Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

Groupes algébriques simples sur un corps local

François Bruhat and Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.213

msp

Groupes algébriques simples sur un corps local

François Bruhat and Jacques Tits

[72] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.* **263** (1966), 822–825. Reused with permission.

822 — Série A C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (28 novembre 1966).

THÉORIE DES GROUPES. — *Groupes algébriques simples sur un corps local.* Note (*) de MM. **François Bruhat** et **Jacques Tits**, présentée par M. Jean Leray.

On garde les notations d'une Note précédente ([1]). En particulier, K est un corps muni d'une valuation v discrète non triviale, $\mathcal{K}$ est l'anneau et k le corps résiduel de v. On suppose, de plus, K *complet* et k *parfait*. On désigne par $\tilde{\mathrm{K}}$ l'extension non ramifiée maximale de K, par $\tilde{\mathcal{K}}$ l'anneau des entiers, par $\tilde{k}$ le corps résiduel et par Γ le groupe de Galois de cette extension. On note τ un homomorphisme de groupes de $\tilde{k}^*$ dans $\tilde{\mathcal{K}}^*$ relevant l'application canonique et s'étendant en un homomorphisme d'anneaux de $\tilde{k}$ dans $\tilde{\mathrm{K}}$ lorsque $\operatorname{car} k = \operatorname{car} \mathrm{K}$. Enfin, on note G un groupe algébrique simple, simplement connexe, défini sur K et de K-rang l.

Si $\mathfrak{X}$ est un schéma en groupes affine de type fini lisse sur $\mathcal{K}$, on note X sa fibre générique, X^0 sa fibre spéciale et X^n le groupe algébrique défini sur k obtenu par application du foncteur de Greenberg au schéma $\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{K}} (\mathcal{K}/\pi^{n+1}\mathcal{K})$ (pour $n \in \mathbf{N}$). On identifie le groupe $\mathfrak{X}_{\mathcal{K}}$ (resp. $\mathfrak{X}_{\tilde{\mathcal{K}}}$) des points de $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathcal{K}$ (resp. $\tilde{\mathcal{K}}$) avec un sous-groupe de X_{K} (resp. $\mathrm{X}_{\tilde{\mathrm{K}}}$). Les X^n forment un système projectif, les homormophismes de transition étant définis sur k, surjectifs et de noyaux unipotents connexes, et $\mathfrak{X}_{\mathcal{K}}$ s'identifie à $\varprojlim \mathrm{X}^n_k$.

1. Reprenons les hypothèses et notations du n° 1 de ([1]) (G est donc déployé sur K). Pour toute racine affine $(a, \lambda) \in \Sigma$, posons

$$\tilde{\mathrm{U}}(a, \lambda) = \{ u_a(t) \mid t \in \tilde{\mathrm{K}},\ v(t) \geqq \lambda \}.$$

Notons $\mathfrak{T}$ le spectre de la $\mathcal{K}$-algèbre engendrée par les caractères de T; c'est un schéma en groupes sur $\mathcal{K}$, dont la fibre générique s'identifie à T. Pour $\alpha \in \Sigma$, notons $\mathfrak{U}_\alpha$ un schéma en groupes sur $\mathcal{K}$, isomorphe à $\mathfrak{A}dd$, ayant U_a pour fibre générique et tel que $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\tilde{\mathrm{K}}} = \tilde{\mathrm{U}}_\alpha$; ceci caractérise $\mathfrak{U}_\alpha$ à isomorphisme près et l'on a aussi $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\mathrm{K}} = \mathrm{U}_\alpha$.

Soit Ω une partie bornée non vide de A. Le sous-groupe de G_{K} (resp. $\mathrm{G}_{\tilde{\mathrm{K}}}$) engendré par $\mathrm{H} = \mathfrak{T}_{\mathcal{K}}$ (resp. $\operatorname{Ker} \tilde{\nu} = \mathfrak{T}_{\tilde{\mathcal{K}}}$) et les U_α (resp. $\tilde{\mathrm{U}}_\alpha$) pour $\alpha \supset \Omega$ est noté P_Ω (resp. $\tilde{\mathrm{P}}_\Omega$). Pour toute racine $a \in \Sigma_0$, soit $\alpha(a)$ l'intersection des racines (a, λ) qui contiennent Ω.

