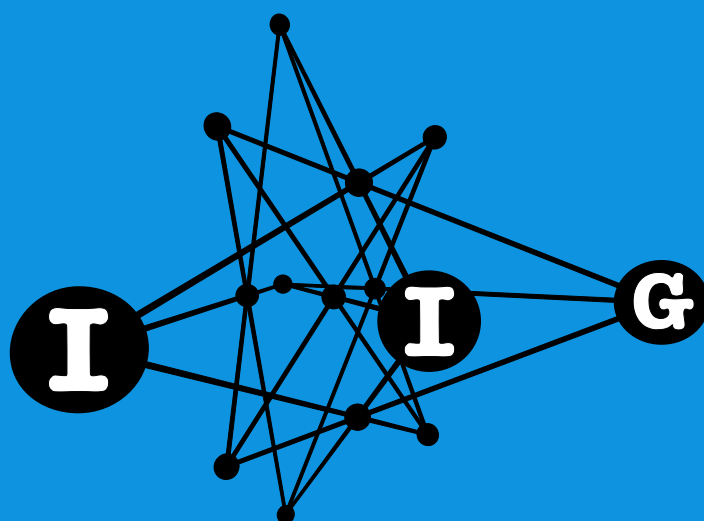


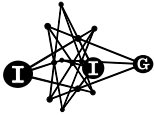
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Algèbres de Lie semi-simples et systèmes de racines

Jacques Tits, Firmin Bratslavski and Guy Valette



Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
[dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.487](https://doi.org/10.2140/iig.2018.16.487)



Algèbres de Lie semi-simples et systèmes de racines

Jacques Tits, Firmin Bratslavski and Guy Valette

[B5] Notes of the seminar *Algèbres de Lie semi-simples et systèmes de racines*,
Université Libre de Bruxelles (Brussels, 1963–64). Reused with permission.

**UNIVERSITE LIBRE
DE BRUXELLES**

**FACULTE DES SCIENCES
INSTITUT DE MATHÉMATIQUE**

**CENTRE BELGE
D'ALGÈBRE ET
DE TOPOLOGIE**

**ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES
ET
SYSTÈMES DE RACINES**

**Jacques TITS
F. BRATSLAVSKI
G. VALETTE**

1963 - 64

TABLE DES MATIERES

1. Généralités (F. Bratslavski)	1
2. Algèbres résolubles	5
3. Algèbres nilpotentes	9
4. Forme de Killing et algèbres semi-simples (G. Valette)	13
5. Racines et groupes engendrés par des réflexions (J. Tits)	25
6. Bases de Chevalley	45

I. G E N E R A L I T E S

=====

1. ALGÈBRES DE LIE

- 1.1. Rappelons qu'une algèbre sur un corps commutatif K , est un espace vectoriel V , sur K , muni d'une application bilinéaire $(x,y) \rightarrow x.y$ de $V \times V$ dans V .
- 1.2. Si la loi produit satisfait à la condition $x(yz) = (xy)z$ pour tout x,y,z appartenant à V , on dit que l'algèbre est associative.
- 1.3. Si la loi produit satisfait aux deux conditions :

$$\begin{aligned} x.x &= 0 \\ x(yz) + y(zx) + z(xy) &= 0 \end{aligned}$$

quels que soient x, y, z appartenant à V , on dit que l'algèbre est une algèbre de Lie.

Beaucoup d'algèbres de Lie étant construites à partir d'algèbres associatives, on note en général le produit dans les algèbres de Lie par le crochet $[x,y]$.

Les conditions précédentes s'écriront donc :

- (1) $[x, x] = 0$
- (2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi)

Il est immédiat que la condition (1) implique que $[x,y]$ est une fonction bilinéaire alternée de x,y : on a $[x,y] = -[y,x]$ de sorte que l'identité de Jacobi peut encore s'écrire :

$$(3) \quad [x, [y, z]] = [[x, y]z] + [y, [x, z]]$$

1.4. Exemples

- a) Soit U une algèbre associative sur K . Pour tout x,y appartenant à U , l'expression $[x,y] = xy - yx$ est une fonction bilinéaire de x et y .

Il est facile de vérifier que le vectoriel U , muni de cette

2.

loi de multiplication, érige U en une algèbre de Lie sur K .

b) Si en particulier, on choisit dans l'exemple précédent, $U =$ l'algèbre associative des endomorphismes d'un espace vectoriel V , notée $\mathcal{L}(V, V)$, on obtient ce qu'on appelle l'algèbre de Lie des endomorphismes de V , que l'on note $\mathfrak{gl}(V)$.

1.5. On dit qu'une algèbre de Lie \mathcal{L} est commutative si pour tout couple d'éléments x, y de \mathcal{L} : $[x, y] = 0$

1.6. Idéaux

On appelle idéal d'une algèbre de Lie \mathcal{L} , tout sous-espace vectoriel S de \mathcal{L} tel que $[S, \mathcal{L}] \subset S$

2. GROUPES ANALYTIQUES ET ALGÈBRES DE LIE

2.1. Groupes analytiques

Rappelons qu'on entend par groupe analytique (réel ou complexe) un ensemble muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété analytique, telles que l'application de $G \times G \longrightarrow G$:

$$(x, y) \longrightarrow xy \text{ soit analytique.}$$

Soit x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) un système de coordonnées analytiques dans un voisinage V de e , la dernière condition revient à dire que les fonctions f^i définissant le produit de deux éléments du groupe: $(xy)^i = f^i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sont des fonctions analytiques de leurs arguments.

2.2. Algèbre de Lie $\mathcal{A}(G)$ d'un groupe analytique G

Etant donné un groupe analytique, la théorie de Lie permet de munir l'espace vectoriel tangent en l'élément neutre de la variété du groupe d'une structure d'algèbre de Lie, à partir de laquelle le groupe peut être reconstruit localement.

Les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ c'est-à-dire les points de l'espace vectoriel tangent, sont appelés les éléments dérivés du groupe.

D'autre part, il existe une application, appelée \exp . de

3.

$\mathcal{A}(G)$ G qui possède les propriétés suivantes (et d'ailleurs définie par ces propriétés)

$$\forall x \in \mathcal{A}(G) \quad \exp(tx + t'x) = \exp(tx) \cdot \exp(t'x)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \exp(tx) \right)_{t=0} = x$$

Pour tout $x \in \mathcal{A}(G)$, $\exp(tx)$ est un sous-groupe à un paramètre de G .

Plus généralement, pour toute sous-algèbre W , $\exp(W)$ engendre un sous-groupe analytique dont W est l'algèbre de Lie.

Si G est connexe, W est un idéal $\iff \exp(W)$ engendre un sous-groupe invariant.

Un exemple de groupe analytique, est le groupe $GL(V)$ des automorphismes d'un espace vectoriel V (de dimension finie). On montre que son algèbre de Lie est l'algèbre $gl(V)$ des endomorphismes de V .

3 DERIVATIONS

3.1. On appelle dérivation d'une algèbre de Lie \mathcal{L} toute application linéaire D de $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, satisfaisant à la condition :

$$D [x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$$

pour tout x, y appartenant à \mathcal{L} .

On vérifie immédiatement que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ des dérivations d'une algèbre de Lie \mathcal{L} , est une sous-algèbre de $gl(\mathcal{L})$. On l'appelle l'algèbre de Lie des dérivations de \mathcal{L} .

3.2. Tout élément x de \mathcal{L} définit une application linéaire de $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$: $y \longrightarrow [xy]$. Cette application s'appelle l'application linéaire adjointe de x et se désigne par $ad(x)$.

3.3. Proposition 1

Soit \mathcal{L} une algèbre de Lie.

a) Pour tout élément x de \mathcal{L} , $ad(x)$ est une dérivation de \mathcal{L} (appelée dérivation intérieure).

4.

- b) L'application de $\mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{L}) : x \rightarrow \text{ad}(x)$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{L} dans l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$ des dérivations.
- c) L'ensemble $\text{ad}(\mathfrak{L})$ des dérivations intérieures de \mathfrak{L} est un idéal de $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$.

3.4. Lien entre les dérivations et les automorphismes d'une algèbre de Lie \mathfrak{L}

On montre que tout élément dérivé du groupe $\text{Aut}(\mathfrak{L})$ des automorphismes de \mathfrak{L} est une dérivation de \mathfrak{L} et que réciproquement, pour toute dérivation $D \in \mathcal{D}(\mathfrak{L})$, $\exp(D)$ est un automorphisme de \mathfrak{L} .

En d'autres termes, $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$ est l'algèbre de Lie du groupe $\text{Aut}(\mathfrak{L})$ des automorphismes de \mathfrak{L} .

