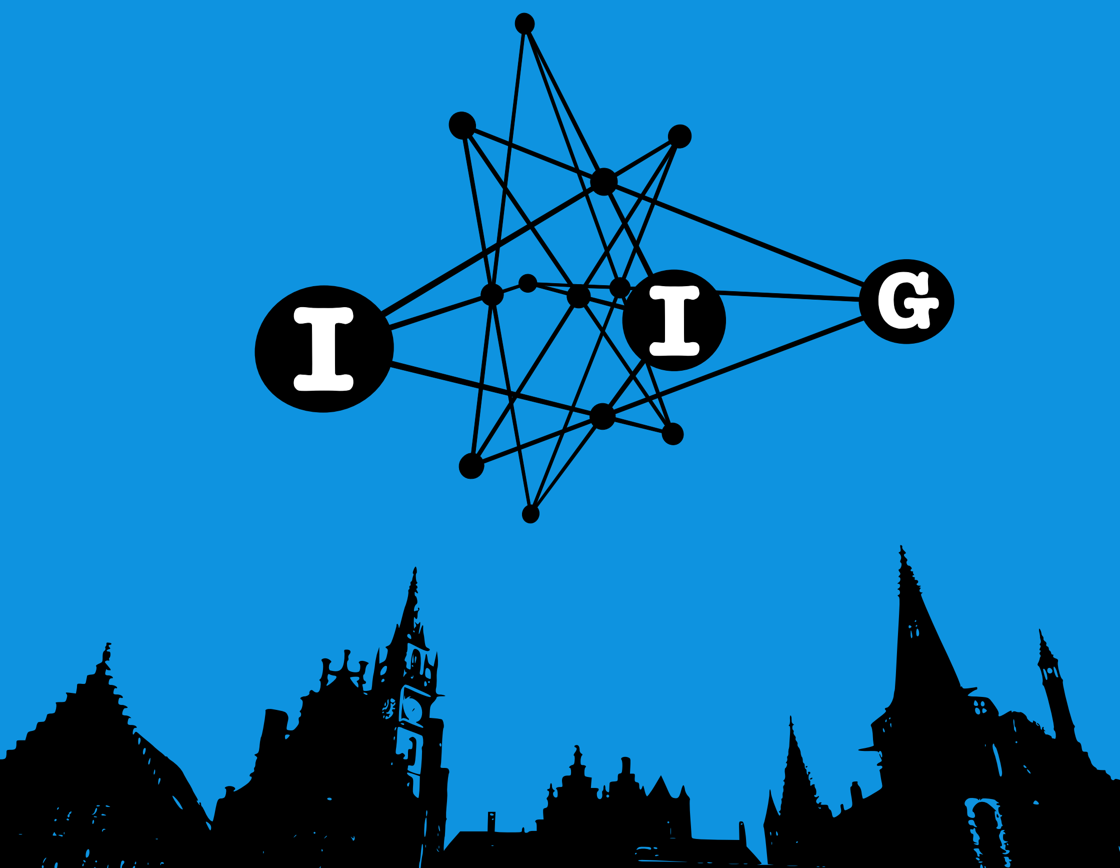
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Géométrie de l'espace, du temps et de la causalité : la voie axiomatique

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.245

msp

Géométrie de l'espace, du temps et de la causalité : la voie axiomatique

Jacques Tits

[117] Excerpts from a conference held at Halle in 1980; originally published in *Mélanges Paul Libois*, Brussels (1981), 291–296. Reused with permission.

TITS
Jacques
Promotion 1948

Extraits d'une conférence de J.Tits intitulée "Geometrie von Raum, Zeit und Kausalität: ein axiomatischer Zugang", faite en avril 1980 à l'occasion d'une Assemblée plénière de la Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina, à Halle (RDA), à paraître aux Nova Acta Leopoldina. Texte traduit et reproduit en accord avec l'auteur.

1. Le but de cette conférence est de donner un bref aperçu de diverses utilisations de la pensée axiomatique dans les théories de la relativité. Elle aura partiellement un caractère historique, mais sans la moindre prétention à l'exhaustivité.

