Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

Un théorème de point fixe

François Bruhat and Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.167

Un théorème de point fixe

François Bruhat and Jacques Tits

[69] Originally published as mimeographed notes, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1966, 34 p. Reused with permission.

UN THEOREME DE POINT FIXE.

(Premier état d'une partie d'un article en préparation, par F. BRUHAT et J. TITS. La terminologie, comme le reste, est provisoire).

1. Le théorème.

1.1. Une classe d'espaces métriques.

On considère un espace Δ dans lequel est donnée une fonction $d : \Delta \times \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, symétrique $(d(x,y) = d(y,x))$ possédant la propriété suivante :

1.1.1. Pour tous points $x,y \in \Delta$, il existe un point m $(= m_{xy})$, un entier r et une application f $(= f_{xy})$: $\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^r$, tels que $d(m,x) = d(m,y) = \frac{1}{2}\, d(x,y)$, que $f(x) = -f(y)$, que $f(m) = 0$, que $\|f(z) - f(t)\| \leqslant d(z,t)$ pour tous $z,t \in \Delta$, et enfin que $\|f(z)\| = d(m,z)$ pour tout $z \in \Delta$.

On a $d(x,y) = 2\, d(m,x) = \|f(x)-f(y)\| \leqslant \|f(x)-f(z)\| +$ $+ \|f(z)-f(y)\| \leqslant d(x,z) + d(z,y)$, c'est-à-dire que d vérifie l'inégalité triangulaire. Pour $x = y$, il résulte aussi de 1.1.1 que $d(x,x) = 0$. On supposera que

1.1.2. Si $d(x,y) = 0$, alors $x = y$.

Ainsi, d définit une métrique dans Δ. Le point m, "milieu de x, y" est le seul point vérifiant la relation

$d(m,x) = d(m,y) = \frac{1}{2} d(x,y)$, car si m' est un tel point, $d(x,y) = d(x,m') + d(m',y) \geqslant \| f(x)-f(m') \| + \|f(m')-f(y)\| \geqslant \|f(x)-f(y)\| = d(x,y)$, donc $\|f(x)-f(m')\| = \|f(y)-f(m')\| = \frac{1}{2} \|f(x)-f(y)\|$ donc $f(m') = \frac{1}{2}(f(x)+f(y)) = 0$, donc $d(m,m') = \|f(m)-f(m')\| = 0$.

Soit Φ une partie de Δ , on notera $M(\Phi)$ la plus petite partie de Δ contenant Φ et telle que le milieu de deux points appartenant à $M(\Phi)$ appartienne aussi à $M(\Phi)$.

1.2. Enoncé du théorème.

Soient Δ, d comme en 1.1, la métrique définie par d est supposée complète, et Φ désigne une partie bornée non vide de Δ . Alors, le groupe des isométries conservant Φ a un point fixe dans $\overline{M(\Phi)}$.

1.3. Lemme. Soient $x,y,z \in \Delta$ et $m = m_{xy}$. Si $d(x,z) \leqslant 1{,}01.d(x,y)$ et $d(y,z) \leqslant 1{,}01.d(x,y)$, on a $d(m,z) \leqslant 0{,}9.d(x,y)$

Quitte à remplacer toutes les données par leurs images par f_{xy} , ce qui renforce les hypothèses et ne modifie pas la conclusion (car les distances xy et mz sont respectées tandis que yz et xz sont raccourcies), nous pouvons supposer que $\Delta = \mathbb{R}^r$ et $x = -y$, $m = 0$. Alors,

$$d(m,z)^2 = \|z\|^2 = \frac{1}{2}(\|z+x\|^2 + \|z-x\|^2) - \|x\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1{,}01)^2.d(x,y)^2 - \frac{1}{4}.d(x,y)^2 \leqslant (0{,}9)^2.d(x,y)^2.$$

- 3 -

1.4. Preuve du théorème.

Nous définissons inductivement les ensembles Φ_i $(\subset M(\Phi))$ $(i = 0, 1, \ldots)$ et les nombres D_i de la façon suivante :

$\Phi_0 = \Phi$, $D_i = \operatorname{Sup}\{d(x,y) \mid x,y \in \Phi_i\}$, autrement dit, D_i est le diamètre de Φ_i , enfin, Φ_{i+1} est l'ensemble des m_{xy} avec $x,y \in \Phi_i$ et $d(x,y) \geqslant 1{,}01^{-1}.D_i$. Puisque Φ est borné, $D_0 < \infty$. Il est clair qu'aucun des Φ_i n'est vide.

Vu le lemme,

(1.4.1) si $z \in \Phi_i$ et $z' \in \Phi_{i+1}$, on a $d(z,z') \leqslant 0{,}9.D_i$

(poser $z' = m_{xy}$ avec $x,y \in \Phi_i$ et $d(x,y) \geqslant 1{,}01^{-1}.D_i$). Soient à présent $z,z' \in \Phi_{i+1}$, et soient x,y comme dans la parenthèse ci-dessus ; les hypothèses du lemme sont vérifiées en vertu de (1.4.1), de sorte que $d(z,z') \leqslant 0{,}9.D_i$. On a ainsi établi que $D_{i+1} \leqslant 0{,}9.D_i$, d'où

(1.4.2) $$D_i \leqslant (0{,}9)^i.D_0 \ .$$

Pour tout i , choisissons un point z_i dans Φ_i . En vertu de (1.4.1) et (1.4.2.), $d(z_i,z_{i+1}) \leqslant (0{,}9)^{i+1}.D_0$. L'espace Δ étant métrique complet et la suite $\sum (0{,}9)^i$ étant convergente, la suite des z_i converge vers un point F , lequel ne dépend pas des z_i choisis, car si z_i' est un autre choix, fournissant un point limite F' , on a

$$\begin{aligned} d(F,F') &\leqslant d(F,z_i) + d(z_i,z_i') + d(z_i',F') \leqslant \\ &\leqslant d(F,z_i) + D_i + d(z_i',F') \ , \end{aligned}$$

et les trois termes de cette dernière somme tendent vers 0 lorsque i tend vers ∞.

Des définitions, il résulte immédiatement que le groupe des isométries de Δ qui conservent Φ conservent aussi chaque Φ_i, donc aussi F, lequel appartient manifestement à $M(\overline{\Phi})$. Le théorème est démontré.

2. Structures de Weyl.

2.1. Définitions.

2.1.1. Soient W un groupe de Coxeter et R un système générateur fondamental de W. La longueur d'un élément w de W exprimé comme mot minimal en les éléments de R sera notée $l(w)$.

2.1.2. Soit G un groupe. Un sous-groupe B est dit <u>borelloïde</u> de groupe de Weyl W si l'ensemble des doubles classes BgB $(g \in G)$ peut être mis en correspondance bijective avec les éléments de W de telle façon que, notant symboliquement BwB la double classe correspondant à $w \in W$, on ait, pour tout $r \in R$ et $w \in W$:

(Bor 1) $\quad BrB.BwB \subset BwB \cup BrwB$,

(Bor 2) $\quad BrB$ n'est pas une classe latérale de B.

