Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

# Groupes algébriques simples sur un corps local : cohomologie galoisienne, décompositions d’Iwasawa et de Cartan

François Bruhat and Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

**Innovations in Incidence Geometry** **vol. 16, no. 1, 2018**
Algebraic, Topological and Combinatorial dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.219

msp

# Groupes algébriques simples sur un corps local : cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan

François Bruhat and Jacques Tits

[73] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.* **263** (1966), 867–869. Reused with permission.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (7 décembre 1966). Série A — 867

THÉORIE DES GROUPES. — *Groupes algébriques simples sur un corps local : cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan.* Note (*) de MM. **François Bruhat** et **Jacques Tits**, présentée par M. Jean Leray.

On donne des applications des résultats de trois Notes précédentes [(1), (2) et (3)]. En particulier, les théorèmes de Kneser sur la nullité du $H^1$ et la classification des formes d'un groupe simple simplement connexe sur un corps $\mathfrak{p}$-adique sont retrouvés et étendus au cas d'un corps résiduel de dimension cohomologique $\leqq 1$ quelconque. On garde les notations de (3).

1. Comme dans la théorie ordinaire des groupes algébriques semi-simples (4), on peut attribuer à G un *k-indice* formé par le diagramme de Dynkin résiduel $\Delta$ de G [relatif à $\tilde{k}$, *cf.* (2), n° 3], l'action de $\Gamma$ sur $\Delta$ traduisant son action sur l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes parahoriques maximaux de $G_{\tilde{K}}$ et l'ensemble $L^0$ des sommets de $\Delta$ correspondant à la classe de conjugaison des $k$-sous-groupes parahoriques minimaux. Pour qu'une classe de conjugaison de sous-groupes parahoriques de $G_{\tilde{K}}$ contienne un sous-groupe P défini sur $k$, il faut et il suffit que l'ensemble J de sommets de $\Delta$ qui lui correspond contienne $D^0$ et soit invariant par $\Gamma$; le $k$-indice du groupe algébrique $\overline{P}$ [*cf.* (3), n° 3] est alors le sous-indice du $k$-indice de G ayant J pour ensemble de sommets [*cf.* (3), prop. 1].

D'autre part, les considérations du n° 3 de (2) s'étendent au groupe $G_K$ (à ceci près que, cette fois, une racine affine peut être associée à deux K-racines proportionnelles), et l'on peut définir un *diagramme de Dynkin résiduel relatif* à $k$ de G, lequel se déduit d'ailleurs du $k$-indice par les règles habituelles (5).

2. On dit que G est *résiduellement quasi déployé* sur K si $G_{\tilde{K}}$ possède un sous-groupe d'Iwahori défini sur $k$, ou, ce qui revient au même, si $D^0 = \emptyset$. Par suite :

Proposition 1. — *Si* G *est résiduellement quasi déployé sur* K, $\Gamma$ *a exactement* $l+1$ *orbites dans* $\Delta$ (*où* $l$ *est le* K-*rang de* G).

Un coup d'œil aux divers diagrammes résiduels possibles [*cf.* (2), n° 3] montre alors que

Corollaire 1. — *Si* G *est résiduellement quasi déployé et anisotrope sur* K, *c'est un groupe de type* $A_n$. *Si, de plus,* $\Gamma$ *est commutatif,* G *est une « forme intérieure » de* $A_n$ (*et* $G_K$ *est donc le groupe multiplicatif des éléments de norme réduite* 1 *d'une algèbre à division de centre* K).

En outre, sous les hypothèses du corollaire 1, le groupe $G_K$ est prorésoluble [*cf.* (3), n° 3, cor. 1].

Proposition 2. — *Si la dimension cohomologique de* $k$ *est* $\leqq 1$, *le groupe* G *est résiduellement quasi déployé sur* K.

Soit, en effet, P un $k$-sous-groupe parahorique de $G_{\tilde{K}}$. Le groupe P possède alors un sous-groupe de Borel Q défini sur $k$ (6) et l'image réciproque de Q dans P est un sous-groupe d'Iwahori défini sur $k$ de $G_{\tilde{K}}$.

