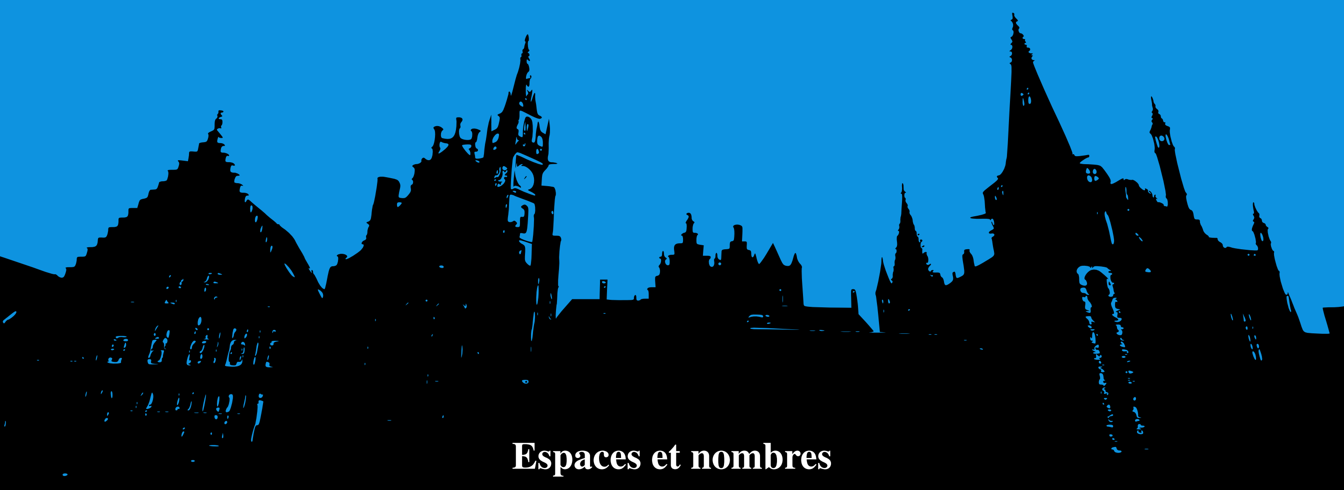
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Espaces et nombres

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.287

msp

Espaces et nombres

Jacques Tits

[A2] Originally published in *Qu'est-ce que l'univers?*, edited by Yves Michaud, Université de tous les savoirs **4**, Odile Jacob, Paris (2001), 77–85. Reused with permission.

Espaces et nombres*

par JACQUES TITS

Tout mathématicien doit un jour ou l'autre faire face à la question : « Y a-t-il encore des choses nouvelles à faire en mathématiques ? En quoi peut bien consister l'activité d'un mathématicien ? » Pour répondre à ce genre de questions, il m'est arrivé jadis, lors de conférences destinées à un public non spécialisé, de m'armer du dernier volume paru des *Mathematical Reviews*. Il s'agit d'une revue publiant de brefs résumés de tous les articles originaux qui paraissent en mathématiques. Chaque fascicule mensuel comportait quelques cinquante à cent pages in 4° lorsque j'ai commencé à y être abonné, à la fin des années 1940. En un an, la publication atteignait ainsi l'épaisseur d'un gros dictionnaire. Dans les années 1970, un volume de cette importance était déjà consacré au seul index annuel. Depuis lors, les *Mathematical Reviews* ont encore enflé, et un an de publication remplirait maintenant deux énormes valises.

Cette masse considérable de choses nouvelles, découvertes année après année, en mathématique, pourrait faire craindre que cette science ne devienne une vraie Tour de Babel, personne ne pouvant évidemment maîtriser une telle quantité d'information. Curieusement, la réalité est tout autre. Beaucoup de mathématiciens restent peu ou prou au courant des grandes tendances de leur domaine, et si l'on réunit un petit groupe d'entre eux venant même d'horizons très différents, ils ne tardent généralement pas à se découvrir des intérêts communs.

Texte d'après la 172e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée le 20 juin 2000.