Une <u>structure de Weyl</u> de groupe de Weyl W est une classe de conjugaison de groupes borelloïdes, appelés <u>groupes de Borel</u> de la structure.

- 5 -

(Dans une deuxième version, plus complète, on fera les choses autrement. On peut définir un sous-groupe borelloïde sans référence à un groupe de Weyl préassigné, en posant qu'il existe certaines doubles classes "BrB" qui engendrent G, ne sont pas des classes latérales, et sont telles que pour toute double classe BgB, le produit $BrB.BgB$ contient au plus deux doubles classes. De là, on déduit - si les souvenirs du rédacteur sont bons - l'existence de W tel que les axiomes Bor soient satisfaits).

2.1.3. Tout [5] s'étend à la situation décrite ici.

2.1.4. Soit $B' = gBg^{-1}$. La conjugaison par g établit une correspondance bijective entre les doubles classes de B et celles de B' ; nous poserons par définition $B'wB' = g.BwB.g^{-1}$ et, plus généralement, $P'wP' = P'.g.BwB.g^{-1}.P'$ pour tout sous-groupe P' contenant B'. (On s'écarte ici résolument de l'interprétation usuelle de la notation BwB, selon laquelle w représente une classe latérale d'un certain groupe H dans un certain groupe N ; le lecteur fera bien de se garder de toute déduction abusive).

2.1.5. Un groupe de Coxeter W avec système générateur fondamental donné R est dit irréductible si R ne peut être décomposé en deux parties disjointes non vides commutant entre elles. Soit R fini, considérons la "réalisation géométrique" de W donnée dans [4], et soit Ω le cône convexe réunion de toutes les chambres de W. Le groupe W est dit de type sphérique si Ω est tout l'espace (i.e. si W est fini), de type euclidien si $\overline{\Omega}$ est un demi-espace ("groupe affine engendré par des réflexions") et de type hyperbolique si Ω est l'intérieur d'un cône quadratique + le point O . Dans la suite, étant donné les applications qu'on a en vue, on se limite le plus souvent à la considération de structures de Weyl dont le groupe de Weyl est de type euclidien irréductible, cependant beaucoup des choses qui seront dites pourraient être étendues à des cas plus généraux. Par exemple, tous les résultats, à l'exception peut-être de 3.5, 3.6, 3.7, restent valables pour des groupes de Weyl de type hyperbolique, mais pour inclure ceux-ci, il faut généraliser au préalable le théorème du § 1.

2.2. L'espace métrique Δ .

2.2.1. Soient R fini et W de type euclidien irréductible (hypothèse de commodité, cf. 2.1.5). On note A l'espace affine où W est donné comme groupe engendré par des réflexions, et C la "chambre fondamentale", dont les murs sont les hyperplans de points fixes des réflexions fondamentales (éléments de R). (Ici, une chambre est fermée.) Si $I \subset R$, on note C_I la facette de C intersection de C et des hyperplans de points fixes des éléments de I . Dans A , on se donne une métrique euclidienne invariante par W .

2.2.2. A tout groupe G doté d'une structure de Weyl $\mathcal{B}$ de groupe de Weyl W , on va associer un certain espace métrique $\Delta(G, \mathcal{B}) = \Delta$. L'ensemble sous-jacent de Δ est obtenu comme suit : pour chaque sous-groupe de Borel $B \in \mathcal{B}$, on prend une réplique C^B de la chambre C , et si $B, B' \in \mathcal{B}$ sont contenus dans un même sous-groupe parabolique "de type I ", on identifie les facettes de C^B et $C^{B'}$ qui représentent C_I . Si $c \in C$, son représentant dans C^B sera noté q^B . La fonction $d : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}$ est définie de la façon suivante : soient $q, q' \in C$, $B \in \mathcal{B}$, $B' = gBg^{-1}$, avec $g \in BwB$; alors $d(q^B, q'^{B'})$ est égale à la distance des points q et wq' dans A . Le fait que d est une métrique résultera de 2.2.3 et 2.3.

2.2.3. Avec les notations de 2.2.2, on a $B = g^{-1}B'g$ et $g^{-1} \in B'w^{-1}B'$ (rappelons que $B'w^{-1}B'$ est par définition la transformée de $Bw^{-1}B$ par g), de sorte que $d(q'^{B'}, q^B)$ est la distance de q' et $w^{-1}q$, ce qui montre que <u>la fonction</u> d <u>est symétrique</u>.

2.2.4. Nous nous proposons de définir une action du groupe $\mathrm{Aut}\,(G, \mathcal{B})$ des automorphismes de G conservant $\mathcal{B}$, sur l'espace Δ . Soit α un tel automorphisme. Il opère sur W par $\alpha(BwB) = \alpha(B)\,\alpha(w)\,\alpha(B)$. L'automorphisme de W ainsi défini conserve le système générateur fondamental R . Ainsi est définie une permutation de R , donc une permutation des sommets de la chambre fondamentale C , laquelle s'étend en une isométrie du simplexe C tout entier. Nous désignons encore par α cette isométrie et nous posons finalement, pour tout $q \in C$ et tout $B \in \mathcal{B}$, $\alpha(q^B) = \alpha(q)^{\alpha(B)}$. Il est immédiat que l'action de $\mathrm{Aut}\,(G, \mathcal{B})$ ainsi définie respecte la fonction d . Notons encore que cette action définit aussi une action du groupe G lui-même sur Δ , par l'intermédiaire de l'homomorphisme $G \to \mathrm{Aut}\,(G, \mathcal{B})$ qui envoie tout élément g de G sur l'automorphisme extérieur associé à g^{-1} .

2.3. Lignes brisées et géodésiques.

2.3.1. Un segment dans Δ est la réplique dans l'un des C^B d'un segment (fermé) de C ; sa longueur est la longueur du segment de C en question. Une ligne brisée est une suite de segments tels que l'origine de chacun d'eux (sauf le premier) coïncide avec l'extrémité du précédent. La longueur d'une ligne brisée est la somme des longueurs des segments qui la composent. Une ligne brisée est plus fine qu'une autre si elle s'en déduit en remplaçant chaque segment composant par une suite de sous-segments dont il est réunion, et telle que l'intersection de deux termes consécutifs de la suite se réduise à leur extrémité commune. Deux lignes brisées sont équivalentes si elles ont un raffinement commun (elles ont alors même longueur).

2.3.2. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, on notera f_B l'application $\Delta \longrightarrow A$ définie comme suit : si $q \in C$ et $B' = gBg^{-1}$ avec $g \in BwB$, alors $f_B(q^{B'}) = wq$. Pour montrer que ceci définit effectivement une application, il faut vérifier la compatibilité avec les identifications qui ont été faites dans Δ. Soit donc $q^{B'} = q^{B''}$. Ceci signifie qu'il existe une partie I de R telle que $q \in C_I$ et que B', B'' soient contenus dans un même sous-groupe parabolique de type I. Cette dernière condition veut dire qu'il existe $g \in G$ et $g' \in BW_IB$ (où W_I est le sous-groupe de W engendré par I) tels que $B' = gBg^{-1}$, $B'' = gg'Bg'^{-1}g^{-1}$. Soient $g \in BwB$ et $gg' \in Bww'B$. Vu (Bor 1) on a $w' \in W_I$. Mais alors, $w'q = q$, donc $ww'q = wq$, ce qu'il fallait montrer.

