Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

# Notions de géométrie algébrique

Jacques Tits and Franz Bingen

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.301

# Notions de géométrie algébrique

Jacques Tits and Franz Bingen

[B3] Notes of the seminar *Notions de géométrie algébrique*, Université Libre de Bruxelles (Brussels, 1961–62). Reused with permission.

# NOTIONS DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

par

J. TITS et F. BINGEN

Exposés d'introduction au Séminaire sur les groupes algébriques

Notes rédigées par G. VALETTE et F. BINGEN

Année 1961-1962

Les présentes notes sont essentiellement basées sur les ouvrages suivants :

Séminaire Cartan-Chevalley 1955-1956 (Paris)
Séminaire Chevalley 1956-1958 (Paris)
O. Zariski - P. Samuel : Commutative algebra, I et II (Princeton)
C. Chevalley : Fondements de géométrie algébrique
(Paris, Secrét. math.)

# SEMINAIRES SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES

## I. ENSEMBLES ET VARIETES ALGEBRIQUES

### 1. INTRODUCTION.

1. 1. La notion d'ensemble algébrique qui sera introduite est proche de la notion intuitive de variété algébrique dans un espace affin ou projectif, la différence essentielle étant qu'il ne s'agira pas d'un objet plongé, mais que la définition sera, au contraire, intrinsèque. Le principe de la définition sera analogue à celui de la définition usuelle des variétés (topologiques, différentiables, analytiques), définition par *recollement*, les morceaux élémentaires recollés étant les ensembles affins.

1. 2. Un ensemble algébrique sera un ensemble muni de deux structures, une *topologie* et un *système local de fonctions*. On se fera une idée de ces structures en prenant pour ensemble algébrique une variété algébrique V (ensemble des zéros d'un ensemble de polynômes) d'un espace affin à n dimensions (coordonnées $x_1, \ldots, x_n$). Les fermés de la topologie, dite de Zariski, sont alors les sous-variétés algébriques de V ; les fonctions du système local, ou fonctions régulières, sont définies dans les ouverts de Zariski de V ; celles qui sont définies sur l'ouvert U sont les restrictions à U des fonctions $\dfrac{P_1(x_1, \ldots, x_n)}{P_2(x_1, \ldots, x_n)}$, où les $P_i$ sont des polynômes à n indéterminées et où $P_2(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas nul dans U. L'ensemble algébrique ainsi défini diffère de V par le fait qu'il n'est plus plongé dans un espace affin, ce qui revient à dire que les n fonctions régulières $x_1, \ldots, x_n$ ne jouent plus un rôle privilégié parmi les fonctions du système local.

1. 3. Notons dès à présent que les ensembles algébriques sont formés de points, mais pas de points infiniment voisins, proches, etc.; nous nous plaçons en fait dans le cadre de la géométrie birationnelle *birégulière*.

1. 4. Deux corps (commutatifs) s'introduiront dans ces exposés, k et une extension K de k, les points ayant leurs coordonnées dans K et les structures étant définies sur k. La raison en est que les variétés définies sur k ont « trop peu » de points sur k (exemple : les coniques sans points réels). Il est utile de supposer que K *est une extension algébriquement close de* k ; ce sera soit la clôture algébrique de k, soit un corps algébriquement clos dont le degré de transcendance sur k est infini (cf. A. Weil).

2

## 2. SYSTEME LOCAL DE FONCTIONS.

2. 1. Soit E un espace topologique. Pour chaque ouvert U de E, donnons-nous un ensemble $F_U$ de fonctions de U dans un ensemble donné (qui sera le corps K). La famille des $F_U$ est appelée *système local de fonctions* sur E si les axiomes suivants sont vérifiés :

*Axiome I : Si* U *et* V *sont des ouverts tels que* $V \subseteq U$ *et si* $f \in F_U$, *la restriction* $f|V$ *de* f *à* V *appartient à* $F_V$ ;

*Axiome II : Si* V *est la réunion des ouverts* $V_i$ *et si la fonction* f *définie sur* V *est telle que, pour tout* i, $f|V_i$ *appartient à* $F_{V_i}$ *, alors* f *appartient à* $F_V$.

Les fonctions appartenant aux $F_U$ sont alors appelées *fonctions régulières* du système local.

2. 2. Soient E et F deux espaces topologiques munis de deux systèmes locaux de fonctions. On appelle *morphisme* ou *application régulière* de E dans F toute application continue $\Phi$ de E dans F telle que $f\,\Phi$ est régulière dans E chaque fois que f est régulière dans un ouvert contenant $\Phi(E)$. Il est clair que le composé de deux morphismes est un morphisme. Une bijection $\Phi$ de E sur F est un *isomorphisme* si $\Phi$ et $\Phi^{-1}$ sont des morphismes.

2. 3. Soit E un espace muni d'un système local de fonctions et E' une partie de E. On définit de façon naturelle une *structure induite* sur E' :

a) la topologie de E' est celle de sous-espace de E ;

b) soit U un ouvert de E' ; l'ensemble $F'_U$ des fonctions régulières définies sur U est formé des fonctions f qui vérifient la condition suivante :

*Pour tout* $x \in U$, *il existe un voisinage ouvert* $U_x$ *de* x *dans* E *tel que* $f|(U \cap U_x)$ *soit la restriction d'une fonction régulière sur* $U_x$. Le système local de fonctions dont on a muni E' est appelé *restriction* du système local de fonctions dont est muni E. Si $E'' \subset E'$, les restrictions à E'' des systèmes locaux de E et de E' coïncident.

2. 4. *Lemme. Soit* $\mathcal{B}$ *une base d'ouverts de* E. *Si, pour chaque* $V \in \mathcal{B}$ *est donné un ensemble* $\bar{F}_V$ *de fonctions satisfaisant aux axiomes I et II figurant en 2. 1, il existe une manière unique de définir sur* E *un système local de fonctions se réduisant aux* $\bar{F}_V$ *pour les* $V \in \mathcal{B}$.

Démonstration : il est clair que, s'il existe, ce système local s'obtient en attachant à l'ouvert U de E l'ensemble $F_U$ des fonctions f définies dans U telles que les $f|V$ appartiennent aux $\bar{F}_V$ donnés pour tout ouvert V de la base $\mathcal{B}$, contenu dans U. Montrons que la famille des $F_U$ est effectivement un système local. En effet, si $U \in \mathcal{B}$, les axiomes I et II pour les $\bar{F}_V$ entraînent respectivement $\bar{F}_U \subseteq F_U$ et $F_U \subseteq \bar{F}_U$, donc $F_U = \bar{F}_U$.

L'axiome I pour les $F_U$ découle immédiatement de leur définition.
Pour prouver l'axiome II, soit $(U_i)$ une famille d'ouverts, U leur réunion, f une application définie sur U et supposons que l'on ait $F|U_i \in F_{U_i}$ pour tout i. Soit $V \in \mathcal{B}$ contenu dans U. Puisque $F|U_i \in F_{U_i}$, $f|W$ appartient par définition à $\overline{F}_W$ pour tout ouvert $W \in \mathcal{B}$ contenu dans $V \cap U_i$. Comme V est réunion des $V \cap U_i$ qui sont réunions d'ouverts W de $\mathcal{B}$, V est réunions d'ouverts W et l'axiome II pour les $\overline{F}_W$ affirme que $f|V \in \overline{F}_V$. Ceci a lieu pour ouvert $V \in \mathcal{B}$ contenu dans U, et on a par définition $f \in F_U$ ce qui prouve l'axiome II.

2. 5. Le lemme précédent va nous permettre de recoller des systèmes locaux.
*Proposition. Soit* E *un ensemble réunion des* $E_i$. *Si chaque* $E_i$ *est un ensemble topologique muni d'un système local, si* $E_i \cap E_j$ *est ouvert dans* $E_i$ *et dans* $E_j$ *et si les restrictions à* $E_i \cap E_j$ *des systèmes locaux de* $E_i$ *et* $E_j$ *coïncident, on peut définir de façon unique sur* E *une topologie pour laquelle les* $E_i$ *sont ouverts et qui induit sur chaque* $E_i$ *la topologie donnée, et un système local dont les restrictions aux* $E_i$ *sont les systèmes locaux donnés.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E qui sont ouvertes dans l'un des $E_i$. Puisque $E_i \cap E_j$ est ouvert dans $E_i$ et dans $E_j$, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts d'une topologie sur E pour laquelle les $E_i$ sont ouverts et qui induit la topologie donnée sur chaque $E_i$. Soit $U \in \mathcal{B}$ ; puisque les restrictions à $E_i \cap E_j$ des systèmes locaux de $E_i$ et $E_j$ coïncident, l'ensemble des fonctions régulières définies sur U est bien déterminé ; on le notera $\overline{F}_U$. L'application du lemme 2. 4 termine la démonstration.

## 3. ENSEMBLES ALGEBRIQUES AFFINS.

3, 1. Nous énonçons sans démonstration le *lemme. Soit* A *un anneau d'intégrité,* B *un sous-anneau de* A *tel que* A *soit engendré par* B *et un nombre fini d'éléments. Soit* $v \neq 0$ *un élément de* A. *Il existe alors un élément* $u \neq 0$ *de* B *jouissant de la propriété suivante : tout homomorphisme* q *de* B *dans le corps* K, *tel que* $q(u) \neq 0$, *se prolonge d'au moins une manière en un homomorphisme* p *de* A *dans* K, *tel que* $p(v) \neq 0$.
De ce lemme, on peut déduire le *Nullstellensatz* de Hilbert :

*Théorème. Soit* A *une k-algèbre de type fini* (c'est-à-dire engendrée par k et un nombre fini d'éléments) *et* a *un idéal de* A *; pour que tout homomorphisme de* A *dans* K *qui est nul sur* a *annule un élément* $x \in A$, *il faut et il suffit que* a *contienne une puissance de* x.
(Pour les démonstrations, voir le Sém. Cartan-Chevalley 55/56, exp. 3).

3. 2. Si V est une variété algébrique d'un espace affin $K^n$, les restrictions à V des fonctions polynômes à coefficients dans k forment une k-algèbre A engendrée par un nombre fini d'éléments (par exemple $x_1, \ldots, x_n$). On peut faire correspondre à chaque point p de V un homomorphisme de A dans K, à savoir celui qui applique la fonction polynôme y sur sa valeur en p. Inversement, si h est un homomorphisme de A dans K, il est

4

défini par les images $h(x_1), \ldots, h(x_n)$ des fonctions polynômes $x_1, \ldots, x_n$, donc par un point $p$ de $K^n$ ayant les coordonnées $h(x_1), \ldots, h(x_n)$. Ces dernières étant liées par les mêmes relations algébriques que $x_1, \ldots, x_n$, $p$ appartient à $V$. Il existe donc une bijection naturelle entre $V$ et l'ensemble des homomorphismes de $A$ dans $K$. Cette remarque permet d'énoncer plus géométriquement le Nullstensatz : si le polynôme $x$ s'annule sur l'ensemble des zéros d'un idéal $a$ de polynômes, une puissance de $x$ appartient à $a$. Elle va aussi nous permettre de définir *de façon intrinsèque* les ensembles algébriques affins.

3. 3. Toutes les algèbres considérées dans la suite seront supposées de type fini et sans élément nilpotent. Soit $A$ une k-algèbre et $\Omega_A$ l'ensemble des homomorphismes de $A$ dans $K$ (appelé *spectre* de $A$ relatif à $K$). Nous identifierons $A$ à une algèbre de fonctions de $\Omega_A$ dans $K$ en associant à l'élément $x \in A$ la fonction $p \rightsquigarrow p(x)$ de $\Omega_A$ dans $K$ (cette identification est possible car deux éléments distincts de $A$ sont représentés par deux fonctions distinctes ; si $p(x) = p(y)$ pour tout $p \in \Omega_A$, $p(x-y) = 0$ pour tout $p \in \Omega_A$; le Nullstellensatz appliqué au cas où $a = \{0\}$ affirme alors qu'une puissance de $x-y$ est nulle ce qui implique $x = y$ puisque $A$ est sans élément nilpotent). On va munir $\Omega_A$ d'une topologie et d'un système local de fonctions :

a) La *topologie* est définie au moyen d'une base d'ouverts; *pour tout* $x \in A$, *les homomorphismes ne s'annulant pas en* $x$ *forment un ouvert* $V(x)$ *de la base*($V(x) \cap V(x') = V(xx')$).

b) D'après le lemme 2. 4, le *système local de fonctions* peut être défini sur les ouverts de la base pour autant que les axiomes I et II figurant en 2. 1 soient vérifiés pour ces ouverts. *L'ensemble* $F_{V(x)}$ *des fonctions régulières définies sur* $V(x)$ *sera* $A[\frac{1}{x}]$ où $\frac{1}{x}$ est la fonction prenant en chaque élément de $V(x)$ la valeur inverse de la fonction $x$.

Vérification de l'axiome I : Si $V(x) \supset V(x_1)$, tout homomorphisme de $A$ dans $K$ qui s'annule en $x$ s'annule aussi en $x_1$; d'après le Nullstellensatz, l'idéal $(x)$ contient une puissance de $x_1$; c'est-à-dire $(x_1)^n = ax$ où $a \in A$, ou encore $\frac{1}{x} = a(\frac{1}{x_1})$ ; par suite, si $y \in A[\frac{1}{x}]$, il appartient aussi à $A[\frac{1}{x_1}]$.

Vérification de l'axiome II : soient $V(x) = \bigcup_i V(x_i)$ et $f$ une application définie sur $V(x)$, telle que $f|V(x_i) \in F_{V(x_i)}$ ; il existe donc des entiers $n_i$ et des éléments $a_i \in A$ tels que $f = \frac{a_i}{x_i^{n_i}}$ sur $V(x_i)$, soit $f\, x_i^{n_i+1} = a_i x_i$ sur $\Omega_A$. D'autre part, $V(x) \subset \bigcup_i V(x_i^{n_i+1})$ et le Nullstellensatz entraînent que l'idéal engendré par les $x_i^{n_i+1}$ contient une puissance de $x$, c'est-à-dire $x^n = \sum_i e_i x_i^{n_i+1}$. On en déduit $f\, x^n = \sum_i e_i a_i x_i$ sur $V(x)$, ce qui signifie que $f \in F_{V(x)}$.

5

3. 4. L'ensemble $\Omega_A$ muni de la topologie et du système local de fonctions définis en 3. 3 est appelée *ensemble algébrique affin* et ses éléments sont appelés *points*.

