtenus par une voie différente (cf.Seminaire Chevalley, 1956-58).

5.2. GROUPES "SEMI-SIMPLES" DE RANG 1.

Le groupe projectif de la droite PGl(2,k) *est, à un isomorphisme près, le seul groupe "semi-simple" de rang* 1. Suivant une notation de E.Cartan, on désigne aussi ce groupe par le symbole A_1.

5.3. GROUPES "SEMI-SIMPLES" DE RANG 2.

Il existe quatre groupes "semi-simples" de rang 2 *non isomorphes; ce sont, avec les notations de E.Cartan, les groupes*

$A_1 \times A_1$, *produit direct de deux copie de* A_1,

A_2 = PGl(3,k) , *groupe projectif du plan* ,

B_2 = PO(5,k) , *groupe projectif d'une hyperquadrique de l'espace projectif à* 4 *dimensions, et*

G_2 , *l'un des cinq "groupes exceptionnels", de dimension* 14, *dont nous reparlerons plus loin.*

5.4. SCHEMAS DE DYNKIN.

Soit G un groupe "semi-simple" de rang r. Les notations, B, S_i et $S_{i_1,\ldots,i_k}$ ayant les mêmes significations que précédemment, on posera

$$S_{i_1,\ldots,i_k} = S^{i'_1,\ldots,i'_{r-k}} ,$$

où $\{i'_1,\ldots,i'_{r-k}\}$ est l'ensemble d'indices complémentaire de $\{i_1,\ldots,i_k\}$ dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,r\}$ et on désignera par $G^{i'_1,\ldots,i'_{r-k}}$ le quotient "semi-simple" de $S^{i'_1,\ldots,i'_k}$.

Selon le principe exposé au n.5.1, on peut chercher à caractériser un groupe G par la donnée des groupes de rang 2 $G^{i,j}$ qui lui sont associés. A titre d'exemple, nous commencerons par dresser le tableau des $G^{i,j}$ dans le cas particulier où G = PGl(n+1,k) est le groupe projectif d'un espace projectif P_n à n dimensions. B est alors le stabilisateur d'un drapeau $\{V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n\}$ et $S^{i,j}$ (i < j) est le stabilisateur d'un drapeau partiel obtenu en retirant de celui-là V_i et V_j. Nous distinguerons à présent deux cas, selon que j = ou ≠ i+1.

a) <u>j = i+1</u>. Les sous-groupes de Borel de $S^{i,j}$ sont les conjugués de B dans $S^{i,j}$. Ce sont donc les stabilisateurs des drapeaux de la forme

$$\{V_1 \subset \ldots \subset V_{i-1} \subset V'_i \subset V'_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \ldots \subset V_n\} .$$

L'intersection $R^{i,j}$ de ces groupes, qui est par définition le "radical" de $S^{i,j}$, se compose de toutes les projectivités qui conservent $V_1,\ldots, V_{i-1}, V_{i+2},\ldots, V_n$ et qui induisent l'identité sur

l'ensemble ("étoile") des variétés de dimensions i-1 et i contenues dans V_{i+2} et contenant V_{i-1}, lesquelles peuvent être représentées respectivement par les points et les droites d'un plan projectif V_{i+2}/V_{i-1}. Le groupe $G^{i,j} = S^{i,j}/R^{i,j}$ est donc canoniquement isomorphe au groupe de transformations induit par $S^{i,j}$ sur ce plan. Ce groupe étant, comme on s'en assure aisément, le groupe projectif complet, on a $G^{i,j} \cong A_2$.

b) $j \neq i+1$. Soit V_{i+1}/V_{i-1} (resp. V_{j+1}/V_{j-1}) la droite projective représentant l'ensemble ("faisceau") des variétés de dimension i-1 (resp. j-1) contenues dans V_{i+1} (resp. V_{j+1}) et contenant V_{i-1} (resp. V_{j-1}). En procédant exactement comme au a), on montre que le "radical" $R^{i,j}$ de $S^{i,j}$ se compose de toutes les projectivités qui conservent $V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_n$ et qui induisent l'identité sur les droites V_{i+1}/V_{i-1} et V_{j+1}/V_{j-1}, et on en déduit que $G^{i,j} \cong A_1 \times A_1$.

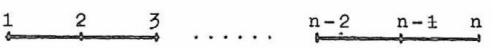
Voici donc, en résumé, le tableau des groupes $G^{i,j}$, de rang 2, associés à $G = PGl(n+1,k)$:

j \ i	2	3	.....	n-1	n
1	A_2	$A_1 \times A_1$	.....	$A_1 \times A_1$	$A_1 \times A_1$
2		A_2	.....	$A_1 \times A_1$	$A_1 \times A_1$
...			.....	.....	.....
n-2				A_2	$A_1 \times A_1$
n-1					A_2

- 39 -

J.Tits

Il est commode de condenser les données du tableau des $G^{i,j}$ d'un groupe G dans un diagramme obtenu de la façon suivante: les indices 1,...,r (ou, si l'on préfère, les groupes $G^1,\ldots, G^r$) sont représentés par r points, et les points correspondant à deux indices i, j sont reliés par un trait simple (———), double (═══) ou quadruple (≡≡≡), ou ne sont pas reliés du tout, selon que $G^{i,j} = A_2$, B_2, G_2[(1)] ou $A_1 \times A_1$. Ce diagramme est appelé *schéma de Dynkin* du groupe G. On voit par exemple, en se reportant au tableau ci-dessus, que le schéma de Dynkin du groupe PGl(n+1,k) a l'allure suivante :



5.5. GROUPES DE RANG 2 ET SCHEMAS DE DYNKIN (SUITE).

Tel qu'il a été défini au n° 5.4, le schéma de Dynkin d'un groupe ne caractérise pas ce groupe; en effet, les groupes PSp(2m,k) (groupe projectif symplectique) et PO(2m+1,k) ont le même schéma : ——— ..... ═══. Ce fait trouve son origine dans un autre "défaut" de notre définition. Considérons le groupe $G = B_2 = G(Q)$, groupe des projectivités d'une hyperquadrique Q de l'espace projectif à 4 dimensions. Les sous-groupes S^1 et S^2 sont respectivement le stabilisateur d'une droite et le stabilisateur d'un point de Q; ces sous-groupes, et par conséquent les indices 1 et 2, ne jouent pas un rôle symétrique vis à vis de G, or cela n'apparaît pas dans le schéma ═══. Pour remédier à cet inconvénient, on conviendra d'affecter celui-ci d'une flèche dirigée, par exemple, vers celui des deux sommets qui correspond au stabilisateur du point de Q.

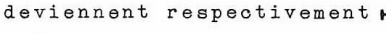
---

(1) Le groupe G_2 est habituellement représenté par un trait triple, mais il y a plusieurs raisons de modifier cette convention dans le

./.

- 40 -

J.Tits

Corrélativement, tous les doubles traits figurant dans le schémas de Dynkin devront être affectés de flèches (dont l'orientation est bien déterminée par la convention précédente parce que les groupes de rang 1 associés à $G^{i,j}$ ne sont autres que G^i et G^j). Pour une raison analogue, il y a lieu d'orienter le quadruple trait représentant G_2. Il n'en est pas de même, par contre, pour le simple trait représentent A_2; en effet, si $G = A_2$ est le groupe des projectivités d'un plan projectif, les sous-groupes S^1 et S^2 sont respectivement le stabilisateur d'une droite et le stabilisateur d'un point de ce plan, lesquels jouent un rôle symétrique en vertu du principe de dualité. La définition des schémas de Dynkin étant ainsi modifiée, les schémas des groupes PSp(2m,k) et PO(2m+1,k) deviennent respectivement  et . De façon générale, on a à présent le

THEOREME 12. *Deux groupes "semi-simples" G et G' sont (birationnellement) isomorphes si et seulement si leurs schémas de Dynkin le sont. Plus précisément, si on désigne par B (resp. B') un sous-groupe de Borel de G (resp. G'), et par* $S_{i_1,\dots,i_k}$ *(resp.* $S'_{i_1,\dots,i_k}$*) les sous-groupes de G contenant B (resp. de G' contenant B') (avec les notations du théorème 11), la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un isomorphisme (birationnel) de G sur G' appliquant* $S_{i_1,\dots,i_k}$ *sur* $S'_{i_1,\dots,i_k}$ *pour tout ensemble d'indices* $\{i_1,\dots,i_k\}$*, est que l'application du schéma de Dynkin de G sur le schéma de Dynkin de G' qui applique le i-ème sommet du premier sur le i-ème sommet du second soit un isomorphisme, c'est-à-dire respecte la multiplicité des traits et le sens des flèches.*

---

séns que nous indiquons; une de ces raisons apparaîtra au chapitre suivant.

REMARQUES. 1) La démonstration du théorème 12 est en fait étroitement liée à la détermination des groupes semi-simples; il nous a cependant paru souhaitable, attendu que les démonstrations sont de toute façon omises, d'énoncer ce théorème séparément, avant de donner la classification des groupes "semi-simples" (n.56).

2) On peut étendre la notation d'isomorphisme en admettant comme tels les homomorphismes rationnels bijectifs, et tous ceux qu'on en déduit par passage à l'inverse et composition (la structure invariante par ces nouveaux isomorphismes, plus faible que la structure de groupe algébrique, est appelée par J.P.Serre structure de groupe quasi-algébrique). Si l'on veut énoncer un théorème analogue au théorème 12 avec cette nouvelle notion d'isomorphisme, il y a lieu de modifier la définition des schémas de Dynkin dans le sens suivant :

1°) Lorsque k est de caractéristique 2, les doubles traits des schémas ne doivent pas être orientés (on retrouve en particulier le fait, déjà reconnu au chapitre I, n.3.1, exemple 3, que sur un corps de caractéristique 2, PSp(2m) et PO(2m+1) sont "isomorphes" au nouveau sens);

2°) Lorsque k est de caractéristique 3, les quadruples traits ne doivent pas être orientés.