En réunissant la proposition 2 et le corollaire 1, on obtient une généralisation du résultat de M. Kneser relatif aux groupes anisotropes sur un corps $\mathfrak{p}$-adique [7].

3. Si X est un groupe algébrique réductif défini sur $k$, on note $H^1(\Gamma, X)_a$ l'ensemble des classes de cohomologie $\gamma \in H^1(\Gamma, X_{\tilde{K}})$ telles que le rang semi-simple sur $k$ du groupe X « tordu par $\gamma$ » soit nul.

Supposons G résiduellement déployé sur K et soient $P_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 2^{l+1} - 1$) des représentants des $2^{l+1} - 1$ classes de conjugaison de $k$-sous-groupes parahoriques de $G_{\tilde{K}}$. Pour tout $i$, soient

$$\varphi_i : H^1(\Gamma, P_i) \to H^1(\Gamma, \overline{P}_i) \qquad \text{et} \qquad \psi_i : H^1(\Gamma, P_i) \to H^1(\Gamma, G_{\tilde{K}})$$

les applications induites par les homomorphismes évidents. Utilisant le fait que les homomorphismes de transition du système projectif $(P_i^n)$ sont surjectifs à noyaux unipotents connexes, on montre que $\varphi_i$ est une *bijection*. Posons alors $\lambda_i = \psi_i \circ \varphi_i^{-1}$ et soit $\lambda$ l'application $\coprod \lambda_i$ de la somme directe des ensembles $H^1(\Gamma, \overline{P}_i)$ dans $H^1(\Gamma, G_{\tilde{K}})$.

Théorème 1. — *La restriction de* $\lambda$ *à* $\coprod H^1(\Gamma, \overline{P}_i)_a$ *est une bijection sur* $H^1(\Gamma, G_{\tilde{K}})$.

Comme $H^1(\Gamma, G_{\tilde{K}}) = H^1(K, G)$, on en déduit :

Corollaire 2. — *Si la dimension cohomologique de* $k$ *est* $\leqq 1$, *on a* $H^1(K, G) = \{0\}$.

Dans le cas d'un corps $\mathfrak{p}$-adique K, on retrouve ainsi un théorème de M. Kneser [8].

Moyennant certains aménagements, la méthode esquissée ici permet aussi d'obtenir des résultats sur la cohomologie galoisienne de groupes non simplement connexes et en particulier sur la classifications des formes. Nous nous bornerons ici à énoncer la

Proposition 3. — *Étant donnés un diagramme de Dynkin résiduel et une action continue de* $\Gamma$ *sur ce diagramme, il existe un et à* K*-isomorphisme près un seul groupe simplement connexe résiduellement quasi déployé sur* K, *dont ce diagramme, cette action de* $\Gamma$ *et l'ensemble vide constituent le* $k$*-indice.*

4. Soient A un espace affine réel muni d'une métrique euclidienne, E un système radiciel de type affine dans A [*cf.* [1], n° 1] et $\Sigma$ l'ensemble des racines affines de E. Soient Q un groupe et $(N, \nu, (U_\alpha)_{\alpha \in \Sigma})$ une donnée radicielle de type $\Sigma$ dans Q [*cf.* [1], n° 5]. Soient C une chambre de A et $p$ un sommet de C qui soit *point spécial* de E, c'est-à-dire tel que tout hyperplan appartenant à E soit parallèle à un hyperplan appartenant à E et passant par $p$. Soit $\Delta$ l'intersection de toutes les racines affines contenant C et dont le bord contient $p$. Soient X le groupe formé par les translations de A contenues dans le groupe de Weyl W de E et $W_0$ le sous-groupe (fini) de W engendré par les $r_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma$ et $p \in \partial\alpha$. Soient $X^{++}$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $x(p) \in \Delta$ et $X^+$ l'ensemble des éléments de X dont le produit scalaire avec tout élément de $X^{++}$ est positif. Enfin, notons $U^+$

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (7 décembre 1966). Série A — 869

le groupe engendré par les $U_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma$ et $\alpha \cap \Delta = \emptyset$ et soit $M = P_{\{p\}}$ le groupe engendré par $H = \nu^{-1}(1)$ et les $U_\alpha$ pour $p \in \alpha$ : c'est un sous-groupe parahorique maximal de Q.