* Faute de temps, je n'ai pas pu rédiger ma conférence dans les délais prévus par les responsables du projet en lui donnant la forme que j'aurais souhaitée. La version très approximative que l'on trouvera ici est basée sur un texte qu'a bien voulu préparer Mlle Juliette Roussel à partir d'un enregistrement de l'exposé oral.

L'algèbre et la géométrie, dont je suis censé vous parler, concernent une part non négligeable de ces mathématiques en expansion. Comme il est exclu que je puisse vous communiquer ici ne serait-ce qu'une infime partie de « tous les savoirs », je me contenterai de passer en revue quelques aspects de ces domaines qui me paraissent importants.

Les origines

Le mot « géométrie » vient du grec *geometria*, c'est-à-dire « terre » et « mesure ». Il évoque l'idée d'arpentage et l'on appelle encore « géomètre expert » le technicien qui s'occupe du levé des plans et du nivellement. La science elle-même, la géométrie, est plus ancienne que le mot. Certaines « constructions géométriques » datent de l'Égypte et de la Mésopotamie du IIe millénaire avant notre ère. L'aspect philosophique et strictement scientifique de cette science remonte à la Grèce antique. « Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre » : dans cette formule inscrite au fronton de l'Académie de Platon, il faut entendre le mot « géomètre » au sens le plus large qui soit, celui de mathématicien. Ce sens a été conservé longtemps ; c'était celui utilisé par Pascal lorsqu'il opposait l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse.

Le mot « algèbre », lui, vient de l'arabe *al-jabr* qui signifie « contrainte », « réduction » ; il figure dans le titre d'un ouvrage de Al-Khawarizmi, du IXe siècle. Dans le langage populaire, algèbre veut souvent dire « une chose incompréhensible ». « C'est de l'algèbre pour moi » est ainsi synonyme de « c'est du chinois ». Plus sérieusement, lorsque l'on parle d'algèbre, on pense le plus souvent au calcul avec des lettres. L'utilisation de lettres pour désigner des inconnues dans le calcul algébrique date de Viète (1540-1603). C'est à la même époque, peut-être un peu plus tôt, que sont apparues les principales notations de ce calcul : $+$ (addition), $-$ (soustraction), $\times$ (multiplication), a^b (notation exponentielle), ...

Les contenus des mots « géométrie » et « algèbre » ont, bien entendu, énormément évolué, mais ils sont cependant, à certains égards, restés fidèles à leurs origines. Les idées primitives de géométrie et d'algèbre sont encore bien présentes dans l'énorme construction à laquelle elles ont donné naissance (énorme, car ces deux domaines représentent peut-être un quart des mathématiques, c'est-à-dire un volume gigantesque de connaissances).

La frontière entre la géométrie et l'algèbre

Nous avons donc affaire à deux sciences bien établies, puisqu'elles sont largement séculaires, voire millénaires. Un aspect un peu inattendu de leur évolution est qu'au cours des siècles, elles ont eu tendance à se rapprocher au point d'en arriver presque à se confondre. À certains égards il n'y a plus de grande distance entre elles. Il subsiste seulement une petite différence qui tient au point de vue adopté : on peut distinguer une « approche géométrique » et une « approche algébrique » des questions. Un bon article présente souvent les deux aspects. Le fait d'adopter un point de vue plutôt qu'un autre est une question d'idiosyncrasie. Les uns sont plus géomètres et les autres plus algébristes.

La vision courante que le public a de la géométrie et de l'algèbre est souvent fausse ou du moins dépassée. En simplifiant, on se représente le géomètre comme quelqu'un qui résout des problèmes, les fameux « problèmes (ou applications) de géométrie ». Selon cette conception, les géomètres de métier résoudraient des problèmes de plus en plus difficiles, mais dans un cadre immuable, celui fixé par les axiomes de la géométrie euclidienne. Certains imaginent la géométrie comme une discipline parfaitement linéaire, avec des théorèmes qui s'enchaînent les uns aux autres. C'est ainsi que l'on peut entendre des phrases telles que « moi, en géométrie, je me suis arrêté au théorème 12 » ou « j'ai été jusqu'au volume de la sphère », etc.