5.6. CLASSIFICATION DES GROUPES "SEMI-SIMPLES".

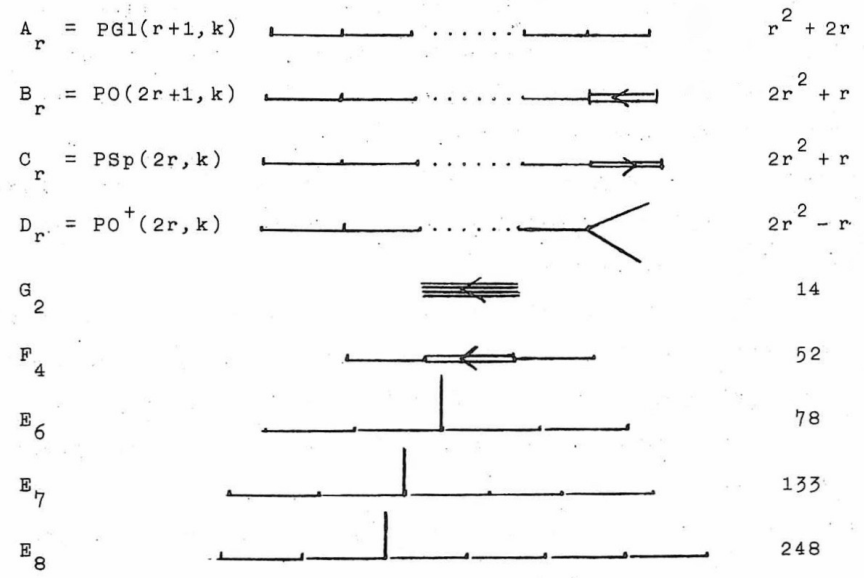
On appelle groupe *simple* un groupe qui ne possède pas de sous-groupe invariant connexe. Nous dirons que ce groupe est "simple" si, en outre, son centre est réduit à l'élément neutre (on peut montrer que, dans ce cas, le groupe est aussi simple en tant que groupe abstrait [1]).

(1) Rappelons que le corps de base est toujours supposé algébriquement clos.

- 42 -

J.Tits

THEOREME 13. *Quel que soit le corps* k, *les groupes algébriques "simples" se répartissent naturellement en quatre classes infinies et cinq types "exceptionnels". On les désigne par* $A_r (r \geq 1)$, $B_r (r \geq 2)$, $C_r (r \geq 3)$, $D_r (r \geq 4)$, G_2, F_4, E_r $(r = 6,7,8)$, *l'indice* $(r,2,4)$ *représentant chaque fois le rang du groupe. Le tableau suivant en donne les schémas de Dynkin, les dimensions, et, dans le cas des groupes "classiques", une interprétation géométrique :*



Les groupes "semi-simples" sont les produits directs de groupes "simples". Le schéma de Dynkin d'un tel produit direct est la réunion disjointe des schémas de Dynkin des facteurs.

REMARQUES. 1) La dernière affirmation, relative au schéma de Dynkin d'un produit direct est une conséquence immédiate de la proposition 15.

2) Les restrictions imposées dans l'énoncé précédent aux rangs des groupes B,C,D, visent à ce que les groupes énumérés

soient tous non isomorphes entre eux. Les groupes B_1, C_1, C_2, D_2 et D_3 sont naturellement définis mais l'examen des schémas de Dynkin fait apparaître les isomorphismes suivants, bien connus par ailleurs :

$$B_1 \cong C_1 = A_1 \ , \quad C_2 \cong B_2 \ , \quad D_2 \cong A_1 \times A_1 \ , \quad D_3 \cong A_3$$

En ce qui concerne D_1, qu'il est naturel de poser égal à $PO^+(2,k) \cong k$, il n'est pas semi-simple.

5.7. AUTOMORPHISMES. TRIALITE'. UNE DEFINITION DU GROUPE G_2.

Les schémas de Dynkin fournissent des renseignements non seulement sur les isomorphismes entre groupes distincts, mais encore sur les automorphismes d'un groupe donné. Soit G un groupe "semi-simple", B un sous-groupe de Borel et S_i les sous-groupes maximaux contenant B. Tout automorphisme de G est le produit d'un automorphisme conservant B par un automorphisme intérieur [1] ; en effet, l'automorphisme en question transforme B en un autre sous-groupe de Borel B', et il existe toujours un automorphisme intérieur transformant B en ce même B' (théorème 6). D'autre part, tout automorphisme intérieur conservant B est nécessairement l'automorphisme intérieur défini par un élément de B (théorème 7) et conserve par conséquent chacun des S_i ; on peut montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un automorphisme conservant B soit intérieur est qu'il conserve chaque S_i. De ces remarques et du théorème 12 résulte immédiatement le

(1) Le mot "automorphisme" est pris ici dans le sens d'"automorphisme birationnel", toutefois cette première conclusion est aussi valable pour les automorphismes du groupe "abstrait" G.

- 44 -

J.Tits

THEOREME 14. *Soient* G *un groupe "semi-simple",* A(G) *le groupe de tous les automorphismes (birationnels) de* G *et* I(G) *le groupe des automorphismes intérieurs. Alors* A(G)/I(G) *est isomorphe au groupe des automorphismes du schéma de Dynkin de* G. *En particulier, il est isomorphe au groupe symétrique* $\mathfrak{S}_3$ *lorsque* $G \tilde{=} D_4$, *à* Z_2 *lorsque* $G \tilde{=} A_r (r \geq 2)$, $D_r (r \geq 5)$ *ou* E_6, *et il est réduit à l'élément neutre lorsque* G *est l'un quelconque des autres groupes simples.*

Le cas du groupe $D_4 = PO^+(8,k)$ est particulièrement intéressant. Ce groupe possède des automorphismes extérieurs d'ordre 3; c'est une expression du "principe de trialité", de Study-Cartan. Si on les classe par rapport aux automorphismes intérieurs, les automorphismes extérieurs d'ordre 3 de D_4 sont de deux espèces; les uns ont pour groupe d'éléments fixes un groupe de dimension 14 isomorphe à G_2; les autres ont un groupe d'éléments fixes de dimension 8 qui est isomorphe à A_2 lorsque k n'est pas de caractéristique 3.

J.Tits

CHAPITRE IV

SOUS-GROUPES CONTENANT UN SOUS-GROUPE DE BOREL, II. GEOMETRIES ASSOCIEES.

§ 1. DEFINITIONS. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DES GROUPES "SEMI-SIMPLES".

1.1. ANALYSE D'UN CAS PARTICULIER: GROUPE A_n ET GEOMETRIE PROJECTIVE A n DIMENSIONS.

Le groupe A_n a une interprétation simple en géométrie projective: c'est le groupe des projectivités d'un espace projectif E à n dimensions sur k. Les résultats du chap.III, § 2, montrent comment on peut, réciproquement, reconstruire la géométrie projective à partir du groupe A_n. En effet, soient $G = A_n$ le groupe en question, B un sous-groupe de Borel, et $S_1, \ldots, S_n$ les sous-groupes maximaux de G contenant B. Nous avons vu que les S_i sont les stabilisateurs de variétés linéaires V_i, deux à deux incidentes, de l'espace E. Il s'ensuit que les espaces homogènes A/S_1, $A/S_2, \ldots, A/S_n$ sont respectivement l'ensemble des points, des droites,..., des hyperplans de E. Pour construire la géométrie projective, il est nécessaire de connaître, en plus de ces ensembles, la relation d'incidence entre variétés linéaires de dimensions différentes. Or, soient V'_i et V'_j deux variétés linéaires de dimensions respectives i-1 et j-1; elles sont représentées par les classes latérales de S_i et S_j formées respectivement des projectivités amenant V_i sur V'_i et des projectivités amenant V_j sur V'_j, soient $S_i f$ et $S_j g$. Les variétés V_i et V_j étant incidentes, il en sera de même de V'_i et V'_j si et seulement s'il existe une projectivité amenant simultanément

V_i sur V'_i et V_j sur V'_j, c'est-à-dire si $S_i f \cap S_j g \neq \emptyset$.

1.2. GEOMETRIES. GEOMETRIE ASSOCIEE A UN GROUPE G.

Les considérations du n° précédent suggèrent l'introduction des notations suivantes: Nous appellerons *géométrie* toute collection $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n; I\}$ formée d'ensembles $L_1, L_2, \ldots, L_n$, en nombre fini n, sur la réunion desquels est donnée une "relation d'incidence" I, correspondance symétrique dont la restriction à chacun des ensembles L_i est l'identité (i.e., deux éléments d'un même ensemble L_i ne sont incidents que s'ils sont confondus)[1]. Soient G un groupe affin connexe, B un sous-groupe de Borel et $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les sous-groupes maximaux de G contenant B; la *géométrie associée* à G sera la géométrie constituée par les ensembles $L_i = G/S_i$ et la relation d'incidence définie comme suit: deux éléments $S_i f \in G/S_i$ et $S_j g \in G/S_j$ sont incidents si $S_i f \cap S_j g \neq \emptyset$.

Il est immédiat que la géométrie associée à G est canoniquement isomorphe à la géométrie associée au quotient "semi-simple" de G. Il s'ensuit que la théorie des géométries associées concerne essentiellement les groupes "semi-simples", encore qu'il soit utile, pour la simplicité de certains énoncés, de définir la notion dans le cas général, comme nous l'avons fait.