*Proposition. Soit* F *un fermé de l'ensemble algébrique affin et* a *l'idéal de* A *formé des fonctions qui s'annulent sur* F. *Avec sa structure induite,* F *est isomorphe à l'ensemble algébrique affin défini à partir de l'algèbre* A/a.

*Proposition. Soit* V(x) *l'ouvert formé des points où la fonction* x *n'est pas nulle. Avec sa structure induite,* V(x) *est isomorphe à l'ensemble algébrique affin défini à partir de l'algèbre* $A[\frac{1}{x}]$.

Les démonstrations sont immédiates.

3. 5. *Le point de vue des schémas*, de A. Grothendieck (Éléments de géométrie algébrique, Public. math. de l'I.H.E.S., Paris), généralise celui adopté ici. Les principales différences peuvent être caractérisées comme suit. Un *schéma affin* est défini à partir d'un anneau A quelconque (qui n'est donc pas nécessairement une k-algèbre de type fini). Le *spectre* $\Omega_A$ est constitué de tous les idéaux premiers de A ; dans le cas classique, cela revient, géométriquement, à considérer toutes les sous-variétés irréductibles d'un ensemble comme des points (la différence avec le point de vue adopté ici est moins grande qu'il peut paraître à première vue : par exemple, si $t \in K$ désigne une transcendante sur le corps k, il n'est pas très différent de considérer le point de coordonnée $x = t$, $y = t^2$ d'une part et la parabole $y = x^2$ de l'autre) ; ce point de vue a l'avantage d'éviter la considération du corps K. Une dernière différence (plus importante) consiste en ce que la considération du système local des fonctions régulières est remplacé par celle d'un faisceau structural (dans les notations précédentes, l'anneau attaché à l'ouvert V(x) est l'anneau $A[\frac{1}{x}]$) ; cela permet de tenir compte des éléments nilpotents de A.

4. ENSEMBLE PREALGEBRIQUE.

4. 1. *Définition. Soit* E *un espace topologique muni d'un système local de fonctions à valeurs dans* K. *On dit que* E *est un ensemble préalgébrique s'il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts qui, avec les structures induites, sont des ensembles algébriques affins,* c'est-à-dire s'il existe un recouvrement ouvert fini $U_i$ de E et, pour chaque i, une algèbre $A_i$ et un isomorphisme $\varphi_i$ de la restriction à $U_i$ du système local de E sur le système local de $\Omega_{A_i}$.

4. 2. Remarques sur la définition précédente :

a) Il suffit d'y supposer que E peut être recouvert par un nombre fini d'*ouverts* d'ensembles algébriques affins, car *tout ouvert U d'un ensemble algébrique affin peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles algébriques affins* ; en effet, l'ensemble des éléments de A qui s'annulent sur le complémentaire de U forment un idéal ayant une base finie $x_1, \ldots, x_n$ car A est noethérien. U est réunion des ouverts $V(x_i)$ qui sont des ensembles algébriques affins obtenus à partir des algèbres $A[\frac{1}{x_i}]$.

6

b) Grâce à la proposition 2.5, on peut construire des ensembles préalgébriques par *recollement :* (voir les exemples (b) et (c)).

4.3. *Exemples :*

a) L'ensemble $\Omega_A$ muni de la topologie et du système local de fonctions définis en 3.3 est un ensemble préalgébrique. En particulier, l'espace affin à n dimensions est un ensemble préalgébrique $\Omega_k[x_1, \ldots, x_n]$ ; la variété algébrique définie dans l'espace affin par $f_1 = \ldots = f_k = 0$ est un ensemble préalgébrique $\Omega_{A'}$, où $A' = k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_k)$.

b) Les espaces projectifs sont des ensembles préalgébriques qu'on peut obtenir par recollement d'espaces affins. Montrons-le pour l'espace projectif à 2 dimensions (coordonnées homogènes $x_i \in K$, $i \in Z/(3)$). Le complémentaire de la droite d'équation $x_i = 0$ est l'espace affin $K_i^2$ ; l'ensemble $K_i^2 \cap K_{i+1}^2$ est ouvert dans $K_i^2$ et dans $K_{i+1}^2$, les fonctions régulières de $K_i^2$ (resp. $K_{i+1}^2$) qui sont définies sur $K_i^2 \cap K_{i+1}^2$ sont de la forme

$$\frac{Q\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}, \frac{x_{i+2}}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^q} \qquad \left(\text{resp. } \frac{R\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}, \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}\right)}{\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^r}\right),$$

où Q et R appartiennent à $k[x_1, x_2]$ ; dans les deux cas, ces fonctions régulières peuvent s'écrire $\dfrac{P(x_0, x_1, x_2)}{(x_i)^\alpha (x_{i+1})^\beta}$ où P est un polynôme homogène de degré $\alpha + \beta$, de sorte que les systèmes locaux coïncident sur $K_i^2 \cap K_{i+1}^2$. La proposition 2.5 est donc applicable et les fonctions régulières de l'espace projectif à 2 dimensions sont de la forme $\dfrac{P_1(x_0, x_1, x_2)}{P_2(x_0, x_1, x_2)}$ où $P_1$ et $P_2$ sont des polynômes homogènes de même degré.

c) Soit $\varphi : E_1 \to E_2$ un isomorphisme entre deux ensembles algébriques affins, $U_1$ un ouvert de $E_1$ et $U_2$ l'image de $U_1$ par $\varphi$. Soit E l'ensemble obtenu à partir de $E_1 + E_2$ en identifiant p et $\varphi(p)$ pour tout $p \in U_1$. La proposition 2.5 est trivialement applicable et fait de E un ensemble préalgébrique. Intuitivement, on obtient E à partir de $E_1$ en dédoublant les points du complémentaire de $U_1$.

## 5. TOPOLOGIE DE ZARISKI.

5.1. On dit qu'un espace topologique est *noethérien* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

7

a) *tout ensemble d'ouverts, ordonné par inclusion, possède un élément maximal ;*
b) *toute suite croissante d'ouverts est stationnaire.*

L'équivalence des conditions (a) et (b) est purement ensembliste (Bourbaki, Ens., chap. III, § 6, n° 5, prop. 6).

5.2. Un espace topologique est dit *quasi-compact* si, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini.

*Lemme. Un espace topologique est noethérien si et seulement si tout ouvert est quasi-compact.*

Démonstration : Soit U un ouvert de l'espace noethérien E ; si $U = \bigcup U_i$ où les $U_i$ sont ouverts, soit V un élément maximal de l'ensemble des réunions finies d'$U_i$ ; de $V \cup U_i \subset V$ pour tout i, on déduit $U = V$ donc U est quasi-compact. Inversement, si tout ouvert de E est quasi-compact, on voit aisément que toute suite croissante d'ouverts est stationnaire ; donc E est noethérien.

5.3. La topologie d'un ensemble préalgébrique est appelée *topologie de Zariski* ; ses principales propriétés viennent de la proposition suivante :

*Proposition. Un ensemble préalgébrique est un espace noethérien.*

Démonstration : Supposons d'abord que l'ensemble préalgébrique est $\Omega_A$, A étant engendrée par un nombre fini d'éléments. Soit U un ouvert de Zariski, réunion des ouverts $U_i$, et soit a (resp. $a_i$) l'idéal de A formé des éléments qui s'annulent sur le complémentaire de U (resp. $U_i$). On a clairement $a = (a_i)$. Comme A est noethérien, il existe un nombre fini d'$a_i$ engendrant a, donc un nombre fini d'$U_i$ ayant U pour réunion. Autrement dit, U est quasi-compact, donc (lemme 5.2) $\Omega_A$ est noethérien. Dans le cas général, soit E réunion des sous-espaces noethériens $E_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) et soit $(U_j)$ une suite croissante d'ouverts de E ; puisque $E_i$ est noethérien, la suite croissante $U_j \cap E_i$ est stationnaire. Comme $U_j = \bigcup_i (U_j \cap E_i)$, la suite $U_j$ est stationnaire, donc E est noethérien.

5.4. Un espace topologique est dit *irréductible* s'il est non vide et s'il n'est pas réunion de deux fermés distincts de lui-même. Cela signifie que l'intersection de deux ouverts non vide est non vide, ou encore que tout ouvert non vide est partout dense.

*Théorème. Soit* E *un espace topologique. Toute partie irréductible est contenue dans une partie irréductible maximale; celles-ci sont fermées et leur réunion est* E. *Si* E *est noethérien, les parties irréductibles maximales de* E *sont en nombre fini.*

Démonstration : Soit $F_i$ une famille totalement ordonnée de parties irréductibles de E et F leur réunion ; si deux ouverts U et V rencontrent F, ils rencontrent l'un des $F_i$ et comme $F_i$ est irréductible, $U \cap V$ rencontre $F_i$ donc aussi F : l'ensemble F est irréductible. Il résulte alors du théorème de Zorn que toute partie irréductible est contenue dans une partie irréductible maximale. La seconde assertion du théorème résulte de ce que l'adhérence d'une partie irréductible est irréductible et de ce que les points sont des parties irréductibles. Supposons E noethérien, et soit $\underline{A}$ l'ensemble des parties de E qui

8

sont réunion d'un nombre fini de parties fermées irréductibles ; si $E$ n'appartenait pas à $\underline{A}$, on pourrait trouver une partie fermée $G$ de $E$, minimale parmi les parties fermées de $E$ qui n'appartiennent pas à $\underline{A}$. $G$ n'est ni vide ni irréductible, donc $G = G_1 \cup G_2$, $G_1$ et $G_2$ étant fermés et distincts de $G$, de là on tire $G_i \in \underline{A}$ par le caractère minimal de $G$ ; mais alors $G_1 \cup G_2 \in \underline{A}$ ; c'est une contradiction, donc $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, les $E_j$ étant des fermés irréductibles. Comme $F = \cup_j (F \cap E_j)$, toute partie irréductible est contenue dans un des $E_j$, de sorte que les parties irréductibles maximales sont certains des $E_j$.
On appelle *composantes irréductibles* de $E$ les parties irréductibles maximales de $E$.
*Corollaire. Tout ensemble préalgébrique se décompose de façon unique en un nombre fini de composantes irréductibles.*

5.5. *Un ensemble préalgébrique infini n'est pas de Hausdorff, car deux ouverts non vides d'une même composante irréductible ne sont jamais disjoints.* D'ailleurs, si $k \neq K$ *un ensemble préalgébrique infini n'est «en général» pas accessible*, ce qui signifie que les points ne sont «en général» pas fermés (on dit aussi que la topologie de Zariski n'est pas $T_1$) ; par exemple, soit $\Omega_A$ où $A = Q[X, Y]$ le plan affin à coordonnées complexes ; l'adhérence du point $(t, t^2)$ où $t$ est transcendant sur $Q$ est formée des points $(x, y)$ vérifiant $y = x^2$ : en effet, tout polynôme nul en $(t, t^2)$ est divisible par $y - x^2$.

5.6. Soit $p$ un point d'un sous-ensemble $S$ d'un ensemble préalgébrique ; si $S$ est exactement l'adhérence de $p$, on dit que $p$ est un *point générique* de $S$, et que les points de $S$ sont des *spécialisations* de $p$.

6. MORPHISMES.

6.1. La définition des morphismes donnée en 2.2 s'applique sans modification aux ensembles préalgébriques.
*Proposition. Soient* $E$ *un ensemble préalgébrique et* $A$ *une algèbre sur* $k$ *; pour qu'une application* $f$ *de* $E$ *dans* $\Omega_A$ *soit un morphisme, il faut et il suffit que pour tout* $x \in A$, $x \circ f$ *soit une fonction régulière partout définie sur* $E$.

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée par $f$ ; l'ensemble $U = f^{-1}(V(x))$ est l'ensemble des points où ne s'annule pas $x \circ f$, donc est ouvert, ce qui prouve que $f$ est continue. De plus, la fonction $x \circ f$ ne s'annulant pas sur $U$, son inverse $(\frac{1}{x}) \circ f$ est une fonction régulière définie sur $U$. Il s'ensuit que, pour tout $y \in A[\frac{1}{x}]$, $y \circ f$ est une fonction régulière définie sur $U$, ce qui prouve que $f$ est un morphisme puisque les $V(x)$ forment une base d'ouverts de $\Omega_A$.

*Corollaire. Les morphismes de* $E$ *dans la droite affine* $K$ *sont les fonctions régulières partout définies sur* $E$.

6.2. *Remarque :* une bijection qui est un morphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme. *Exemple :* Soit $E$ la droite affine sur un corps $K$ de caractéristique 2 ; l'application

$$\Phi : E \to E, \quad x \rightsquigarrow x^2$$

9

est un morphisme. Puisque K est algébriquement fermé, il s'agit d'une bijection ; mais ce n'est pas un isomorphisme parce que l'application $\Phi^{-1}$ n'est pas régulière.

6. 3. Soit E un espace topologique ; une partie Q de E est dite *quasi-fermée* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

a) $\overline{Q} - Q$ n'est dense sur aucun ouvert relativement à $\overline{Q}$ ;

b) Q contient un ouvert relativement à $\overline{Q}$ dense dans $\overline{Q}$.

*Lemme. Si* $Q_1$ *et* $Q_2$ *sont deux quasi-fermés de* E, *la réunion de* $Q_1$ *et* $Q_2$ *est encore un quasi-fermé de* E.

Démonstration : Si $Q_1$, $Q_2$ et $Q_1 \cup Q_2$ sont des quasi-fermés de E, ce sont des quasi-fermés de $\overline{Q_1 \cup Q_2}$ pour la topologie induite par E sur cette partie, et réciproquement ; on supposera donc sans restriction $\overline{Q_1 \cup Q_2} = E$. Soit $V_i$ $(i = 1,2)$ un ouvert relativement à $\overline{Q}_i$ dense dans $\overline{Q}_i$ et contenu dans $Q_i$. La partie

$$W = (V_1 \cap \overset{\circ}{V}_1) \cup (V_2 \cap \overset{\circ}{V}_2)$$

est contenue dans $Q_1 \cup Q_2$. Montrons qu'elle est ouverte et partout dense. Comme $V_i$ est ouvert relativement à $\overline{Q}_i$ et dense dans $\overline{Q}_i$, $V_i \cap \overset{\circ}{V}_i$ est ouvert relativement à $Q_i \cap \overset{\circ}{V}_i = \overset{\circ}{V}_i$ et dense dans $\overset{\circ}{V}_i$. Comme $\overset{\circ}{V}_i$ est ouvert, $V_i \cap \overset{\circ}{V}_i$ est ouvert, donc W est ouvert. Comme $V_i \cap \overset{\circ}{V}_i$ est dense dans $\overset{\circ}{V}_i$, on a $\overline{W} = \overline{\overset{\circ}{V}_1} \cup \overline{\overset{\circ}{V}_2}$. Il reste à prouver que $\overline{W} = E$. Puisqu'on a $\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2 = E$, cela découle de la propriété générale : Si A et B sont deux fermés de E tels que $\overline{\overset{\circ}{A}} \cup \overline{\overset{\circ}{B}} = E$, on a aussi $A \cup B = E$ (Bourbaki, Top. gén., chap. I, § 1, Exerc. 4 d), 3[e] éd.).