2.3.3. Il résulte immédiatement des définitions que

2.3.3.1. La restriction de f_B à toute "chambre" $C^{B'}$ est une isométrie ;

2.3.3.2. l'image par f_B d'une ligne brisée est une ligne brisée de même longueur ;

2.3.3.3. si $x,y \in \Delta$ et $x \in C^B$, alors dist. $(f_B(x), f_B(y)) = d(x,y)$.

2.3.4. De 2.3.3.2 et 2.3.3.3, on déduit que la longueur d'une ligne brisée d'extrémités x,y est inférieure à $d(x,y)$; si l'égalité a lieu, la ligne brisée sera dite géodésique. Vu 2.3.3.3, si $x \in C^B$, une ligne brisée d'origine x est géodésique si et seulement si son image par f_B est un raffinement d'un segment de droite.

2.3.5. Existence d'une ligne brisée géodésique d'extrémités données. Soient $x = q^B$, $y = q'^{B'}$ les extrémités en question, avec $B' = gBg^{-1}$ et $g \in BwB$. Soit s le segment de droite d'extrémités q et wq' . C'est une propriété bien connue des groupes de Coxeter qu'il existe une expression minimale $w = r_1r_2 \dots r_m$ telle que si on pose $C = C_0$ et $C_i = r_1r_2 \dots r_i\, C$ $(i = 1, \dots, m)$ les segments $s_i = s \cap C_i$ $(i = 0, \dots, m)$ forment une ligne brisée raffinant s (certains de ces segments peuvent être réduits à un point). D'après les sorites non écrits en 2.1.3, il existe $g_i \in Br_iB$ tels que $g = g_1g_2 \dots g_m$. Posons $B_i = (g_1\dots g_i)B(g_1\dots g_i)^{-1}$, et soit t_i l'image canonique du segment $(r_1\dots r_i)^{-1}s_i$ dans C^{B_i} . Il est immédiat que les t_i forment une ligne brisée d'extrémités

x,y ; cette ligne est géodésique en vertu de 2.3.4 (car on a $f_B(t_i^*)$ = $= s_i$).

(En fait, la ligne brisée géodésique d'extrémités données est <u>unique</u> à équivalence près ; cela résulte par exemple de l'unicité du milieu de deux points, que l'on pourra déduire de 1.1, une fois établie l'assertion 2.3.7. Nous n'aurons cependant pas ici à faire usage de ce résultat).

2.3.6. <u>Soit</u> $s_0, \ldots, s_m$ <u>une ligne brisée géodésique d'extrémités</u> $x,y \in \Delta$, <u>soit</u> i <u>un entier positif</u> $< m$, <u>et soit</u> z <u>l'extrémité commune de</u> s_i <u>et</u> s_{i+1} . <u>Alors, les lignes brisées</u> $(s_0, \ldots, s_i)$ <u>et</u> $(s_{i+1}, \ldots, s_m)$ <u>sont géodésiques et on a</u> $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$.

Soient l' et l'' les longueurs des lignes brisées $(s_0, \ldots, s_i)$ et $(s_{i+1}, \ldots, s_m)$. Vu 2.3.4, on a $l' \geq d(x,z)$ et $l'' \geq d(z,y)$. Vu 2.3.5, il existe des lignes brisées géodésiques d'extrémités x,z et z,y ; en les mettant bout à bout, on obtient une ligne brisée d'extrémités x,y de sorte que, toujours vu 2.3.4,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq l' + l'' = d(x,y) \quad ;$$

il s'ensuit que $d(x,z) = l'$ et $d(z,y) = l''$, ce qui établit 2.3.6.

2.3.7. <u>L'espace</u> Δ <u>et la fonction</u> d <u>possèdent les propriétés</u> 1.1.1 <u>et</u> 1.1.2. <u>En particulier</u>, d <u>est une métrique</u>.

La propriété 1.1.2 est évidente. Etablissons 1.1.1, et soient donc $x, y \in \Delta$. Considérons une ligne brisée géodésique d'extrémités x, y , soit m son milieu et soit s un segment de la ligne, contenant m et non réduit à un point ; ce segment est contenu dans une "chambre" C^B . Si, dans A , on choisit $f_B(m)$ comme point 0 , A devient un espace vectoriel, identifiable avec $\mathbb{R}^r$. Ceci étant, le point m et l'application $f = f_B$ satisfont aux conditions de 1.1.1, ainsi qu'il résulte immédiatement de 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6. (Pour établir la relation $f(x) = - f(y)$, il faut observer que l'image par f de la ligne brisée géodésique considérée, d'extrémités x, y , est plus fine qu'un segment de droite d'extrémités $f(x)$, $f(y)$; cela résulte de ce que, vu 2.3.6 et 2.3.4, les deux lignes brisées partielles déduites de celle-là en considérant d'une part le segment s et tous ceux qui le précèdent, d'autre part le même segment s et tous ceux qui le suivent, ont chacune des images par f plus fines que des segments de droites contenant tous deux $f(s)$).

2.4. Complétion.

2.4.1. L'espace métrique Δ, d est complet.

Soit (x_i) une suite infinie de points de Δ tels que $S = \sum d(x_i, x_{i+1}) < + \infty$. On veut montrer que les x_i convergent. Posons

$$x_i = q_i^{B_i} .$$

Quitte à remplacer (x_i) par une sous-suite, on peut supposer que la suite des q_i converge (en fait elle converge toujours, car

$d(q_i, q_{i+1}) \leqslant d(x_i, x_{i+1})$, mais peu importe). Posons $q = \lim q_i$, soit I la plus grande partie de R telle que $q \in C_I$, et soit M le minimum de la distance de q et de ses transformés par les éléments de W . Quitte à remplacer (x_i) par une sous-suite, nous pouvons supposer que $S \leqslant M/4$ et que pour tout i , dist $(q_i, q) \leqslant$ $\leqslant M/4$. Pour tout i , posons

$$y_i = q^{B_i} .$$

Il est clair que

$$(2.4.1.1) \qquad d(x_i, y_i) = \operatorname{dist}(q_i, q) .$$

Par conséquent

$$d(y_i, y_{i+1}) \leqslant d(y_i, x_i) + d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) \leqslant$$

$$\leqslant M/4 + M/4 + M/4 < M .$$

Vu les définitions de d et de M , ceci implique que $y_i = y_{i+1}$. Ainsi, y_i est un point y indépendant de i et, vu (2.4.1.1), $d(x_i, y)$ tend vers 0 lorsque i tend vers ∞ , c'est-à-dire que $\lim x_i = y$.

2.4.2. Le raisonnement précédent montre aussi que la réunion d'une collection quelconque d'ensembles de la forme $(C_I)^B$ est fermée dans Δ . Nous n'aurons pas ici à faire usage de cette remarque.