De même $\text{ad}(\mathfrak{L})$ est l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes intérieurs de \mathfrak{L} .

4. REPRESENTATIONS LINEAIRES

4.1. Définitions

Soient \mathfrak{L} une algèbre de Lie sur K et V un espace vectoriel sur le même corps K . On appelle représentation linéaire de \mathfrak{L} dans V , tout homomorphisme de \mathfrak{L} dans l'algèbre de Lie $\text{gl}(V)$.

Une représentation est dite fidèle, si elle est injective.

La représentation $x \rightarrow \text{adx}$ de \mathfrak{L} dans \mathfrak{L} est appelée "représentation adjointe" de \mathfrak{L} .

4.2. Lien avec les représentations des groupes analytiques

Rappelons qu'on appelle représentation linéaire d'un groupe analytique G , tout homomorphisme analytique de G dans le groupe analytique $\text{GL}(V)$ des automorphismes d'un espace vectoriel V .

Tout groupe analytique G a une représentation linéaire particulière, définie de la manière suivante: tout élément $g \in G$ définit un automorphisme intérieur \bar{g} de $G : x \rightarrow g^{-1}xg$. Cet automorphisme intérieur induit un automorphisme \bar{g} dans l'algèbre de Lie $\wedge(G)$ de G . On montre que l'application $h : G \rightarrow \text{Aut}(\wedge(G)) : g \rightarrow \bar{g}$

5.

est un homomorphisme analytique; c'est ce qu'on appelle la représentation adjointe du groupe.

Nous savons par ailleurs que tout homomorphisme analytique de groupes induit un homomorphisme entre les algèbres correspondantes; ainsi l'homomorphisme h ci-dessus définit-il un homomorphisme ρ de l'algèbre de Lie $\wedge(G)$ de G , dans l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(\wedge(G))$ du groupe de Lie $\text{Aut}(\wedge(G))$ des automorphismes de l'algèbre $\wedge(G)$; ceci donne donc une représentation linéaire de l'algèbre $\wedge(G)$ qui n'est autre que la représentation adjointe.

II. ALGÈBRES RESOLUBLES

=====

5. IDEAL CARACTERISTIQUE

Un idéal d'une algèbre de Lie \mathcal{L} , est un sous-espace vectoriel de \mathcal{L} , stable pour les dérivations intérieures de \mathcal{L} .

On appelle idéal caractéristique de \mathcal{L} , un sous-vectoriel stable pour toute dérivation de \mathcal{L} .

Proposition 2 Soient \mathcal{L} une algèbre de Lie et S un idéal (resp. un idéal caractéristique) de \mathcal{L} . Si T est un idéal caractéristique de S , alors T est un idéal (resp. un idéal caractéristique) de \mathcal{L} .

Proposition 3 Si S et T sont des idéaux (resp. des idéaux caractéristiques) de \mathcal{L} , alors:

$[S, T] = \left\{ [s, t] \mid s \in S \text{ et } t \in T \right\}$ est un idéal (resp. un idéal caractéristique) de \mathcal{L} .

6. SERIE DERIVEE

L'idéal caractéristique $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ est appelé idéal dérivé de l'algèbre \mathcal{L} et est noté \mathcal{L}' .

On appelle série dérivée la suite décroissante d'idéaux carac-

6.

téristique de \mathcal{L} : $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}, \mathcal{L}', \dots, \mathcal{L}^{(i)} \dots$ où $\mathcal{L}^{(i+1)}$ représente l'idéal dérivé de $\mathcal{L}^{(i)}$:

$$\mathcal{L}^{(i+1)} = [\mathcal{L}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)}]$$

7. ALGÈBRES DE LIE RESOLUBLES

On dit qu'une algèbre de Lie \mathcal{L} est résoluble, s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathcal{L}^{(n)} = \{0\}$.

Soient \mathcal{L} une algèbre de Lie résoluble, $\neq \{0\}$ et n le plus petit entier tel que $\mathcal{L}^{(n)} = \{0\}$. Dès lors $\mathcal{L}^{(n-1)}$ est un idéal commutatif non nul de \mathcal{L} et, par conséquent, \mathcal{L} n'est pas semi-simple. (cf. IV.10)

Il est immédiat que toute sous-algèbre d'une algèbre de Lie résoluble, est une algèbre résoluble.

Proposition 4 Une algèbre de Lie est résoluble si et seulement si pour tout idéal $H \neq \{0\}$ de \mathcal{L} , il existe un idéal H_1 de H , de codimension 1.

DEM Si \mathcal{L} est résoluble, tout idéal $H \neq \{0\}$ de \mathcal{L} est également résoluble, ce qui implique: $H' \neq H$.

Dès lors, il existe au moins un sous-espace H_1 de H de codimension 1, contenant H' . Il est clair que ce sous-espace est un idéal de H .

Réciproquement, si pour tout idéal $H \neq \{0\}$ de \mathcal{L} , il existe un idéal H_1 de H , de codimension 1 cela revient à dire qu'il existe une suite décroissante: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \dots \supset \mathcal{L}_{n-1} \supset \mathcal{L}_n = \{0\}$ de sous-algèbres de \mathcal{L} telles que \mathcal{L}_{i+1} soit un idéal de codimension 1 de \mathcal{L}_i .

Comme pour tout indice i , $\mathcal{L}'_i \subset \mathcal{L}_{i+1}$, on établit facilement (par induction) que $\mathcal{L}^{(i)} \subset \mathcal{L}_i$ et donc que \mathcal{L} est résoluble.

7.1. Théorème (Lie)

Soient \mathcal{L} une algèbre de Lie résoluble sur un corps commutatif K , de caractéristique 0, $V \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie sur \tilde{K} , la fermeture algébrique de K . Dès lors, pour

7.

toute représentation ρ de $\mathfrak{L} \rightarrow V$, il existe un $0 \neq v \in V$ qui soit vecteur propre commun à tous les membres de $\rho(\mathfrak{L})$.

DEM. Nous démontrerons le théorème par induction sur $\dim \mathfrak{L}$. Si $\dim \mathfrak{L} = 1$ le théorème est trivial.

Supposons la proposition vraie pour toutes les algèbres de Lie résolubles de $\dim. < \dim. \mathfrak{L}$.

Soit S un idéal de \mathfrak{L} de codimension 1; nous savons qu'un tel idéal existe puisque \mathfrak{L} est résoluble; de plus, S étant résoluble satisfait aux conditions du théorème. Il existe donc un vecteur $0 \neq e_0 \in V$ et une fonction linéaire $f : S \rightarrow \tilde{K}$ tels que pour tout élément s de S : $\rho(s).e_0 = f(s) e_0$.

Soit x un élément de \mathfrak{L} , n'appartenant pas à S et posons:

$$e_1 = \rho(x).e_0 \qquad e_p = \rho(x)^p . e_0$$

L'espace W engendré par tous ces e_p est l'espace cyclique (par rapport à $\rho(x)$) engendré par le vecteur e_0 ; c'est un espace de dimensions finie, invariant pour $\rho(x)$.

$\rho(x)$ possède donc un vecteur propre $0 \neq v \in W$.

Nous allons montrer que v est un vecteur propre, commun à tous les membres de $\rho(\mathfrak{L})$.

A. Pour tout indice p , et tout élément $s \in S$:

$$\rho(s)e_p \equiv f(s) e_p \text{ modulo } (e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$$

La proposition étant vérifiée pour $p = 0$, supposons-la établie pour p , dès lors:

$$\begin{aligned} \rho(s) e_{p+1} &= \rho(s)\rho(x) e_p \\ &= \rho([s, x])e_p + \rho(x)\rho(s)e_p \\ &\equiv f([s, x]).e_p + f(s).\rho(x)e_p \\ &\quad \text{mod. } (e_0, \dots, e_{p-1}, \rho(x)e_0, \dots, \rho(x)e_{p-1}) \\ &\equiv f(s).e_{p+1} \qquad \text{mod. } (e_0, \dots, e_p) \end{aligned}$$

Conséquences :

1°. W est invariant pour $\rho(\mathcal{L})$, puisque quel que soit $y \in \mathcal{L}$
 $y = \alpha x + \beta s$ avec $\alpha, \beta \in K$ et $s \in \mathcal{S}$

2°. $T_r \rho(s) = f(s) \cdot \dim. W$
 d'où en particulier $T_r \rho([x, s]) = f([x, s]) \cdot \dim. W = 0$
 c'est-à-dire $f([x, s]) = 0$.