6. 4. *Théorème. Soient* E *et* F *deux ensembles préalgébriques et* f *un morphisme de* E *dans* F ; *l'image par* f *d'un quasi-fermé est quasi-fermée.*

Démonstration : Un quasi-fermé d'un espace topologique étant quasi-fermé dans son adhérence et réciproquement, on ne diminue pas la généralité en supposant, si Q est quasi-fermé, $\overline{Q} = E$ et $\overline{f(Q)} = F$. Les composantes irréductibles d'un quasi-fermé étant quasi-fermées, on peut aussi supposer, grâce au lemme 6. 3, que E et F sont irréductibles. L'intersection d'un ouvert affin et d'un quasi-fermé étant quasi-fermée, on peut enfin supposer que E et F sont affins. Avec ces hypothèses, tout revient à prouver que l'image d'un ouvert affin non vide de E contient un ouvert non vide de F. Soient A et B les anneaux de coordonnées de E et F. Le morphisme f définit une injection de B dans A, ce qui nous permet d'identifier B avec son image dans A. Enfin, soit v un élément de A ne s'annulant pas sur l'ouvert affin V de E. En vertu du lemme 3. 1, il existe un $u \in B$ ayant la propriété suivante : tout homomorphisme q de B dans K tel que $p(u) = u(p) \neq 0$ se prolonge en un homomorphisme p de A dans K tel que $p(v) = v(p) \neq 0$. Cela signifie que, si q est un point de l'ouvert non vide U de F où la fonction régulière u n'est pas nulle, il existe

10

un point $p$ dans $E$ dont l'image par $f$ est $q$. Par conséquent, l'image de $V$ par $f$ contient $U$ et le théorème est démontré.

7. PRODUITS - ENSEMBLES ALGEBRIQUES.

7.1. Soient $E = \Omega_A$ et $F = \Omega_B$ deux ensembles algébriques affins (les corps $k$ et $K$ étant les mêmes pour $E$ et $F$) ; le *produit* $E \times F$ sera un troisième ensemble algébrique affin, à savoir $\Omega_{A \otimes B}$, où $A \otimes B$ est le produit tensoriel de $A$ et $B$ sur $k$ (cf. Bourbaki, Alg., chap. III, § 3, n° 1). Comme $k$ est un corps, on peut plonger $A$ et $B$ dans $A \otimes B$, en identifiant $a \in A$ et $a \otimes 1$, $b \in B$ et $1 \otimes b$. Si $u$ et $v$ sont respectivement des homomorphismes de $A$ et $B$ dans $K$, il existe un homomorphisme unique de $A \otimes B$ dans $K$ dont les restrictions à $A$ et $B$ sont respectivement $u$ et $v$ ; $E \times F$ est donc, en tant qu'ensemble, le produit des ensembles $E$ et $F$. *Exemple :* le produit de deux droites affines est un espace affin à deux dimensions, car $k[X] \otimes k[Y]$ est canoniquement isomorphe à $k[X, Y]$.

7.2. *Remarques :*

a) Si $(a_i)_{i \in I}$ est une base finie pour $A$ et $(b_j)_{j \in J}$ une base finie pour $B$, $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base finie pour $A \otimes B$. Par suite, les fonctions régulières *partout définies* sur $E \times F$ sont de la forme $\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha$ où les $x_\alpha$ (resp. $y_\alpha$) sont des fonctions régulières partout définies sur $E$ (resp. $F$).

b) La proposition 6.1 et la remarque précédente entraînent le *Corollaire. Pour qu'une application* $x \rightsquigarrow (f_1(x), f_2(x))$ *d'un ensemble préalgébrique dans* $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$ *soit un morphisme, il faut et il suffit que* $f_1$ *et* $f_2$ *soient des morphismes.*

c) La topologie de l'ensemble algébrique affin $E \times F$ *n'est pas* le produit des topologies de $E$ et $F$. Dans l'exemple de 7.1, les fermés de la topologie produit sont les ensembles de droites parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées, tandis que les fermés du plan affin sont les ensembles finis de points et les courbes algébriques (relativement complètes).

7.3. Soient maintenant $E$ et $F$ deux ensembles préalgébriques. On peut écrire $E = \bigcup_i E_i$, $F = \bigcup_j F_j$ où les $E_i$ et les $F_j$ sont des ensembles algébriques affins. Le produit ensembliste $E \times F$ est donc recouvert par les ensembles algébriques affins $E_i \times F_j$. D'après la proposition 2.5, ces ensembles permettent de définir une topologie et un système local sur $E \times F$ si les conditions suivantes sont vérifiées : (a) $(E_i \times F_j) \cap (E_k \times F_s)$ est ouvert dans $E_i \times F_j$ et dans $E_k \times F_s$ ; (b) les restrictions à $(E_i \times F_j) \cap (E_k \times F_s)$ des systèmes locaux de $E_i \times F_j$ et $E_k \times F_s$ coïncident. La condition (a) découle de l'égalité $(E_i \times F_j) \cap (E_k \times F_s) = (E_i \cap E_k) \times (F_j \cap F_s)$ et du fait que le produit de deux ouverts est un ouvert ; la condition (b) découle de la même égalité et de la remarque 7.2.a. *Muni de la topologie et du système local défini ci-dessus,* $E \times F$ *est appelé produit des ensembles préalgébriques* $E$ *et* $F$. Que la structure de $E \times F$ soit indépendantes des recouvrements $E_i$ et $F_j$ vient de ce que, si $U$ est un ouvert de $E_i$ et $V$ un ouvert de $F_j$, les

11

fonctions régulières définies sur $U \times V$ sont de la forme $\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha$ où les $x_\alpha$ (resp. $y_\alpha$) sont des fonctions régulières définies sur $U$ (resp. $V$).

*Proposition. Soient* $F_1$ *et* $F_2$ *des ensembles préalgébriques et* $p_1$ (resp. $p_2$) *la projection de* $F_1 \times F_2$ *sur* $F_1$ (resp. $F_2$). *Si* $f_1$ (resp. $f_2$) *est un morphisme d'un ensemble préalgébrique* $E$ *dans* $F_1$ (resp. $F_2$), *il existe un morphisme* $f$ *de* $E$ *dans* $F_1 \times F_2$ *et un seul tel que* $p_i \circ f = f_i$ *pour* $i = 1$ *et* 2 (définition catégorique du produit direct).

Démonstration : L'application

$$f : E \to F_1 \times F_2 \quad , \quad x \rightsquigarrow (f_1(x) , f_2(x))$$

satisfait aux conditions $p_i \circ f = f_i$ pour $i = 1$ et 2. Ce sera un morphisme si ses restrictions aux images inverses d'un recouvrement $U_{1j} \times U_{2k}$ de $F_1 \times F_2$ sont des morphismes, ce qui est impliqué par le corollaire 7.2.b.

7.4. *Un ensemble préalgébrique* $E$ *est appelé ensemble algébrique si la diagonale de* $E \times E$ *est fermée.* Cette condition a été introduite pour éviter des ensembles préalgébriques comme celui défini en 4.3c.

*Proposition. Le produit de deux ensembles algébriques est un ensemble algébrique.*

Démonstration. Soient $E$ et $F$ les ensembles algébriques ; dans l'ensemble algébrique $(E \times E) \times (F \times F)$, la partie formée des $((x , x) , (y , y))$ où $x \in E$ et $y \in F$ est fermée comme produit de deux fermés ; comme l'application $((x , x') , (y , y')) \rightsquigarrow (x , y) , (x' . y'))$ est un homéomorphisme de $(E \times E) \times (F \times F)$ sur $(E \times F) X (E \times F)$, la diagonale de $(E \times F) \times (E \times F)$ est fermée.

7.5. Soit $E$ un ensemble préalgébrique. On appelle *ouvert affin* de $E$ un ouvert de $E$ isomorphe à un ensemble algébrique affin.

*Proposition. Dans un ensemble algébrique, l'intersection de deux ouverts affins est un ouvert affin.*

Démonstration : Soient $U_1$ et $U_2$ deux ouverts affins de l'ensemble algébrique $E$. Dans $E \times E$, le produit $U_1 \times U_2$ est encore un ouvert affin. Comme un fermé d'un ensemble algébrique affin est un ensemble algébrique affin, $U_1 \times U_2$ coupe la diagonale de $E \times E$ selon un ensemble algébrique affin, donc selon un ouvert affin de cette diagonale ; ce dernier est isomorphe à $U_1 \cap U_2$ qui est donc un ouvert affin de $E$.

## 8. EXTENSION DU CORPS DE BASE.

8.1. Les ensembles algébriques envisagés jusqu'ici étaient des $(k , K)$-ensembles algébriques. Soit $k_1$ un sur-corps de $k$ contenu dans $K$ ; nous allons montrer comment tout $(k , K)$-ensemble algébrique peut être muni d'une structure de $(k_1 , K)$-ensemble algébrique. Le procédé est presque immédiat pour les ensembles algébriques affins : soit $\Omega_{,A}$ un ensemble algébrique affin ; considérons l'algèbre déduite de $A$ par extension de $k$ à $k_1$,

12

c'est-à-dire $A_1 = A \otimes_k k_1$ et identifions A et $A \otimes_k 1$ ; à tout k-homomorphisme $x \rightsquigarrow f(x)$ de A dans K, associons le $k_1$-homomorphisme de $A_1$ dans K obtenu en étendant linéairement $x \otimes \lambda \rightsquigarrow \lambda f(x)$ ; on établit ainsi une bijection qui permet d'identifier $\Omega_A$ et $\Omega_{A_1}$. De plus, tout ouvert de $\Omega_A$ est un ouvert de $\Omega_{A_1}$ et toute fonction régulière sur un ouvert de $\Omega_A$ est une fonction régulière sur un ouvert de $\Omega_{A_1}$.

8.2. *Proposition. Soit* $E^k$ *un* (k, K)-*ensemble algébrique. Il existe sur* $E^k$ *une structure de* $(k_1, K)$-*ensemble algébrique* $E^{k_1}$ *et une seule telle que tout ouvert de* $E^k$ *soit un ouvert de* $E^{k_1}$ *et que, pour tout ouvert affin* $\Omega_A$ *de* $E^k$, *les fonctions régulières de* $E^{k_1}$ *soient les* $x \in A_1$.

Démonstration : L'existence et l'unicité de cette structure découle de la proposition 2.5 ; pour qu'elle soit applicable, il faut vérifier que, si $E^k_1$ et $E^k_2$ sont deux ouverts affins de $E^k$, les restrictions à $E_1^{k_1} \cap E_2^{k_1}$ des systèmes locaux de $E_1^{k_1}$ et de $E_2^{k_1}$ coïncident ; d'après la proposition 7.5, $E^k_1 \cap E^k_2$ est un ouvert affin, de sorte que les fonctions régulières de $E_1^{k_1}$ qui y sont définies sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $k_1$ des fonctions régulières de $E^k$ qui y sont définies ; la coïncidence des restrictions envisagées en résulte.

8.3. Les topologies de Zariski des ensembles algébriques $E^k$ et $E^{k_1}$ sont respectivement appelées k-topologie et $k_1$-topologie. La $k_1$-topologie d'un ensemble algébrique est plus fine que sa k-topologie. *Exemple :* Dans la (Q, C)-droite affine, l'adhérence du point $\sqrt{2}$ est l'ensemble $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ ; dans la $(Q(\sqrt{2}), C)$-droite affine, le point $\sqrt{2}$ est fermé.

8.4. Soit E un (k, K)-ensemble algébrique ; un point p de E est dit *rationnel* s'il est défini, dans un ouvert affin $\Omega_A$ qui le contient, comme un homomorphisme $p : A \to K$ dont l'image est dans k ; alors cette propriété est vraie pour tout ouvert affin contenant p ; tout point rationnel est fermé, mais l'inverse n'est en général pas vrai. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k ; un point p de E est dit *algébrique* s'il est rationnel lorsqu'on envisage E avec sa structure de $(\bar{k}, K)$-ensemble algébrique.

9. SOUS-ENSEMBLES ALGEBRIQUES.

9.1. Soient E un ensemble algébrique et X une partie de E ; on dit que X est un *sous-ensemble algébrique* de E s'il forme un ensemble algébrique lorsqu'on le munit de la topologie induite par celle de E et du système local induit par celui de E.
*Exemple 1 : Les ouverts de* E *sont des sous-ensembles algébriques de* E. En effet, soit $(E_i)$ un recouvrement fini de E par des ensembles algébriques affins. Si U est un ouvert de E, $U \cap E_i$ est un ouvert de U ; donc U est une réunion finie d'ouverts affins $V_{ij}$. Puisque les restrictions aux $V_{ij}$ des systèmes locaux de E et U coïncident, U est un ensemble

13

préalgébrique. La diagonale de $U \times U$ étant la trace sur $U \times U$ de la diagonale fermée de $E \times E$, U est un ensemble algébrique.

*Exemple 2 : Les fermés de* E *sont des sous-ensembles algébriques de* E.

En effet, soit F un fermé de E. Posons $F_i = F \cap E_i$ ; $F_i$ est ouvert dans F et $F = \cup F_i$ ; d'autre part, $F_i$ est fermé dans $E_i$ et est donc un ensemble algébrique affin. Puisque les restrictions aux $F_i$ des systèmes locaux de E et F coïncident, F est un ensemble préalgébrique. La diagonale de $F \times F$ étant la trace sur $F \times F$ de la diagonale fermée de $E \times E$, F est un ensemble algébrique.

9.2. On dit qu'une partie X d'un espace topologique E est localement fermée si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U_x$ tel que $X \cap U_x$ soit fermé relativement à $U_x$. Il revient au même de dire que X est ouvert dans son adhérence, ou que X est intersection d'un ouvert et d'un fermé.