2.5. <u>Groupes d'isotropie</u>.

<u>Le groupe des éléments de</u> G <u>qui conservent un point donné</u>

de Δ (pour l'action décrite au n° 2.2.4) est un sous-groupe parabolique propre.

Soit q^B le point en question, et soit I la plus grande partie de R telle que $q \in C_I$ (de sorte que $I \neq R$). Il est alors facile de voir que le groupe de stabilité de q^B est BW_IB .

3. Applications du théorème de point fixe aux groupes avec structure de Weyl.

3.1. Parties bornées.

On se donne un groupe G et, dans G , une structure de Weyl $\mathcal{B}$ de groupe de Weyl W . Soit H une partie de G . Il est immédiat que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un sous-groupe de Borel $B \in \mathcal{B}$ tel que H soit contenu dans la réunion d'un nombre fini de doubles classes de G

(ii) pour tout $B \in \mathcal{B}$, H est contenu dans la réunion d'un nombre fini de doubles classes de B .

Lorsque ces conditions sont remplies, la partie H de G sera dite bornée (par rapport à la structure de Weyl considérée). Si H et H' sont des parties bornées de G , il en est de même de $H \cup H'$ et de $H.H'^{-1}$.

3.2. Groupes d'automorphismes.

3.2.1. Nous commençons par rappeler, sans démonstration, une propriété connue des groupes de Coxeter. Soit W un tel groupe, $w \in W$ un élément de W et $w = r_1 r_2 \ldots r_{l(w)}$ une expression de w comme mot réduit en les générateurs fondamentaux. Alors, les $l(w)$ "réflexions"

$$s_i = r_1 r_2 \ldots r_{i-1} r_i r_{i-1} \ldots r_2 r_1 \qquad (i = 1, \ldots, l(w))$$

sont toutes distinctes, elles ne dépendent (à l'ordre près) que de w et non de l'expression réduite choisie et leur ensemble caractérise w (en fait, ce sont les réflexions par rapport aux hyperplans radiciels qui séparent C et wC). Les réflexions s_i sont dites associées à w .

3.2.2. Lemme. Soient G un groupe doté d'une structure de Weyl de groupe de Weyl W, B un sous-groupe de Borel pour cette structure, w un élément de W et $s \in W$ une réflexion associée à w . Alors $BsB \subset BwB.Bw^{-1}B$.

En effet, soient $w', w'' \in W$ et $r \in R$ (système générateur fondamental de W) tels que $w = w'rw''$, $l(w) = l(w')+1+l(w'')$ et $s = w'rw'^{-1}$ (l'existence de tels w', w'', r exprime la définition des réflexions associées). Alors, il résulte des sorites bien connus sur les BN-paires (sorites qui s'étendent immédiatement au cas présent) que

$$BwB.Bw^{-1}B = Bw'B.BrB.Bw''B.Bw''^{-1}B.BrB.Bw'^{-1}B \supset$$

$$\supset Bw'B.BrB.BrB.Bw'^{-1}B \supset Bw'B.BrB.Bw'^{-1}B \supset BsB \ .$$

3.2.3. Lemme. Soient G et B comme en 3.2.2 et soit H une partie de G. Alors, l'ensemble $H' = \bigcup_{h \in H} hBh^{-1}$ est borné si et seulement si H l'est.

En effet, soit X (resp. Y) l'ensemble des $w \in W$ tels que $H \cap BwB$ (resp. $H' \cap BwB$) ne soit pas vide. On a

$$BH'B = BYB = \bigcup_{w \in X} BwB.Bw^{-1}B \quad .$$

Il résulte donc de 3.2.2 qu'un élément w ne peut appartenir à X que si toutes les réflexions qui lui sont associées appartiennent à Y. Si H' est borné, Y est fini et la remarque précédente montre que X l'est aussi, donc que H est borné. La réciproque est évidente car $H' \subset HBH^{-1}$.

3.2.4. Théorème. Soient G un groupe, $\mathcal{B}$ une structure de Weyl dans G dont le groupe de Weyl soit de type euclidien irréductible, Γ un groupe d'automorphismes de G conservant $\mathcal{B}$, et B un sous-groupe de Borel. Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute partie bornée H de G, la réunion ΓH des transformées de H par tous les éléments de Γ est bornée ;

(ii) l'ensemble ΓB est borné ;

(iii) Γ normalise un sous-groupe parabolique propre de G.

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (ii) est évident.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient Λ et d obtenus comme au § 2,

Φ la réunion des "chambres" $C^{\gamma(B)}$, avec $\gamma \in \Gamma'$, H l'ensemble des éléments h de G tels que $hBh^{-1} \subset \Gamma' B$, et X l'ensemble des éléments w de W (groupe de Weyl) tels que $BwB \subset BHB$. Nous nous proposons de montrer que Φ est borné (au sens métrique). Soit $x = q^B$ un point donné, et x' un point quelconque de Φ . Posons $x' = q'^{B'}$, $B' = hBh^{-1}$ $(h \in G)$ et $BhB = BwB$ $(w \in W)$. Il résulte des définitions que $d(x,x') = \mathrm{dist}\,(q,wq')$, et $w \in X$ Or l'ensemble H est borné, vu (ii) et 3.2.3, donc X est fini, d'où notre assertion sur Φ . L'ensemble Φ étant invariant par Γ' , nous pouvons à présent appliquer le théorème 1.2 (vu 2.3.7), d'où il résulte que Γ' a un point fixe dans Δ . Le stabilisateur de ce point dans G est un sous-groupe parabolique de G normalisé par Γ' , ce qui établit (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit P un sous-groupe parabolique propre normalisé par Γ' , et X une partie finie de W telle que $H \subset \bigcup_{w \in X} PwP$ (pour la notation, cf. 2.1.4). Quitte à augmenter X , on peut supposer que X se compose de tous les w tels que $l(w) \leq$ un entier donné. Alors $\bigcup_{w \in X} PwP$ est invariant par Γ' et contient donc $\Gamma' H$, ce qui achève la démonstration.

3.3. Sous-groupes bornés.

Dans toute la suite, chaque fois qu'il est question de "sous-groupes paraboliques maximaux", on sous-entend évidemment "propres".

Corollaire. Soient G et $\mathcal{B}$ comme en 3.2.4. Alors, tout sous-groupe borné de G est contenu dans un sous-groupe parabolique propre. En particulier, les sous-groupes bornés maximaux sont les sous-groupes paraboliques maximaux.

En effet, soit G' un sous-groupe borné de G, et soit Γ' le groupe des automorphismes intérieurs $\operatorname{int} g'$, avec $g' \in G'$. On a, pour tout Borel B, $\Gamma' B \subset G'BG'$, et ce dernier ensemble est borné. Vu le théorème, G' normalise donc un sous-groupe parabolique propre, et y est donc contenu, car tout sous-groupe parabolique est son propre normalisateur.