Cette dernière remarque nous permet d'établir d'une manière analogue le :

B. Pour tout indice p , et tout élément $s \in \mathcal{S}$

$$\rho(s)e_p = f(s) \cdot e_p$$

Mais dès lors, pour tout élément $s \in \mathcal{S}$

$$\rho(s)v = f(s) \cdot v \text{ et pour tout élément } y \in \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} \rho(y)v &= \rho(\alpha x + \beta s)v = \alpha \rho(x)v + \beta \rho(s)v \\ &= [\alpha f(x) + \beta f(s)] \cdot v \quad \text{ce qui} \end{aligned}$$

démontre le théorème.

Corollaire

Soient \mathcal{L} une algèbre de Lie résoluble sur K et ρ une représentation de \mathcal{L} sur un espace vectoriel de dimension finie $V \neq \{0\}$ sur K . Il est alors possible de trouver une base e_1, \dots, e_n de V telle que tous les endomorphismes de V , appartenant à $\rho(\mathcal{L})$, s'expriment par des matrices triangulaires.

DEM. D'après le théorème précédent, nous savons qu'il est possible de trouver un vecteur propre $e_1 \neq 0$ commun à tous les membres de $\rho(\mathcal{L})$. Désignons par E_1 le sous-espace de V , engendré par e_1 . E_1 étant invariant pour $\rho(\mathcal{L})$, la représentation ρ induira une représentation ρ_1 sur l'espace quotient V/E_1 . Si $\dim. V/E_1 \neq 0$ on pourra trouver un vecteur $0 \neq e_2 \in V$ tel que $e_2 + E_1 \in V/E_1$ soit un vecteur propre commun à tous les membres de $\rho_1(\mathcal{L})$. En répétant un nombre fini de fois ce procédé, on finira par trouver une base e_1, \dots, e_n de V telle que pour tout $x \in \mathcal{L}$.

$$\rho(x)e_i \equiv 0 \pmod{(e_1, \dots, e_i)}$$

Ceci exprime que la matrice de $\rho(x)$, par rapport à la base e_1, \dots, e_n est triangulaire.

9.

III. ALGÈBRES NILPOTENTES

=====

8. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Un endomorphisme N d'un espace vectoriel est dit nilpotent, si pour certain entier $k > 0$, $N^k = 0$.

Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme nilpotent N et $e \neq 0$ un vecteur propre, il vient $Ne = \lambda e$ et pour tout entier $i > 0$ $N^i e = \lambda^i e$; en particulier si k est le plus petit entier tel que $N^k = 0$, on aura $\lambda^k e = 0$, ce qui implique $\lambda = 0$.

Il en résulte que tout endomorphisme nilpotent admet comme seule valeur propre 0 .

Proposition 5

Un endomorphisme N d'un espace vectoriel V est nilpotent si et seulement si il peut s'exprimer par une matrice triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

DEM. Soit N un endomorphisme nilpotent. Dès lors, il existe certainement un vecteur $0 \neq e_1 \in V$ tel que $Ne_1 = 0$.

Il suffit par exemple de prendre pour e_1 , l'un des vecteurs non nuls, parmi les vecteurs non tous nuls $N^{k-1}e$ ($0 \neq e \in V$).

Si E_1 désigne le sous-espace vectoriel à une dimension, engendré par e_1 , N induira un endomorphisme N_1 dans l'espace quotient V/E_1 . Cet endomorphisme étant à nouveau nilpotent, si $\dim. V/E_1 \neq 0$ nous pourrons trouver un vecteur $0 \neq e_2 \in V$ tel que $(e_2 + E_1) \in V/E_1$, soit un vecteur propre de N_1 . En continuant ce procédé, nous obtenons finalement une base e_1, \dots, e_n de V , telle que

$$Ne_1 = 0 \quad Ne_p \equiv 0 \pmod{(e_1, \dots, e_{p-1})} \quad 2 \leq p \leq n$$

(e_1, \dots, e_{p-1}) désignant la sous-algèbre engendrée par les vecteurs e_1, \dots, e_{p-1} .

La matrice de N , par rapport à la base e_1, \dots, e_n est dès lors une matrice triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

Réciproquement, soit (n_{ij}) une matrice $n \times n$ triangulaire avec

10.

des zéros sur la diagonale. Si f_1, \dots, f_n est une base de V , l'endomorphisme défini par $Nf_i = \sum_{j=1}^n n_{ij} f_j$ est un endomorphisme nilpotent.

8.1. Définition Une algèbre de Lie \mathcal{L} sur K est dite nilpotente si toutes ses dérivations intérieures sont des endomorphismes nilpotents de \mathcal{L} .

Théorème (Engel) soient $V \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie sur K et \mathcal{L} une sous-algèbre de $gl(V)$, composée uniquement d'endomorphismes nilpotents de V .

Alors : 1°) \mathcal{L} est nilpotente

2°) Il existe un $u \neq 0$ dans V tel que $x(u) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{L}$.

DEM. 1°) Il suffit d'établir que pour tout $x \in \mathcal{L}$, ad_x est nilpotente.

Or pour tout $y \in \mathcal{L}$, $(adx)y = xy - yx$, et par récurrence on établit facilement que $(adx)^m y$ est une somme de termes de la forme $\pm x^i y x^j$ avec $i + j = m$.

Donc, si $x^k = 0$, on aura $(adx)^{2k-1} y = 0$ quel que soit $y \in \mathcal{L}$.

2°) On établit la seconde partie du théorème, par récurrence sur la dimension n de \mathcal{L} . Le théorème est trivial pour $n = 1$. Supposons-le vrai pour les algèbres de dimension $< n$.

Nous allons d'abord établir que \mathcal{L} possède un idéal de dimension $n - 1$.

Soit H une sous-algèbre de Lie de \mathcal{L} , de dimension $m < n$. Pour tout $x \in H$, ad_x applique H dans lui-même et définit par passage au quotient, un endomorphisme $\sigma(x)$ de l'espace \mathcal{L}/H . D'après le 1°, ad_x est nilpotent, donc $\sigma(x)$ est nilpotent. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un élément $\{0\} \neq y + H \in \mathcal{L}/H$ qui soit annulé par tous les $\sigma(x)$, ($x \in H$). Autrement dit, il existe un y appartenant à \mathcal{L} et n'appartenant pas à H , tel que $adx(y) = [x, y] \in H$ et ceci pour tout $x \in H$.

Il en résulte que H est un idéal dans une certaine sous-algèbre de dimension $m + 1$ de \mathcal{L} .

11.

On en conclut (par itération à partir de $H = \{0\}$) que \mathcal{L} possède un idéal S de dimension $n - 1$.

L'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer qu'il existe un $\{0\} \neq u \in V$ qui est annulé par tous les éléments de S . Désignons par U le sous-vectoriel, non nul, de tous les vecteurs $u \in V$, annulés par tous les éléments de S . Montrons que U est stable pour tout $a \in \mathcal{L}$ et $\neq S$. En d'autres termes, que pour tout $u \in U$, $a(u) \in U$ ou encore que pour tout $s \in S$ et tout $u \in U$ $sa(u) = 0$. Comme S est un idéal de \mathcal{L} , $[a, s] \in S$, donc pour tout $u \in U$ $[a, s](u) = 0$, c'est-à-dire: $as(u) - sa(u) = 0$; or, $s(u) = 0$, donc $sa(u) = 0$, ce qui établit que U est stable pour a .

Puisque a est un endomorphisme nilpotent de V , a induira dans U un endomorphisme nilpotent. Il existe donc, dans U , un élément non nul qui est annulé par x , et donc par tout élément de \mathcal{L} .

Corollaire 1. Reprenant l'énoncé du théorème précédent nous pouvons encore affirmer qu'il existe une base e_1, \dots, e_n de V telle que tous les endomorphismes de \mathcal{L} s'expriment dans cette base par des matrices triangulaires avec des zéros sur la diagonale.

DEM.

D'après le théorème précédent, nous savons qu'il est possible de trouver un élément $0 \neq e_1 \in V$ qui soit annulé par tous les endomorphismes $\in \mathcal{L}$.

Désignons par E_1 le sous-espace de V , engendré par e_1 . Tout endomorphisme $x \in \mathcal{L}$ induira un endomorphisme nilpotent x_1 dans V/E_1 . Si $\dim. V/E_1 \neq 0$ l'on pourra trouver un vecteur $e_2 \in V$, $e_2 \notin E_1$, tel que $e_2 + E_1 \in V/E_1$ soit annulé par tous les x_1 ($x \in \mathcal{L}$). En répétant un nombre fini de fois ce procédé, on finira par trouver une base e_1, \dots, e_n de V telle que pour tout $x \in \mathcal{L}$:

$x(e_1) = 0$ et $x(e_i) \equiv 0 \pmod{(e_1, \dots, e_{i-1})}$ $2 \leq i \leq n$
ce qui exprime que la matrice de x , par rapport à la base e_1, \dots, e_n est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

Corollaire 2. Même énoncé que le corollaire précédent .