*Théorème. Soient* E *un ensemble algébrique et* X *une partie de* E ; *pour que* X *soit un sous-ensemble algébrique de* E, *il faut et il suffit qu'il soit localement fermé.*

Démonstration : Supposons que $X = F \cap U$, avec F fermé et U ouvert dans E ; d'après l'exemple 1 de 9.1, U est un ensemble algébrique. Comme X est fermé dans U, l'exemple 2 de 9.1 montre que X est un ensemble algébrique. Puisque les restrictions à X des systèmes locaux de E et U coïncident, X est un sous-ensemble algébrique.

Réciproquement, supposons que X soit un sous-ensemble algébrique de E ; il faut prouver que X est ouvert dans son adhérence $\overline{X}$ ; mais $\overline{X}$ est un ensemble algébrique et les restrictions à X des systèmes locaux de E et $\overline{X}$ coïncident ; on est donc ramené à prouver que si X est dense dans E, il est ouvert dans E. Si $X_i$ sont les composantes irréductibles de X, les $\overline{X_i}$ sont les composantes irréductibles de X ; on se ramène alors immédiatement au cas où X et E sont des ensembles algébriques irréductibles. Soit $(E_k)$ un recouvrement fini de E par des ouverts affins ; il suffit de prouver que $X \cap E_k$ est ouvert dans $E_k$ pour prouver que X est ouvert dans E ; autrement dit, on peut supposer E affin. Enfin, comme X est réunion d'ouverts affins de X, on peut supposer X affin.

Supposons donc que E et X soient des ensembles algébriques affins, que E soit irréductible et X dense dans E ; il faut prouver que X est ouvert dans E. Soit $(F^E_U)$ et $(F^X_U)$ les systèmes locaux respectifs sur E et X et soit f une fonction appartenant à $F^X_X$. Par définition, il existe pour tout $x \in X$ un voisinage $U_x$ de x dans E et une fonction appartenant à $F^E_{U_x}$, soit $f_x$, tels que f et $f_x$ coïncident sur $U_x \cap X$ ; mais E étant irréductible, l'ensemble $X \cap U_x \cap U_y$ est dense dans $U_x \cap U_y$ ; par suite, $f_x$ et $f_y$ coïncident (par continuité) dans $U_x \cap U_y$ et, si V est la réunion des $U_x$ $(x \in X)$, il existe une fonction appartenant à $F^E_V$ induisant f sur X.

Si $(f_i)$ est un système fini de générateurs de l'algèbre $B = F^X_X$, on peut donc trouver un ouvert V contenant X et des fonctions $g_i \in F^E_V$ et prolongeant les $f_i$. Soit A l'algèbre engendrée par les $g_i$ ; comme X est dense dans V et comme les éléments de A sont des fonctions continues, l'opération $f \rightsquigarrow f|X$ est une bijection de A sur B. Soit alors $x \in V$ ; l'application $f \rightsquigarrow f(x)$ de $A$ dans $K$ étant un homomorphisme, il existe, puisque $X$ est l'ensemble des homomorphismes de $B$ dans $K$, un point $x' \in X$ tel que $f(x) = f(x')$ pour tout $f \in A$ ; c'est vrai en particulier lorsque $f$ est une fonction régulière partout définie sur $E$ et comme $E$ est affin, on en déduit $x = x'$, d'où $X = V$. On a donc prouvé que $X$ est ouvert dans $E$.

9. 3. *Corollaire. L'intersection de deux sous-ensembles algébriques de* E *est un sous-ensemble algébrique de* E.

Remarques : 1) La réunion de deux sous-ensembles algébriques de $E$ n'est « en général » pas un sous-ensemble algébrique de $E$. Exemple : Dans le plan affin, la réunion de l'ouvert défini par $y \neq 0$ et du fermé défini par $x = 0$, n'est pas un sous-ensemble algébrique. 2) Un point n'est un sous-ensemble algébrique que s'il est fermé.

## 10. APPLICATIONS RATIONNELLES - DIMENSION.

10. 1. Soient $E$ et $F$ des ensembles algébriques. A côté des morphismes de $E$ dans $F$, il est utile de considérer certaines applications qui sont « presque partout » définies dans $E$. C'est ainsi que, si $E$ et $F$ sont les droites affines $K$, on considère les fonctions rationnelles $x \rightsquigarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$ qui ne sont pas définies pour les zéros de $Q(x)$. Plus précisément, les applications considérées sont les morphismes $f : U \to F$ où $U$ est un ouvert partout dense de $E$. Soient $f_1$ et $f_2$ des applications de ce type définies respectivement sur $U_1$ et $U_2$ ; la relation

« $f_1$ *et* $f_2$ *coïncident sur un ouvert partout dense de* E »

est une relation d'équivalence [(1)]. Par continuité, $f_1$ et $f_2$ coïcident alors sur $U_1 \cap U_2$.
*Définition. On appelle application rationnelle de* E *dans* F *toute classe d'équivalence de la relation précédente.*

Si $f_1$ et $f_2$ sont deux représentants de l'application rationnelle $F$ et si $U_1 \supset U_2$, on dit que $f_1$ prolonge $f_2$. Il s'agit d'une relation d'ordre qui est inductive et le théorème de Zorn montre *que chaque application rationnelle* $F$ possède un représentant maximal $f$, c'est-à-dire un représentant qui prolonge tous les autres. On identifiera, dans la suite, toute application rationnelle avec son représentant maximal. C'est ainsi qu'on appellera *domaine de définition* de $F$ le domaine de définition de son représentant maximal $f$.

---

(1) Montrons que, si $\overline{U} = \overline{V} = E$, $U$ et $V$ étant ouverts, alors $\overline{U \cap V} = E$ : soit $x \in U$ ; pour tout voisinage $W$ de $x$, $W \cap U$ est encore un voisinage de $x$ ; comme $x \in \overline{V}$ $(= E)$, $W \cap U \cap V \neq \phi$ pour tout voisinage de $x$, d'où $x \in \overline{U \cap V}$ ; on en déduit $U \subset \overline{U \cap V}$, puis, en prenant l'adhérence, $E \subset \overline{U \cap V}$ : donc $\overline{U \cap V} = E$.

15

10. 2. On appelle *application birationnelle* de E dans F une application rationnelle qui possède une inverse, c'est-à-dire dont le représentant maximal est un isomorphisme entre un ouvert partout dense de E et un ouvert partout dense de F. On dit que E et F sont birationnellement équivalents s'il existe une application birationnelle de E dans F. La géométrie birationnelle est l'étude des propriétés des ensembles algébriques qui sont invariantes pour les applications birationnelles.

10. 3. Considérons plus particulièrement les applications rationnelles de E dans K, aussi appelées *fonctions rationnelles.* Soient f et g deux fonctions rationnelles sur E, ayant respectivement D(f) et D(g) comme domaines de définition. D'après 10. 1, il existe des fonctions rationnelles f + g et f g bien définies par les conditions

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) , \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

pour tout $x \in D(f) \cap D(g)$. On vérifie immédiatement que l'ensemble des fonctions rationnelles sur E, muni des opérations définies ci-dessus, est une k-algèbre ; nous la noterons k(E).

*Proposition. Si* E *est un ensemble algébrique irréductible, l'algèbre* k(E) *des fonctions rationnelles est un corps.*

Démonstration : Soit f une fonction rationnelle qui n'est pas la constante 0. Alors f n'est pas nulle sur un ouvert non vide U de E et $\frac{1}{f}$ est une fonction sur U. Comme E est irréductible, U est partout dense, de sorte que $\frac{1}{f}$ définit une fonction rationnelle g sur E. Comme f g est la fonction constante 1 sur un ouvert partout dense (à savoir U), g est l'inverse de f, et k(E) est un corps.

10. 4. *Proposition. Soient* E *un ensemble algébrique et* $E_i$ *ses composantes irréductibles ; l'algèbre* k(E) *est isomorphe au produit direct des corps* $k(E_i)$.

Démonstration : Soit $U_i$ un ouvert non vide de $E_i$ ne rencontrant aucune autre composante de E et soit U la réunion des $U_i$. Comme les $U_i$ sont disjoints, il résulte de l'axiome II des systèmes locaux que les fonctions régulières définies sur un ouvert V de U s'obtiennent en se donnant indépendamment les fonctions régulières sur $V \cap U_i$ pour chaque i ; par suite, les algèbres k(U) et $\prod_i k(U_i)$ sont isomorphes. Comme U (resp. $U_i$) est partout dense dans E (resp. $E_i$), k(U) (resp. $k(U_i)$) est isomorphe à k(E) (resp. $k(E_i)$), d'où découle que k(E) et $\prod_i k(E_i)$ sont isomorphes.

10. 5. *Remarque. Soient* E *un ensemble algébrique affin et* A *l'algèbre des fonctions régulières sur* E ; *l'algèbre* k(E) *n'est autre que* $A[S^{-1}]$ , *où* S *est la partie de* A *formée de tous les éléments non nuls qui ne divisent pas* 0.

10. 6. Soit L une extension d'un corps k ; on dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de L est *algébriquement libre sur* k s'il n'existe entre les $x_i$ aucunes relations algébriques à coefficients dans k. Soit B l'ensemble des $x_i$, supposés algébrique-

ment libres sur k ; on dit que B est une *base de transcendance* de L sur k si L est algébrique sur le corps k(B) engendré par k et B.

*Théorème. Si* L *a une base de transcendance finie de* n *éléments sur* k, *toute base de transcendance de* L *sur* k *a* n *éléments.*

Démonstration : Voir Bourbaki, Alg., chap. V, § 5, th. 3. Le nombre d'éléments d'une base de transcendance de L sur k est appelé *degré de transcendance* de L (sur k).

10.7. Soit E un ensemble algébrique irréductible et k(E) le corps des fonctions rationnelles sur E. On appelle *dimension* de E le nombre maximum de fonctions rationnelles algébriquement indépendantes, c'est-à-dire le degré de transcendance de k(E) (sur k).
*Exemple ;* Dans le plan affin, soit E l'ensemble algébrique défini par l'idéal premier (f) où f est un polynôme irréductible en x et y. Si y intervient effectivement dans f, la fonction rationnelle x est algébriquement libre sur k; y étant fonction algébrique de x, il en est de même de toute fonction rationnelle en x et y; la dimension de V est donc 1.

11. VARIETES ALGEBRIQUES.

11.1. Soient K et L deux extensions d'un corps k (dans un grand corps) et $K[L] = L[K]$ le plus petit anneau contenant K et L. On dit que K et L sont *linéairement disjoints sur* k si l'application $K \otimes_k L \to K[L]$ définie par $x \otimes y \rightsquigarrow xy$ est un isomorphisme de k-algèbre. Il s'ensuit que toute partie libre de L par rapport à k est alors libre par rapport à K. Inversement, pour que K et L soient linéairement disjoints sur k, il suffit qu'il existe une base de L sur k qui soit libre par rapport à K (Bourbaki, Alg., chap. III, § 3, th. 1).

11.2. On appelle parfois variété algébrique tout ensemble algébrique irréductible. Dans certaines questions - et notamment dans l'étude des groupes algébriques - il est utile de pouvoir affirmer que des fonctions rationnelles linéairement indépendantes sur k le sont encore sur K. D'où la
*Définition. On appelle variété algébrique tout ensemble algébrique irréductible* V *dont le corps* k(V) *des fonctions rationnelles est linéairement disjoint sur* k *du corps* K.

*Exemples 1)* Tout ensemble algébrique irréductible est une variété algébrique si les corps k et K sont identiques.

*2)* Soit k un corps de caractéristique 2 non quadratiquement clos, par exemple $F_2(t)$. Dans la (k, K)-droite affine, considérons l'ensemble algébrique E défini par l'équation $x^2 - t = 0$ et qui est irréductible (son seul point a pour coordonnée $\sqrt{t}$). Les fonctions régulières $x \rightsquigarrow 1$ et $x \rightsquigarrow x$ prennent respectivement sur E les valeurs 1 et $\sqrt{t}$ qui sont linéairement indépendantes sur k mais non sur K. Donc E n'est pas une variété.

12. ANNEAU LOCAL - POINTS SIMPLES.

12.1. Soit E un ensemble algébrique et F un sous-ensemble algébrique *irréductible ;* soit f une fonction rationnelle sur E et D(f) son domaine de définition. Si D(f) et F ne sont pas disjoints, $D(f) \cap F$ est un ouvert non vide de F, donc est partout dense dans F puisque cet ensemble est irréductible. Par conséquent, la restriction de f à F est une fonction rationnelle sur F. On appelle *anneau local de* F *dans* E et on note $\mathcal{O}(F, E)$

l'anneau quotient $B/b$ où $B$ est formé de toutes les fonctions rationnelles sur $E$ dont le domaine de définition coupe $F$ et où $b$ est l'idéal des fonctions rationnelles nulles sur les composantes irréductibles de $E$ qui contiennent $F$. (La raison de l'adjectif « local » vient de ce que $\mathcal{O}(F, E)$ dépend seulement d'un voisinage de $F$ dans $E$ ; on peut en déduire des propriétés communes à tous les ouverts de $E$ contenant $F$). Dans ce qui suit, nous supposerons pour simplifier que toutes les composantes irréductibles de $E$ contiennent $F$. Alors, $\mathcal{O}(F, E)$ est formé de fonctions rationnelles.

12. 2. Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal de $\mathcal{O}(F, E)$ formé des fonctions rationnelles sur $E$ nulles sur $F$.

*Proposition. L'idéal $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}(F, E)$.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathcal{O}(F, E)$ et soit $x \in \mathfrak{p}$. Si l'on avait $x^{-1} \in \sigma(F, E)$, on aurait $xx^{-1} = 1 \in \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ serait $\mathcal{O}(F, E)$. Donc, si $\mathfrak{p}$ n'est pas $\mathcal{O}(F, E)$, $x^{-1}$ n'appartient pas à $\mathcal{O}(F, E)$, ce qui signifie que $D(x^{-1}) \cap F = \phi$. Donc $x$ s'annule sur $F$ et appartient à $\mathfrak{m}$. On en déduit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$.
Puisque $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal, $\mathcal{O}(F, E)/\mathfrak{m}$ est un corps qu'on identifie immédiatement à un sous-corps du corps $k(F)$ des fonctions rationnelles sur $F$. En fait, ces deux corps coïncident, car on peut montrer que toute fonction rationnelle sur $F$ est la trace d'une fonction rationnelle sur $E$.

12. 3 Si $E$ est un ensemble algébrique affin irréductible, on obtient comme suit l'anneau local $\mathcal{O}(F, E)$. Soit $A$ l'algèbre des fonctions régulières sur $E$ et $I$ l'idéal premier définissant $F$. Alors $\mathcal{O}(F, E)$ est l'ensemble des quotients $ab^{-1}$ où $a \in A$, $b \in A$ et $b \notin I$ ; c'est un anneau à un seul idéal maximal parce que le complémentaire de $I$ dans $A$ est un système multiplicatif.