3.4. Caractérisation d'une structure de Weyl par ses sous-groupes paraboliques maximaux.

3.4.1. Proposition. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux structures de Weyl dans un même groupe G. Supposons que tout sous-groupe parabolique maximal pour $\mathcal{B}'$ soit aussi un sous-groupe parabolique maximal pour $\mathcal{B}$. Alors tout sous-groupe parabolique pour $\mathcal{B}'$ est un sous-groupe parabolique pour $\mathcal{B}$.

Preuve. On sait que l'intersection de deux sous-groupes paraboliques maximaux P, P' est un sous-groupe parabolique si et seulement si elle est un sous-groupe maximal de P, et qu'un sous-groupe quelconque est un sous-groupe parabolique si et seulement s'il est une intersection de sous-groupes paraboliques maximaux tels que l'intersection de deux quelconques d'entre eux soit parabolique, d'où l'assertion.

3.4.2. Corollaire. Deux structures de Weyl qui ont les mêmes sous-groupes paraboliques maximaux coïncident.

3.5. Deux lemmes sur les groupes de Coxeter de type euclidien.

3.5.1. Dans un groupe de Coxeter W, un élément w est dit dominé par un autre élément w' s'il existe une expression de w' comme mot réduit en les générateurs fondamentaux, dont une section initiale est égale à w. Si C désigne la chambre fondamentale, cela signifie aussi que tout demi-espace radiciel (demi-espace limité par un hyperplan radiciel) contenant C et $w'C$ contient aussi wC.

3.5.2. Lemme. Soient $\sum$ un système de racines irréductible, W (resp. W^o) son groupe de Weyl affine (resp. ordinaire) et X une partie infinie de W, telle que $W^o.X.W^o = X$. Alors il existe un entier N tel que tout élément de W soit dominé par un élément de X^N.

(En fait, on peut toujours prendre N = le rang de $\sum$, mais nous n'aurons pas à utiliser ce fait, et il est un peu plus commode d'établir le lemme plus faible énoncé).

Preuve. On notera que la formulation de l'assertion implique qu'on a choisi un système de racines simples (donc un ensemble de racines positives) dans $\sum$. Soient V l'espace vectoriel dans lequel est donné $\sum$, et T l'ensemble des translations contenues dans X. Cet ensemble est invariant par W^o, et on a $X = W^o.T = T.W^o$. Pour toute translation t de V, posons $\|t\| =$

$= \|t(0)\|$ (pour une norme euclidienne invariante par W°, choisie une fois pour toute dans V), et $\varphi(t) = t(0)/\|t\|$. Soit Y l'ensemble de vecteurs de norme 1 défini comme suit :

$y \in Y$ s'il existe une suite de translations $t_i \in T$ telles que $\|t_i\| \longrightarrow \infty$ et $\lim \varphi(t_i) = y$. Il est clair que Y est non vide (car X est infini) et invariant par W°. Soient r la dimension de V, y_0 un point de Y choisi arbitrairement, $w_1, \ldots, w_r$ des éléments de W° tels que $w_1(y_0) = y_1, \ldots, w_r(y_0) = y_r$ soient linéairement indépendants (de tels éléments existent en vertu de l'hypothèse d'irréductibilité de Σ), et $n_1, \ldots, n_r$ des entiers tels qu'aucune racine ne s'annule sur l'élément $u = \sum n_i y_i$. Nous allons montrer que l'entier $N = \sum n_i$ possède les propriétés de l'énoncé.

Quitte à multiplier tous les w_i à gauche par un élément convenable de W°, nous pouvons supposer que les racines positives prennent des valeurs positives sur u. Soit t'_i $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite de translations appartenant à T, telles que $\lim \|t'_i\| = \infty$ et $\lim \varphi(t'_i) = y_0$. Posons, pour tout i

$$t_i = \prod_{j=1}^{r} (w_j t'_i w_j^{-1})^{n_j} ,$$

de sorte que $t_i \in X^N$, $\lim \|t_i\| = \infty$ et $\lim \varphi(t_i) = \frac{u}{\|u\|}$. Vu les hypothèses faites sur u, pour tout entier M, il existe un entier $i(M)$ tel que, pour toute racine positive α, on ait $\alpha(t_{i(M)}(0)) > M$.

Nous devons montrer que tout élément $w \in W$ est dominé par un élément de X^N. Soit w' l'élément (univoquement déterminé) de W° tel que toutes les racines positives prennent des valeurs positives dans la chambre $w'^{-1}wC$ (où C désigne la chambre fondamentale de W). Soit M une borne supérieure des valeurs prises par les racines positives dans cette chambre. Alors, w est dominé par $w'.t_{i(M)}$. Pour le voir, il suffit, d'après le n° 3.5.1, de montrer que tout demi-espace radiciel contenant C et $(w'.t_{i(M)})(C)$ contient aussi wC , ou encore que tout demi-espace radiciel contenant $w'^{-1}C$ et $t_{i(M)}C$ contient aussi $w'^{-1}wC$, or, vu la définition de M et de $t_{i(M)}$, il en est même ainsi de tout demi-espace radiciel contenant $t_{i(M)}C$ et le point 0 , car un demi-espace radiciel contenant 0 a pour expression générale $\alpha^{-1}((-\infty, K])$ avec $\alpha \in \Sigma$ et $K \in \mathbb{N}$, et la condition que le demi-espace contienne $t_{i(M)}C$, donc aussi $t_{i(M)}(0)$, implique que $\alpha > 0$ et $K > M$. Le lemme est ainsi démontré.

3.5.3. <u>Lemme</u>. <u>Soient</u> Σ <u>et</u> W <u>comme en</u> 3.5.2. <u>Alors, il existe un entier</u> N <u>tel que tout élément de</u> W <u>soit un produit de réflexions en nombre</u> $\leqslant N$.

(En fait, l'irréductibilité de Σ ne jouera aucun rôle ici.)

<u>Preuve</u>. Soient r le rang de Σ , $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ r racines linéairement indépendantes, et pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $s_{i,n}$ la réflexion par rapport à l'hyperplan $\alpha_i(x) = n$. Les translations

$$\prod_{i=0}^{r} (s_{i,0}.s_{i,n_i}) \quad (n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{Z})$$

forment un sous-groupe d'indice fini T de W .

Soit U une partie finie de W telle que $W = T.U$. Il existe évidemment un entier N' tel que tout élément de U soit un produit de réflexions en nombre $\leqslant N'$. Cela étant, l'entier $N = N' + 2r$ possède la propriété de l'énoncé.

3.6. Un lemme sur la réunion des sous-groupes de Borel.

Lemme. Soient G , $\mathcal{B}$ et B comme en 3.2, et $H = \bigcup_{g \in G} gBg^{-1}$. Alors, il existe un entier N tel que $G = H^N$.