1.3. EXEMPLES.

1) La géométrie associée à B_n est la "géométrie d'une hyper-

(1) Dans les considérations développées ici, aucun des ensembles $L_1, \ldots, L_n$ ne joue un rôle privilégié a priori; en particulier, s'il s'agit de géométrie projective, on ne fait pas de différence de principe entre les points et les autres variétés linéaires. Ce point de vue "abstrait" est celui qui donne aux résultats exposés la forme la plus simple et la plus symétrique; nous verrons au § 4 comment le point de vue "spatial", plus intuitif à certains égards, s'y rattache.

quadrique Q de dimension 2n-1": les L_i sont l'ensemble des points, l'ensemble des droites,..., et l'ensemble des variétés linéaires à n-1 dimensions de Q; deux variétés sont incidentes si l'une d'elles contient l'autre. (Cf. proposition 13).

2) La géométrie associée à D_n est la "géométrie d'une hyperquadrique Q de dimension 2n-2": les L_i sont l'ensemble des points, l'ensemble des droites,..., l'ensemble des variétés linéaires à n-3 dimensions, et les deux ensembles de variétés linéaires à n-1 dimensions de Q; deux variétés sont incidentes si l'une d'elles contient l'autre ou si ce sont deux variétés à n-1 dimensions d'espèces différentes dont l'intersection est une variété à n-2 dimensions. (Cf. proposition 14). On constate que les variétés à n-2 dimensions de Q ne sont pas des éléments de la géométrie associée à D_n; cette anomalie apparente s'explique par le fait qu'une telle variété détermine deux variétés à n-1 dimensions d'espèces différentes dont elle est l'intersection, et que la correspondance ainsi établie entre l'ensemble des variétés à n-2 dimensions de Q et l'ensemble des paires de variétés à n-1 dimensions incidentes (drapeaux: cf. § 2) est biunivoque.

3) La géométrie associée à C_n est la "géométrie d'une polarité nulle π dans un espace projectif à 2n-1 dimensions": les L_i sont l'ensemble des points de l'espace, l'ensemble des droites,... , et l'ensemble des variétés à n-1 dimensions appartenant à π (c'est-à-dire contenues dans leurs polaires); deux variétés sont incidentes si l'une d'elles contient l'autre.

4) La géométrie associée à un produit direct $G^{(1)} \times G^{(2)}$ est la "somme directe" des géométries associées à $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$, obtenue en considérant conjointement ces deux géométries et en convenant en outre que tout élément de la première est incident à tout

élément de la seconde. (Cf. proposition 15).

1.4. AUTOMORPHISMES. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DES GROUPES SEMI-SIMPLES.

Nous appellerons *automorphisme* d'une géométrie $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$, toute permutation de l'ensemble $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ qui conserve la partition de cet ensemble en les L_i, et la relation d'incidence I. Un automorphisme peut permuter entre eux les L_i; s'il les conserve individuellement, il sera dit *intérieur*. Par exemple, en géométrie projective, les collinéations sont des automorphismes intérieurs et les corrélations (dualités) sont des automorphismes *extérieurs* (non intérieurs).

Supposons que $\mathcal{L}$ soit la géométrie associée à un groupe G. les L_i sont alors des espaces homogènes de G, qui opère donc sur eux de façon naturelle. Il est clair que les permutations de L correspondant ainsi aux éléments de G sont des automorphismes intérieurs de $\mathcal{L}$. Si G est "semi-simple", il opère fidèlement sur L; cela résulte de ce que l'intersection des S_i est un sous-groupe de Borel (théorème 11) qui ne peut contenir aucun sous-groupe invariant non trivial de G (car tout sous-groupe invariant contenu dans un sous-groupe de Borel est contenu dans tous ces sous-groupes - en vertu du théorème 6 - donc aussi dans le "radical"). On a donc le

THEOREME 15. *Tout groupe affin connexe* G *opère naturellement comme groupe d'automorphismes intérieurs sur la géométrie qui lui est associée. Cette représentation de* G *est fidèle si (et seulement si)* G *est "semi-simple".*

REMARQUE. G n'est généralement pas le groupe de tous les automorphismes intérieurs de la géométrie associée; par exemple, la géométrie projective à n dimensions sur k a pour automorphismes inté-

rieurs non seulement les projectivités - éléments de $G = A_n$ - mais encore les collinéations appartenant aux automorphismes non triviaux de k (transformations semi-linéaires). Cependant, lorsque G ne possède pas de facteur direct de type A_1, ses éléments peuvent être caractérisés de façon "purement géométrique" (i.e. en utilisant seulement la relation d'incidence) parmi les automorphismes intérieurs de la géométrie associée (on sait par exemple que les projectivités se caractérisent aisément parmi les collinéations (1)). D'autre part, si on tient compte du fait que les $L_i = G/S_i$ sont des variétés algébriques, on peut définir, de façon évidente, les *automorphismes birationnels* de la géométrie associée à G, et dans tous les cas,

G est le groupe de tous les automorphismes birationnels de la géométrie associée.

Nous ne démontrerons pas cette proposition.

1.5. CHAINES.

$\mathcal{L}$ désignant une géométrie quelconque, on appellera *chaîne* (finie), toute suite (finie) d'éléments de $\mathcal{L}$ tels que deux éléments consécutifs quelconques de la suite soient incidents. Le théorème suivant exprime une sorte de propriété de "connexité" pour les géométries associées aux groupes semi-simples.

THEOREME 16. *Soit* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ *la géométrie associée à un groupe semi-simple. Deux éléments quelconques* d *et* e *de* $\mathcal{L}$ *sont toujours les extrémités d'une chaîne finie, dont on peut supposer en outre que tous les éléments, à l'exception des extré-*

(1) Cf. [11], p.71. Nous appellons "projectivités", ce que Veblen et Young nomment "projective collinéations".

mités d *et* e, *appartiennent alternativement à deux ensembles* L_i *et* L_j *donnés, arbitrairement choisis.*

DEMONSTRATION. Reprenons les notations du n° 1.2, et soient $d = S_k f$, $e = S_1 g$ $(f, g \in G)$, $L_i = G/S_i$, $L_j = G/S_j$. Le sous-groupe de G engendré par S_i et S_j contient S_i et est donc confondu avec G, puisque S_i est un sous-groupe maximal de G. Il existe par conséquent des éléments $f_1, f_2, \ldots, f_p \in S_i$ et des éléments $g_1, g_2, \ldots, g_p \in S_j$ tels que $gf^{-1} = g_p f_p g_{p-1} f_{p-1} \cdots g_1 f_1$. Mais alors, on vérifie aisément que la suite d'éléments

$$d = S_k f \ , \quad S_i f = S_i f_1 f \ , \quad S_j f_1 f = S_j g_1 f_1 f \ ,$$

$$S_i g_1 f_1 f = S_i f_2 g_1 f_1 f \ , \ldots ,$$

$$S_j f_p g_{p-1} \cdots g_1 f_1 f = S_j g \ , \quad S_1 g = e$$

est une chaîne jouissant des propriétés requises.

§ 2. DRAPEAUX ET SOUS-GROUPES DE BOREL.

Etant donnée une géométrie quelconque $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n ; I\}$, nous appellerons *drapeaux d'espèce* $(i_1, \ldots, i_p)$ les ensembles formés d'un élément de L_{i_1}, d'un élément de L_{i_2}, ..., et d'un élément de L_{i_p} deux à deux incidents, et *drapeaux complets* les drapeaux d'espèce $(1, 2, \ldots, n)$ [1]. Les résultats du chapitre III, §§ 2 et 3, se généralisent alors de la façon suivante:

THEOREME 17. *Soient* G *un groupe affin connexe et* $\mathcal{L}$ *la géométrie associée. Les sous-groupes de* G *qui contiennent un sous-groupe de*

(1) On notera que cette terminologie diffère légèrement de celle adoptée au chapitre III où nous appelions drapeaux (resp. drapeaux partiels) ce que nous nommons à présent drapeaux complets (resp. drapeaux).

Borel sont les stabilisateurs (dans G*) des drapeaux de* $\mathcal{L}$ [1]. *De façon plus précise, étant donné un sous-groupe* S *contenant un sous-groupe de Borel, les éléments de* $\mathcal{L}$ *invariants par* S *forment un drapeau dont* S *est le stabilisateur; réciproquement, le stabilisateur d'un drapeau quelconque est un sous-groupe contenant un sous-groupe de Borel, dont les seuls éléments invariants dans* $\mathcal{L}$ *sont les éléments du drapeau en question. Ainsi est établie une correspondance biunivoque, renversant les inclusions, entre les drapeaux de* $\mathcal{L}$ *et les sous-groupes de* G *qui contiennent un sous-groupe de Borel. En particulier, les drapeaux complets de* $\mathcal{L}$ *correspondent aux sous-groupes de Borel eux-mêmes.*

De ce théorème, il résulte immédiatement que

COROLLAIRE 1. *Tout drapeau est partie d'un drapeau complet.*

D'autre part, tenant compte du théorème 6, on a le

COROLLAIRE 2. *Le groupe* G *opère transitivement sur les drapeaux complets, donc aussi (en vertu du corollaire* 1*) sur les drapeaux d'espèce donnée quelconque.*

Celui-ci peut encore s'énoncer de la façon suivante:

COROLLAIRE 2'. *Soient* $S_1, S_2, \ldots, S_p$ *des sous-groupes maximaux de* G *contenant un même sous-groupe de Borel* B, *et* $g_1, g_2, \ldots, g_p$ *des éléments de* G. *Si, pour tous* i, j = 1, 2, ..., p, *on a* $S_i g_i \cap S_j g_j \neq \emptyset$, *alors* [2]

$$\bigcap_{i=1}^{p} S_i g_i \neq \emptyset .$$

---

(1) Il faut se rappeler que, d'après le théorème 15, G opère sur la géométrie associée.