12. 4. Parmi les *notions locales* figure celle d'*espace vectoriel tangent*. Partons d'un exemple : soit $E$ une variété algébrique à $r$ dimensions sur le corps $C$ des nombres complexes ; soient $p$ un point de $E$ et $x_1, \dots, x_r$ des coordonnées locales valables en $p$.
Si les coordonnées locales de $p$ sont nulles, toute fonction rationnelle définie en $p$ peut se développer en série de Taylor :

$$f(x) = a + \Sigma a_i x_i + \Sigma a_{jk} x_j x_k + \dots$$

Soient $\mathcal{O}(p, E)$ l'ensemble de ces fonctions et $\mathfrak{m}$ la partie pour laquelle $a = 0$ ; l'ensemble des fonctions pour lesquelles $a = a_i = 0$ est alors $\mathfrak{m}^2$. L'ensemble des différentielles en $p$ est alors simplement l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sur le corps $C = \mathcal{O}(p, E)/\mathfrak{m}$.
Les différentielles en $p$ formant le dual de l'espace vectoriel tangent en $p$, il est naturel de poser la définition : Soient $p$ un point *fermé* d'un ensemble algébrique $E$, $\mathcal{O}(p, E)$ l'anneau local de $p$ en $E$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal des fonctions rationnelles nulles en $p$ ; *on appelle espace vectoriel tangent en* $p$ *l'espace dual de l'espace vectoriel* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *sur le corps* $\mathcal{O}(p, E)/\mathfrak{m}$ ; sa dimension est supérieure ou égale à celles des composantes irréductibles de $E$ qui contiennent $p$.

12. 5. Soit $E$ un ensemble algébrique irréductible et $p$ un point fermé de $E$ ; *on dit que* $p$ *est simple lorsque l'espace vectoriel tangent en* $p$ *a même dimension que* $E$.

18

Montrons que l'origine n'est pas un point simple de la variété définie dans le plan affin par $y^2 = x^3$ : posons $y = t^3$, $x = t^2$ ; une fonction régulière est un polynôme en x et y, donc un polynôme de la forme $a_o + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$. Une fonction rationnelle appartenant à $\mathfrak{m}$ peut donc s'écrire

$$\frac{a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n}{b_o + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m}$$

tandis qu'une fonction rationnelle appartenant à $\mathfrak{m}^2$ est de la forme

$$\frac{a_4 t^4 + \ldots + a_n t^n}{b_o + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m}$$

Par conséquent, il y a deux coordonnées indépendantes $a_2$ et $a_3$ dans l'espace $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. L'espace vectoriel tangent à l'origine est donc de dimension 2 alors que la variété définie par $y^2 = x^3$ est de dimension 1.

12.6. Soit E un ensemble algébrique de dimension n, V un sous-ensemble irréductible de dimension d ; si $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des fonctions rationnelles sur E nulles sur V, le quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est encore un espace vectoriel sur le corps $\mathfrak{O}(V, E)/\mathfrak{m}$ ; on dit que V est un *sous-ensemble simple* si $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension n - d. On peut exprimer cette condition en langage algébrique de la manière suivante : Soit $\mathfrak{O}$ un anneau local d'une algèbre affine A. Son anneau de fractions est la somme directe d'un certain nombre de corps $L_i$ qui sont des extensions de k ayant un nombre fini de générateurs. Notons n le maximum des degrés de transcendance des $L_i$ sur k et d le degré de transcendance de $\mathfrak{O}/\mathfrak{m}$ sur k. L'entier n-d peut être appelé la dimension de $\mathfrak{O}$. L'anneau local est dit *régulier* si l'idéal maximal de $\mathfrak{O}$ est engendré par n - d éléments. On remarque immédiatement que v est un sous-ensemble simple si et seulement si $\mathfrak{O}(V, E)$ est régulier. Ceci permet d'étendre la définition de la simplicité à tous les points : un point est simple si l'anneau local de son adhérence est régulier. (Pour les propriétés des points simples, voir p. ex. S. Lang, IAG, Ch. VIII). Notons les résultats suivants :

1) *Un sous-ensemble irréductible est simple si et seulement si il contient un point simple.*

2) *Soit* $k_1$ *une extension de* k ; *soit* E *un ensemble algébrique considéré d'une part sur* k, *de l'autre sur* $k_1$ ; *un sous-ensemble simple sur* $k_1$ *est simple sur* k. La réciproque n'est pas toujours vraie : il se peut qu'un point fermé soit simple sur k, mais pas sur $k_1$ (pour un exemple, voir le problème analogue pour les points normaux). Elle est vraie néanmoins pour un point rationnel. Un point qui est simple sur la clôture algébrique de k est absolument simple (pour tout $k_1$).

3) *L'ensemble des points simples forme un ouvert partout dense.*

4) *Soit* $p_i$ *un point absolument simple de* $E_i (i = 1, 2)$. *Alors* $(p_1, p_2)$ *est absolument simple sur* $E_1 \times E_2$ (la propriété ne serait pas vraie si l'on supprimait «absolument»).

19

## II. ENSEMBLES ALGEBRIQUES NORMAUX - ENSEMBLES ALGEBRIQUES COMPLETS

N.B. Dans les numéros 2 à 8, tous les ensembles algébriques sont supposés irréductibles.

### 1. CLOTURE INTEGRALE D'UN ANNEAU.

(Pour les démonstrations voir Zariski-Samuel. Commutative Algebra I. Chap. V §§ 1-5 ou Séminaire Cartan-Chevalley 1955-56 exposés 1 et 4).

Soit A un sous anneau de B. Un élément de B est appelé entier sur A, s'il satisfait à une équation algébrique monique sur A :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

(le coefficient de $x^n$ est 1). L'ensemble des éléments de B qui sont entiers sur A forment un anneau C, qu'on appelle la clôture intégrale de A dans B. Si A est un domaine d'intégrité et si B est son corps des fractions, l'anneau C est appelée la clôture intégrale A. Si $A = C$, on dit que A est un domaine intégralement clos ou normal.

*Exemples d'anneaux intégralement clos :*

1) Un anneau factoriel (p. ex. $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ; un anneau local régulier, et plus particulièrement l'anneau local d'un point simple, voir Z.S. Comm. Alg. II pp. 404 où 312).

2) L'anneau des fractions $A_p$ par rapport à un système multiplicatif S d'un domaine intégralement clos A est encore intégralement clos. (Surtout utilisé lorsque le système multiplicatif est le complémentaire d'un idéal premier p, auquel cas l'anneau des fractions est noté $A_p$) ; il se peut que $A_p$ soit intégralement clos sans que A le soit.

3) L'intersection d'anneaux intégralement clos est intégralement clos.

4) L'anneau $k[x, y]$ avec $y^2 = P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme irréductible sur k.

*Exemples d'anneaux qui ne sont pas intégralement clos :*

1) $Z(\sqrt{5})$, car $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est entier sur Z, vérifiant l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

2) $k[x, y]$ avec $y^2 = x^3$ (l'anneau de coordonnées d'une cubique à point de rebroussement)
car si $t = y/x$ $t \notin k[x, y]$ mais $t^2 - x = 0$

3) $k[x, y]$ avec $y^2 = x^3 + x^2$ (l'anneau de coordonnées d'une cubique à point double ordinaire)
car si $t = y/x$, $t \notin k[x, y]$ mais $t^2 - (x+1) = 0$.

*Théorème 1.*

Soit A une algèbre affine dont le corps des fractions est F. Si G est une extension algébrique finie de F, la clôture intégrale B de A dans G est un A-module noethérien. En particulier B est une algèbre affine et a un nombre fini de générateurs sur A. Pour tout idéal premier p de A il existe au moins un idéal premier q de B tel que $q \cap A = p$. Il n'en existe qu'un nombre fini.

Dans le cas particulier où l'on considère la clôture intégrale $A'$ de $A$ dans son corps des fractions, on peut définir le conducteur $f$ de $A$ dans $A'$.

$$f = \{u \in A \mid u A' \subseteq A\}$$

C'est le plus grand idéal de $A$ qui soit en même temps idéal de $A'$. Comme $A'$ est un $A$-module noethérien, $f \neq (0)$. Il a la propriété suivante: l'anneau des fractions $A_p$ de l'idéal $p$ n'est pas intégralement clos si et seulement si $p$ contient $f$.

Comme corollaire on obtient que :

Si l'idéal premier $p$ ne contient pas $f$, il y a un et un seul idéal premier $q$ de $A'$ tel que $A \cap q = p$.

## 2. ZEROS ET POLES DES FONCTIONS RATIONNELLES.

Le point $p$ d'un ensemble $E$ est appelé un zéro de la fonction rationnelle $u$, lorsque $p$ appartient à l'adhérence de l'ensemble des points où $u$ est définie et vaut zéro. Le point $q$ est un pôle de $u$, lorsque $q$ appartient à l'adhérence de l'ensemble des points où $1/u$ est définie et vaut zéro. L'ensemble $Z$ des zéros et l'ensemble $P$ des pôles de $u$ sont des fermés dont chaque composante irréductible est de codimension 1. Il est à remarquer que la fonction $u$ n'est pas nécessairement définie en un zéro ; mais l'ensemble des zéros où $u$ est définie est dans $Z$ un ouvert relatif partout dense. En particulier $Z$ et $P$ n'ont aucune composante irréductible commune.

*Proposition 1.*

Soit $\mathcal{O}_p$ l'anneau local du point $p$. Le point $p$ est un zéro de $u$ si et seulement si l'homomorphisme

$$\pi : \mathcal{O}_p \to K,$$

défini par le point $p$, peut se prolonger en un homomorphisme de $\mathcal{O}_p[u]$ dans $K$ qui applique $u$ sur zéro.

*Démonstration :*

Soient $p$ un zéro de $u$ et $W$ une des composantes irréductibles de l'ensemble des zéros de $u$ contenant $p$. Le point $p$ définit un homomorphisme $\pi' : \mathcal{O}(p, W) \to K$. L'homomorphisme de restriction $r : \mathcal{O}_p \to \mathcal{O}(p, W)$ est bien défini et son composé avec $\pi'$ donne $\pi$. L'anneau $\mathcal{O}_p[u]$ est un sous-anneau de $\mathcal{O}(W, E)$. L'homomorphisme de restriction $r$ s'étend à $\mathcal{O}(W, E)$ et l'envoie dans $\mathcal{O}(W, E)/m(W, E) = k(W)$. Comme $\tau(u) = 0$, l'image de $\mathcal{O}_p[u]$ par $\tau$ appartient aussi à $\mathcal{O}(p, W)$. L'homomorphisme $\pi' \circ \tau$ est bien défini sur $\mathcal{O}_p[u]$ et est l'homomorphisme cherché.

B. Supposons qu'il existe un homomorphisme $h : \mathcal{O}_p[u] \to K$ prolongeant $\pi$ et appliquant $u$ sur o.

Remplaçons $E$ par un voisinage affin $F$ partout dense de $p$. Soit $A$ l'algèbre affine cor-

21

respondante : $A \subset \mathcal{O}_p$. La fonction u définit une application rationnelle de F dans la droite affine D.

Soit G l'adhérence dans $F \times D$ du graphe de u. Si t est la coordonnée utilisée sur D, l'algèbre affine de D est $k[t]$, celle de $F \times D$ est $A[t]$ et celle de G est $A[u]$. La projection de G sur D induit l'homomorphisme de $k[t]$ dans $A[u]$ appliquant t sur u. L'homomorphisme $h : A[u] \to K$, restriction de l'homomorphisme donné au départ, définit un point q sur G. Comme cet homomorphisme prolonge celui du point $p \in F$, la projection de q sur F est p. Puisque $h(u) = 0$, la projection de q sur D est l'origine. Mais les points qui appartiennent à la projection sur F des points de G qui se projettent sur l'origine de D sont des zéros de u. Le point p est donc un zéro de u.

*Proposition 2:*

Le point p n'est pas un pôle de la fonction u si et seulement si u est entier sur $\mathcal{O}_p$.

*Démonstration :*

A. Supposons u entier sur $\mathcal{O}_p$. Alors

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

où $a_i \in \mathcal{O}_p$. Si p est un pôle de u, il existe un homomorphisme $h : \mathcal{O}_p[v] \to K$, où $v = 1/u$, prolongeant l'homomorphisme $\pi$ de $\mathcal{O}_p \to K$ et appliquant v sur 0. En multipliant par $v^n$ l'équation de dépendance intégrale de u, on obtient :

$$1 + a_1 v + \dots + a_n v^n = 0.$$

En appliquant l'homomorphisme h on obtient, en tenant compte de $h(v) = 0$, que $h(1) = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que la valeur de la fonction constante au point 1 est 1 ($1 \notin \mathfrak{m}_p$).

B. Si p n'est pas un pôle de u, il n'existe pas d'homomorphisme de $\mathcal{O}_p[v] \to K$ appliquant $v/ = 1/u$ sur zéro et prolongeant $\pi$. Soit $\underline{n}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$ et v dans $\mathcal{O}_p[v]$. Un élément de $\underline{n}$ est de la forme $a_o + a_1 v + \dots + a_n v^n$ où $a_i \in \mathcal{O}_p$ et $a_o \in \mathfrak{m}$. Tout élément de $\mathcal{O}_p[v]$ est congru mod $\underline{n}$ à un élément de K, v étant congru à zéro. Donc $1 \in \underline{n}$ ; sinon $\mathfrak{m} \subset \underline{n}$, $\underline{n}$ serait un idéal maximal de $\mathcal{O}_p[v]$ définissant un homomorphisme de $\mathcal{O}_p[v] \to K$, prolongeant $\pi$ (car $\mathcal{O}_p \cap \underline{n} = \mathfrak{m}$) et appliquant v sur zéro, ce qui est impossible. Nous aurons alors $1 = b_o + b_1 v + \dots + b_n v^n$ où $b_i \in \mathcal{O}_p$ et $b_o \in \mathfrak{m}$. Comme $b_o \in \mathfrak{m}$, $1 - b_o$ est inversible dans $\mathcal{O}_p$, celui-ci étant un anneau local. En divisant par $(1 - b_o) v^n$ on obtient :

$$u^n - b'_1 u^{n-1} - \dots - b'_n = 0 \qquad \text{avec } b'_i \in \mathcal{O}_p.$$

L'élément u est donc entier sur $\mathcal{O}_p$.