Théorème 1. — *Il existe un schéma en groupes $\mathcal{G}_\Omega$ affine, de type fini et lisse sur $\mathcal{K}$ et un isomorphisme φ de la fibre générique G_Ω sur G tels que :*

(i) *la bijection $\varphi_{\tilde{\mathrm{K}}} : (\mathrm{G}_\Omega)_{\tilde{\mathrm{K}}} \to \mathrm{G}_{\tilde{\mathrm{K}}}$ induite par φ envoie le groupe $(\mathcal{G}_\Omega)_{\tilde{\mathcal{K}}}$ sur $\tilde{\mathrm{P}}_\Omega$;*

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (28 novembre 1966). Série A — 823

(ii) *l'algèbre affine de* $\mathcal{G}_\Omega$ *s'identifie par* φ *à l'algèbre des fonctions régulières sur* G, *définies sur* K *et prenant des valeurs dans* $\tilde{\mathcal{K}}$ *en tout point de* P_Ω;

(iii) *La fibre spéciale* G^0_Ω *est connexe et les schémas* $\mathfrak{U}_{\alpha(a)}$ *pour* $a \in \Sigma_0$, *et* $\mathfrak{T}$, *peuvent être identifiés à des sous-schémas fermés de* $\mathcal{G}_\Omega$ *de telle façon que les restrictions de* φ *aux fibres génériques* U_a *et* T *soient les injections canoniques et que, pour un ordre convenable des racines, l'application produit donne un isomorphisme du schéma produit*

$$\prod_{a \in \Sigma_0} \mathfrak{U}_{\alpha(a)} \times \mathfrak{T}$$

sur un sous-schéma ouvert de $\mathcal{G}_\Omega$.

Chacune de ces propriétés caractérise la paire $(\mathcal{G}_\Omega, \varphi)$ *à isomorphisme près. On a* $\varphi_{\tilde{K}}((\mathcal{G}_\Omega)_{\mathcal{K}}) = P_\Omega$.

Le quotient $\overline{G}_\Omega$ de G^0_Ω par son radical unipotent est un groupe réductif connexe de rang égal à celui de G. Désormais, nous identifierons G_Ω à G.

Remarque 1. — Si l'on prend pour Ω une facette, on obtient ainsi un schéma en groupes dont le groupe des points entiers s'identifie à un sous-groupe *parahorique* de G_K. Lorsque Ω est un *point spécial* de A [point de V où toutes les racines prennent leurs valeurs dans $v\,(K^*)$], $\mathcal{G}_\Omega$ est isomorphe au schéma de Chevalley-Demazure; c'est le seul cas où G^0_Ω est réductif. Si Ω est réduit au sommet d'une chambre, c'est-à-dire si P_Ω est un sous-groupe parahorique *maximal*, $\overline{G}_\Omega$ est semi-simple; si, par contre, $\mathring{\Omega} \neq \emptyset$ (par exemple, si Ω est une chambre, cas où P_Ω est un sous-groupe d'Iwahori), alors $\overline{G}_\Omega$ est un tore (i. e. G^0_Ω est résoluble).

Remarque 2. — On peut généraliser ce qui précède au cas où Ω n'est pas borné; on trouve alors des schémas en groupes de fibre générique isomorphe à des sous-groupes algébriques de G contenant T.

2. Reprenons maintenant les hypothèses (G quasi déployé et résiduellement déployé sur K) et notations du n° 2 de [1] et gardons celles du numéro précédent, mais en y remplaçant K par L. Soit $\Omega \subset A^\natural$ et notons $P^\natural_\Omega$ et $\tilde{P}^\natural_\Omega$ les sous-groupes de G_K et $G_{\tilde{K}}$ correspondant à Ω de la même façon que ci-dessus, mais pour la donnée radicielle du n° 2 de [1]. Le groupe Γ opère sur $\mathcal{G}_\Omega$. Comme il opère trivialement sur $\tilde{k}$, on en déduit une action de Γ par automorphismes *algébriques* sur chacun des groupes G^n_Ω; soit $(G^n_\Omega)^\natural$ le groupe des points fixes de cette action et soit $(G^\natural_\Omega)^n$ l'intersection des images dans G^n_Ω des $(G^m_\Omega)^\natural$ pour $m \geq n$.