(2) En fait, la proposition reste vraie quels que soient les sous-groupes S_i de G contenant B, l'hypothèse que ce sont des sous-groupes maximaux étant superflue; c'est une conséquence à peine moins immédiate du théorème 17.

En effet, la condition $S_i g_i \cap S_j g_j \neq \emptyset$ exprime que l'ensemble $(S_1 g_1, S_2 g_2, \ldots, S_p g_p)$ est un drapeau, auquel cas, le corollaire 2 assure l'existence d'un élément $g \in G$ tel que $(S_1, S_2, \ldots, S_p)g = (S_1 g_1, S_2 g_2, \ldots, S_p g_p)$, c'est-à-dire tel que $g \in S_i g_i$ pour tout i.

Lorsque $p = 3$, le corollaire 2' peut s'exprimer sous la forme d'une relation simple entre S_1, S_2, S_3. En effet, puisque $S_1 g_1 \cap S_2 g_2 \neq \emptyset$, on peut supposer, sans nuire à la généralité, que $g_1 = g_2$. Posons $h = g_3 g_1^{-1}$. Les relations $S_i g_i \cap S_j g_j \neq \emptyset$ se réduisent alors à

$$S_1 \cap S_3 h \neq \emptyset \quad , \qquad S_2 \cap S_3 h \neq \emptyset \ ,$$

c'est-à-dire à

$$(2.1) \qquad h \in S_3 S_1 \quad , \qquad h \in S_3 S_2 \ ,$$

et la relation $\bigcap_i S_i g_i \neq \emptyset$ peut s'écrire

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 h \neq \emptyset \ ,$$

ou encore

$$(2.2) \qquad h \in S_3 (S_1 \cap S_2)$$

Ainsi, le corollaire 2' affirme, dans ce cas particulier, que les relations (2.1) entrainent la relation (2.2). La réciproque étant évidente, on peut, tenant compte de la note (1) au bas de la page 51, énoncer la

PROPOSITION 16. *Si S_1, S_2 et S_3 désignent trois sous-groupes de G contenant un même sous-groupe de Borel, on a la relation*

$$S_3 (S_1 \cap S_2) = S_3 S_1 \cap S_3 S_2 \ .$$

En ce qui concerne la démonstration du théorème 17, nous nous

bornerons à montrer comment, tenant compte des résultats du chapitre III, elle peut se ramener à la démonstration de la seule proposition 16 (1).

Supposons donc établie cette proposition ou, ce qui revient au même, le corollaire 2', pour p = 3. Remarquons tout d'abord que ce corollaire (donc aussi le corollaire 2) s'en déduit immédiatement, par induction, pour toute valeur de p. En effet, supposons le corollaire démontré lorsqu'on y remplace p par un nombre strictement plus petit, et posons $G^* = S_p$, $S_i^* = S_p \cap S_i$ $(i = 1,2,\ldots,p-1)$, $g_i^* = g_i g_p^{-1}$. Puisque $S_i g_i \cap S_p g_p \neq \emptyset$, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que $g_i^* \in S_p$ pout tout i. On a alors

$$S_i^* g_i^* \cap S_j^* g_j^* = (S_i g_i \cap S_j g_j \cap S_p g_p) g_p^{-1} \neq \emptyset \quad ,$$

d'où

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{p-1} S_i^* g_i^* = \left(\bigcap_{i=1}^{p} S_i g_i\right) g_p^{-1} \quad .$$

Pour établir le théorème 17, nous aurons encore besoin du

LEMME 4. *Deux sous-groupes distincts contenant un même sous-groupe de Borel ne sont jamais conjugués.*

En effet, soient S et $g^{-1}Sg$ deux sous-groupes conjugués de G, contenant un même sous-groupe de Borel B. Puisque $B \subseteq g^{-1}Sg$, $gBg^{-1} \subseteq S$. Mais alors, B et gBg^{-1}, qui sont deux sous-groupes de Borel de S, sont conjugués dans S, c'est-à-dire qu'il existe un élément $h \in S$ tel que $h^{-1}Bh = gBg^{-1}$, d'où $hgBg^{-1}h^{-1} = B$. En vertu du théorème 7, il en résulte que $hg \in B$, d'où $g^{-1}Sg = g^{-1}h^{-1}Shg = S$, c.q.f.d..

---

(1) Celle-ci se déduit assez aisément du corollaire 1 de [4], p.13-11 ("lemme de Bruhat").

- 54 -

J.Tits

Nous en venons à présent à la démonstration du théorème. Soit S un sous-groupe de G contenant un sous-groupe de Borel; nous voulons montrer que les éléments de la géométrie $\mathcal{L}$ associée à G qui sont invariants par S forment un drapeau dont S est le stabilisateur. En vertu des théorèmes 6 et 11, on ne nuit pas à la généralité en supposant que S est de la forme $S = S_{i_1,\ldots,i_p} = S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_p}$ (les notations étant celles du n° 1.2). Soit $S_i g$ un élément de $\mathcal{L}$ invariant par S. Son stabilisateur $g^{-1}S_i g$ contient S donc on a $g^{-1}S_i g = S_{i_m}$ pour un certain m (cf. théorème 11). Mais alors, en vertu du lemme précédent et du corollaire 1 au théorème 11, $S_i = S_{i_m}$ et $g \in S_{i_m}$, d'où $S_i g = S_{i_m}$. Ainsi, les S_{i_m} $(m = 1,\ldots,p)$ sont les seuls éléments de $\mathcal{L}$ invariants par S. Notre assertion en résulte immédiatement.

Réciproquement, considérons un drapeau quelconque. Nous devons montrer que son stabilisateur contient un sous-groupe de Borel et ne conserve aucun élément de $\mathcal{L}$ en dehors des éléments du drapeau donné. Faisant appel au corollaire 2, nous pouvons supposer que le drapeau en question est de la forme $(S_{i_1},\ldots, S_{i_p})$. Mais alors, la proposition en question devient évidente. Le théorème 17 est ainsi démontré (modulo la proposition 16).

REMARQUE. Dans la définition de la géométrie $\mathcal{L}$ associée à un groupe G, nous avons utilisé seulement les espaces homogènes G/S_i correspondant aux sous-groupes maximaux S_i de G contenant un sous-groupe de Borel B donné. On pourrait aussi considérer la géométrie $\mathcal{M}$ constituée par les espaces homogènes $G/S_{i_1,\ldots,i_p}$, correspondant à tous les sous-groupes de G contenant B, la relation d'incidence étant définie comme au n° 1.2. Le théorème 17 montre que $\mathcal{M}$ n'est autre que la "géométrie des drapeaux de $\mathcal{L}$ ": les éléments de $\mathcal{M}$ sont les drapeaux de $\mathcal{L}$, les ensembles constituant $\mathcal{M}$ sont les

ensembles de drapeaux d'espèce donnée, et deux drapeaux sont incidents si tout élément du premier est incident à tout élément du second.

Nous prendrons cette dernière propriété comme définition générale de l'incidence de deux drapeaux. En d'autres termes:

DEFINITION. Dans une géométrie quelconque, deux *drapeaux* seront dits *incidents* si leur réunion est encore un drapeau.

§ 3. GEOMETRIE ASSOCIEE ET SCHEMA DE DYNKIN.

3.1. SOMMETS DU SCHEMA ET ENSEMBLES CONSTITUANT LA GEOMETRIE.

Il résulte immédiatement des définitions que *les ensembles constituant la géométrie* $\mathfrak{L}$ *associée à un groupe "semi-simple"* G *sont en correspondance biunivoque naturelle avec les sommets du schéma de Dynkin* Δ *de* G.

Pour tout sommet s de Δ, nous désignerons par L_s (ou éventuellement par un autre symbole affecté de l'indice s) l'ensemble d'éléments de $\mathfrak{L}$ qui lui correspond.

EXEMPLES. 1) Soit $G = A_n$, d'où

$$\Delta = \overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{3}{\bullet}\!\!-\cdots-\!\!\overset{n-2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{n-1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{n}{\bullet} \quad .$$

$\mathfrak{L}$ est alors la "géométrie d'un espace projectif à n dimensions" et L_i est l'ensemble des variétés linéaires à i-1 dimensions de cet espace.

2) Soit $G = D_n$, d'où

$$\Delta = \overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{3}{\bullet}\!\!-\cdots-\!\!\overset{n-3}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{n-2}{\bullet}\!\!<\!\!\begin{matrix}\overset{n'}{\bullet}\\ \underset{n''}{\bullet}\end{matrix} \quad .$$

$\mathfrak{L}$ est la "géométrie d'une hyperquadrique Q de dimension 2n-2", L_i (i = 1,...,n-2) est l'ensemble des variétés linéaires à i-1

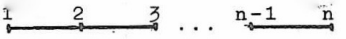
dimensions de Q, et $L_{n'}$ et $L_{n''}$ sont les deux ensembles de variétés linéaires à n-1 dimensions de Q.

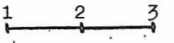
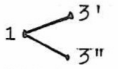
3.2. ISOMORPHISMES.

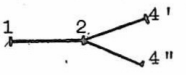
Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 12.

THEOREME 18. *Soient* G *et* G' *deux groupes isomorphes,* Δ *et* Δ' *leurs schémas de Dynkin,* $\mathfrak{L} = \{L_1, \ldots\}$ *et* $\mathfrak{L}' = \{L'_1, \ldots\}$ *les géométries associées, et* α *un isomorphisme de* Δ *sur* Δ' *. Alors, il existe des isomorphismes (birationnels) de* $\mathfrak{L}$ *sur* $\mathfrak{L}'$ *qui transforment* L_s *en* $L'_{\alpha(s)}$, *pour tout sommet* s *de* Δ .