Preuve. Soient W le groupe de Weyl et $s \in W$ une réflexion quelconque. Il existe alors une réflexion fondamentale r $(\in R)$ et un élément $w \in W$ tels que $s = wrw^{-1}$. Quitte à remplacer éventuellement w par wr , on peut supposer que $l(wr) = l(w) + 1$. On a alors, vu les sorites bien connus,

$$BsB \subset BwrB.Bw^{-1}B \subset BwrB.BrB.Bw^{-1}B \subset BwrB.Br^{-1}w^{-1}B =$$

$$= B.\Big(\bigcup_{g \in BwrB} gBg^{-1}\Big) \subset B.H \subset H^2 .$$

Il s'ensuit que si N' est un entier tel que tout élément de W soit un produit de réflexions en nombre $\leqslant N'$ (cf. 3.5.3), l'entier $N = 2N'$ possède la propriété de l'énoncé.

3.7. Caractérisation d'une structure de Weyl par la bornologie associée.

3.7.1. Une bornologie dans un ensemble E est un ensemble $\mathcal{P}$ de parties de E tel que toute partie réduite à un point appartienne à $\mathcal{P}$, que la réunion de deux éléments de $\mathcal{P}$ appartienne à $\mathcal{P}$ et que toute partie d'une partie appartenant à $\mathcal{P}$ appartienne à $\mathcal{P}$. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés les *bornés* (ou *parties bornées*). Un *groupe bornologique* est un groupe doté d'une bornologie $\mathcal{P}$ telle que $H, H' \in \mathcal{P}$ implique $H.H'^{-1} \in \mathcal{P}$. Selon 3.1, tout groupe avec structure de Weyl est, de façon naturelle, un groupe bornologique ; la bornologie en question sera dite *associée* à la structure de Weyl.

3.7.2. *Proposition*. *Soit* G *un groupe bornologique non borné*. *Alors*, G *possède au plus une structure de Weyl dont le groupe de Weyl soit de type euclidien irréductible et dont les sous-groupes de Borel soient bornés. La bornologie associée à une telle structure coïncide avec la bornologie de* G.

Preuve. La première assertion est conséquence de la deuxième. En effet, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux structures de Weyl dont les groupes de Weyl soient de type euclidien irréductible, et telles que les bornologies associées coïncident. Alors, il résulte de 3.3 que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont les mêmes sous-groupes paraboliques maximaux, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ en vertu de 3.4.2.

Reste donc à établir la deuxième assertion. Soient $\mathcal{P}$ la bornologie donnée dans G, $\mathcal{B}$ une structure de Weyl possédant les propriétés de l'énoncé et $\mathcal{P}'$ la bornologie associée à cette structure de Weyl. Il est clair que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$. Supposons qu'on n'ait pas l'inclusion inverse, c'est-à-dire qu'il existe une partie H de G bornée pour $\mathcal{P}$ et non pour $\mathcal{P}'$. Le groupe de Weyl W de $\mathcal{B}$ peut être vu comme le groupe de Weyl affine d'un système de racines irréductible dont nous notons W° le groupe de Weyl ordinaire. Ainsi,

$P = BW^\circ B$ est un sous-groupe parabolique de G' , et $P \in \mathcal{P}$. Quitte à remplacer H par PHP , nous pouvons supposer que $H = PHP$. Alors, $H = \bigcup_{w \in X} BwB$ où W est une partie infinie de W telle que $X = W^\circ X W^\circ$. Soit N un entier tel que tout élément de W soit dominé par un élément de X^N (cf. 3.5.2). Pour tout $w \in W$, il existe donc $w' \in W$ tel que $ww' \in X^N$ et $l(ww') = l(w) + l(w')$. Alors

$$BwB.Bw^{-1}B \subset (BwB.Bw'B).(Bw'^{-1}B.Bw^{-1}B) \subset$$

$$\subset Bww'B.(Bww'B)^{-1} \subset H^N.(H^N)^{-1} \quad .$$

Ceci étant vrai pour tout $w \in W$, on a, en particulier,

$$\bigcup_{g \in G} gBg^{-1} \subset H^N.(H^N)^{-1} \quad ,$$

d'où

$$\bigcup_{g \in G} gBg^{-1} \in \mathcal{P}$$

et, en vertu de 3.6, $G \in \mathcal{P}$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle G n'est pas borné. La contradiction provient de ce qu'on a supposé $\mathcal{P} \not\subset \mathcal{P}'$.

3.7.3. Corollaire. Soient G , $\mathcal{B}$ comme en 3.2.4, G' un sous-groupe de G non contenu dans un sous-groupe parabolique propre, et $\mathcal{B}'$ une structure de Weyl dans G' dont le groupe de Weyl soit de type euclidien irréductible et telle qu'un sous-groupe parabolique de G' au moins soit contenu dans un sous-groupe parabolique propre de G . Alors, $\mathcal{B}'$ est la seule structure de Weyl dans G' qui possède ces propriétés. L'intersection de G' et d'un sous-groupe parabolique propre de G est contenue dans un sous-groupe parabolique propre de G'. Tout sous-groupe parabolique maximal de G' est l'intersection de G' avec un sous-groupe parabolique maximal de G.

(Il est même probable, mais non encore démontré, que tout sous-groupe parabolique de G' est l'intersection de G' et d'un sous-groupe parabolique de G).

En effet, en vertu de 3.7.2, appliqué à G', $\mathcal{B}'$, la bornologie associée à $\mathcal{B}'$ coïncide avec la restriction à G' de la bornologie associée à $\mathcal{B}$. Cela étant, toutes les assertions sont conséquences immédiates de 3.7.2 et 3.3.

4. Application aux groupes simples sur les corps locaux (bref aperçu).

4.1. Une BN-paire.

4.1.1. Etant donné un groupe de Coxeter fini W°, un groupe de Coxeter de type euclidien W sera appelé une extension affine de W° s'il existe un système de racines dont W° est le groupe de Weyl et dont W est le groupe de Weyl affine. Une structure de Weyl est dite complète si elle peut être décrite au moyen d'une BN-paire.

4.1.2. Théorème. Soient K un corps de valuation discrète complet à corps résiduel parfait, et G un groupe simple simplement connexe défini sur K. Alors, le groupe G_K des points de G rationnels sur K possède une structure de Weyl et une seule, telle que les parties bornées pour cette structure soient les parties bornées au sens usuel. Le groupe de Weyl de cette structure est une extension affine du groupe de Weyl relatif (sur K) de G .

L'unicité de la structure résulte de 3.4.2. Notons qu'il n'est pas vrai que, lorsque le système de racines relatives de G est un "vrai" système de racines (sans racines divisibles), le groupe de Weyl soit nécessairement le groupe de Weyl affine de ce système de racines. Lorsque G est anisotrope sur K , le groupe de Weyl relatif est réduit à l'élément neutre, il en est de même de son extension affine et la structure de Weyl en question dans 4.1.2 est triviale (i.e. G_K lui-même est son unique "sous-groupe de Borel") ; autrement dit, G_K est borné. Si G n'est pas anisotrope, le groupe de Weyl affine a un générateur fondamental de plus que le groupe de Weyl relatif et G_K est non borné. Dans tous les cas, on a donc le

4.1.3. Corollaire. Si r désigne le rang relatif de G , le nombre de classes de conjugaisons de sous-groupes bornés maximaux dans G_K est égal à $r+1$.