Théorème 2. — *Les groupes* $(G^\natural_\Omega)^n$ *sont des groupes algébriques connexes définis sur* k; *ils forment un système projectif dont les homomorphismes de transition sont surjectifs à noyaux unipotents connexes. L'application canonique (« réduction »)* $\tilde{P}_\Omega \to (G^n_\Omega)_{\tilde{k}}$ *envoie* $\tilde{P}^\natural_\Omega$ *dans* $(G^\natural_\Omega)^n_{\tilde{k}}$ *et* $P^\natural_\Omega$ *dans* $(G^\natural_\Omega)^n_k$. *Les homomorphismes* $\tilde{P}^\natural_\Omega \to \varprojlim (G^\natural_\Omega)^n_{\tilde{k}}$ *et* $P^\natural_\Omega \to \varprojlim (G^\natural_\Omega)^n_k$ *qu'on en déduit* *sont respectivement une injection dense (pour la topologie de la limite projective) et une bijection.*

Le quotient $\overline{G}^\natural_\Omega$ de $(G^\natural_\Omega)^0$ par son radical unipotent est un groupe réductif *déployé*, dont le type semi-simple se déduit du diagramme de Dynkin résiduel Δ de G [*cf.* [1]] de la façon suivante. Quitte à transformer Ω par un élément de $W^\natural$, nous pouvons supposer que le sous-espace affine de $A^\natural$ engendré par Ω est intersection des hyperplans de points fixes d'un ensemble J de générateurs distingués de $W^\natural$. Alors :

PROPOSITION 1. — *Le diagramme de Dynkin de $\overline{G}^\natural_\Omega$ est le sous-diagramme de Δ dont les sommets correspondent aux éléments de* J.

PROPOSITION 2. — *Supposons que Ω soit une facette de $A^\natural$. Soit ρ l'application canonique de $P^\natural_\Omega$ dans $(\overline{G}^\natural_\Omega)_k$. L'application $Q \mapsto \rho^{-1}(Q_k)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques (resp. des sous-groupes de Borel) définis sur k de $\overline{G}^\natural_\Omega$ sur l'ensemble des sous-groupes parahoriques (resp. des sous-groupes d'Iwahori) de G_k contenus dans $P^\natural_\Omega$.*

3. Revenons au cas général. Le groupe G est résiduellement déployé sur $\tilde{K}$. Si $P = \tilde{P}^\natural_\Omega$ est un sous-groupe parahorique de $G_{\tilde{K}}$, nous noterons désormais P^n et $\overline{P}$ les groupes algébriques sur $\tilde{k}$ notés ci-dessus $(G^\natural_\Omega)^n$ et $\overline{G}^\natural_\Omega$. Nous dirons que P est *défini sur k* ou est un *k-sous-groupe parahorique*, s'il est invariant par Γ, et l'on posera alors $P_k = P \cap G_K$. Dans ce cas, Γ opère sur le système projectif des P^n, de sorte que les groupes algébriques P^n et $\overline{P}$ « sont » *définis sur k*.

PROPOSITION 3. — *Si* P *est un k-sous-groupe parahorique, l'homomorphisme canonique $P_k \to \overline{P}_k$ est surjectif.*

Soit S un tore de G, déployé sur K. On appelle *minitore de* S, le sous-groupe Mini S des $s \in S_{\tilde{K}}$ tels que $\chi(s) \in \tau(\tilde{k}^*)$ pour tout caractère χ de S. Il est muni d'une structure naturelle de tore défini sur $\tilde{k}$, et même sur k lorsque S est défini sur K. Un sous-groupe M de $G_{\tilde{K}}$ est appelé un *minitore* (resp. *k-minitore*) s'il existe un tore S déployé sur $\tilde{K}$ (resp. et défini sur K) tel que M = Mini S (et S est alors l'adhérence de Zariski de M).