Plusieurs théorèmes classiques se retrouvent comme applications de celui-ci.

EXEMPLES. 1) Le schéma  est invariant par la permutation échangeant les sommets équidistants des extrêmes. La géométrie projective à n dimensions sur k possède donc des automorphismes permutant l'ensemble des points et l'ensemble des hyperplans, l'ensemble des droites et l'ensemble des variétés linéaires à n-2 dimensions, etc. C'est le *principe de dualité.*

2) Considérons les schémas  de A_3 et  de D_3. Il existe un isomorphisme du premier sur le second qui transforme les sommets 2, 1, 3 respectivement en les sommets 1, 3', 3". Il existe donc des isomorphismes de la géométrie d'un espace projectif P à 3 dimensions sur la géométrie d'une hyperquadrique Q à 4 dimensions qui font correspondre les points de Q aux droites de P, et les deux espèces de plans de Q respectivement aux points et aux plans de P. Q est l'*hyperquadrique de Klein* bien connue.

3) Le schéma  de D_4 est invariant pour

toute permutation des sommets 1, 4' et 4" (2 étant conservé). La géométrie d'une hyperquadrique Q à 6 dimensions possède donc des automorphismes permutant de façon arbitraire l'ensemble des points et les deux ensembles de variétés à 3 dimensions de Q, et conservant l'ensemble des droites. C'est le *principe de trialité* de Study-Cartan.

3.3. GEOMETRIES RESIDUELLES. THEOREME DE RESIDUATION.

La structure du schéma de Dynkin Δ d'un groupe "semi-simple" G est étroitement liée au propriétés de la géométrie $\mathcal{L}$ associée à G. Ce lien est exprimé par le théorème 19 ci-dessous (*théorème de résiduation*), qui met en rapport les parties de Δ et certaines sous-géométries de $\mathcal{L}$, ses géométries *résiduelles*.

DEFINITION. Soient $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n; I\}$ une géométrie quelconque, d'un drapeau d'espèce $(i_1, \ldots, i_p)$ (éventuellement réduit à un seul élément, si $p = 1$), et L_{id} l'ensemble des éléments de L_i incidents à d. Nous appellerons *géométrie résiduelle* de $\mathcal{L}$ par rapport à d, la géométrie $\mathcal{L}_d$ constituée par les n-p ensembles L_{id} $(i \neq i_1, \ldots, i_p)$, la relation d'incidence étant la restriction à ceux-ci de la relation d'incidence I de $\mathcal{L}$.

THEOREME 19. *Soient G un groupe "semi-simple", Δ son schéma de Dynkin, $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ la géométrie associée, $i_1, i_2, \ldots, i_p$, p sommets de Δ, et d un drapeau d'espèce $(i_1, \ldots, i_p)$* [1] *(si p = 1, d est un élément de $\mathcal{L}$). Alors, la géométrie $\mathcal{L}_d = \{L_{id} (i \neq i_1, \ldots, i_p); I\}$, résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à d, est (canoniquement isomorphe à) la géométrie associée au groupe "semi-simple" dont le schéma de Dynkin Δ' s'obtient en retirant de Δ les sommets $i_1, \ldots, i_p$ et tous les traits qui y aboutissent. La*

(1) C'est-à-dire un drapeau formé d'un élément de l'ensemble L_{i_1}, correspondant au sommet i_1 (Cf. n° 3.1), d'un élément de l'ensemble L_{i_2} correspondant au sommet i_2, etc.

correspondance canonique entre les ensembles constituant $\mathcal{L}_d$ *et les sommets de* Δ' *est celle qui associe à tout* L_{id} $(i = i_1, \ldots, i_p)$ *le sommet* i *de* Δ, *considéré comme sommet de* Δ'.

EXEMPLE. La géométrie résiduelle de la géométrie projective à n dimensions sur k par rapport à une variété linéaire à i-1 dimensions est constituée par les variétés contenues dans celle-ci et celles qui la contiennent. C'est donc la somme directe (cf. n° 1.3, exemple 4)) d'une géométrie projective à i-1 dimension et d'une géométrie projective à n-i dimensions. Cela correspond au fait que si on retire du schéma $\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{3}{\bullet}\ \ldots\ \overset{n-1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{n}{\bullet}$ de A_n le sommet i, on obtient le schéma

$$\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}\ \ldots\ \overset{i-2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{i-1}{\bullet}\qquad \overset{i+1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{i+2}{\bullet}\ \ldots\ \overset{n-1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{n}{\bullet}\ ,$$

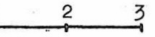
réunion disjointe des schémas de Dynkin de A_{i-1} et de A_{n-i}.

DEMONSTRATION DU THEOREME 19. On se ramène immédiatement, par induction, au cas où p = 1. Reprenant les notations du n° 1.2, nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que d est l'un des S_i, soit pour fixer les idées S_1. L'ensemble L_{id} est alors l'ensemble des classes latérales de S_i qui rencontrent S_1, lesquelles correspondent biunivoquement et canoniquement aux classes latérales de $S_1 \cap S_i = S_{1,i}$ dans S_1. Si deux éléments $S_i g$ et $S_j h$ appartenant respectivement à L_{id} et à L_{jd} (i.e. $S_i g \cap S_1 \neq \emptyset \neq S_j h \cap S_1$) sont incidents, on a $S_i g \cap S_j h \neq \emptyset$, donc aussi, en vertu du corollaire 2' au théorème 17, $S_i g \cap S_j h \cap S_1 \neq \emptyset$. Par conséquent deux éléments appartenant à L_{id} et à L_{jd} sont incidents si et seulement si les classes latérales de $S_{1,i}$ et $S_{1,j}$ dans S_1 qui leur correspondent ont une intersection non vide. Tenant compte du fait que les groupes $S_{1,i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ sont les sous-groupes maximaux de S_1 qui contiennent le sous-groupe de Borel B (en

vertu du théorème 11), on voit que $\mathcal{L}_d$ n'est autre que la géométrie associée au groupe S_1, ou encore, la géométrie associée au quotient "semi-simple" de S_1, lequel a pour schéma de Dynkin le schéma Δ' obtenu en retirant de Δ le sommet 1 (en vertu du théorème 11 et de la définition du schéma de Dynkin donnée au chapitre III, § 5). La dernière assertion de l'énoncé est immédiate.

3.4. APPLICATIONS.

Le théorème 19 permet, dans une certaine mesure, de ramener l'étude d'une géométrie "compliquée" à celle d'autres géométries "plus simples". C'est ce qui fait son intérêt notamment pour l'étude des géométries associées aux groupes exceptionnels F_4, E_6, E_7, E_8. A titre d'exemple, nous énonçons plus loin (propositions 17 à 20) quelques propriétés de ces géométries qui peuvent être établies à l'aide du théorème 19. Il serait trop long de donner ici les démonstrations de ces propriétés (1) ; nous nous bornerons à illustrer la méthode utilisée en l'appliquant à un cas plus simple.

Considérons la géométrie $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3; I\}$ associée au groupe A_3 de schéma 

. Nous nous proposons de montrer que deux éléments distincts $e, e' \in L_1$ sont incidents simultanément à un et un seul élément $d \in L_2$. Il s'agit évidemment d'une propriété bien connue, puisque L_1 et L_2 sont respectivement l'ensemble des points et l'ensemble des droites d'un espace projectif à 3 dimensions, mais *notre but est de l'établir en faisant seulement usage des théorèmes* 16 *et* 19, *et des propriétés de géométries "plus simples" que* $\mathcal{L}$, à savoir, les géométries associées au groupe A_2 de schéma (géométrie projective à 2 dimen-

(1) On en trouvera certaines dans [6], [7].

sions) et au groupe $A_1 \times A_1$ de schéma + + (somme directe de deux géométries projectives à 1 dimension) . Soit

(3.4.1) $$e = e_1 - d_1 - e_2 - \ldots - d_q - e_{q+1} = e'$$

une chaîne (le trait d'union symbolise l'incidence) d'éléments appartenant alternativement à L_1 et à L_2; l'existence d'une telle chaîne est assurée par le théorème 16. En vertu du théorème 19, la géométrie $\mathcal{L}_{e_2} = \{L_{2e_2}, L_{3e_2}; I\}$, résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à e_2, est une géométrie projective à 2 dimensions; il s'ensuit que d_1 et d_2, qui sont des éléments de L_{2e_2}, sont incidents à un même élément de L_{3e_2}, soit f_1. En remplaçant e_2 par f_1 dans (3.4.1), on obtient une nouvelle chaîne

(3.4.2) $$e = e_1 - d_1 - f_1 - d_2 - \ldots - d_q - e_{q+1} = e'.$$

Toujours d'après le théorème 19, la géométrie $\mathcal{L}_{d_1} = \{L_{1d_1}, L_{3d_1}; I\}$ résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à d_1, est la somme directe de deux géométries projectives à 1 dimension, donc tout élément de L_{1d_1} est incident à tout élément de L_{3d_1}; en particulier, e_1 est incident à f_1. Pour une raison analogue, f_1 est incident a e_3 et on peut donc remplacer la chaîne (3.4.2) par

(3.4.3) $$e = e_1 - f_1 - e_3 - d_3 - \ldots - d_q - e_{q+1} = e' .$$

Considérant à présent la géométrie $\mathcal{L}_{f_1}$, résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à f_1, et appliquant à nouveau le théorème 19, on voit qu'il existe un élément $d_1' \in L_{2f_1}$ incident à e_1 et à e_3, d'où le chaîne

(3.4.4) $$e = e_1 - d_1' - e_3 - d_3 - \ldots - d_q - e_{q+1} = e' .$$

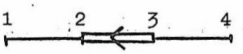
par induction, qu'il existe au moins un élément de L_2 incident à e et à e'. Supposons que cet élément ne soit pas unique, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne "fermée"

(3.4.5) $\qquad e - d - e' - d' - e \qquad (d \neq d')$.