L'algébriste est vu comme quelqu'un qui calcule avec des lettres, qui résout des équations de plus en plus compliquées, du premier, du deuxième, du troisième degré, etc.

Ainsi, l'algébriste et le géomètre se distingueraient des autres scientifiques par le fait qu'ils travaillent dans un cadre et selon des règles immuables. D'où la question « qu'y a-t-il donc de neuf en mathématique ? ». En revanche, il est accordé aux autres scientifiques qu'eux au moins découvrent des choses, des objets nouveaux qu'il s'agit pour eux d'étudier.

La réalité des mathématiques est tout autre. Ce dont elles s'occupent, ce sont aussi des objets nouveaux qu'il faut découvrir et étudier. Ces « objets mathématiques » sont seulement un peu plus abstraits que ceux dont s'occupent les autres sciences, encore que toute science étudie, par essence même, des êtres abstraits. Un physicien parle d'électrons mais, à proprement parler, il n'existe pas vraiment d'électrons ! Il s'agit d'un concept. Bien sûr, les concepts mathématiques sont un peu plus abstraits et donnent aux mathématiciens une liberté que n'ont pas les autres scientifiques. Le mathématicien peut plus librement inventer les objets de son étude.

Cependant, inventer ne veut pas dire inventer n'importe quoi. Les notions que le mathématicien introduit doivent être intéressantes du point de vue de l'ensemble des mathématiques et de leurs applications, qui sont nombreuses. Je voudrais donner un premier exemple d'objet mathématique, en me référant justement à la vision simpliste, évoquée précédemment des algébristes « résolveurs d'équations ». Depuis Abel (1802-1829), et surtout Galois (1811-1832), une équation algébrique a cessé d'être un problème que l'on cherche seulement à résoudre, pour devenir un objet que l'on peut étudier. Une équation a des propriétés, et il arrive assez souvent qu'on l'étudie sans se demander si elle a des solutions ou non, ou même sans s'intéresser à ses solutions, lorsque l'on sait qu'elle en a. Autrement dit, on peut s'intéresser aux *propriétés* des équations plus qu'à leur *résolubilité*.

Un résultat récent, abondamment cité dans la presse non spécialisée, va plutôt dans la direction opposée. Il est ici question d'équations qui n'ont pas de solution. Le dernier « théorème » de Fermat (~ 1640) est une affirmation qui a été annoncée par Fermat :

« *Si n est un entier > 2, l'équation* $x^n + y^n = z^n$ *n'a pas de solution, avec* x, y, z *entiers non nuls.* »

Fermat écrivait dans les marges de ses livres. Dans une marge de son exemplaire de l'« Arithmétique » de Diophante, il a énoncé la propriété ci-dessus, en indiquant qu'il n'avait pas assez de place pour en noter la démonstration. On ne sait s'il possédait vraiment une telle démonstration, mais cela paraît peu probable. Quoi qu'il en soit, ce théorème a été démontré par A. Wiles en 1994, en s'aidant notamment de nombreux résultats auxiliaires, dus à d'autres auteurs*.

Je voudrais attirer l'attention sur la façon dont cette propriété a été énoncée ici. Je n'ai pas dit « L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution ». J'ai précisé « avec x, y, z entiers non nuls ». Il est très important en mathématique de préciser toujours toutes les conditions dans lesquelles on se place, sinon on en vient rapidement à dire des choses fausses. Dans le cas présent, l'affirmation « l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution » est fausse puisque

$$1^3 + 1^3 = (\sqrt[3]{2})^3$$

Ce qui se passe ici, c'est que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un entier. L'énoncé devient donc faux si l'on oublie la condition d'intégrité de x, y, z.