PROPOSITION 4. — *La paire* $(\nu^{-1}(X).U^+, N)$ *est une* BN-*paire de groupe de Weyl* $W_0$.

PROPOSITION 5 (« Décompositions d'Iwasawa et de Cartan »). — *On a*

$$Q = M.\nu^{-1}(X).U^+ = M.\nu^{-1}(X^{++}).M.$$

*Plus précisément, l'application de* X (*resp.* $X^{++}$) *dans l'ensemble des doubles classes* $M\backslash Q/U^+$ (*resp.* $M\backslash Q/M$) *définie par* $x \mapsto M.\nu^{-1}(x).U^+$ [*resp.* $x \mapsto M.\nu^{-1}(x).M$] *est une bijection. Si* $x \in X$, $y \in X^{++}$ *et*

$$M.\nu^{-1}(x).U^+ \cap M.\nu^{-1}(y).M \neq \emptyset,$$

*alors* $yx^{-1} \in X^+$. *Si* $n \in \nu^{-1}(X^{++})$, *on a* $MnU^+ \cap MnM = Mn$.

5. On peut appliquer les propositions 4 et 5 en prenant pour Q le groupe $G_K$ et pour donnée radicielle celle construite au n° 4 de ([3]). On a alors $N = (\text{Norm}\, S)_K$ et $\nu^{-1}(X) = (\text{Cent}\, S)_K$, où S est un tore déployé sur K maximal de G. Le groupe $\nu^{-1}(X).U^+$ est le groupe des points rationnels sur K d'un K-sous-groupe parabolique minimal de G et $U^+$ est le groupe des points rationnels sur K du radical unipotent de ce sous-groupe parabolique. La BN-paire de la proposition 4 est donc la BN-paire usuelle [*cf.* ([9])] et $W_0$ est le groupe de Weyl relatif à K de G.

Lorsque, de plus, le corps K est localement compact, la proposition 5 a des conséquences intéressantes pour l'étude des représentations unitaires du groupe localement compact $G_K$ [*cf.* ([10]) et ([11])]. Elle entraîne par exemple la commutativité de l'algèbre de convolution des fonctions continues à valeurs complexes sur $G_K$ biinvariantes par M. Remarquons que M est alors un *sous-groupe compact maximal* de $G_K$.

(*) Séance du 14 novembre 1966.

([1]) F. BRUHAT et J. TITS, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 598.
([2]) F. BRUHAT et J. TITS, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 766.
([3]) F. BRUHAT et J. TITS, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 822.
([4]) A. BOREL et J. TITS, *Groupes réductifs*, Publ. Math. Inst. Hautes Ét. Sci., 27, 1965, p. 55-151, n° 6.5.
([5]) A. BOREL et J. TITS, *loc. cit.*, nos 6.13 et 6.14.
([6]) R. STEINBERG, *Regular elements of semi-simple algebraic groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Ét. Sci., 25, 1965, p. 281.
([7]) M. KNESER, *Math. Z.*, 89, 1965, p. 250-272.
([8]) M. KNESER, *loc. cit.* Nous devons à T. A. Springer l'idée de la méthode utilisée ici pour démontrer le théorème de Kneser au moyen des sous-groupes d'Iwahori.
([9]) A. BOREL et J. TITS, *loc. cit.*, n° 5.16.
([10]) F. BRUHAT, *Amer. J. Math.*, 83, 1961, p. 321-338 et 343-368.
([11]) I. SATAKE, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over* $\mathfrak{p}$*-adic fields*, Publ. Math. Inst. Hautes Ét. Sci., 18, 1963, p. 5-69.

(*Institut Henri Poincaré,*
*11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e*
*Wegelerstrasse 10, Bonn, Allemagne.*)

# Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig



See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

# Complement to the Collected Works of
# Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.