## 3. POINTS NORMAUX - SOUS-ENSEMBLES NORMAUX - ENSEMBLES ALGEBRIQUES NORMAUX.

Un point p d'un ensemble algébrique irréductible E est appelé normal lorsque l'anneau local $\mathcal{O}_p$ est intégralement clos. Un sous-ensemble irréductible W de E est appelé normal (ou encore E est normal le long de W) lorsque $\mathcal{O}(W, V)$ est intégralement clos. Un ensemble algébrique est normal s'il est irréductible et est normal le long de toutes ses sous-variétés.

*Proposition 1 :*

Un ensemble affin irréductible E est normal si et seulement si son algèbre affine A est intégralement close.

*Démonstration :*

Si A est intégralement clos, $A_p$ est intégralement clos pour tout idéal premier p. Comme l'anneau local d'un sous-ensemble irréductible est toujours de cette forme, E est normal le long de toutes ses sous-variétés.
Si E est normal, $A_p$ est intégralement clos. Mais A est l'intersection de ses anneaux locaux (une fonction rationnelle, régulière sur tout l'ensemble affin, appartient nécessairement à A). Comme intersection d'anneaux intégralement clos, A l'est aussi.

*Proposition 2 :*

L'ensemble des points non normaux d'un ensemble algébrique est un fermé nulle part dense. En effet lorsque E est un ensemble affin, les points non normaux sont ceux appartenant au sous-ensemble fermé F défini par le conducteur. Comme celui-ci est différent de (0), $F \neq E$. On en déduit que l'ensemble des points normaux n'est pas vide et que chaque point normal à un voisinage normal. L'ensemble des points normaux est donc un ouvert, ce qu'il fallait montrer.

Tout point simple est normal, parce qu'un anneau local régulier est intègre et intégralement clos (il est même factoriel, mais c'est beaucoup plus difficile à démontrer). Un point singulier peut très bien être normal : par ex. le sommet du cône $xy = z^2$.

*Proposition 3 :*

Si E est normal en p et si la fonction rationnelle f n'est pas définie en p, p est un pôle de f. Il existe alors dans tout voisinage de p des points où $1/f$ est définie et y vaut 0.

*Démonstration :*

Si p n'est pas un pôle de f, f appartient à la clôture intégrale de $\mathcal{O}_p$, donc à $\mathcal{O}_p$ lui-même, et f est défini en p.

Si p est un pôle de f, il appartient à l'adhérence de $1\ f(x) = 0$. Il existe donc dans tout voisinage de p des points q où $1/f$ est définie et vaut 0.

*Corollaire.*

Les points en lesquels une fonction rationnelle sur un ensemble algébrique normal n'est pas définie est un sous-ensemble fermé purement de codimension 1. Il en est de même pour une application rationnelle dans un ensemble affin.

23

En effet les points où $f$ n'est pas définie sont les pôles de $f$, qui forment un sous-ensemble fermé purement de codimension 1. D'autre part tout ensemble affin peut être réalisé comme sous-ensemble d'un espace affin. Une application rationnelle de $E$ dans un ensemble affin peut donc être défini par les $n$ fonctions coordonnées de l'image. L'application n'est pas définie en un point de $E$ si et seulement si une de ces fonctions n'est pas définie. Comme la réunion d'un nombre fini de sous-ensembles fermés est de codimension 1, la propriété est aussi démontrée pour une application dans un ensemble affin.

Si $p$ n'est pas normal pour $E$, il se peut que $f$ soit non définie en $p$ sans que $p$ soit un pôle : Soit $E$ la cubique à point nodal : $y^2 = x^3 + x^2$ ; la fonction $x/y$ est indéterminée à l'origine (elle y «vaut» 1 et - 1) mais l'origine n'est pas un pôle de $x/y$ car le seul zéro de $y/x$ est le point $(-1, 0)$ (aucun autre point n'appartient à l'adhérence des points où $y/x$ est défini et y vaut 0).

Toute fonction rationnelle $f$ d'un ensemble algébrique $E$ peut être complétée en une application rationnelle de $E$ dans une droite projective. Nous définirons une droite projective de la manière suivante : c'est la réunion de deux droites affines $d_1$ et $d_2$ d'algèbre $A_1 = k[x]$ et $A_2 = k[y]$ en posant $y = 1/x$, là ou $y \neq 0$ et $x \neq 0$. On vérifie que toutes les règles de l'art ont été respectées. L'origine de $d_2$ est le point $\infty$ pour la coordonnée $x$. Si $f$ est une fonction rationnelle et si $p$ est un point de $E$ où $1/f$ est définie et nulle, on pose $f(p) = \infty$. $f$ définit ainsi comme on le vérifie une application rationnelle de $E$ dans la droite projective.

*Proposition 4.*

Les points, où une application rationnelle $f$ d'un ensemble algébrique normal dans une droite projective n'est pas définie, forment un sous-ensemble fermé de codimension au moins deux. En effet les points où $f$ n'est pas définie appartiennent à l'ensemble pôlaire $P$ de $f$, mais aussi (p. ex. en permutant les rôles de $x$ et de $y$) à l'ensemble $Z$ des zéros de $f$. $P$ est de dimension $n-1$. $Z \cap P$ ne contient aucune composante irréductible de $P$, donc

$\dim (Z \cap P) \leqslant n-2$.

Cette proposition s'étend immédiatement aux applications d'un ensemble algébrique normal dans un produit de droites projectives. Il sera étendu plus tard aux applications dans un ensemble algébrique complet.

## 4. VALUATION ASSOCIEE A UN SOUS-ENSEMBLE IRREDUCTIBLE DE CODIMENSION 1 D'UN ENSEMBLE NORMAL.

Soit $W$ un sous-ensemble irréductible de codimension 1 d'un ensemble algébrique normal $E$. L'anneau local $\mathcal{O}(W, E)$ est intégralement clos. Son idéal maximal $\mathfrak{m}$ est l'idéal des fonctions rationnelles qui induisent 0 sur $W$. C'est un idéal premier minimal. En effet si $\underline{p} \subset \mathfrak{m}$, le sous-ensemble irréductible $V$ correspondant de $E$ contient $W$. Si $\dim = n-1$, $V = W$ et $\underline{p} = \mathfrak{m}$, si $\dim V = n$, $V = E$ et $\underline{p} = (0)$. $\mathfrak{m}$ est donc l'unique idéal premier de $\mathcal{O}(W, E)$, qui est d'autre part un anneau noethérien intégralement clos. D'après un théorème d'algèbre commutative (Zariski-Samuel, Commutative Algebra II p. 19) c'est l'anneau d'une valuation discrète de rang 1 de son corps des fractions. C'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme $v$ du groupe multiplicatif de $k(E)$ sur $Z$, l'anneau des entiers, étendu par $v(0) = +\infty$, tel que $v(x+y) \geqslant \min (v(x), v(y))$ et que $\mathcal{O}(W, E)$ soit exactement l'ensemble des éléments de $k(E)$ dont la valuation est non négative. La valuation d'une fonction n'est autre que l'ordre du zéro de $f$ en $W$ (ou du pôle lorsque $v(f) < 0$). L'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}(W, E)$ est constitué des éléments des $f$ de $k(E)$ tels que $v(f) > 0$. Soit $u \in k(E)$ tel que $v(u) = 1$. Si $f \in \mathfrak{m}$, $v(f) \geqslant 1$ et $v(f|u) \geqslant 0$, ce qui fait que $g = f/u$ appartient à $\mathcal{O}(W, E)$ et que $f \in (u)$. Comme $\mathfrak{m} \subset (u)$ et $(u) \subset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ est un idéal principal. La dimension de l'anneau local $\mathcal{O}(W, E)$ est 1 car dim transc. $k(E) = n$ et dim transc. $\mathcal{O}(W, E)/\mathfrak{m} = \dim k(W) = n-1$. Le nombre de générateurs de $\mathfrak{m}$ étant égal à la dimension de $\mathcal{O}(W, E)$, $\mathcal{O}(W, E)$ est un anneau local régulier et le sous-ensemble $W$ est simple sur $E$.

Nous avons ainsi démontré.

*Proposition 1 :*

Sur un ensemble algébrique normal, tous les sous-ensembles irréductibles de codimension 1 sont simples.

*Corollaire.*

Une courbe normale est non-singulière.

En effet la proposition précédente nous permet d'affirmer que tous les points de la courbe sont simples.

Soit $E$ un ensemble normal défini sur le corps de base $k$. Si $k_1$ est une extension de $k$, l'ensemble algébrique $E$ n'est pas nécessairement normal sur $k_1$, comme le montre l'exemple suivant :

Soit $k$ un corps non parfait de caractéristique $p$. Prenons $a \in k^*$, $a \notin (k^*)^p$ ; le polynôme $x^p - a$ est irréductible sur $k$, ce qui fait que la courbe $y^2 = x^p - a$ est normale (cf 1. ex.4) sur $k$. Elle ne l'est plus sur $k[b]$ où $b = \sqrt[p]{a}$. Comme $y^2 = (x-b)^p$, $y/x$ satisfait à l'équation $v^2 = (x-b)^{p-2}$ et est entier sur $k[x, y]$ sans y appartenir. $E$ n'est donc pas normale sur $k_1$. Comme une courbe est normale si et seulement si elle est non régulière, on a par la même occasion un exemple de point simple qui devient singulier par extension du corps de base. Le point $(b, 0)$ qui est fermé sur $k$, est simple sur $k$, mais devient singulier sur $k[b]$ (en posant $t^2 = x - b$, $t^p = y$, le corps des fonctions rationnelles de $E$ sur $k_1$ est $k_1(t)$, l'anneau local de $(b, 0)$ est constitué par les fonctions rationnelles dont le développement taylorien autour de $t = 0$ ne contient pas de terme en $t, \ldots, t^{p-2}$; on vérifie alors que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \{c_1 t^2 + c_2 t^p\}$ ) ($p \neq 2$).

## 5. THEOREME PRINCIPAL DE ZARISKI.

Soit $f : U \to V$ un morphisme birationnel entre deux ensembles algébriques. $f$ est un isomorphisme d'un ouvert de $U$ sur un ouvert de $V$. Il induit un isomorphisme de $k(V)$ sur $k(U)$. Mais on ne peut pas affirmer que c'est un isomorphisme de $U$ sur une partie de $V$. Il peut y avoir par exemple des sous-ensembles de $U$ de dimension positive appliqués en un point.

Projetons sur un plan une quadrique à partir d'un de ses points. C'est un morphisme birationnel du complémentaire du centre de projection par rapport à la quadrique dans le plan. Chaque génératrice de la quadrique passant par le centre de projection est appliquée sur un point du plan. Il y a donc une infinité de points de la quadrique appliqués sur le même point du plan.

25

Il se peut aussi qu'il y ait des points de V dont l'image inverse comprenne un nombre fini de points qui est plus grand que un.

Soit f le morphisme d'une droite sur une cubique nodale défini de la manière suivante :

$$f(t) = (t^2 - 1 , \; t(t^2 - 1)).$$

$f^{-1}(0,0)$ comprend deux points, à savoir $\pm 1$.

Il se peut aussi que f soit bijectif sans que $f^{-1}$ ne soit un morphisme.

Soit f le morphisme d'une droite sur une cubique à point de rebroussement, défini de la manière suivante :

$$f(t) = (t^2 , t^3)$$

l'application $f^{-1}$ n'est pas un morphisme au point $P = (0,0)$ car $t \notin \mathcal{O}_P$.

Les deux derniers exemples ne seraient pas possibles si le but du morphisme était un ensemble algébrique normal, comme il résulte du

*Théorème principal de Zariski :*

Soit $f : U \to V$ un morphisme birationnel, où V est un ensemble algébrique normal. Si pour tout $p \in V$, $f^{-1}(p)$ est fini, f est un isomorphisme de U sur un ouvert de V.

On peut exprimer autrement ce théorème, en fixant son attention sur $f^{-1}$

Soit $g : U \to V$ une application birationnelle, U étant une variété normale. Si il n'y a qu'un nombre fini de points correspondant par G au point p de U, il n'y en a qu'un seul et g est définie au point p.

Dans cette deuxième formulation du théorème principal de Zariski, l'hypothèse que g est birationnelle est superflue et il suffit de supposer que le sous-ensemble fermé de V qui correspond à p ait une composante irréductible (sur k(p)) réduite à un point.

*Démonstration :* Séminaire Cartan-Chevalley 1955-56 exp. 10-11. S
S. Lang : Introduction to algebraic Geometry, Chap. V.

6. NORMALISE D'UN ENSEMBLE ALGEBRIQUE IRREDUCTIBLE.

Soit E un ensemble algébrique irréductible. Nous allons construire un ensemble algébrique normal N birationnellement équivalent à E et un morphisme fermé n de N sur E, tels que tout morphisme génériquement surjectif h d'un ensemble algébrique normal U sur E (c'est-à-dire tel que h(U) soit dense dans E) puisse être factorisé en $h = n \circ g$, où g est un morphisme génériquement surjectif de U sur N. De plus l'image inverse d'un point de E ne comprend dans N qu'un nombre fini de points.

Commençons par définir le normalisé lorsque E est un ensemble affin. Soit A son algèbre affine. Sa clôture intégrale A' définit un ensemble affin N. L'injection $A \subset A'$ définit un morphisme n de N sur E de la manière suivante : si $y \in N$, homomorphisme de A' dans K qui par restriction de A définit un point x de E. Le morphisme n est surjectif : soit $x \in E$, $\underline{p}$ l'idéal premier des éléments de A s'annulant en x. Comme A' est entier sur A, il existe un idéal premier $\underline{q}$ de A' tel que $\underline{q} \cap A = \underline{p}$ (cf Zariski-Samuel. Commutative Algebra p. 257). A' étant un module noethérien sur A, A' $\underline{q}$ est un module noethérien sur $A/\underline{p} \subset K$. Puisque $K$ est algébriquement clos, il contient un sous-anneau $B$ isomorphe à $A'/\underline{q}$. L'homomorphisme $A' \to B \subset K$ définit un point $y$ de $N$ se projetant sur $x$.