Si x_1, x_2, \dots, x_s ($s \geq \dim V$) sont des éléments de \mathcal{L} ,
alors $x_1 \cdot x_2 \dots x_s = 0$.

Ceci est une conséquence immédiate du corollaire 1.

8.2. Définition

Pour toute algèbre de Lie \mathcal{L} , on appelle série centrale descendante, la suite décroissante d'idéaux caractéristiques de \mathcal{L} :

$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \supset \mathcal{L}^2 \supset \dots \supset \mathcal{L}^i \supset \dots$ définie par récurrence de la manière suivante:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \quad \mathcal{L}^{p+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^p] \quad p = 1, 2, \dots$$

ce qui revient à dire :

$$\mathcal{L}^{p+1} = \left\{ \text{adx}_p \cdot \text{adx}_{p-1} \dots \text{adx}_2 \cdot \text{adx}_1 (x) \right\} \quad \text{avec } x, x_1, \dots, x_p \in \mathcal{L}$$

Proposition 5 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre de Lie soit nilpotente, est qu'il existe un entier k , tel que $\mathcal{L}^k = \{0\}$

DEM. Si l'algèbre de Lie, \mathcal{L} , est nilpotente, $\text{ad}_p(\mathcal{L})$ sera une sous-algèbre de Lie de $\text{gl}(\mathcal{L})$, composée d'endomorphismes nilpotents de \mathcal{L} . Mais dès lors, en vertu du corollaire 2 $\text{adx}_1 \dots \text{adx}_s = 0$ pour tout $x_1, \dots, x_s \in \mathcal{L}$ et $s \geq \dim \mathcal{L}$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}^{s+1} = \{0\}$. Réciproquement, si pour certain k , $\mathcal{L}^k = \{0\}$, le produit de $k-1$ dérivations intérieures quelconques sera nul, ce qui implique en particulier que toute dérivation intérieure est nilpotente.

Corollaire Toute algèbre nilpotente $\mathcal{L} \neq \{0\}$ a un centre non nul. En effet si k désigne le plus petit entier, tel que $\mathcal{L}^k = \{0\}$, alors $\mathcal{L}^{k-1} \neq \{0\}$ appartient au centre de \mathcal{L} .

Proposition 7 Toute algèbre nilpotente est une algèbre résoluble

DEM. On établit immédiatement, par récurrence, que pour toute algèbre de Lie \mathcal{L} , $\mathcal{L}^{(i)} \subset \mathcal{L}^i$ pour tout indice i . Comme pour un certain indice k , $\mathcal{L}^k = \{0\}$

$$\mathcal{L}^{(k)} \subset \mathcal{L}^{k+1} = 0, \text{ donc } \mathcal{L} \text{ est résoluble.}$$

13.

IV. FORME DE KILLING ET
ALGÈBRES SEMI-SIMPLES
=====

9. FORME DE KILLING

Soit \mathcal{L} une algèbre de Lie admettant une base finie. On appelle forme de Killing, la forme bilinéaire symétrique.

$$B(x,y) = \text{Tr}(\text{adx ady})$$

Propriétés de $B(x,y)$

- 9.1. Pour tout automorphisme σ de \mathcal{L} , $B(\sigma x, \sigma y) = B(x,y)$.
- 9.2. Quels que soient les éléments x, y, z de \mathcal{L} :
- (4) $B(x, [yz]) = B(y, [zx]) = B(z, [xy])$
- 9.3. Pour tout idéal S de \mathcal{L} , l'orthogonal S^\perp de S pour $B(x,y)$ est un idéal.
- 9.4. La forme de Killing $B'(x,y)$ de tout idéal S de \mathcal{L} est la restriction à S de la forme de Killing $B(x,y)$ de \mathcal{L} .

10 ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES. ALGÈBRES DE LIE SIMPLES

On appelle algèbre de Lie semi-simple, toute algèbre de Lie ayant une forme de Killing non dégénérée. Une algèbre de Lie $\mathcal{L} \neq \{0\}$ est dite simple si elle est semi-simple et si les seuls idéaux de \mathcal{L} sont $\{0\}$ et \mathcal{L} .

Il est immédiat que si $S \neq \{0\}$ est un idéal commutatif d'une algèbre \mathcal{L} . pour tout x, y de S , adx ady est l'application nulle, et en conséquence $B(x,y) = 0$, c'est-à-dire que l'algèbre \mathcal{L} n'est pas semi-simple.

Une algèbre semi-simple ne contient donc aucun idéal commutatif $\neq \{0\}$.

En particulier, toute algèbre semi-simple a pour centre: $\{0\}$.
(sa représentation adjointe est donc fidèle).

Proposition 8

Soient \mathcal{L} une algèbre de Lie semi-simple et S un idéal de \mathcal{L} . Si nous désignons par S^\perp l'orthogonal de S pour la forme de Killing $B(x,y)$ de \mathcal{L} , alors :

$$L = S \oplus S^\perp$$

Démonstration:

Nous savons déjà (n° 9.3) que S^\perp est un idéal de \mathcal{L} . D'autre part, comme $B(x,y)$ est non dégénérée, $\dim. S + \dim. S^\perp = \dim. \mathcal{L}$

Soient x,y des éléments de l'idéal $S \cap S^\perp$ et z un élément quelconque de \mathcal{L} , dès lors, $B(z, [x, y]) = B(x, [y, z]) = 0$ ce qui implique, puisque $B(x,y)$ est non dégénérée, que $[x, y] = 0$. Donc $S \cap S^\perp$ est un idéal commutatif de \mathcal{L} .

Le seul idéal commutatif de \mathcal{L} étant $\{0\}$, $S \cap S^\perp = \{0\}$

Remarquons encore que $S \cap S^\perp = \{0\}$ implique en particulier que S et S^\perp sont semi-simples (cf. n° 9.4)

Corollaire : Toute algèbre de Lie semi-simple est la somme directe de tous ses idéaux simples.

Si nous remarquons que toute algèbre semi-simple possède au moins un idéal simple, le théorème précédent revient à dire que \mathcal{L} est la somme directe de certains idéaux simples :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_r$$

Le corollaire nous apprend que les seuls idéaux simples de \mathcal{L} sont ces \mathcal{L}_i .

Supposons que $S \neq \{0\}$ soit un idéal simple de \mathcal{L} différent de tous les \mathcal{L}_i ; dès lors $[\mathcal{L}_i, S] \subset \mathcal{L}_i \cap S = \{0\}$ et par conséquent $[\mathcal{L}_i, S] = \{0\}$, c'est-à-dire que $S \neq \{0\}$ appartient au centre de \mathcal{L} , ce qui est en contradiction avec ce que nous savons des algèbres semi-simples.

15.

10.2. Proposition 2

Si \mathfrak{L} est semi-simple, toute dérivation de \mathfrak{L} est intérieure.

Démonstration

Le centre d'une algèbre de Lie semi-simple étant $\{0\}$, la représentation adjointe de \mathfrak{L} est fidèle, et $\text{ad}(\mathfrak{L})$ est isomorphe à \mathfrak{L} .

D'autre part, nous savons que $\text{ad}(\mathfrak{L})$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ des dérivations de \mathfrak{L} . L'orthogonal A de $\text{ad}(\mathfrak{L})$, dans $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$, est donc également un idéal de $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$.

L'idéal $A \cap \text{ad}(\mathfrak{L})$ est donc orthogonal à $\text{ad}(\mathfrak{L})$ pour la forme de Killing de $\text{ad}(\mathfrak{L})$. Comme cette forme est non dégénérée: $A \cap \text{ad}(\mathfrak{L}) = \{0\}$.

Dès lors, soit D une dérivation de \mathfrak{L} appartenant à A . Pour tout x appartenant à \mathfrak{L} , on a $\text{ad}(Dx) = [D, \text{adx}] \in A \cap \text{ad}(\mathfrak{L}) = \{0\}$;
d'où $Dx = 0$ ou $D = 0$

Par conséquent $A = \{0\}$ et $\text{ad}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{L})$

Corollaire: Pour toute algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{L} sur les réels, le groupe des automorphismes intérieurs $\text{Int}(\mathfrak{L})$ est la composante connexe du groupe des automorphismes $\text{Aut}(\mathfrak{L})$. En particulier, $\text{Int}(\mathfrak{L})$ est un sous-groupe fermé de $\text{Aut}(\mathfrak{L})$.