En raisonnant comme plus haut, on voit qu'il existe, dans la géométrie résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à e' un élément $f \in L_{3e'}$ incident à d et à d', et que cet élément est aussi incident à e. Mais alors, e, e', d et d' appartiennent tous à la géométrie résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à f et dans celle-ci, qui est une géométrie projective à deux dimensions, l'existence d'une chaîne fermée du type (3.4.5) est exclue. La propriété est ainsi démontrée.

Les propositions suivantes peuvent être établies par des raisonnements analogues (quoique plus longs), où intervient de façon répétée le théorème 19, et faisant seulement usage, pour le reste, des propriétés d'incidence élémentaires des espaces projectifs et des hyperquadriques (1).

PROPOSITION 17. *Dans la géométrie* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_4; I\}$ *associée au groupe* F_4 *de schéma*



étant donnés deux éléments $d \in L_1$ *et* $e \in L_4$, *il existe toujours un élément* $e' \in L_4$ *et un élément* $d' \in L_1$ *respectivement in-*

(1) Peu de temps avant de faire le cours auquel se rapportent ces notes, nous avons obtenu des théorèmes généraux, concernant les chaînes d'éléments dans la géométrie associée à un groupe semi-simple quelconque, théorèmes dont les propositions 17 à 20 sont des cas particuliers. Les démonstrations de ces propositions basées sur l'emploi du théorème 19 sont donc quelque peu dépassées. Il nous a cependant semblé utile de les mentionner ici, et d'esquisser par un exemple simple la méthode utilisée, qui met en évidence la portée de ce théorème.

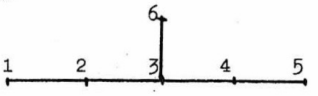
cidents à d *et à* e, *et qui soient incidents entre eux, c'est-à-dire tels que* d-e'-d'-e *soit une chaîne;*

étant donnés deux éléments $d \in L_1$ *et* $e \in L_2$, *il existe des éléments* d', d" $\in L_1$ *et des éléments* e', e" $\in L_2$ *tels que* d-e'-d'-e"-d"-e *soit une chaîne;*

dans l'énoncé précédent, les indices 1, 2 *peuvent être remplacés respectivement par* 3, 4;

etc.

PROPOSITION 18. *Dans la géométrie* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_6; I\}$ *associée au groupe* E_6 *de schéma*



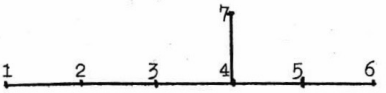
,

étant donnés deux éléments d, d' $\in L_1$ *(resp.* L_5*), il existe un élément* $e \in L_5$ *(resp.* L_1*) incident à chacun d'eux (c'est-à-dire tel que* d-e-d' *soit une chaîne);*

étant donnés un élément $d \in L_6$ *et un élément* $e \in L_i$ (i = 1, 2, 3, 4, 5), *il existe un élément* e' $\in L_i$ *et un élément* d' $\in L_j$ (j = *resp.* 2, 5, 6, 1, 4) *tels que* d-e'-d'-e *soit une chaîne;*

etc.

PROPOSITION 19. *Dans la géométrie* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_7; I\}$ *associée au groupe* E_7 *de schéma*



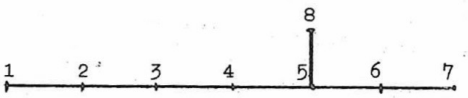
étant donnés un élément $d \in L_6$ *et un élément* $e \in L_i$ (i = 1, 2, 7), *il existe un élément* d' $\in L_j$ (j = *resp.* 2, 6, 1) *et un élément* e' $\in L_i$ *tels que* d-e'-d'-e *soit une chaîne;*

étant donnés un élément $d \in L_i$ (i = 2, 5) *et un élément* $e \in I_j$ (j = *resp.* 4, 6), *il existe des éléments* d', d" $\in L_i$ *et des élé-*

ments e', e" $\in L_j$ *tels que* d-e'-d'-e"-d"-e *soit une chaîne;*

etc.

PROPOSITION 20. *Dans la géométrie* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_8; I\}$ *associée au groupe* E_8 *de schéma*



étant donnés un élément d $\in L_1$ *et un élément* e $\in L_7$, *il existe des éléments* d' $\in L_1$ *et* e' $\in L_7$ *tels que* d-e'-d'-e *soit une chaîne;*

étant donnés un élément d $\in L_i$ (i = 1, 4) *et un élément* e $\in L_j$ (j = *resp.* 2, 7), *il existe des éléments* d', d" $\in L_i$ *et* e', e" $\in L_j$ *tels que* d-e'-d'-e"-d"-e *soit une chaîne;*

etc.

REMARQUE. Dans l'exemple du groupe A_3, traité plus haut, on a pu, à l'aide des théorèmes 16 et 19, établir non seulement l'existence mais encore l'unicité de l'élément d incident à e et e'. Il s'agit cependant d'une circonstance particulière aux groupes A_n (et aux produits directs de tels groupes). Dans les autres cas, les théorèmes en question permettent seulement d'établir des théorèmes d'existence, du type des propositions 17 à 20. Toutefois, ceux-ci peuvent encore être complétés par des théorèmes d'unicité[1] qu'on démontre à l'aide d'un autre théorème général: le théorème 20 ci-dessous. Nous en verrons un exemple à la fin du § 4, où on trouvera encore d'autres exemples d'applications du théorème 19.

---

(1) Dont les énoncés peuvent être relativement compliqués cf. p.ex. [6], [7], [10].

- 64 -

J.Tits

§ 4. LE POINT DE VUE SPATIAL.

4.1. OMBRES.

Classiquement, les variétés linéaires d'un espace projectif sont le plus sovent considérées comme des ensembles de points, plutôt que comme des éléments "abstraits" liés par une relation d'incidence. Le lien entre ces deux conceptions peut être réalisé par l'intermédiaire de la notion d'"ombre".

DEFINITION. Soient $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ une géométrie quelconque et A, B deux parties de l'ensemble $L = \bigcup L_i$ des éléments de $\mathcal{L}$. Nous appellerons *ombre* de B sur A l'ensemble des éléments de A incidents à tous les éléments de B. Notons immédiatement le

COROLLAIRE. *L'intersection d'une famille quelconque d'ombres (de parties de* L*) sur* A *est elle-même une ombre. En particulier, les ombres sur* A *forment un treillis.*

Revenons à l'exemple de la géométrie projective. On voit que les variétés linéaires (à l'exception de l'ensemble vide et de l'espace tout entier), considérées comme ensembles de points, sont les ombres des éléments de la géométrie sur l'ensemble des points. Par analogie, étudiant une géométrie quelconque $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ on peut donner un rôle privilégié à l'un des ensembles L_i, soit L_m, dont les éléments sont baptisés "points", et représenter les autres éléments de la géométrie par leurs ombres sur L_m. Cette représentation n'est satisfaisante ("fidèle") que si deux éléments distincts ont toujours des ombres différentes. Lorsque $\mathcal{L}$ est la géométrie associée à un groupe "semi-simple" G, *cette condition est remplie (quel que soit* L_m*) si et seulement si* G *est simple*[1]

---

(1) Lorsque G n'est pas simple, il faut remplacer L_m par des ensembles de drapeaux convenablement choisis.

- 65 -

J.Tits

Soient $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ une géométrie projective, $L = \bigcup L_i$ l'ensemble de tous ses éléments, et L_1 l'ensemble des points. Le fait fondamental que l'intersection de toute famille de variétés linéaires est encore une variété linéaire peut s'exprimer comme suit: l'ombre de toute partie de L sur L_1 est soit l'ensemble vide, soit L_1 lui-même, soit l'ombre sur L_1 d'un élément unique. Ceci n'est en général plus vrai lorsqu'on remplace $\mathcal{L}$ par la géométrie associée à un groupe G quelconque et L_1 par l'un quelconque des L_i. Cependant, on a, dans tous les cas, le

THEOREME 20. *Soient* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ *la géométrie associée à un groupe* G *quelconque, et* A, B *deux parties quelconques de l'ensemble* $\bigcup L_i$ *des éléments de* $\mathcal{L}$ *. Alors, l'ombre de* B *sur* A *est soit l'ensemble vide, soit* A *tout entier, soit l'ombre sur* A *d'un drapeau de* $\mathcal{L}$ *.*

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

EXEMPLE. Soient $\mathcal{L}$ la "géométrie d'une hyperquadrique Q de dimension 2n" ($G = D_{n+1}$), et $A = L_1$ l'ensemble des points de Q. Les ombres des parties de L sur L_1 sont l'ensemble L_1 lui-même (ombre de l'ensemble vide) et toutes les sous-variétés linéaires de l'hyperquadrique. Celles-ci sont toutes des ombres d'éléments de $\mathcal{L}$, à l'exception de l'ensemble vide *et des variétés à n-1 dimensions;* ces dernières sont les ombres des drapeaux formés par deux variétés à n dimensions, d'espèces différentes, incidentes entre elles (cf. 1.3., exemple 2)).

REMARQUES. 1) Le théorème 20 reste vrai lorsqu'on remplace A et B par des parties de l'ensemble M de tous les drapeaux de $\mathcal{L}$ (on définit de façon évidente l'ombre d'une partie de M sur une autre partie de M).