Soit $F$ le sous-ensemble fermé déterminé dans $E$ par le conducteur $\underline{f}$ de $A$ dans $A'$ et $F'$ celui déterminé par $\underline{f}$ dans $N$. On vérifie facilement $n(F') = F$. D'autre part, d'après la propriété du conducteur $\underline{f}$ rappelée en 1, si l'idéal premier $\underline{p}$ de $A$ ne contient pas $\underline{f}$, il n'y a qu'un seul idéal premier $\underline{q}$ de $A'$ au-dessus de $\underline{p}$ et $A_p = A'_q$. Le morphisme $n$ est donc un isomorphisme de $N - F'$ sur $E - F$, ce qui prouve qu'il est birationnel. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers de $A'$ au-dessus d'un idéal premier de $A$, l'image inverse de chaque point de $E$ est finie. Pour montrer que $n$ est un morphisme fermé, considérons un fermé irréductible $H$ de $N$. Soit $\underline{p}'$ l'idéal premier correspondant de $A'$. L'idéal de l'adhérence de la projection $n(H)$ est $\underline{p} = \underline{p}' \cap A$. Soit $\underline{q}$ l'idéal premier d'un point de cette adhérence. Il suffit de montrer qu'il existe un idéal premier $\underline{q}'$ de $A'$ tel que $\underline{q}' \cap A = \underline{q}$. L'anneau $A'/\underline{p}'$ est entier sur $A/\underline{p}$, dont $\underline{q}/\underline{p}$ est un idéal premier. Il existe donc dans $A'/\underline{p}'$ un idéal premier $\underline{s}'$ tel que $\underline{s}' \cap \overline{(A/\underline{p}} = \underline{q}/\underline{p}$. Soit $\underline{q}'$ l'image inverse de $\underline{s}'$ dans $A'$. C'est un idéal premier qui satisfait aux conditions voulues.

Il nous reste à montrer que le normalisé a la propriété universelle annoncée. Soit $h$ un morphisme génériquement surjectif de $U$ dans $E$. Il suffit de démontrer la propriété pour $U$ affine.

Soit $B$ l'algèbre affine correspondante. Comme $h$ est génériquement surjectif, $A$ peut être identifié à un sous-anneau de $B$, et $k(E)$ à un sous-corps de $k(U)$. $A'$ est contenu dans la clôture intégrale de $A$ dans $k(U)$, donc dans $B$ puisque $B$ est intégralement clos. L'inclusion $A' \subset B$ induit un morphisme génériquement surjectif $g$ de $U \to N$ tel que $h = n \circ g$.

Si $E$ n'est pas affin, on le recouvre par des ouverts affins $E_i$. On construit le normalisé $N_i$ de $E_i$ et l'on obtient l'ensemble $N$ avec les propriétés requises en recollant les $N_i$.

*Exemples :*

1) Soit $E$ la cubique $y^2 = x^3$. $A = k[x,y]$ avec $y^2 = x^3$. En posant $y\ x = t$, $A' = k[t]$ ; $N$ est une droite affine. Le conducteur de $A$ dans $A'$ est l'idéal principal $(t^2)$. le morphisme $n$ est défini par $n(t) = t^2, t^3)$.

2) Soit $E$ la cubique $y^2 = x^2 + x^3$. $A = k[x,y]$ avec $y^2 = x^2 + x^3$. En posant $y|x = t$, $A' = k[t]$ ; $N$ est la droite affine. Le conducteur de $A$ dans $A'$ est l'idéal principal $(t^2 - 1)$. Le morphisme est défini par $n(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)$.

## 7. INTERLUDE.

Etant donnés deux ensembles algébriques, supposons qu'il existe un isomorphisme $g^*$ de $k(F)$ sur $k(E)$. Nous allons construire une application birationnelle $g$ de $E$ sur $F$ qui induit l'isomorphisme $g^*$. Soit $E'$ un ouvert affin non vide de $E$ ayant $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ comme algèbre affine. Si $x_i = g^*(y_i)$ choisissons un ouvert affin $F'$ de $F$ contenu dans l'intersection des domaines de définition des $y_i$. L'algèbre affine de $F'$ est de la forme $B = k[y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_s]$. En posant $x_i = g^*(y_i)$ pour $i > r$, ces $x_i$ appartiennent au corps des fractions de $A$. Ils peuvent dès lors s'écrire sous la forme $x_i = u_i/v_i$ avec

27

$u_i$ et $v_i$ dans A. L'anneau $A'' = A[1/v_{i+1}, \ldots, 1/v_s]$, qui est isomorphe à B, est l'algèbre affine du complémentaire E" des zéros de $v_{r+1}, \ldots, v_s$ dans E'. Comme $g^*$ induit un isomorphisme de B sur A", il définit un isomorphisme g de E" sur F'. Cet isomorphisme peut s'étendre en une application birationnelle g de E sur F.

Une démonstration analogue montre que si une application rationnelle f génériquement surjective de E dans F induit un isomorphisme de k(F) sur k(E), c'est une application birationnelle. Une application rationnelle génériquement surjective est appelée une application quasi-birationnelle si k(E) est une extension purement inséparable de k(F).

Si $f : E \to F$ est une application quasi-birationnelle, il existe des ouverts E' et F' tels que la restriction de f à E' soit une bijection sur F'.

*Démonstration :*

Comme k(E) est purement inséparable sur k(F), il existe une certaine puissance $m = p^s$ de la caractéristique p de k telle que $[k(E)]^m \subset k(F)$ (naturellement $p \neq 0$). Nous pouvons supposer E et F affins et normaux. Soient A et $B = A[x_1, \ldots, x_2]$ les algèbres affines de E et de F. Il existe $y \in A$ tel que les $yx_i$ soient entiers sur A. Posons $A' = A[1/y]$ et $B' = B[1/y]$. Ce sont les algèbres affines des complémentaires dans F et E du lieu des zéros de y. B' et A' sont toujours intégralement clos et B' est entier sur A'. Soit $p \in F'$ (un autre p que la caractéristique ! ). Si $\pi$ est l'homomorphisme correspondant de A' dans K, il existe une et une seule façon de l'étendre en un homomorphisme $\rho$ de B' dans K : il suffit de poser

$$\rho(x_i) = \sqrt[m]{\pi(x_i^m)}$$

Ceci a bien un sens car $x_i^m \in k(F)$ et $x_i^m$ est entier sur A' ; comme A' est intégralement clos $x_i^m \in A'$ et $\pi(x_i^m)$ est défini. D'autre part dans K il y a moyen d'une et d'une seule façon d'extraire la racine m-ième.

*Proposition 2 :*

Soit f une application génériquement surjective de l'ensemble algébrique E dans F. Si k(E) est une extension algébrique séparable de degré n de k(F), il existe un ouvert partout dense V de F pour lequel $f^{-1}(y)$, $y \in V$, contienne exactement n points.

*Démonstration :*

Comme k(E) est séparable de degré n sur k(F), on peut l'obtenir par adjonction à k(F) d'un seul élément x vérifiant une équation de degré n à coefficient dans k(F). On se ramène immédiatement à la situation suivante (voir la démonstration de la proposition 1) : f est un morphisme d'un ensemble affin normal E dans un ensemble affin normal F, x appartient à l'algèbre affine B de E, qui est entière sur l'algèbre A de F ; les coefficients de l'équation minimale de x appartenant à A ; l'algèbre B, qui a même corps de fractions que A[x], en est la clôture intégrale, puisque B est aussi entière sur A[x]. Soit $\underline{c}$ le le conducteur de A[x] dans B. Si $z' \in \underline{c}$ la norme z de $z_1$ sur k(F) appartient à A puisque k(E) est séparable sur k(F) et que A est intégralement clos. En adjoignant 1/2 à A et à B, c'est-à-dire en supprimant les zéros de $z^*$ dans E et F, on se ramène à la situation telle que, outre les conditions précédentes, B = A[x]. Soit

$$x^n + a_1 x^{n-i} + \ldots + a_n = 0$$

l'équation minimale de x, les $a_i$ appartenant à A. Puisque k(E) est séparable sur k(F), le discriminant d de cette équation est non nul (en tant qu'élément de k(F)). Il s'exprime comme polynôme à coefficients entiers en les $a_i$, ce qui fait que d $\in$ A. Soit p un point de F tel que $d(p) \neq 0$. Alors l'équation

$$u^n + a_1(p)\, u^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p)u + a_n = 0$$

a n racines distinctes $u_i$ dans K. Il existe n homomorphismes $\rho_i$ de B dans K prolongeant l'homomorphisme $\pi$ associé au point p, à savoir

$$\rho_i(x) = u_i \qquad \text{et} \qquad \rho_i(a) = \pi(a) = a(p) \quad \text{pour } a \in A.$$

Chacun de ces homomorphismes définit un point de E dont l'image par f est p.

Etant donné une extension algébrique M d'un corps L, il existe entre L et M une plus grande extension purement inséparable N de L. La dimension de M par rapport à N est appelé le degré séparable de l'extension $M|L$. On peut alors résumer les deux propositions précédentes :

Soit $f : E \to F$ une application génériquement surjective, telle que k(E) soit une extension algébrique de k(F). Il existe alors un ouvert V de F tel que si $p \in V$, $f^{-1}(p)$ contienne exactement n points, n étant le degré séparable de k(E) sur k(F).
Cette proposition a une réciproque.

*Proposition 3 :*

Soit f une application génériquement surjective de E dans F, telle que l'image inverse de chaque point soit finie. Alors k(E) est une extension algébrique finie de k(F).

*Démonstration :*

Montrons que si k(E) est transcendant sur k(F), l'image inverse de chaque point d'un ouvert dense de F contient une infinité de points. Soit $u_1, u_2, \dots u_n$ une base de transcendance de k(E) sur k(F). Nous pouvons supposer E et F affins normaux d'algèbres B et A, les $u_i$ appartenant à B. Posons $C = A[u_1, \dots, u_n]$. C'est l'algèbre affine de $F \times k^n = G$.
Les injections

$$A \to C \to B$$

induisent des morphismes génériquement surjectifs

$$E \xrightarrow{g} F \times k^n \xrightarrow{h} F$$

dont le composé est f. Le morphisme h est la projection sur le même facteur de $F \times k^n$. k(E) est une extension algébrique de k(G). Il existe donc un ouvert partout dense U de G tel que tout point de U soit l'image d'au moins un point de E. L'image h(U) contient un ouvert V partout dense dans F puisque h est surjectif. Si $q \in V$, $h^{-1}(q)$ contient un ouvert partout dense de $k^n$ et donc une infinité de points (non nécessairement rationnels). Il en est a fortiori ainsi de $f^{-1}(q)$.

29

*Corollaire :*

Si $f$ est une bijection de $E$ sur $F$, $k(E)$ est purement inséparable sur $k(F)$.
En effet, d'après la proposition précédente, $k(E)$ est une extension algébrique de $k(F)$. Comme $f^{-1}(q)$ ne contient qu'un point, le degré séparable de $k(E)$ sur $k(F)$ est 1.

## 8. NORMALISE D'UN ENSEMBLE ALGEBRIQUE IRREDUCTIBLE DANS UNE EXTENSION ALGEBRIQUE FINIE DU CORPS DES FONCTIONS RATIONNELLES.

Soit $E$ un ensemble algébrique irréductible. Etant donné une extension algébrique finie $L$ du corps $k(E)$ on peut construire le normalisé $F$ de $E$ dans $L$ en généralisant la construction du normalisé ordinaire. On prend un recouvrement par des ouverts affins $E_i$ dont les algèbres affines sont $A_i$. Si $B_i$ est la clôture intégrale de $A_i$ dans $L$, $B_i$ est, d'après une propriété énoncée au 1., une algèbre affine et détermine donc un ensemble affin $F_i$. Par recollement des $F_i$ on obtient l'ensemble irréductible $F$. Celui-ci jouit de propriétés analogues à celles du normalisé ordinaire de $E$:

Il existe un morphisme fermé $r$ (qui est même propre cf. Bourbaki Topologie générale, Chap. I, 3e éd. § 9) de $F$ sur $E$ tel que l'image inverse de chaque point soit finie et jouissant de la propriété universelle suivante : Si $U$ est un ensemble algébrique normal et si $g : U \to E$ est un morphisme génériquement surjectif tel que l'extension $k(U) : k(E)$ contienne une extension isomorphe à $L$, il existe un morphisme $h$ génériquement surjectif de $U$ dans $F$ tel que $g = r \circ h$. Si on suppose en plus $E$ normal, le nombre de points de $F$ au-dessus de chaque point de $E$ est au plus $n_s$, le degré séparable de $L$ sur $k(E)$ ; ce nombre est atteint pour tous les points d'un ouvert de $E$.

Le fait que lorsque $E$ est normal $f^{-1}(q)$ contient au plus $n_s$ éléments est conséquence du fait que pour tous les ouverts affins $E_i$, les anneaux $A_i$ sont intégralement clos. Supposons d'abord $L$ normal sur $k(E)$. On peut alors appliquer un théorème d'algèbre commutative (Zariski-Samuel I p. 289) : Soit $\underline{p}$ un idéal premier d'un anneau intégralement clos $A$. Si $L$ est une extension algébrique normale du corps et $B$ la clôture intégrale de $A$ dans $L$, les idéaux premiers $P_i$ de $B$ tels que $\underline{P_i} \cap A = \underline{p}$ sont les conjugués de l'un d'entre eux par les automorphismes de $L$ sur $k(E)$. Le nombre de ces automorphismes est $n_s$.
Si $L$ n'est pas une extension normale de $k(E)$, soit $N$ une telle extension contenant $L$. Notons $H$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de $N$ qui laissent $L$ invariant. Deux extensions $\underline{P}'$ et $\underline{P}''$ de $\underline{p}$ à la clôture intégrale de $A$ dans $N$ induisent le même idéal premier de $B$ lorsque $p''$ se déduit de $p'$ par un automorphisme de $H$. Comme toute extension de $\underline{p}$ à $B$ provient d'une extension de $\underline{p}$ à la clôture intégrale de $A$ dans $N$, on voit qu'on obtient toutes ces extensions comme conjugués de l'une d'entre elles par les classes à gauche de $G$ modulo $H$, $G$ étant le groupe des automorphismes de $N$ laissant $k(E)$ fixe. L'index de $H$ dans $G$ étant $n_s$, ceci démontre la propriété dans le cas général.

Montrons maintenant la propriété universelle de la normalisée. Soit $h^*$ un isomorphisme de $k(F)$ sur un sous-groupe de $k(U)$ contenant $g^* k(E)$. Comme au début de 7, cet isomorphisme définit une application rationnelle h de U dans F, qui factorise g : g = roh en effet l'isomorphisme $h^*$ par hypothèse prolonge l'isomorphisme $g^*$. Comme g est un morphisme, les points de F correspondant à un x de U appartiennent à $r^{-1}(f(x))$ et sont donc en nombre fini. Puisque U est normale, on peut appliquer le théorème principal de Zariski sous sa 2e forme et en conclure que g est un morphisme.