II. SOUS-ESPACES PROPRES DES ENDOMORPHISMES $ad z$

II.1. **Notation.** Soit \mathfrak{L} une algèbre de Lie sur K .

Pour tout $z \in \mathfrak{L}$ et $\lambda \in K$, on pose

$$\mathfrak{L}(z, \lambda) = \{x \in \mathfrak{L} ; \exists k \text{ naturel tel que } (ad z - \lambda I)^k(x) = 0\};$$

c'est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{L} ; si sa dimension n'est pas nulle,

λ est une valeur propre généralisée de l'endomorphisme $ad z$ et $\mathfrak{L}(z, \lambda)$

est le sous-espace propre généralisé correspondant. Notons aussitôt que 0

est une valeur propre généralisée de tout endomorphisme $ad z$, puisque

$$(ad z)(z) = 0.$$

II.2. **Lemme.** Pour tout $z \in \mathfrak{L}$, $\lambda \in K$, $\mu \in K$,

$$[\mathfrak{L}(z, \lambda), \mathfrak{L}(z, \mu)] \subset \mathfrak{L}(z, \lambda + \mu).$$

En particulier, $\mathfrak{L}(z, 0)$ est une sous-algèbre de \mathfrak{L} qui contient z .

Démonstration: Par induction, on démontre la relation

$$(ad z - (\lambda + \mu)I)^n [x_\lambda, x_\mu] = \sum_{i=0}^n c_n^i [(ad z - \lambda I)^{n-i} x_\lambda, (ad z - \mu I)^i x_\mu],$$

le cas $n=1$ découlant directement de la définition d'une algèbre de Lie.

Cela étant, si $y \in [\mathfrak{L}(z, \lambda), \mathfrak{L}(z, \mu)]$, on a $y = [x_\lambda, x_\mu]$ avec

$x_\lambda \in \mathfrak{L}(z, \lambda)$ et $x_\mu \in \mathfrak{L}(z, \mu)$. Pour de tels éléments, le second membre de la relation ci-dessus s'annule lorsque n est suffisamment grand; on en déduit $[x_\lambda, x_\mu] \in \mathfrak{L}(z, \lambda + \mu)$, d'où le lemme.

II.3. **Généralisation.** Soit \mathfrak{H} un sous-espace vectoriel de \mathfrak{L} et a une forme linéaire définie sur \mathfrak{H} . On note V_a le sous-espace formé des $x \in \mathfrak{L}$ vérifiant la propriété

$$" \exists k \text{ naturel tel que, } \forall z \in \mathfrak{H}, (ad z - a(z)I)^k(x) = 0 "$$

Si $x \in V_a$, il est clair que l'égalité est vérifiée pour $k = \dim(V_a)$;

il s'ensuit que V_a est formé des $x \in \mathfrak{L}$ vérifiant la propriété

$$" \forall z \in \mathfrak{H}, \exists z \text{ naturel tel que } (ad z - a(z)I)^k(x) = 0 "$$

autrement dit

$$V_a = \bigcup_{z \in \mathfrak{H}} \mathfrak{L}(z, a(z))$$

Le lemme 11.2 entraîne alors immédiatement le

$$\text{Corollaire.} \quad [V_\alpha, V_\beta] \subset V_{\alpha+\beta}$$

En particulier, V_0 est une sous-algèbre de \mathfrak{L} .

12. SOUS- ALGÈBRES DE CARTAN : EXISTENCE

Dans les paragraphes qui suivent, \mathfrak{L} désigne une algèbre de Lie semi-simple sur un corps K qui est supposé algébriquement clos et de caractéristique nulle. Si F est un endomorphisme d'un espace vectoriel V sur K , V est donc somme directe des sous-espaces propres généralisés de F .

12.1. Définition. Une partie \mathfrak{H} de \mathfrak{L} est appelée sous-algèbre de Cartan⁽¹⁾ si

- a) \mathfrak{H} est une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{L}
- b) $\forall h \in \mathfrak{H}$ l'endomorphisme $ad h$ est semi-simple.

D'autre part, soit $d(z)$ la dimension de la sous-algèbre $\mathfrak{L}(z, 0)$; comme $z \in \mathfrak{L}(z, 0)$, $d(z)$ est strictement positive. On dit que z est un élément régulier de \mathfrak{L} si $d(z)$ est minimum. Il est à noter que les éléments réguliers de \mathfrak{L} forment un ouvert partout dense de \mathfrak{L} muni de la topologie de Zariski.

Posons $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}(h_0, 0)$, h_0 étant un élément régulier de \mathfrak{L} . Les sous-espaces V_α du paragraphe précédent sont définis à partir de \mathfrak{H} . Notre intention est de prouver que \mathfrak{H} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{L} .

12.2. Lemme. La sous-algèbre \mathfrak{H} est nilpotente et égale à V_0 .

Démonstration. Pour $z = h_0$ et $\lambda = 0$, le lemme 11.2 devient

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{L}(h_0, \mu)] \subset \mathfrak{L}(h_0, \mu);$$

les sous-espaces $\mathfrak{L}(h_0, \lambda_i)$ où $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres généralisées de $ad h_0$, sont donc stables pour les endomorphismes $ad h$ ($h \in \mathfrak{H}$). Comme K est algébriquement clos, \mathfrak{L} est somme directe de \mathfrak{H} et \mathfrak{L}' , où $\mathfrak{L}' = \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{L}(h_0, \lambda_i)$, et tout endomorphisme $ad h$ ($h \in \mathfrak{H}$) est défini par ses restrictions à \mathfrak{H} et \mathfrak{L}' . Pour tout $h \in \mathfrak{H}$, soit $f(h)$ le déterminant de l'endomorphisme $(ad h)|_{\mathfrak{L}'}$. Alors f est une fonction polynôme sur \mathfrak{H} qui n'est pas nulle en h_0 puisque $(ad h_0)|_{\mathfrak{L}'}$ n'a aucune valeur propre généralisée nulle; f n'est donc pas nulle sur un ouvert partout dense \mathfrak{S} de \mathfrak{H} . Pour $h \in \mathfrak{S}$, l'endomorphisme $(ad h)|_{\mathfrak{L}'}$ de \mathfrak{L}' a alors toutes ses valeurs propres généralisées.

(1) La définition choisie est adaptée à l'étude des algèbres semi-simples. Si \mathfrak{L} n'est pas nécessairement semi-simple, on appellera sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{L} toute sous-algèbre nilpotente qui est son propre normalisateur (cf. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, Tome 3, p. 200). Si \mathfrak{L} est semi-simple, les deux définitions sont équivalentes.

de \mathcal{L}' a alors toutes ses valeurs propres généralisées non nulles, ce qui prouve que $\mathcal{L}(h, 0)$ est contenu dans \mathcal{M} . Comme h_0 est un élément régulier, on en déduit $\mathcal{L}(h, 0) = \mathcal{M}$; par suite, il existe un κ naturel tel que $(\text{ad } h)^\kappa(x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathcal{M}$. Cette relation est vraie pour tout $h \in \mathcal{E}$, lorsque $\kappa = \dim(\mathcal{M})$; comme \mathcal{E} est dense dans \mathcal{M} , on a encore, pour $x \in \mathcal{M}$ et $h \in \mathcal{M}$, $(\text{ad } h)^\kappa(x) = 0$, ce qui signifie précisément que \mathcal{M} est nilpotente. La seconde assertion en découle immédiatement.

12.3. Proposition. \mathcal{M} est une sous-algèbre abélienne maximale de \mathcal{L} .

Démonstration. Soit λ une valeur propre non nulle de $\text{ad } h_0$ et B la forme de Killing de \mathcal{L} ; prouvons d'abord que \mathcal{M} et $\mathcal{L}(h_0, \lambda)$ sont orthogonaux relativement à B , soit $B(x, h) = 0$ pour $x \in \mathcal{L}(h_0, \lambda)$ et $h \in \mathcal{M}$; cela vient de ce que l'endomorphisme $(\text{ad } x)(\text{ad } h)$ applique $\mathcal{L}(h_0, \lambda_i)$ dans $\mathcal{L}(h_0, \lambda + \lambda_i)$, qui a avec $\mathcal{L}(h_0, \lambda_i)$ une intersection nulle. En particulier, le crochet $[h_1, h_2]$ est, pour h_1 et h_2 dans \mathcal{M} , orthogonal à \mathcal{L}' . D'autre part, \mathcal{M} est nilpotent, donc résoluble (§ 8.2), de sorte qu'il existe une base de \mathcal{L} par rapport à laquelle tous les endomorphismes $\text{ad } h$ ($h \in \mathcal{M}$) sont exprimés par des matrices triangulaires supérieures; utilisant une telle base, on voit que

$$\text{Tr}((\text{ad } h)(\text{ad } h_1)(\text{ad } h_2)) = \text{Tr}((\text{ad } h)(\text{ad } h_2)(\text{ad } h_1))$$

d'où l'on conclut que le crochet $[h_1, h_2]$ est orthogonal à \mathcal{M} ; il est donc orthogonal à \mathcal{L} , ce qui n'est possible que s'il est nul puisque B n'est pas dégénérée. Autrement dit, \mathcal{M} est abélienne; elle est de plus maximale parmi les sous-algèbres abéliennes, sans quoi on pourrait trouver un x hors de \mathcal{M} tel que $[h, x] = 0$ pour tout h dans \mathcal{M} ; choisissant alors $h = h_0$, on aboutirait à une contradiction.