2) Lorsqu'on étudie la géométrie $\mathcal{L}$ associée à un grou-

pe G du point de vue spatial décrit plus haut, L_m étant pris comme ensemble de points, ce sont les ombres sur L_m de toutes les parties de $L = \bigcup L_i$ (c'est-à-dire essentiellement les ombres des drapeaux de $\mathcal{L}$, en vertu du théorème 20) - et non pas seulement les ombres des éléments de $\mathcal{L}$ - qui apparaissent comme la généralisation la plus naturelle des variétés linéaires des espaces projectifs, ceci en raison notamment de la propriété exprimée par le corollaire à la définition des ombres (v. plus haut).

4.2. CLASSIFICATION DES OMBRES. INCIDENCE ET INCLUSION.

$\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ désignera toujours, dorénavant, la géométrie associée à un groupe G, de schéma Δ.

Cherchons à décrire le treillis des ombres des parties de L sur un "ensemble de points" L_m, choisi une fois pour toutes parmi les L_i [(1)], et, avant tout, à classer ces ombres par rapport à l'action du groupe G (i.e. à voir ce que devient, dans le cas général, la classification des variétés linéaires d'un espace projectif en variétés des diverses dimensions). Le théorème 20 montre que le nombre des classes est fini (puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'espèces de drapeaux - il faut aussi tenir compte du corollaire 2 au théorème 17 -), mais donne par ailleurs une image encore très imparfaite de la situation, comme le montre l'exemple de la géométrie projective, où l'ombre d'un drapeau quelconque sur l'ensemble des points coïncide toujours avec l'ombre d'un élément unique. Ceci nous amène à poser la question

(i) Quand deux drapeaux ont-ils la même ombre sur L_m?

Celle-ci est naturellement liée à une autre question, celle

(1) Tout ce qui suit reste vrai pratiquement sans modification lorsqu'on remplace L_m par l'ensemble des drapeaux d'espèce donnée quelconque.

de l'"interprétation spatiale" de la relation d'incidence. Dans le cas de la géométrie projective, l'incidence entre deux variétés linéaires se traduit par le fait que l'ombre de l'une contient l'ombre de l'autre, mais il n'en est pas toujours ainsi (cf. 1.3., exemple 2)). D'où la question

(ii) Quand l'incidence de deux drapeaux se traduit-elle par une relation d'inclusion entre les ombres de ces drapeaux sur L_m?

Plus généralement,

(iii) Etant donnés deux drapeaux $d = (d_1, \ldots, d_p)$ et $e = (e_1, \ldots, e_q)$, quand l'ombre $O_m(d)$ de d sur L_m est-elle contenue dans l'ombre $O_m(e)$ de e sur L_m?

Nous nous proposons de répondre à cette dernière question, qui généralise (i) et (ii). Nous commencerons par déduire du théorème 19 une condition suffisante pour que la relation

$$O_m(d) \subseteq O_m(e) \tag{4.2.1}$$

soit vérifiée. Ensuite, nous énoncerons - sans démonstration - le théorème 21 qui exprimera, grosso modo, que cette condition est aussi nécessaire.

Soient d et e respectivement d'espèces $i = (i_1, \ldots, i_p)$ et $j = (j_1, \ldots, j_q)$. Pour simplifier l'exposé, nous ferons l'hypothèse - d'ailleurs absolument inessentielle - que $m, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$ soient deux à deux distincts.

Supposons pour commencer que d et e soient incidents. La condition (4.2.1) peut alors s'énoncer comme une propriété de la géométrie résiduelle $\mathcal{L}_d$ de $\mathcal{L}$ par rapport à d; en effet, $O_m(d)$ n'est autre que l'ensemble L_{md} de cette géométrie et (4.2.1) ex-

prime que tous les éléments de cet ensemble sont incidents à e, qui est un drapeau d'espèce j de $\mathcal{L}_d$. D'après le théorème 19, $\mathcal{L}_d$ est la géométrie associée à un groupe dont le schéma Δ' s'obtient en retirant de Δ les sommets $i_1, \ldots, i_p$. Mais alors, en nous reportant au n° 1.3, exemple 4), nous voyons que la condition précédente sera certainement remplie si Δ' est la réunion disjointe de deux schémas dont l'un contient le sommet m tandis que l'autre contient tous les sommets $j_1, \ldots, j_q$, ce que nous traduirons en disant que $i = (i_1, \ldots, i_p)$ *sépare* m et $j = (j_1, \ldots, j_q)$ sur Δ. D'où cette première conclusion:

(4.2.2) Si d et e sont deux drapeaux incidents d'espèces i et j respectivement, et si j et m sont séparés par i sur Δ, alors $O_m(d) \subseteq O_m(e)$.

Désignant par m et $i = (i_1, \ldots, i_p)$ respectivement un sommet et un ensemble quelconque de sommets de Δ, nous appellerons *réduction de* i *mod.* m la partie i^*_m de i formée par ceux des sommets i_s qui ne sont pas séparés de m par l'ensemble des autres, et nous dirons que i est *réduit mod.* m si $i = i^*_m$. De même, étant donné un drapeau $d = (d_1, \ldots, d_p)$ d'espèce i (i. e. $d_s \in L_{i_s}$), nous appellerons *réduction de* d *mod.* m la partie d^*_m de d formée des éléments d_s tels que $s \in i^*_m$, et nous dirons que d est *réduit mod.* m si $d = d^*_m$. De (4.2.2), il résulte immédiatement que d et d^*_m ont la même ombre sur L_m; on obtient donc toutes les ombres (de parties de L) sur L_m en se bornant à considérer les ombres de drapeaux réduits mod.m. Le théorème suivant, qui donne la réponse à la question (iii), exprime essentiellement que, pour les drapeaux réduits, la condition suffisante d'inclusion des ombres donnée par (4.2.2) est aussi nécessaire.

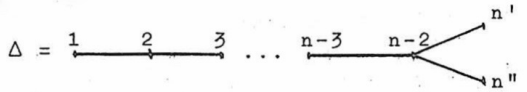
- 69 -

J.Tits

THEOREME 21. *Soient* $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n; I\}$ *la géométrie associée à un groupe* G *de schéma* Δ , $d = (d_1, \ldots, d_p)$ *et* $e = (e_1, \ldots, e_q)$ *deux drapeaux d'espèces* $i = (i_1, \ldots, i_p)$ *et* $j = (j_1, \ldots, j_q)$ *respectivement, et* m *un sommet quelconque de* Δ . *Pour que* d *et* e *aient la même ombre sur* L_m, *il faut et il suffit que leurs réductions mod.* m *coïncident. Si* d *et* e *sont réduits mod.* m, *l'ombre de* d *est contenue dans l'ombre de* e *si et seulement si* d *et* e *sont incidents et si* j *et* m *sont séparés par* i *sur* Δ .

NOTATION. Les ombres des drapeaux d'espèce i (i pouvant éventuellement être réduit à un seul sommet) sur l'"ensemble de points" L_m seront désignés par le symbole V_i .

EXEMPLE. Soit



et m = 1 (i.e. on considère la géométrie d'une hyperquadrique à 2n-2 dimensions et on prend comme "points" les points de l'hyperquadrique, au sens ordinaire). Les seuls ensembles de sommets réduits par rapport à 1 sont les ensembles formés d'un seul sommet et l'ensemble (n', n"). Les seules ombres sur L_1 sont donc l'ensemble vide $\emptyset$, L_1 lui-même, les V_i (i = 1,..., n-2) (variétés linéaires à i-1 dimensions), les $V_{n'}$ et les $V_{n"}$ (variétés linéaires à n-1 dimensions), et les $V_{n',n"}$ (variétés linéaires à n-2 dimensions). Les possibilités d'inclusions entre ces diverses espèces d'ombres se déduisent immédiatement du théorème 21; elles peuvent se résumer comme suit :

$$\emptyset \subset V_1 < V_2 < \ldots < V_{n-2} < V_{n',n"} \begin{array}{l} \nearrow V_{n'} \subset \\ \searrow V_{n"} \subset \end{array} L_1$$

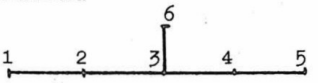
où le symbole < se lit : "peut être inclus dans".

- 70 -

J. Tits

4.3. UN EXEMPLE: LE GROUPE E_6.

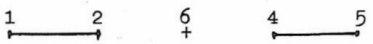
Pour terminer, nous examinerons encore, avec quelques détails, l'exemple de la géométrie $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_6; I\}$ associée au groupe E_6 de schéma



l'ensemble L_1 étant choisi comme "ensemble de points". Les seuls ensembles de sommets de Δ réduits par rapport à 1 sont les ensembles formés d'un seul sommet et les ensembles (4, 6) et (5, 6). Les seules ombres sur L_1 sont donc l'ensemble vide, L_1 lui-même, les V_i ($i = 1, \ldots, 6$), les $V_{4,6}$ et les $V_{5,6}$. Les possibilités d'inclusions entre elles sont, d'après le théorème 21 et avec les notations introduites plus haut :

$$(4.3.1) \qquad \emptyset \subset V_1 < V_2 < V_3 < V_{4,6} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} V_4 < V_5 \\ V_{5,6} < V_6 \end{matrix} \subset L_1 \ .$$

L'utilisation des théorèmes 19 et 20 nous permettra de donner une image plus complète de la géométrie de L_1, et, tout d'abord, de déterminer la structure des diverses espèces d'ombres, envisagées d'un point de vue intrinsèque. Considérons par exemple une V_3, ombre sur L_1 d'un élément $e \in L_3$. En vertu du théorème 19, la géométrie résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à e est la géométrie associée au groupe $A_2 \times A_2 \times A_1$ de schéma



La V_3 en question n'est autre que l'ensemble L_{1e} de cette géométrie, donc, d'après le n° 1.3, exemples 4) et 1), l'ensemble des points d'un plan projectif, dont les droites sont les ombres sur L_{1e} des éléments de L_{2e}, c'est-à-dire, en vertu du théorème 21,

les V_1 contenues dans la V_3 donnée. Des raisonnements analogues montrent que

les V_2, V_3, $V_{4,6}$, V_4, $V_{5,6}$, V_6 *et* V_5 *sont respectivement des espaces projectifs à* 1, 2, 3, 4, 4, 5 *dimensions et des hyperquadriques à* 8 *dimensions, dont les variétés linéaires sont - dans chaque cas - les ombres sur* L_1 *(les "V") qui y sont contenues;* (par exemple, les droites, les plans,..., les hyperplans d'une V_6 sont respectivement les V_2, les V_3, les $V_{4,6}$ et les $V_{5,6}$ qu'elle contient).