4.1.4. Les sous-groupes paraboliques bornés de la structure de Weyl en question dans 4.1.2 (i.e. les sous-groupes paraboliques propres dans le cas non anisotrope, et le groupe G_K lui-même dans le cas anisotrope) sont appelés sous-groupes parahoriques de G_K .

4.1.5. Proposition. Si K' est une extension galoisienne non ramifiée de K , les sous-groupes parahoriques de G_K sont les groupes de points rationnels sur K des sous-groupes parahoriques de

$G_{K'}$ <u>invariants par le groupe de Galois</u> $\Gamma' = \mathrm{Gal}\,(K'/K)$. <u>Deux sous-groupes parahoriques de</u> $G_{K'}$ <u>sont confondus</u> (<u>resp. conjugués dans</u> $G_{K'}$) <u>si et seulement si leurs intersections avec</u> G_K <u>sont confondues</u> (<u>resp. conjuguées dans</u> G_K) .

Toutes ces assertions sont (en général) fausses lorsque l'extension K'/K est ramifiée, contrairement à ce qui a été dit dans [6] .

4.1.6. <u>Corollaire</u>. <u>Avec les notations de</u> 4.1.5, <u>si</u> G <u>est</u> K-<u>anisotrope</u>, $G_{K'}$ <u>possède un unique sous-groupe parahorique invariant par</u> Γ' .

4.1.7. Un sous-groupe parahorique de G_K est appelé <u>sous-groupe d'Iwahori</u> s'il est contenu dans un sous-groupe parahorique minimal de $G_{K'}$, où K' est l'extension non ramifiée maximale de K Si G_K possède des sous-groupes d'Iwahori, ce sont ses sous-groupes parahoriques minimaux (en particulier, ils sont tous conjugués).

4.2. <u>Structures proalgébriques</u>.

4.2.1. On conserve les notations de 4.1 et on note k le corps résiduel de K . Alors, les sous-groupes parahoriques de G_K sont, de façon naturelle, les groupes de points rationnels de groupes proalgébriques définis sur k . Plus précisément, on associe :

– à tout sous-groupe parahorique P_k de G_K un groupe proalgébrique P défini sur k dont P_k est le groupe des points rationnels sur k , un groupe algébrique connexe réductif $\overline{P}$ défini sur k , appelé par abus de langage "le" <u>quotient réductif</u> de P et un

- 27 -

k-homomorphisme surjectif $\rho : P \longrightarrow \overline{P}$, la <u>réduction</u>, dont le noyau est limite projective de groupes unipotents connexes définis sur k ;

- à toute inclusion $P'_k \hookrightarrow P_k$ de sous-groupes parahoriques de G_K , un k-homomorphisme injectif (au point de vue ensembliste) $\iota : P' \longrightarrow P$, qui induit l'inclusion en question, tel que $\overline{Q} = \rho(\iota(P'))$ soit un sous-groupe parabolique de $\overline{P}$ et tel qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, dashed, "\rho\circ\iota"] \arrow[d, "\rho'"'] & \overline{Q} \arrow[d, "\pi"] \\ \overline{P}' \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & \overline{Q}/R_u(\overline{Q}) \end{tikzcd}$$

où $R_u(\overline{Q})$ désigne le radical unipotent de $\overline{Q}$, π est la projection canonique et φ est un <u>isomorphisme de groupes algébriques</u>. (NB. ι n'est en général pas un isomorphisme de P' sur son image dans P).

Enonçons encore deux propriétés essentielles des structures en question.

4.2.1.1. <u>Les sous-groupes parahoriques de</u> G_K <u>contenus dans</u> P_k <u>sont les images réciproques par</u> $\rho_k : P_k \longrightarrow \overline{P}_k$ <u>des groupes de points rationnels des</u> k-<u>sous-groupes paraboliques de</u> $\overline{P}$.

4.2.1.2. <u>Un sous-groupe parahorique</u> P_k <u>est un sous-groupe d'Iwahori si et seulement si le quotient réductif</u> $\overline{P}$ <u>de</u> P <u>est un tore</u>.

4.2.2. Applications au cas où le corps des restes est de dimension cohomologique 1.

Soit $\dim k \leqslant 1$, et soit P_k un sous-groupe parahorique de G_K. De l'hypothèse faite sur k il résulte que $\bar{P}$ est quasi-déployé sur k, c'est-à-dire, possède un sous-groupe de Borel $\bar{B}$ défini sur k. Vu 4.2.1.1 et 4.2.1.2, l'image réciproque de $\bar{B}_k$ dans P_k est un sous-groupe d'Iwahori de G_K. Ainsi

4.2.2.1. *Si* $\dim k \leqslant 1$, G_K *possède des sous-groupes d'Iwahori*.

En particulier, si G est K-anisotrope, l'unique sous-groupe parahorique de $G_{K'}$ invariant par Γ, dont il est question en 4.1.6, est un sous-groupe d'Iwahori. Ce résultat appliqué au cas où K' est l'extension non ramifiée maximale de K, et une contemplation attentive des diagrammes de Dynkin étendus, montre (par un raisonnement esquissé dans [6]) que

4.2.2.2. *Si* $\dim k \leqslant 1$ *et si* G *est K-anisotrope,* G *est un groupe de type* A_n *intérieur* (i.e. G_K *est le groupe des éléments de norme réduite* 1 *d'une algèbre à division sur* K).

De là on peut déduire le résultat de M. Kneser :

4.2.2.3. *Si* $\dim k \leqslant 1$, $H^1(K,G) = 0$.

Ce résultat peut aussi se déduire plus directement de ce qui précède, sans passer par 4.2.2.2. Soit K' l'extension non ramifiée maximale de K et $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(K'/K)$. Utilisant le fait connu que $\dim K' \leqslant 1$, on commence par ramener l'assertion 4.2.2.3 à

$H^1(\Gamma, G_{K'}) = 0$. Soit alors α un cocycle de Γ à valeurs dans $G_{K'}$, et soit ${}^{\alpha}G$ le groupe G tordu par α . Vu 4.2.2.1 et 4.1.5, les groupes $G_{K'}$ et ${}^{\alpha}G_{K'}$ ont des sous-groupes d'Iwahori invariants par Γ . Cela étant, on peut "pousser" le cocycle α dans un tel sous-groupe d'Iwahori, et on montre alors qu'il est cohomologue à 0 en utilisant le fait que le sous-groupe d'Iwahori en question est une extension d'un tore par une limite projective de groupes unipotents connexes. Cette méthode est due à T. A. Springer.

4.3. A propos des démonstrations.

4.3.1. Corps résiduel algébriquement clos ; groupe G déployé.

Soit k algébriquement clos et G déployé. Dans ce cas, la BN-paire du n° 4.1 est donnée par la théorie d'Iwahori-Katsumoto [3] . Le fait qu'elle possède la propriété caractéristique du théorème 4.1.2 se déduit immédiatement de 3.7.2.