La question "philosophique" de l'utilité éventuelle de telles considérations en physique sera toujours implicitement présente mais demeurera bien entendu sans réponse (bien que pour ma part, je ne sois pas trop optimiste à cet égard).

Relativité galiléenne (1) et relativité restreinte d'Einstein-Minkowski.

2. Une description mathématique.

Si l'on se pose la question générale de l'utilité de la mathématique pour le physicien, on a l'embarras du choix entre plusieurs point de vue.

(1) Je reprends l'expression "relativité galiléenne" à mon maître P.Libois, auquel je dois aussi bien d'autres connaissances et points de vue à la base de cet exposé.

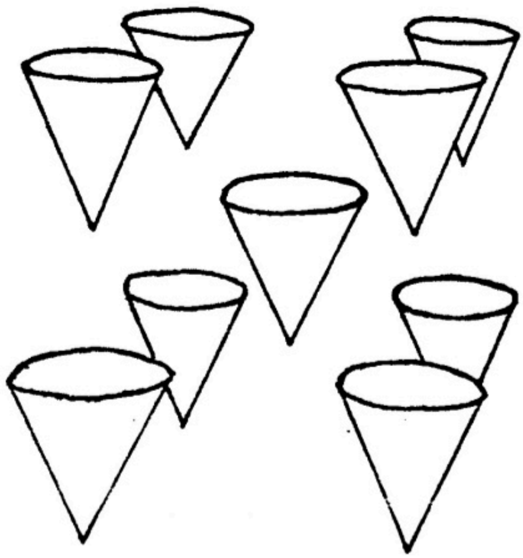


fig 1

Le plus habituel consiste à reconnaître qu'elle met à la disposition du physicien des moyens techniques indispensables. Mais un aspect important est aussi qu'elle lui offre, pour la formulation de rapports physiques, un langage éminement concis et efficace. A titre d'exemple je voudrais citer ici une description, en langage mathématique actuel, de deux théories relativistes: la relativité galiléenne (RG) et celle d'Einstein-Minkowski (REM).

.....

3. Explication intuitive de la théorie de la relativité restreinte.

Les descriptions (RG) et (REM) sont certes "abstraites", mais malgré cela (peut-être à cause de cela) riches de contenu intuitif pour qui est familiarisé avec le langage mathématique. Ainsi, la définition (REM) évoque en moi, entre autres, une image géométrique, plus ou moins bien rendue par la fig.1.

.....

4. L'"abstraction" du langage mathématique.

En 2, nous avons en quelques lignes caractérisé complètement la théorie de la relativité restreinte. Une explication "terre à terre" beaucoup moins précise (en 3) s'est avérée sensiblement plus longue et plus pénible. Ceci fait apparaître un grand avantage du langage abstrait de la mathématique, avantage où cependant réside peut-être un réel danger.

Il me paraît en effet que les tendances soi-disant "modernes" de l'enseignement mathématique ont leur origine dans le fait que certains pédagogues, fascinés par l'efficacité de ce langage, ont essayé de construire la formation scolaire directement sur une base "abstraite". Ce faisant ils oublient, selon moi, qu'on ne peut en aucun cas faire l'économie du processus d'abstraction (du passage du "concret" vers l'"abstrait") lors de l'apprentissage de concepts généraux, même lorsqu'il s'agit des concepts les plus élaborés de la mathématique: seul peut varier le "niveau d'abstraction" du point de départ. Cela dit le langage mathématique prendra toute son efficacité dès que le contenu intuitif des concepts utilisés sera devenu suffisamment riche grâce à une formation appropriée.

.....

les lois de la physique seraient valables dans son voisinage comme si son système de référence était immobile et comme s'il n'y avait pas de champ de gravitation..."