Cela m'amène à une autre remarque. J'ai déjà parlé de la vision simpliste que l'on a des mathématiciens, dont l'activité consisterait essentiellement à faire des calculs très élaborés ou à dessiner des graphiques compliqués. Or, les ordinateurs faisant ces choses beaucoup plus efficacement que nous, on en déduirait que les mathématiciens sont devenus inutiles. Pour voir l'absurdité d'une telle conception, il suffit de songer au théorème de Wiles : quel ordinateur serait capable de le démontrer ? Pour ne citer qu'un obstacle parmi d'autres, disons que, sans apport extérieur, un simple ordinateur, qui a nécessairement une capacité limitée, ne peut prendre en compte le fait théorique que l'on s'intéresse ici à des nombres entiers « quelconques ».

---

* Lire à ce sujet la 168e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée par Yves Hellegouarch.

Les objets mathématiques

Nous avons déjà entrevu que parmi les objets d'étude des algébristes se trouvent des équations de toutes espèces, par exemple des équations algébriques. Mais les équations algébriques établissent des liens entre des objets plus élémentaires, à savoir des nombres. De manière un peu simplifiée on peut conclure que les objets primitifs dont s'occupent les algébristes sont les nombres ; par ailleurs, il s'avère que ceux-ci interviennent le plus souvent par le biais de *systèmes de nombres*.

De même, les géomètres étudient des *figures*. Les figures sont généralement situées dans des *espaces*, de sorte que les objets d'étude primitifs du géomètre sont, en fin de compte, les espaces. La création, ou la découverte, d'espaces nouveaux, à usages variés, est l'une des activités majeures des géomètres.

Ainsi, les algébristes créent en permanence de nouveaux systèmes de nombres et les géomètres de nouveaux espaces. Je n'essaierai pas, dans cette conférence, de définir les deux notions, de système de nombres et d'espace, avec précision ; je mentionnerai seulement qu'à l'analyse, il n'existe entre elles aucune différence de fonds, mais seulement une différence de contenu intuitif, ce qui étaye les remarques faites plus haut sur l'identité fondamentale entre algèbre et géométrie.

Notons encore au passage que si l'on voit les algébristes comme les mathématiciens qui s'intéressent aux nombres et aux systèmes de nombres, il faut ranger parmi eux les arithméticiens.

Les nombres

J'ai été amené à citer comme objet d'étude privilégié des algébristes les systèmes de nombres plutôt que les nombres eux-mêmes. En effet, il est assez rare qu'un nombre isolé soit un sujet d'étude. Cela arrive cependant, comme on va le voir.

L'EXEMPLE DE Π = 3,141592653589793238...

Ce nombre est, par définition, le quotient de la longueur d'un cercle par la longueur de son diamètre. C'est la première raison pour laquelle il est considéré en pratique. Depuis très longtemps, il a intéressé autant les techniciens que les mathématiciens « purs », arithméticiens et géomètres : nous retrouvons ici l'interpénétration de l'algèbre et de la géométrie.

L'une des premières choses que l'on a essayé de faire est de donner des valeurs approchées de π sous la forme de fractions. Archimède aurait pour la première fois estimé π par 22/7. Ayant imaginé un procédé géométrique permettant d'approcher avec toute précision souhaitée, il avait notamment établi que :

$$3 + 1/7 < \pi < 3 + 10/71.$$

Une autre approximation célèbre est 355/113. Elle a été donnée par un mathématicien chinois, Zu Chongzhi, à la fin du V[e] siècle. Le Hollandais Anthonisz, l'a redécouverte onze siècles plus tard. La théorie des fractions continues permet de montrer que 355/113 est une valeur approchée remarquablement bonne de π.

Ce n'est que beaucoup plus tard que la question théorique naturelle évidente a été posée : « Existe-t-il une fraction à termes entiers dont le quotient est exactement égal à π ? » Puisqu'un nombre qui est le quotient de deux nombres entiers est appelé un nombre rationnel, cette question revient à demander si π est un nombre rationnel*. Un mathématicien allemand, J. Lambert, a démontré en 1766 que π n'est pas un nombre rationnel (la démonstration, qui présentait une petite lacune, a été complétée en 1784 par Legendre).