12.4 Lemme. \mathcal{L} est somme directe des sous-espaces \mathcal{V}_β et, pour h_1 et h_2 dans \mathcal{M} , $B(h_1, h_2) = \sum_{\beta \in \mathcal{M}} \beta(h_1)\beta(h_2) \dim(\mathcal{V}_\beta)$

Démonstration. Puisque $\mathcal{L}(h_0, \beta(h_0))$ et que $\mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{K}} \mathcal{L}(h_0, \lambda)$, la première assertion revient à prouver que $\mathcal{L}(h_0, \lambda)$ est somme directe des \mathcal{V}_β tels que $\beta(h_0) = \lambda$. D'après le lemme 12.2, on peut supposer $\lambda \neq 0$. Notons $\text{ad}_\lambda h$ la restriction de $\text{ad } h$ à $\mathcal{L}(h_0, \lambda)$; alors, l'application $\text{ad}_\lambda : h \rightarrow \text{ad}_\lambda h$ est une représentation de \mathcal{M} dans $\mathcal{L}(h_0, \lambda)$. Puisque \mathcal{M} est résoluble, il existe une base e_1, \dots, e_s de $\mathcal{L}(h_0, \lambda)$ par rapport à laquelle tous les endomorphismes $\text{ad}_\lambda h$ ($h \in \mathcal{M}$) sont repré-

voir Erratum

ERRATUM

La démonstration du lemme 12.4 (page 18) doit être remplacée par la suivante :

Démonstration. D'après le lemme 12.2, \mathcal{H} est contenu dans $\mathcal{L}(h, 0)$ pour tout $h \in \mathcal{H}$; pour tout élément régulier h de \mathcal{H} , on a donc $\mathcal{L}(h, 0) = \mathcal{H}$. Par suite, le lemme 14.2 fournit, si l'on prend pour z un élément h régulier et si l'on pose $\lambda = 0$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{L}(h, \mu)] \subset \mathcal{L}(h, \mu).$$

Soit h_1, \dots, h_k une base de \mathcal{H} formée d'éléments réguliers. L'inclusion ci-dessus entraîne que $\mathcal{L}(h_0, \mu)$ est stable pour $\text{ad } h_1$; \mathcal{L}' est donc aussi stable pour $\text{ad } h_1$ de sorte que

$$\mathcal{L}' = \bigoplus_{\mu_1 \in K^*} \mathcal{L}(h_1, \mu_1)$$

Comme $\mathcal{L}(h_1, \mu_1)$ est stable pour $\text{ad } h_2$, on a

$$\mathcal{L}(h_1, \mu_1) = \bigoplus_{\mu_2 \in K^*} (\mathcal{L}(h_1, \mu_1) \cap \mathcal{L}(h_2, \mu_2)),$$

En itérant le procédé, on obtient

$$\mathcal{L}' = \bigoplus_{\mu_1 \in K^*} \dots \bigoplus_{\mu_k \in K^*} (\mathcal{L}(h_1, \mu_1) \cap \dots \cap \mathcal{L}(h_k, \mu_k))$$

Si l'on note $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}$ la forme linéaire prenant en h_i la valeur μ_i ($i = 1, \dots, k$), il est clair que $V_{\alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}} = \mathcal{L}(h_1, \mu_1) \cap \dots \cap \mathcal{L}(h_k, \mu_k)$ de sorte que

$$\mathcal{L}' = \bigoplus_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \in (K^*)^k} V_{\alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}}$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{L}' = \sum_{\beta \in K'} V_{\beta}$$

Pour prouver que cette somme est directe, choisissons un h' dans \mathcal{H} pour lequel les β tels que $V_{\beta} \neq \{0\}$ aient en h' des valeurs distinctes ; alors V_{β} est contenu dans

$\mathcal{L}(h', \beta(h'))$ et, puisque \mathcal{L} est la somme directe des $\mathcal{L}(h', \beta(h'))$, la somme des V_{β} est directe ; en conclusion $\mathcal{L}' = \bigoplus_{\beta \in K'} V_{\beta}$.

La seconde assertion se vérifie sans peine lorsqu'on choisit pour base de \mathcal{L} la réunion des bases des $\mathcal{L}(h_0, \lambda)$ telles que $\text{ad } h \mid \mathcal{L}(h_0, \lambda)$ soit représenté par une matrice triangulaire supérieure ; ce choix est possible puisque \mathcal{H} est résoluble.

sentées par des matrices triangulaires supérieures. Soient $\alpha_1(h), \dots, \alpha_s(h)$ les éléments de la diagonale, fonction linéaires de h et soit κ la dimension de $\mathfrak{L}(h_0, \lambda)$. Pour un α_i donné, l'endomorphisme $(\text{ad}_\lambda h - \alpha_i(h)I)^\kappa$ est représenté par une matrice dont la sous-matrice carrée diagonale d'indices j tels que $\alpha_j = \alpha_i$ est nulle ; on en déduit $(\text{ad}_\lambda h - \alpha_i(h)I)^\kappa (y_{\alpha_i}) = 0$ pour y_{α_i} dans le sous-espace \mathcal{W}_{α_i} engendré par les vecteurs e_j tels que $\alpha_j = \alpha_i$; autrement dit $\mathcal{W}_{\alpha_i} \subset \mathcal{V}_{\alpha_i}$ et, comme $\mathfrak{L}(h_0, \lambda)$ est somme des \mathcal{W}_{α_i} , on obtient $\mathfrak{L} = \sum \mathcal{V}_\beta$. Pour prouver que cette somme est directe, choisissons un h_1 dans \mathfrak{H} pour lequel les β tels que $\mathcal{V}_\beta \neq \{0\}$ aient en h_1 des valeurs distinctes ; alors \mathcal{V}_β est contenu dans $\mathfrak{L}(h_1, \beta(h_1))$ et, puisque \mathfrak{L} est la somme directe des $\mathfrak{L}(h_1, \beta(h_1))$, la somme des \mathcal{V}_β est directe ; en conclusion $\mathfrak{L} = \bigoplus \mathcal{V}_\beta$. La seconde assertion se vérifie sans peine lorsqu'on choisit pour base de \mathfrak{L} la réunion des bases utilisées dans les espaces $\mathfrak{L}(h_0, \lambda)$.

12.5. Théorème. Toute algèbre semi-simple contient des sous-algèbres de Cartan, par exemple \mathfrak{H} .

Démonstration. Il reste à prouver que, pour tout $h \in \mathfrak{H}$, l'endomorphisme $\text{ad } h$ est semi-simple. Ecrivons $\text{ad } h = S + N$ où S est semi-simple et N nilpotent. Utilisant la base construite dans le lemme 12.4, on voit que $S(x) = \beta(h)x$ pour tout $x \in \mathcal{V}_\beta$. Montrons alors que S est une dérivation ; d'après le lemme 12.4, il suffit de prouver la relation habituelle pour $x_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ et $x_\beta \in \mathcal{V}_\beta$: utilisant le corollaire 11.3, on a $S([x_\alpha, x_\beta]) = (\alpha(h) + \beta(h))[x_\alpha, x_\beta] = [\alpha(h)x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \beta(h)x_\beta] = [S(x_\alpha), x_\beta] + [x_\alpha, S(x_\beta)]$. Comme toute dérivation est intérieure, il existe $\varrho \in \mathfrak{L}$ tel que $S = \text{ad } \varrho$. Comme $\text{ad } \varrho$ commute avec tous les éléments de $\text{ad } \mathfrak{H}$ et que les algèbres $\text{ad } \mathfrak{L}$ et \mathfrak{L} sont isomorphes, on en déduit que ϱ commute avec tout élément de \mathfrak{H} , ce qui entraîne $\varrho \in \mathfrak{H}$ puisque \mathfrak{H} est abélien maximal. On a donc d'une part $S(x) = \beta(h)x$ pour $x \in \mathcal{V}_\beta$ et d'autre part $S(x) = \beta(\varrho)x$ pour $x \in \mathcal{V}_\beta$, car S est aussi la partie semi-simple de $\text{ad } \varrho$. On en déduit $\beta(\varrho - h) = 0$ pour tout β tel que $\mathcal{V}_\beta \neq \{0\}$. D'après la seconde assertion du lemme 12.4, on obtient alors $B(\varrho - h, h') = 0$ pour tout $h' \in \mathfrak{H}$. Dès lors, $\varrho - h$, déjà orthogonal à \mathfrak{L}' , est aussi orthogonal à \mathfrak{H} , donc à \mathfrak{L} , ce qui n'est possible que pour $\varrho = h$. Finalement, $\text{ad } h$ est semi-simple, et \mathfrak{H} est une sous-algèbre de Cartan

13. DECOMPOSITION RADICIELLE

Dans les paragraphes 13 et 14, \mathfrak{H} désigne une sous-algèbre de Cartan quelconque de \mathfrak{L} . Nous ne pourrions lui appliquer les résultats du paragraphe 12 que si ceux-ci sont indépendants de la définition particulière de \mathfrak{H} dans ce paragraphe.