De façon générale, un observateur quelconque, qui ne considère que le voisinage du "premier ordre" de sa trajectoire d'espace-temps (à peu près ce qui se passe pour quelqu'un qui monte en ascenseur) peut se figurer "qu'il vit dans un univers de Minkowski, où la théorie de la relativité restreinte est valable. Cela correspond à l'opération mathématique de développement d'une variété développable tangente à l'univers (courbe) le long de la trajectoire d'espace-temps en question, et conduit à la conception d'une connexion minkowskienne. Cette façon d'aborder la théorie d'Einstein montre que, comme Cartan le remarque aussi, l'espace de Minkowski ne joue pas ici un rôle essentiel, et qu'on peut tout aussi bien élaborer une théorie géométrique de la gravitation dans le cadre de la mécanique classique, à savoir à l'aide d'une variété à "connexion galiléenne". Bien entendu ceci n'est au fond rien d'autre qu'une reformulation de la théorie de Newton"... mais cela montre justement l'importance, dans l'évolution de la science, des conventions de langage bien choisies" (loc.cit.,p.661)

.....

Cosmologie.

11. Le problème cosmologique...

12. Axiomes d'isotropie...

13. Un mot de conclusion.

Revenons un instant à la question du début: à quoi peuvent servir des considérations axiomatiques de cette nature ou de telles classifications de modèles d'univers ? Certains cosmologues sont manifestement d'avis que l'Univers nous est déjà connu, dans ses grands traits, de façon définitive. Si cela est, de telles études ont, au mieux, un intérêt mathématique (ce qui n'est d'ailleurs pas négligeable). Mais si, par contre, on n'est pas absolument convaincu de la validité des modèles actuellement proposés, il n'est peut être pas hors de propos de reprendre ici la fameuse phrase de Riemann (Über die Hypothesen..., III,3; traduction de Laugel):

"La réponse à ces questions [concernant les rapports métriques dans l'infiniment petit] ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des

6. La simplicité de la théorie de la relativité restreinte.

Les descriptions mathématiques données plus haut des deux théories de relativité mettent en relief la simplicité fondamentale -ou, si l'on veut, la plus grande élégance - de la théorie Einstein-Minkowski comparée avec celle de Galilée. Rappelons le très beau commentaire de Minkowski à ce propos, dans sa célèbre conférence aux "Naturforscher" de Cologne (Oeuvres complètes, vol.2,p.434). "Dans cet état de choses, et comme G_c est mathématiquement plus intelligible que G_∞, un mathématicien donnant libre cours à sa fantaisie, aurait bien pu tomber sur l'idée qu'en fin de compte, les phénomènes naturels pourraient en fait posséder une invariance non par le groupe G_∞ mais plutôt par un groupe G_c pour une valeur de c finie, mais extrêmement grande par rapport aux unités de mesure usuelles. Une telle intuition eût été un triomphe extraordinaire de la mathématique pure. Mais si la mathématique fait plutôt preuve ici d'"esprit d'escalier", il lui reste cependant la satisfaction de pouvoir saisir d'emblée les conséquences profondes d'un tel changement de modèle de notre conception de la nature, grâce à une perception aiguë, accoutumée à la vision lointaine par d'heureux antécédents."

Ainsi donc, le mathématicien arrive tard mais il comprend mieux...! Cependant le point de vue qui consisterait à considérer l'exposé de Minkowski de la relativité restreinte comme une formulation très belle mais superflue, est tout à fait erroné; comme c'est souvent le cas physique, la formulation mathématique rigoureuse et précise est une condition indispensable aux développements ultérieurs.

.....

Relativité générale.

8. Fondements.

... La possibilité, souvent citée comme principe fondamental d'exprimer les lois physiques dans un système de coordonnées quelconque, est, comme l'a souligné E.Cartan, une pure tautologie. Cartan donne une formulation particulièrement claire du vrai postulat de base de la théorie gravitationnelle d'Einstein (Oeuvres complètes, partie III,p.660):

"... pour un observateur entraîné dans un champ de gravitation et portant avec lui un système de référence animé d'un mouvement de translation, phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels."

On s'est souvent émerveillé à juste titre du fait que la théorie, dont Riemann motivait la création en ces termes, est précisément celle qui devait servir à Einstein, soixante ans plus tard, pour l'élaboration de la Relativité générale. Toutefois, les applications que Riemann avait en vue concernaient l'"infiniment petit" Il écrit même (loc.cit.):

"Les questions sur l'immensurablement grand sont des questions oiseuses pour l'explication de la nature...."

Je préfère ne pas prendre position sur ce point !

COLLEGE DE FRANCE
11 Place Marcelin Berthelot
75231 Paris

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.