Comme π n'est pas rationnel il n'est pas solution d'une équation du type :

$$a\pi + b = 0$$

avec a et b entiers : autrement dit, une équation à coefficients entiers du premier degré ne peut avoir π comme solution. Plus généralement, π est-il un nombre « algébrique » ? (on nomme ainsi les solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers de degré quelconque, c'est-à-dire de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$). Il a été prouvé que non : aucune équation à coefficients entiers n'a pour solution le nombre π. En particulier π n'est certainement pas la racine carrée du nombre 10, comme l'avait affirmé un mathématicien vivant au VII[e] siècle, Brahmagupta, sinon il satisferait à l'équation polynomiale.

$$\pi^2 - 10 = 0.$$

Le fait que π n'est pas un nombre algébrique — on dit qu'il est « transcendant » — a été démontré en 1882 par Lindemann. Un sous-produit de ce résultat est l'impossibilité de la quadrature du

* Le mot « rationnel » doit être pris ici dans son sens mathématique. Les mathématiques sont truffées de vocables de la vie courante dotés de significations conventionnelles qui ne sont pas celles de la langue commune mais dont le sens usuel est, pour le mathématicien, évocateur de l'objet mathématique qu'il entend désigner (corps, anneaux, faisceaux, ensemble ouvert, spectre, fantôme, etc.). Les notions mathématiques sont trop abondantes et de nature trop variée pour que les mathématiciens puissent, comme les chimistes ou les biologistes, se forger une terminologie cohérente à base de racines latines ou grecques. Je puis citer comme exemple une notion que j'ai introduite dans mes travaux et qui a reçu de N. Bourbaki le nom imagé d'« immeuble » : il ne s'agit évidemment pas de lieux d'habitation !

cercle. De façon précise, la quadrature du cercle n'est pas possible avec les moyens que l'on est censé utiliser, à savoir la règle, le compas et les constructions élémentaires de la géométrie. Cette assertion, due à Lindemann, résolvait définitivement un problème favori des chercheurs amateurs depuis des siècles.

LES NOMBRES PREMIERS

Un autre exemple de nombres qui, même pris isolément, présentent beaucoup d'intérêt, tant pour les mathématiciens que pour les utilisateurs des mathématiques, est celui des « nombres premiers ». Un nombre premier est un nombre entier qui ne peut pas être décomposé en produit de deux entiers supérieurs à 1. Lorsque j'étais enfant, le plus grand nombre premier connu était $2^{127} - 1$. Ce nombre comporte environ 40 chiffres. À cette époque, on était capable de démontrer que ce nombre-là était premier, mais il n'était pas imaginable de donner une méthode générale que l'on puisse appliquer à tout nombre de 40 chiffres afin de déterminer s'il était premier. Les ordinateurs permettent maintenant de résoudre en quelques secondes ce même problème pour des nombres ayant jusqu'à 2 000 chiffres. En revanche, les nombres à 20 000 chiffres dépassent toujours les possibilités de calcul par ordinateur.

Un autre problème, beaucoup plus difficile, concernant toujours les nombres premiers, consiste à trouver deux nombres premiers dont on connaît le produit (problème de factorisation). Les ordinateurs peuvent en apporter la réponse pour des nombres premiers assez petits, mais pour deux nombres premiers de 200 chiffres, par exemple, dont le produit a environ 40 000 chiffres, ils sont impuissants. Il ne s'agit pas ici d'un simple amusement de mathématiciens. Cette question est importante en cryptologie car les produits de deux très grands nombres premiers sont utilisés pour coder des messages*. Voilà donc une question théorique passionnante, qui se révèle utile en pratique : peut-être trop utile d'ailleurs puisqu'elle est utilisée à des fins militaires.

Revenons aux nombres premiers. La suite de ces nombres : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ..., est illimitée. C'est là un résultat très ancien, l'un des plus beaux des mathématiques antiques, dû à Euclide au IIIe siècle avant notre ère. Nous disposons maintenant de formules asymptotiques estimant la grandeur du $n^{\text{ième}}$ nombre de la suite en question (« $n^{\text{ième}}$ nombre premier »). Le théorème dit « des nombres premiers », qui fournit une telle estimation, a été démontré à la fin du XIXe siècle par J. Hadamard (1896) et Ch.-V. de la Vallée-Poussin (1899). Une formule conjecturale beaucoup plus précise fait l'objet de la célèbre hypothèse de

* Lire à ce sujet la 252e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée par Jacques Stern.