13.1. Définitions. Soit α une forme linéaire définie sur \mathfrak{H} . On note \mathfrak{L}^α le sous-espace de \mathfrak{L} formé des x tels que, pour tout h dans \mathfrak{H} , $[h, x] = \alpha(h)x$. Si \mathfrak{L}^α n'est pas nul, la forme linéaire α est appelée *racine* et \mathfrak{L}^α est le *sous-espace radical correspondant*; ces concepts sont évidemment fonctions de \mathfrak{L} et \mathfrak{H} .

Il est clair que, pour tout x dans un sous-espace radical, $[h, x]$ est proportionnel à x quel que soit h dans \mathfrak{H} .

Inversément, si x possède cette propriété, il y a une application $\beta: \mathfrak{H} \rightarrow K$ telle que $[h, x] = \beta(h)x$, et on vérifie immédiatement que β est linéaire, ce qui prouve que x est dans un sous-espace radical.

Notons enfin que le sous-espace V_α du § 12 est le sous-espace radical \mathfrak{L}^α parce que, pour un endomorphisme F semi-simple, les conditions $(F - \lambda I)^K(x) = 0$ et $(F - \lambda I)(x) = 0$ définissent le même sous-espace.

13.2. Lemme. $\mathfrak{L}^0 = \mathfrak{H}$ et $[\mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^\beta] \subset \mathfrak{L}^{\alpha+\beta}$

Démonstration. La première assertion découle de ce que \mathfrak{H} est abélienne maximale, la seconde de l'identité de Jacobi

$$[h, [x_\alpha, x_\beta]] = [[h, x_\alpha], x_\beta] + [x_\alpha, [h, x_\beta]],$$

lorsque $h \in \mathfrak{H}$, $x_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$ et $x_\beta \in \mathfrak{L}^\beta$.

13.3. Théorème. Soit Δ l'ensemble des racines non nulles

- (a) \mathfrak{L} est la somme directe des sous-espaces radiciels
- (b) Si $\alpha + \beta \neq 0$, \mathfrak{L}^α et \mathfrak{L}^β sont orthogonaux
- (c) La restriction de B à $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ n'est pas dégénérée. Pour toute racine α , il existe un élément unique h_α dans \mathfrak{H} tel que, pour tout $h \in \mathfrak{H}$, $B(h, h_\alpha) = \alpha(h)$.
- (d) Si $\alpha \in \Delta$, alors $-\alpha \in \Delta$ et $[\mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^{-\alpha}] = K h_\alpha$. Plus précisément, si $x_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$ et $x_{-\alpha} \in \mathfrak{L}^{-\alpha}$, $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = B(x_\alpha, x_{-\alpha}) h_\alpha$.

Démonstration. (a) Puisque l'ensemble $ad(\mathcal{H})$ est une famille commutative d'endomorphismes semi-simples, on peut écrire $\mathcal{L} = \bigoplus \mathcal{L}_i$ où chaque \mathcal{L}_i est unidimensionnel et invariant pour les $ad h (h \in \mathcal{H})$; pour tout i , il existe donc une forme α telle que $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}^\alpha$, d'où l'on déduit que \mathcal{L} est la somme des \mathcal{L}^α . La démonstration de ce que cette somme est directe est la même que celle qui a permis de montrer, au lemme 12.4, que la somme des V_α était directe.

(b) Soient $x_\alpha \in \mathcal{L}^\alpha$, $x_\beta \in \mathcal{L}^\beta$, $\alpha + \beta \neq 0$; d'après le lemme 13.2, l'endomorphisme $ad x_\alpha ad x_\beta$ applique \mathcal{L}^α dans $\mathcal{L}^{\alpha+\beta+\gamma}$, pour toute forme linéaire γ ; comme $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathcal{L}^\alpha \cap \mathcal{L}^{\alpha+\beta+\gamma} = \{0\}$ d'après (a); utilisant une base convenable, $ad x_\alpha ad x_\beta$ est représenté par une matrice dont les éléments de la diagonale sont nuls. Par suite $B(x_\alpha, x_\beta) = 0$, ce qui prouve (b).

(c) Si la restriction de B à $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ était dégénérée, il y aurait un $h \in \mathcal{H}$ et non nul, orthogonal à tout élément de \mathcal{H} ; d'après (b), h serait orthogonal à tout élément de \mathcal{L} , ce qui est impossible car \mathcal{L} est semi-simple. La restriction considérée est donc non dégénérée.

(d) Soit $\alpha \in \Delta$; le sous-espace \mathcal{L}^α ne peut être orthogonal à $\mathcal{L}^{-\alpha}$ car, d'après (b), il serait orthogonal à tous les \mathcal{L}^β et par suite, d'après (a), serait orthogonal à \mathcal{L} . Le sous-espace $\mathcal{L}^{-\alpha}$ n'est donc pas nul, et $-\alpha \in \Delta$. Soient $x_\alpha \in \mathcal{L}^\alpha$, $x_{-\alpha} \in \mathcal{L}^{-\alpha}$, $h \in \mathcal{H}$. On a, d'après la propriété 9.2, $B([x_\alpha, x_{-\alpha}], h) = B([h, x_\alpha], x_{-\alpha}) = B(\alpha(h)x_\alpha, x_{-\alpha})$.

Utilisant alors la définition de h_α , on obtient pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$B([x_\alpha, x_{-\alpha}], h) = B(x_\alpha, x_{-\alpha}) B(h_\alpha, h) \text{ ce qui implique}$$

$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = B(x_\alpha, x_{-\alpha}) h_\alpha$ car B n'est pas dégénérée. Comme \mathcal{L}^α et $\mathcal{L}^{-\alpha}$ ne sont pas orthogonaux, on en déduit $[\mathcal{L}^\alpha, \mathcal{L}^{-\alpha}] = K h_\alpha$.

13.4. Corollaire. Si $\alpha(h) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors $h = 0$. Par suite les h_α engendrent \mathcal{H} .

En effet, $\alpha(h) = 0$ équivaut à $[h, x] = 0$ pour tout x dans \mathcal{L}^α ; l'hypothèse du corollaire et le (a) du théorème 13.3 impliquent $[h, x] = 0$ pour tout $x \in \mathcal{L}$, d'où $h = 0$. Les racines engendrent donc le dual de \mathcal{H} . Ces racines étant les images des h_α dans l'isomorphisme canonique de \mathcal{H} sur son dual (isomorphisme associé à B), les h_α engendrent \mathcal{H} .

13.5. Lemme. Soient $e_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$, $e_{-\alpha} \in \mathfrak{L}^{-\alpha}$ tels que $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ et soit A une partie finie de Σ . Si $\mathfrak{L}^* = \sum_{n \in A} \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ est stable pour $\text{ad } e_\alpha$ et $\text{ad } e_{-\alpha}$, alors $\sum_{n \in A} (\beta + n\alpha)(h_\alpha) \dim \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha} = 0$.

Démonstration. Calculons de deux manières la trace de la restriction à \mathfrak{L}^* de l'endomorphisme $\text{ad } h_\alpha$. Puisque h_α est un crochet d'éléments dont les adjoints conservent \mathfrak{L}^* , on a d'une part $\text{Tr}_{\mathfrak{L}^*}(\text{ad } h_\alpha) = 0$. D'autre part, $\text{ad } h_\alpha$ laisse chaque espace $\mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ invariant, si bien que $\text{Tr}_{\mathfrak{L}^*}(\text{ad } h_\alpha) = \sum_{n \in A} (\beta+n\alpha)(h_\alpha) \dim \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$, d'où le lemme.