Etant donné un sous-groupe parahorique P quelconque de G_K , et notant $\underline{O}$ l'anneau des entiers de K , on montre que le groupe G possède une $\underline{O}$-structure lisse et une seule telle que P soit le groupe des points entiers de G (points de G sur $\underline{O}$). Appliquant à cette structure le foncteur de Greenberg, on obtient sur P la structure de limite projective du n° 4.2.1. Le foncteur de Greenberg d'ordre 1 (réduction mod. l'idéal maximal de O) donne lieu à un groupe qui n'est en général pas réductif, mais dont le quotient par son radical unipotent est le groupe $\overline{P}$ du n° 4.2.1.

4.3.2. Corps résiduel algébriquement clos, groupe G quelconque.

Lorsque k est algébriquement clos, G est quasi-déployé. La BN-paire et les structures proalgébriques des sous-groupes parahoriques s'obtiennent, à partir du cas déployé, par une descente ad hoc. Essentiellement, on prouve un théorème général de "réduction au rang (relatif) 1", et les groupes de rang relatif 1 doivent être traités "à la main". (L'existence de la BN-paire dans le cas quasi-déployé a été montrée, de façon différente, par H. Hijikata [2]).

4.3.3. Cas général.

Le cas général se traite, à partir de 4.3.2, par descente étale. Soit K' l'extension non ramifiée maximale du corps K. La descente est basée de façon essentielle sur le fait que $G_{K'}$ possède un sous-groupe parahorique invariant par $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(K'/K)$; l'existence d'un tel sous-groupe est fournie par le théorème 3.2.4. La descente établit simultanément le théorème 4.1.2 et la proposition 4.1.5. En vertu de cette dernière, tout sous-groupe parahorique P_K de G_K est l'intersection de G_K avec un sous-groupe parahorique de $G_{K'}$ invariant par Γ, lequel n'est autre que le groupe P du n° 4.2.

4.4. Tores associés à un sous-groupe parahorique.

4.4.1. On conserve les notations des numéros précédents ; en particulier, K' est toujours l'extension non ramifiée maximale de K et $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(K'/K) = \mathrm{Gal}\,(k'/k)$. Soient P un sous-groupe parahorique de $G_{K'}$ invariant par Γ et $P_k = P \cap G_K$. Un tore T de G , défini sur K et déployé sur K' est dit <u>associé</u> à P_k si le groupe des unités de T sur K' est contenu dans P . Alors, l'image $\bar{T}$ de $T \cap P$ dans $\bar{P}$ est un tore de $\bar{P}$, défini sur k et tel que les groupes de caractères $X^*(T)$ et $X^*(\bar{T})$ sont isomorphes comme Γ-modules ; en particulier $\bar{T}$ est déployé si et seulement si T l'est. Réciproquement, tout tore $\bar{T}$ de $\bar{P}$ défini sur k "se remonte" en un tore T associé à P et défini sur K . Tout tore défini et déployé sur K est associé à un sous-groupe parahorique minimal de G_K .

4.4.2. Les résultats précédents, qui s'établissent au cours de la descente étale, ont un corollaire intéressant. Disons qu'une extension algébrique L/K est "bonne" si tout groupe réductif défini sur L possède un tore L-déployé maximal défini sur K . Alors, on déduit immédiatement des considérations de 4.4.1 que

<u>Proposition</u>. <u>Soient</u> K <u>comme en</u> 4.1.2 <u>et</u> L <u>une extension non ramifiée de</u> K . <u>Alors, si l'extension résiduelle</u> l/k <u>est bonne, il en est de même de l'extension</u> L/K . <u>En particulier, l'extension non ramifiée maximale</u> K'/K <u>est bonne, c'est-à-dire que tout groupe réductif défini sur</u> K <u>possède un tore</u> K'-<u>déployé maximal défini sur</u> K .

4.5. <u>Un "théorème d'Iwasawa"</u>.

4.5.1. Soient W le groupe de Weyl de la BN-paire du n° 4.1.2, R le système générateur fondamental de W , et l le rang relatif de G , de sorte que $\operatorname{card} R = l+1$ (sauf si $l = 0$,cas que nous écartons pour la commodité de l'exposé). Le groupe W étant un "groupe affine engendré par des réflexions", on peut parler du "groupe des translations" de W ; notons T ce groupe. Une partie R^o de R est dite <u>spéciale</u> si le groupe W^o qu'elle engendre est fini et si $W = W^o.T$ (ceci implique que card $R^o = 1$). Un sous-groupe parahorique de G_k est dit <u>spécial</u> s'il est "de type R^o " avec R^o spécial, c'est-à-dire s'il est de la forme BW^oB où W^o est obtenu comme ci-dessus, B désignant un sous-groupe parahorique minimal ("sous-groupe de Borel" de la BN-paire).

4.5.2. <u>Proposition</u>. <u>Soient</u> K <u>et</u> G <u>comme en</u> 4.1.2, P <u>un</u> K-<u>sous-groupe parabolique minimal</u> (<u>au sens usuel</u>) <u>de</u> G , <u>et</u> Q_k <u>un sous-groupe parahorique spécial de</u> G_K . <u>Alors</u>, $G_K = P_K.Q_k$.

C'est une propriété facile à établir, et de nature purement "formelle" : on pourrait énoncer une proposition plus générale, se rapportant à un groupe doté de deux structures de Weyl dont les groupes de Weyl sont respectivement un groupe fini W^o et une extension affine W de celui-ci, ces deux structures étant soumises à certaines conditions dont la vérification dans le cas qui nous intéresse est élémentaire.

4.5.3. La proposition 4.5.2 peut encore être précisée comme suit. Soient U le radical unipotent de P et P_K^o le groupe des points de P_K sur lesquels tous les caractères de P prennent des valeurs entières. Alors, P_K/P_K^o est un groupe abélien libre de rang 1 (le rang relatif de G), canoniquement isomorphe au groupe des translations du groupe de Weyl W . Soit A un système de représentants des éléments de P_K/P_K^o dans P_K . Alors

- 33 -

Proposition. On a $G_K = U_K.A.Q_k$. De plus, si $a, a' \in A$, l'égalité $U_K.a.Q_k = U_K.a'.Q_k$ implique $a = a'$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bruhat, F., Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalle sur un corps $\mathfrak{P}$-adique, Publ. Math. I.H.E.S., 23 (1964), 46-74. (Cf. aussi : $\mathfrak{P}$- adic groups, Notes polycopiées, Summer Institute on Algebraic Groups, Boulder, juillet 1965.)

[2] Hijikata, H., On arithmetic of p -adic Steinberg groups, Notes polycopiées, Univ. Yale, 1965.

[3] Iwahori, N., et Matsumoto H., On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{P}$-adic Chevalley groups, Publ. Math. I.H.E.S., 25 (1965), 5-48.

[4] Tits, J., Groupes et géométries de Coxeter, Notes polycopiées, I.H.E.S., 1961.

[5] - , Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, 254 (1962), 2910-2912.

[6] Tits, J., Semi-simple groups over local fields, Notes polycopiées, Summer Institute on Algebraic Groups, Boulder, juillet 1965.

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures
Faculté des Sciences, Paris

Avril 1966.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of

Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.