Riemann (1859) dont la preuve est, depuis bientôt 150 ans, l'un des plus fameux problèmes non résolus des mathématiques.

LES SYSTÈMES DE NOMBRES

Comme je l'ai dit précédemment, les systèmes de nombres sont en général des objets plus importants que des nombres particuliers. Chacun de ceux auxquels on s'intéresse constitue à lui seul une branche de l'algèbre, trop vaste pour être abordée ici : citons, parmi bien d'autres, le système des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres entiers, des nombres complexes, des entiers modulo un nombre entier n donné, etc. Il s'agit là de systèmes, donc chacun est unique en son genre et d'importance primordiale en mathématique. Mais un rôle plus essentiel est encore joué en algèbre contemporaine par certaines classes de systèmes algébriques telles que les anneaux, les corps, les groupes, etc. La théorie des groupes occupe dans pratiquement tous les domaines des mathématiques et même en physique, voire en chimie, une très grande place.

Les espaces

Comme on l'a dit, les géomètres ont pour objets d'étude premiers des espaces. Les espaces euclidiens à trois, quatre, cinq… dimensions sont connus de tous. Les espaces à plus de trois dimensions semblent très compliqués à certains. Ils sont pourtant faciles à définir. Un point dans un espace à trois dimensions est repéré à l'aide de trois nombres. Un point dans un espace à dix-sept dimensions est repéré à l'aide de dix-sept nombres. Il faut utiliser pour cela des nombres réels, au sens technique, c'est-à-dire les fractions décimales illimitées. L'espace euclidien n'est pas qu'un ensemble de points : c'est un ensemble de points structuré d'une certaine manière. Dans la définition d'un espace, il est essentiel d'en donner aussi la structure.

L'analyse mathématique utilise des espaces assez semblables aux espaces euclidiens mais ayant une infinité de dimensions ; contrairement à ce qui se passe pour la dimension finie, l'énoncé de la dimension ne suffit plus, à elle seule, à caractériser un tel espace et il en existe une grande variété. Le plus simple (et le plus utilisé) de ces espaces de dimension infinie est l'espace de Hilbert, mais les espaces de Banach, les espaces de Sobolev… sont d'autres catégories d'espaces très importants en analyse.

Les géomètres considèrent également des espaces n'ayant qu'un nombre fini de points. Je veux en décrire un, particulièrement remarquable : c'est une ensemble M de 24 points dans lequel certains sous-ensembles de 8 points sont distingués et appelés *droites*, et tels que 5 points distincts quelconques appartiennent à une et une seule droite. Un tel espace existe et est unique à isomorphisme près. Le groupe de tous ses automorphismes (c'est-à-dire des permutations de M conservant le système des droites) est un groupe remarquable, appelé « groupe de Mathieu », d'ordre 244 823 040. Les propriétés combinatoires de l'espace M ont été utilisées de façon essentielle lors du premier voyage sur la Lune.

Particulièrement importants en géométrie et surtout en géométrie différentielle, les espaces de Riemann sont aux espaces euclidiens ce que les surfaces courbes sont au plan. Il est donc légitime de les voir comme des « espaces courbes* ». Ils ont été conçus par B. Riemann en 1854. Soixante ans plus tard, Einstein les a utilisés pour fonder sa théorie de la Relativité générale. Riemann a introduit ces espaces dans sa thèse d'habilitation où il parle notamment de questions de physique et de la structure infinitésimale de l'espace physique. Voici (dans la traduction de L. Laugel**) comment il explique pourquoi il a introduit ces espaces courbes :

« La réponse à ces questions [relatives à la nature de l'espace] ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire [sur les espaces courbes], ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail [d'explication de la nature] ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels. »

---

* Lire à ce sujet la 179e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée par Jean-Pierre Bourguignon.

** Gauthier-Villars, Paris, 1898.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of

Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.