On peut aussi, à l'aide des théorèmes 19 et 20, déterminer quelles sont les intersections possibles de deux ombres d'espèces données. Considérons par exemple deux V_6, $O(e)$ et $O(e')$, ombres de deux éléments distincts e, $e' \in L_6$. D'après (4.3.1), leur intersection peut, à priori, être l'ensemble vide, une V_1 (point), une V_2, une V_3, une $V_{4,6}$ ou une $V_{5,6}$. Supposons que ce soit une $V_{5,6}$, ombre d'un drapeau $(d, e")$, avec $d \in L_5$, $e" \in L_6$; cette ombre étant par hypothèse contenue dans $O(e)$ et dans $O(e')$, le drapeau $(d, e")$ doit, d'après le théorème 21, être incident à e et e', mais alors $e = e" = e'$, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle $e \neq e'$. Pour une raison analogue, l'intersection $O(e) \cap O(e')$ ne peut être une $V_{4,6}$. Supposons à présent que ce soit une V_2, ombre sur L_1 d'un élément $d \in L_2$. Toujours en vertu du théorème 21, d est incident à e et e', qui appartiennent donc à la géométrie résiduelle $\mathcal{L}_d$ de $\mathcal{L}$ par rapport à d. En vertu du théorème 19, celle-ci est une géométrie projective à 4 dimensions, mais alors, les "points" (de la géométrie projective en question) $e, e' \in L_{6d}$ déterminent une "droite" $f \in L_{3d}$ auxquels ils sont incidents, et, invoquant à nouveau le théorème 21, on voit que l'ombre de f sur L_1, qui est une V_3, est contenue dans $O(e)$ et

dans $O(e')$, donc dans $O(e) \cap O(e')$, qui devrait être une V_2; il y a contradiction d'après (4.3.1). En conclusion:

PROPOSITION 21. *L'intersection de deux V_6 distinctes est l'ensemble vide, un point ou une V_3.*

On montre assez aisément que les trois éventualités se présentent effectivement (1)

Considérons encore le cas de deux V_5, $O(e)$ et $O(e')$, ombres sur L_1 de deux éléments distincts $e, e' \in L_5$. En vertu de la proposition 18, il existe au moins un point $d \in L_1$ incident à e et à e', c'est-à-dire appartenant à $O(e) \cap O(e')$. Si ce point n'est pas unique, $O(e) \cap O(e')$, qui est une ombre (cf. n° 4.1, corollaire à la définition des ombres), doit contenir au moins une V_2 (d'après (4.3.1)), soit $O(c)$, ombre d'un élément $c \in L_2$. En vertu du théorème 19, la géométrie $\mathcal{L}_c$, résiduelle de $\mathcal{L}$ par rapport à c, est une géométrie projective à 4 dimensions, et les "points" $e, e' \in L_{5c}$ de cette géométrie déterminent une "droite" $f \in L_{4c}$, incidente à chacun d'eux. L'ombre $O(f)$ de f sur L_1, qui est une V_4, est contenue dans $O(e) \cap O(e')$, en vertu du théorème 21, mais alors, il résulte de (4.3.1) que $O(e) \cap O(e')$, qui ne peut être une V_5 puisque $e \neq e'$ par hypothèse, ne peut être que la V_4 $O(f)$ elle-même. Il s'ensuit en particulier que f est le seul élément de L_4 incident à e et à e'. Tenant compte de la symétrie du schéma Δ, nous pouvons, en conclusions, préciser comme suit la première partie de la proposition 18:

PROPOSITION 22. *Etant donnés deux éléments distincts* $e, e' \in L_5$, *(resp.* L_1*), il existe un élément* $d \in L_1$ *(resp.* L_5*) incident à cha-*

(1) Le cas où $O(e) \cap O(e') = \emptyset$ est le cas "générique". De façon précise, dans la variété algébrique à 42 dimensions des paires (e, e') (variété $L_6 \times L_6$ - diagonale), les paires telles que $O(e) \cap O(e')$ soit un point (resp. une V_3) forment une sous-variété à 36 (resp.32) dimensions.

cun d'eux. Si cet élément n'est pas unique, il existe un unique élément $f \in L_4$ *(resp.* L_2*) jouissant de la même propriété.*

En termes d'ombres sur L_1, cette proposition se traduit de la façon suivante:

PROPOSITION 22'. *l'intersection de deux* V_5 *distinctes est un point ou une* V_4. *Deux points distincts sont toujours contenus dans une même* V_5; *si celle-ci n'est pas unique, les deux points déterminent une* V_2 *qui les contient,*

Le cas où l'élément d, dont il est question dans la proposition 22, est unique, est le cas "générique". De façon précise, dans l'ensemble des paires (e,e'), qui est une variété algébrique à 32 dimensions (variété $L_5 \times L_5$ - diagonale, resp. $L_1 \times L_1$ - diagonale), les paires pour lesquelles d n'est pas unique forment une sous-variété à 27 dimensions. On est donc en droit de dire qu'*en général,* deux V_5 se coupent en un et un seul point, et deux points déterminent une V_5, c'est-à-dire que les axiomes des plans projectifs sont "génériquement vérifiés". Pour cette raison, nous avons donné aux V_5 le nom de *droites* [8] , ou encore d'"*hyperdroites* [6][(1)]. Notons que le "plan génériquement projectif" ainsi obtenu est en relation directe avec le plan projectif des octaves de Cayley (pour plus de précisions sur la nature de ces liens , cf. notamment [8] et [10]). On trouvera encore d'autres informations concernant la géométrie de l'espace L_1 notamment dans [6], [7] et [8]. Il faut cependant être attentif au fait que les notations adoptées ici diffèrent sensiblement de celles utilisées dans ces articles.

---

(1) Dans [6], nous réservons le nom de droites aux V_2 qui sont, comme on l'a vu plus haut, des espaces projectifs à une dimension.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARSOTTI, I., A note on abelian varieties, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2 (série II) (1954), 1-22.

[2] BOREL, A., Groupes linéaires algébriques, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 20-82.

[3] CHOW, W.L., Projective embedding of homogeneous spaces, Algebraic Geometry and Topology (Symposium en l'honneur de S.Lefschetz), Princeton University Press, Princeton, 1957.

[4] Séminaire C. CHEVALLEY 1956/58, Classification des groupes de Lie algébriques, Paris, 1958.

[5] TITS, J., Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, Mém. Acad. Roy. Belg. 29 (3), 1955.

[6] - , Sur la géométrie des R-espaces, Journal Math. P. Appl. 36 (1957), 17-38.

[7] - , Les groupes exceptionnels et leur interprétation géométrique, Bull. Soc. Math. Belg. 8 (1956), 48-81.

[8] - , Les "formes réelles" des groupes de type E_6, Séminaire Bourbaki n° 162, Paris, février 1958.

[9] - , Sur la classification des groupes algèbriques semi-simples, C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959), 1438-1440.

[10] - , Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, à paraître dans les Proceedings du Colloque sur les Fondements de la Géométrie, Utrecht, août 1959.

[11] VEBLEN, O. et YOUNG, J.W., Projective geometry, I, Ginn & C°, Boston, 1910.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

MANAGING EDITOR

Tom De Medts — Ghent University, tom.demedts@ugent.be
Linus Kramer — Universität Münster, linus.kramer@wwu.de
Klaus Metsch — Justus-Liebig Universität Gießen, klaus.metsch@math.uni-giessen.de
Bernhard Mühlherr — Justus-Liebig Universität Gießen, bernhard.m.muehlherr@math.uni-giessen.de
Joseph A. Thas — Ghent University, thas.joseph@gmail.com
Koen Thas — Ghent University, koen.thas@gmail.com
Hendrik Van Maldeghem — Ghent University, hendrik.vanmaldeghem@ugent.be

HONORARY EDITORS

Jacques Tits
Ernest E. Shult †

EDITORS

Peter Abramenko — University of Virginia
Francis Buekenhout — Université Libre de Bruxelles
Philippe Cara — Vrije Universiteit Brussel
Antonio Cossidente — Università della Basilicata
Hans Cuypers — Eindhoven University of Technology
Bart De Bruyn — University of Ghent
Alice Devillers — University of Western Australia
Massimo Giulietti — Università degli Studi di Perugia
James Hirschfeld — University of Sussex
Dimitri Leemans — Université Libre de Bruxelles
Oliver Lorscheid — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Guglielmo Lunardon — Università di Napoli "Federico II"
Alessandro Montinaro — Università di Salento
James Parkinson — University of Sydney
Antonio Pasini — Università di Siena (emeritus)
Valentina Pepe — Università di Roma "La Sapienza"
Bertrand Rémy — École Polytechnique
Tamás Szonyi — ELTE Eötvös Loránd University, Budapest

PRODUCTION

Silvio Levy — (Scientific Editor), production@msp.org

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
mathematical sciences publishers
nonprofit scientific publishing
http://msp.org/

© 2019 Mathematical Sciences Publishers

Innovation in Incidence Geometry
Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.