PROPOSITION 4. — *Soit* P *un sous-groupe parahorique (resp. un k-sous-groupe parahorique) de $G_{\tilde{K}}$. Tout tore (resp. k-tore) de $\overline{P}$ est l'image d'un minitore (resp. k-minitore) de* P. *Deux minitores (resp. k-minitores) contenus dans* P *sont conjugués dans* P *(resp. par un élément de P_k) si et seulement si leurs images dans* P *sont conjuguées (resp. par un élément de $\overline{P}_k$).*

Faisant usage du théorème 1 de [2], on montre que :

PROPOSITION 5. — *Soit* S *un* K-*tore de* G, *déployé sur* $\tilde{K}$. *Il existe un k-sous-groupe parahorique de $G_{\tilde{K}}$ contenant* Mini S.

Utilisant la proposition 4, on en déduit :

COROLLAIRE 1. — *Il existe un tore déployé sur $\tilde{K}$ maximal de* G, *contenant* S *et défini sur* K.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (28 novembre 1966). Série A — 825

4. Soient S un tore de G déployé sur K maximal, T un tore déployé sur $\tilde{K}$ maximal défini sur K contenant S et Z (S) le centralisateur de S. D'après [1], n° 2, on a une donnée radicielle $(N, \nu, (U_\alpha))$ dans G_K, avec $N = (\text{Norm } T)_K$ [donnée notée $(N^\natural, \nu^\natural, (U_\alpha^\natural))$ dans [1]]. Si $l = \dim S > 0$, le groupe Γ satisfait aux conditions du n° 7 de [2]. On a alors :

Théorème 1. — *Les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *du théorème* 3 *de* [2] *sont remplies. Avec les notations utilisées là, on a* $N^\natural = (\text{Norm } S)_K$ *et* $H^\natural = \{ h \in Z(S)_K \mid \chi(h) \in \mathcal{K}$ *pour tout caractère* χ *de* $Z(S) \}$. *Le groupe* $W^\natural = N^\natural/H^\natural$ *est une extension du groupe de Weyl relatif à* K *de* G *par un groupe abélien libre de rang* l. *Si* $\alpha \in \Sigma^\natural$, *l'adhérence de Zariski de* $U_\alpha^\natural$ *est le sous-groupe unipotent* $U_{(a)}$ *associé à une* K*-racine non divisible* a *de* G *et* $(U_{(a)})_K$ *est la réunion des* $U_\beta^\natural$ *pour* $\beta \in \Sigma^\natural$ *et* $\beta \subset \alpha$.

Le théorème 3 de [2] fournit donc une donnée radicielle et une BN-paire de groupe de Weyl $W^\natural$ dans G_K, d'où la notion de sous-groupe parahorique de G_K. Si $l = 0$, on a $N^\natural = H^\natural = G_K$ et G_K lui-même est l'unique sous-groupe parahorique de G_K. D'après [2], n° 4, on a :

Proposition 6. — *Tout sous-groupe borné* [3] *de* G_K *est contenu dans un sous-groupe borné maximal. Les sous-groupes bornés maximaux de* G_K *sont les sous-groupes parahoriques maximaux et forment* $l + 1$ *classes de conjugaison.*

Proposition 7. — *Les sous-groupes parahoriques de* G_K *sont les intersections de* G_K *avec les* k*-sous-groupes parahoriques de* $G_{\tilde{K}}$. *Deux* k*-sous-groupes parahoriques de* $G_{\tilde{K}}$ *sont conjugués dans* $G_{\tilde{K}}$ *ou coïncident si et seulement si leurs intersections avec* G_K *sont conjuguées dans* G_K *ou coïncident. Les* k*-sous-groupes parahoriques minimaux de* $G_{\tilde{K}}$ *sont conjugués entre eux par des éléments de* G_K.

Corollaire 2. — *Si* G *est* K*-anisotrope,* $G_{\tilde{K}}$ *possède un et un seul* k*-sous-groupe parahorique. Il contient* G_K *et* G_K *est borné.*

(*) Séance du 7 novembre 1966.

[1] F. Bruhats et J. Tits, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 598.
[2] F. Bruhat et J. Tits, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 766.

[3] Une partie de G_K est dite bornée si toute fonction régulière sur G y est bornée.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.