Lorsque k(F) est isomorphe à k(U), le morphisme h est birationnel. A ce moment, il n'y aura en général qu'un nombre fini de points de u au-dessus de chaque point de E. Soit U' un ouvert de U tel que $g^{-1}(g(x))$ soit fini pour tout $x \in U'$. L'image inverse d'un point de F dans U par h est fini. En appliquant le théorème principal de Zariski sous sa première forme on conclut que h est un isomorphisme de U' sur un ouvert de F. Nous pouvons déduire de ceci, en tenant compte des propositions de la section précédente :

*Proposition :*

Soit f une application génériquement surjective de U dans E ; dim U = dim E. Il existe alors des ouverts non vides $U_1$ et $E_1$ de U et de E tels que la restriction de f à $U_1$ soit un morphisme de $U_1$ sur $E_1$ et que l'image inverse d'un point de $E_1$ ait toujours le même nombre fini d'éléments, égal au degré séparable de k(U) sur k(E).

9. ENSEMBLES ALGEBRIQUES COMPLETS.

Sur le corps des nombres complexes et avec la topologie ordinaire, les variétés projectives ont sur les variétés affines le grand avantage d'être compactes. Cette distinction se perd dans la topologie de Zariski. Pour trouver une classe d'ensembles algébriques analogues aux variétés analytiques complexes compactes, on s'inspire d'une autre propriété des espaces compacts séparés : l'image d'un compact par une application continue est un compact, donc un fermé. Si f applique la compact C dans V, le graphe G de f est fermé dans $C \times V$. La projection de G dans V est fermée, car elle est égale à f(C). Plus généralement on montre que la projection de tout fermé de $C \times V$ dans V est fermée (i.e. cette projection est une application fermée). Cette propriété caractérise les espaces compacts : Soit C un espace topologique séparé. C est un espace compact si et seulement si pour tout espace topologique V, la projection de $C \times V$ sur V est une application fermée.(Voir Bourbaki, Topologie, Chap I (3e édition) corollaire 1 p. 119)).

*Définition :*

Un ensemble algébrique E est complet, si pour tout ensemble algébrique T, la projection p de $E \times T$ sur T est fermée (c'est-à-dire que si F est un fermé de $E \times T$, p(F) est fermé dans V.

Il est à remarquer que, comme la topologie de Zariski de $U \times T$ est plus fine que la topologie produit, la propriété d'être complet n'est plus équivalente à la compacité.

1. L'image d'un ensemble algébrique complet par un morphisme est un sous-ensemble fermé et complet du but.
Cela découle immédiatement du fait que le graphe d'un morphisme est fermé.

2. Tout fermé d'un ensemble algébrique complet est complet, en particulier ses composantes irréductibles. Réciproquement, si les composantes irréductibles d'un ensemble algébrique sont complètes, l'ensemble algébrique l'est aussi.

31

3. Toute fonction rationnelle régulière sur un ensemble algébrique absolument irréductible et complet est constante.

Si $f$ est une fonction régulière sur $E$, elle définit un morphisme de $E$ dans la droite projective. L'image en $V$ est un fermé évitant le point $\infty$. Elle ne comprend donc qu'un nombre fini de points. L'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe. Comme $f(E)$ reste connexe sur la clôture algébrique de $k$, ceci ne peut se passer que si $f(E)$ est réduit à un point.

4. Plus généralement tout morphisme d'un ensemble algébrique irréductible et complet dans un ensemble affin est constant.
En effet un tel morphisme est défini par un nombre fini de fonctions rationnelles régulières.

5. Le produit de deux ensembles algébriques complets est complet.
La projection de $E' \times E'' \times T$ sur $t$ peut être factorisée en

$$E' \times E'' \times T \rightarrow E'' \times T \rightarrow T$$

Lorsque $E'$ et $E''$ sont complètes, ces deux projections sont fermées, donc aussi leur composée.

6. La droite projective $D$ est complète.

Soit $F$ un fermé de $D \times T$. On peut supposer $F$ irréductible et $p(F)$ dense dans $T$. Soit $y \in T$ ; remplaçons $T$ par un voisinage affin $U$ de $y$. Il suffit de démontrer que, si $G = F \cap p^{-1}(U)$, il existe un point de $G$ de la forme $(z, y)$. Soit $x$ une coordonnée sur $D$ : $k(D) = k(x)$. Supposons que $(\infty, y)$ n'appartienne pas $G$. Si $A$ est l'algèbre affine de $U$, le point $y$ définit un homomorphisme $h$ de $A$ dans $K$. Comme $p(G)$ est dense dans $U$, $A$ peut être identifié à un sous-anneau de $k(G)$. Notons $u$ l'élément de $k(G)$ induit par la coordonnée $x$ sur $D$. L'annequ $A[u]$ est l'algèbre affine du sous-ensemble de $G$ qui se projette sur $D - \{\infty\}$. Construire un point de $G$ au-dessus de $y$ différent de $(\infty, y)$ revient à étendre l'homomorphisme $h$ en un homomorphisme $H$ de $A[u]$ dans $K$. On ne peut étendre $h$ en $h'$ appliquant $A[1/u]$ dans $K$ et $1/u$ sur $0$, cet homomorphisme correspondant au point $(\infty, y)$, que l'on a supposé ne pas appartenir à $G$. Ceci veut dire que $u$ est entier sur $A$ (cf. § 2 proposition 2 Soit

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

l'équation de dépendance intégrale de $u$ sur $A$. Posons $b_i = h(a_i)$ et choisissons dans $K$ une racine $z$ de l'équation

$$v^n + b_1 v^{n-1} + \dots + b_n = 0.$$

On peut prolonger $h$ en un homomorphisme $H$ en posant $H(u) = z$. Cet homomorphisme correspond au point $(z, y)$ qui appartient à $G$.

7. On montre de manière analogue que l'espace projectif est complet, de même que tout sous-ensemble fermé de celui-ci.

8. Soit $C$ une courbe affine non singulière. On peut la compléter par la courbe projective $C'$ correspondante ; on peut supposer $C'$ non singulière en passant éventuellement à sa normalisée. C'est la seule manière de compléter $C$ en une courbe non-singulière. En effet si $C''$ est une courbe complète non-singulière contenant un ouvert partout dense isomorphe à $C$, il existe une application birationnelle $f$ de $C''$ sur $C'$ appliquant $C$ considéré comme ouvert de $C''$ sur $C$ considéré comme ouvert de $C'$.

L'ensemble des points où $f$ n'est pas définie est un fermé nulle part dense, donc un ensemble fini. Les courbes $C''$ et $C'$ étant normales, on peut appliquer le théorème principal de Zariski : Il en résulte que $f$ est un isomorphisme de $C''$ sur un ouvert de $C'$. Comme $C''$ est complète, $f(C'')$ est fermé dans $C'$ et $f(C'') = C'$. On peut donc parler de la complétée d'une courbe. (Pour les ensembles de dimension supérieure ce n'est plus vrai ; d'une part il peut y avoir beaucoup de complétés : par ex. : le plan projectif ou le produit de deux droites projectives sont des complétés du plan affin ; d'autre part on ne sait pas si tout ensemble algébrique est un ouvert d'un ensemble complet). Nous pouvons maintenant justifier en un certain sens le terme de complet.

Etant donné un morphisme $g$ d'une courbe non singulière $C$ dans un ensemble algébrique complet $E$, il existe un morphisme $g'$ dans $E$ de la complétée $C'$ de $C$ qui est une extension de $g$.

En effet, soit $F$ l'adhérence du graphe de $g$ dans $C' \times E$. Sa projection sur $C'$ est fermée, donc $C'$ toute entière. On voit facilement en employant le théorème principal de Zariski et l'unicité de la complétion d'une courbe que $F$ est le graphe d'un morphisme de $C'$ dans $E$ prolongeant $g$. Cette propriété caractérise d'ailleurs les ensembles algébriques complets. C'est une propriété analogue que A. Weil emploie pour définir les variétés complètes.

8. Signalons finalement que J.P. Serre a démontré qu'un ensemble algébrique défini sur le corps des nombres complexes est complet si et seulement si en tant qu'espace analytique complexe il est compact (Annales Institut Fourier <u>6</u> (1955-56) pp. 1-42).

10. LEMME DE CHOW.

Il existe des ensembles algébriques complets qui ne sont pas projectifs. D'autre part, on ne sait pas si tout ensemble algébrique est un ouvert d'un ensemble algébrique complet. Aussi le lemme suivant est-il souvent le bienvenu.

*Lemme de Chow.*

Soit $E$ un ensemble algébrique. Il existe un sous-ensemble fermé $W$ d'un espace projectif ou d'un produit de droites projectives et un morphisme birationnel $f$ d'un ouvert $U$ de $W$, dense dans celui-ci, sur $E$. Le graphe de $f$ est fermé dans $W \times E$. Si $E$ est complet, $U = W$.

*Démonstration :*

Comme un produit de droites projectives peut être plongé dans l'espace projectif, il suffit de le démontrer pour le cas du produit de droites projectices. Le lemme est vrai pour un ensemble affin. Un tel ensemble est isomorphe à un fermé $U$ d'un espace affin de dimension $n$, qui est de manière évidente un ouvert du produit de $n$ droites projectives. Si $W$ est l'adhérence de $U$ dans ce produit, $U$ est un ouvert de $W$ et $f$ est un isomorphisme de $U$ sur $E$. On vérifie facilement que le graphe de $f$ est fermé dans $W \times E$.

Nous allons démontrer le cas général par récurrence sur le nombre d'ouverts d'un recouvrement de $E$ par des ouverts affins. Soit $E = E' \cup E''$, où $E'$ et $E''$ est recouvert par $n-1$ ouverts affins de $E$ et $E''$ est un ouvert affin. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe $W'$, $W''$, $U'$, $U''$ et $f' : U' \to E'$, $f'' : U'' \to E''$ avec les propriétés requises. Posons $X = E' \cap E''$, $Y = W' \times W''$.

$W'$ contient un ouvert $X'$ isomorphe à $X$, $W''$ un ouvert $X''$. Notons $D$ la « diagonale » de $X' \times X''$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x', x'')$ de $X' \times X''$ tels que $f'(x') = f''(x'')$,

et $W$ l'adhérence de $D$ dans $Y$. $W$ est un sous-ensemble fermé d'un produit de droites projectives. Soit $U = V' \cup V''$ où $V' = (U' \times W'') \cap W$ et $V'' = (W' \times U'') \cap W$. Les ensembles $V'$ et $V''$ sont ouverts dans $W$, donc $U$ aussi. Définissons $f(z) = f'p'(z)$ lorsque $z \in V'$ et $f(z) = f''p''(z)$ lorsque $z \in V''$ ($p'$ et $p''$ sont les projections de $W' \times W''$ sur les premier et second facteurs). L'application $f$ est bien définie : si $z \in V' \cap V''$, $z$ se trouve dans $(X' \times X'') \cap W = D$ ; c'est-à-dire que $z = (x', x'')$ avec $f'(x') = f''(x'')$. D'après la définition de $f$, on a alors $f(z) = f'p'(z) = f'(x')$ et $f(z) = f''p''(z) = f''(x'')$ ; les deux expressions coïncident.
Il est immédiat que $f$ est un morphisme. Montrons que le graphe $G$ de $f$ est fermé dans $W \times E$. Par induction le graphe $G_1$ de $f'$ est fermé dans $W' \times E$ et celui de $f''$ est fermé dans $W'' \times E$. Soit $y$ un point de l'adhérence de $G$ dans $W \times E$. Supposons que sa projection sur $E$ appartienne à $E'$. Posons $G' = G \cap (W \times E')$ et $G'_1 = G_1 \cap (W \times E')$.
Si $p'$ est la projection de $W' \times W'' \times E'$ sur $W' \times E'$, $p'(G')$ est contenu dans $G'_1$ puisque $p'$ est un morphisme. Donc $p'(y)$ appartient à l'adhérence de $G'_1$ dans $W' \times E'$, c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse de récurrence, à $G'_1$ lui-même. Le point $p'(y)$ est alors de la forme $(u', v)$, avec $u \in U'$, $v \in E'$ et $v = f'(u')$, et $y = (u', u'', v)$ où $u'' \in W''$. Ceci veut dire que $y$ appartient à $V' \times E'$ et donc à $G'$, puisque $G$ est fermé dans $U \times E$ et $G'$ l'est dans $V' \times E'$.

Lorsque $E$ est complet, comme le graphe $G$ de $f$ est fermé dans $W \times E$, sa projection sur $W$ est fermée. Elle est d'autre part dense dans $W$, puisque c'est le domaine de définition $U$ de $f$. Celui-ci coïncide donc avec $W$.

On peut perfectionner le lemme de Chow en supposant que $W$ est normale (passer éventuellement à la normalisée qui est aussi plongeable dans un espace projectif) et que les sous-variétés exceptionnelles de $f$ (celles correspondant aux points où $f^{-1}$ n'est pas déterminée) soient toutes de codimension 1.

*Proposition :*

Soit $f$ une application d'un ensemble algébrique normal $E$ dans un ensemble algébrique complet $F$. Les points où $f$ n'est pas définie forment un ensemble fermé de codimension au moins égale à deux.

*Démonstration :*

La propriété a déjà été démontrée lorsque $F$ est une droite projective (3, prop. 4). Si $F$ est le produit de $s$ droites projectives, $f$ est définie par $s$ fonctions $f_i$ à valeur dans chacun des facteurs. L'ensemble d'indétermination de $f$ est formé de la réunion des points où une des $f_i$ n'est pas définie. Comme une réunion finie d'ensembles de codimension au moins égale à deux est encore de codimension au moins égale à deux, la proposition est encore vraie dans ce cas ci. Dans le cas général, il suffit de supposer $f$ génériquement surjective. Il existe alors un sous-ensemble algébrique fermé $V$ d'un produit de droites projectives et un morphisme birationnel $g$ de $V$ sur $F$. L'application rationnelle $f$ de $E$ dans $F$ se factorise en $f = g h$ où $h : E \to F$, est défini par $h = g^{-1} \circ f$ (ce composé a un sens). Comme $g$ est un morphisme, l'ensemble d'indétermination de $f$ est contenu dans celui de $h$. On peut considérer $h$ comme une application de $E$ dans un produit de droites projectives. Puisque $V$ est fermé dans ce produit, les points d'indétermination de $h$ sont les mêmes pour les deux points de vue. La proposition étant vraie pour $h$, elle l'est a fortiori pour $f$.

# Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig




See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

# Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.