13.6. Théorème. Soit α une racine non nulle

- (a) Le vecteur h_α n'est pas isotrope ; autrement dit $\alpha(h_\alpha) \neq 0$
- (b) Le sous-espace \mathfrak{L}^α est uni-dimensionnel.

Démonstration. (a) D'après le théorème 13.3 (d), on peut choisir $e_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$, $e_{-\alpha} \in \mathfrak{L}^{-\alpha}$ tels que $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$. Soit β une racine quelconque et soit A l'ensemble des entiers tels que $\beta + n\alpha$ soit une racine. Puisque $\text{ad } e_\alpha(x) \in \mathfrak{L}^{\beta+(n+1)\alpha}$ pour $x \in \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ et que $\text{ad } e_{-\alpha}(y) \in \mathfrak{L}^{\beta+(n-1)\alpha}$ pour $y \in \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$, le lemme 13.5 est applicable. On obtiendrait, en supposant par l'absurde $\alpha(h_\alpha) = 0$, $\sum_{n \in A} \beta(h_\alpha) \dim \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha} = 0$, ce qui entraînerait $\beta(h_\alpha) = 0$ quel que soit la racine β . Le corollaire 13'4 entraînerait alors $h_\alpha = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse $\alpha \neq 0$.

(b) Supposons par l'absurde $\dim(\mathfrak{L}^\alpha) > 1$. Il y a alors dans \mathfrak{L}^α un vecteur $a_\alpha \neq 0$, orthogonal à $e_{-\alpha}$. Pour obtenir une contradiction, construisons, à partir de a_α une suite infinie (a_n) de vecteurs non nuls, avec $a_n \in \mathfrak{L}^{n\alpha}$; c'est bien absurde puisque $\mathfrak{L}^{n\alpha} = \{0\}$ pour n assez grand. Posons $a_1 = a_\alpha$ et $a_n = [e_\alpha, a_{n-1}]$; puisque $a_1 \in \mathfrak{L}^\alpha$, a_n appartient, par induction, à $\mathfrak{L}^{n\alpha}$. Pour vérifier que a_n n'est pas nul, on utilise

$$[e_{-\alpha}, a_n] = -\frac{n(n-1)}{2} \alpha(h_\alpha) a_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

qui se démontre aussi par induction, le premier terme de celle-ci exprimant l'hypothèse à rejeter ; en effet $[e_{-\alpha}, a_{n+1}]$

$$\begin{aligned} &= [e_{-\alpha}, [e_\alpha, a_n]] = [e_\alpha, [e_{-\alpha}, a_n]] + [a_n [e_\alpha, e_{-\alpha}]] \\ &= -\frac{n(n-1)}{2} \alpha(h_\alpha) [e_\alpha, a_{n-1}] - [h_\alpha, a_n] \\ &= -\frac{n(n-1)}{2} \alpha(h_\alpha) a_n - n \alpha(h_\alpha) a_n = -\frac{(n+1)n}{2} \alpha(h_\alpha) a_n. \end{aligned}$$

La formule est donc prouvée et $a_{n-1} \neq 0$ entraîne $a_n \neq 0$.

13.7. Corollaire. Les dimensions de \mathfrak{N} et de \mathfrak{L} ont la même parité.

14. CONFIGURATION DES RACINES

Proposons nous d'étudier, dans l'espace dual de \mathfrak{N} , les positions relatives des racines. On sait déjà que l'ensemble des racines est symétrique (théorème 13.3, d) et qu'il engendre le dual de \mathfrak{N} (corollaire 13.4).

14.1. Lemme. Soient $e_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$, $e_{-\alpha} \in \mathfrak{L}^{-\alpha}$ tels que $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ et soit $[r, s]$ un intervalle de \mathbb{Z} . Si $\sum_{n=r}^s \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ est stable pour $\text{ad } e_\alpha$ et $\text{ad } e_{-\alpha}$, alors $2\beta(h_\alpha) + (r+s)\alpha(h_\alpha) = 0$.

Démonstration. Puisque la dimension de $\mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ est 1 lorsque $\beta + n\alpha \neq 0$, le lemme 13.5 fournit d'abord

$$\sum_{n=r}^s (\beta(h_\alpha) + n\alpha(h_\alpha)) = 0$$

Les termes du premier membre formant une progression arithmétique, on en déduit $(\beta(h_\alpha) + r\alpha(h_\alpha)) + (\beta(h_\alpha) + s\alpha(h_\alpha)) = 0$, d'où le lemme.

14.2. Théorème. Soit α une racine non nulle

(a) Si β est une racine, on obtient les racines de la forme $\beta + n\alpha$ ($n \in \mathbb{Z}$) pour tous les n tels que $p < n < q$; avec ces notations,

$$\frac{p+q}{2} = -\frac{\beta(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$$

(b) Les seules racines proportionnelles à α sont $-\alpha, 0$ et α .

Démonstration. (a) Puisque β est une racine, il existe un intervalle $[r, s]$ de \mathbb{Z} tel que $\beta + n\alpha$ soit une racine pour $r < n < s$, mais non pour $n = r - 1$ ou $n = s + 1$. Le sous-espace $\sum_{n=r}^s \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ est alors stable pour $\text{ad } e_\alpha$ et $\text{ad } e_{-\alpha}$ et le lemme 14.1 fournit $\frac{r+s}{2} = -\frac{\beta(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$. Comme tout intervalle $[r', s']$ ayant la même propriété est disjoint de $[r, s]$, son milieu $\frac{r'+s'}{2}$ est distinct de $\frac{r+s}{2}$ et ne peut donc être égal à $-\frac{\beta(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}$. L'intervalle $[r, s]$ est donc unique.

(b) Cherchons d'abord les racines $n\alpha$ où $n \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathfrak{L}^{-\alpha}$ est de dimension 1, on a $[\mathfrak{L}^{-\alpha}, \mathfrak{L}^{-\alpha}] = \{0\}$, d'où l'on déduit que le sous-espace $\sum_{n=-1}^q \mathfrak{L}^{n\alpha}$ est stable pour $\text{ad } e_\alpha$ et $\text{ad } e_{-\alpha}$; le lemme 14.1 fournit alors $q = 1$ et le théorème 13.3 d entraîne $p = -1$. Les seuls multiples entiers de α qui sont des racines sont donc $-\alpha, 0$ et α .

Supposons l'existence d'une racine $\beta = c\alpha$ où $c \in K - \mathbb{Z}$; en appliquant (a) à cette racine, on obtient $\frac{\beta+q}{2} = -c$, ce qui prouve que c est un multiple de $1/2$, et un multiple impair puisque $c \in K - \mathbb{Z}$. Comme α , $c\alpha$ et $-c\alpha$ sont des racines, (a) entraîne que $\alpha/2$ est une racine. Mais nous venons de voir que, si $\alpha/2$ est une racine, α ne peut en être une. Cette contradiction prouve qu'il n'y a aucune racine égale à $c\alpha$, sauf si $c = -1, 0$ ou 1 .

14.3. Définition. L'ensemble des racines de la forme $\beta + n\alpha$ (où α est une racine non nulle, où β est une racine quelconque et où n parcourt \mathbb{Z}) s'appelle α -échelle passant par β , ses éléments pouvant s'appeler α -échelons. Le nombre entier $q-p$ s'appelle la longueur de l' α -échelle.

14.4. Remarque. La longueur de toute échelle est ≤ 3 (ce résultat sera précisé plus tard). En effet, si une α -échelle avait une longueur plus grande, elle aurait au moins cinq α -échelons $\beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha$ et $\beta + 2\alpha$; $-\beta + 2\alpha$ serait alors une racine, de sorte que la β -échelle passant par $2\alpha - \beta$ passerait aussi par $2\alpha + \beta$; elle contiendrait alors théorème 14.1.a) l'échelon 2α , ce qui est impossible d'après 14.1.b).

14.5. Théorème. Si α et β sont deux racines telles que $\alpha + \beta \neq 0$, alors $[\mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^\beta] = \mathfrak{L}^{\alpha+\beta}$.

Démonstration. Puisque $[\mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^\beta] \subset \mathfrak{L}^{\alpha+\beta}$ et $\dim \mathfrak{L}^{\alpha+\beta} \leq 1$, il suffit de prouver que $[\mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^\beta] = 0$ entraîne $\mathfrak{L}^{\alpha+\beta} = \{0\}$. Si $[\mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^\beta] = 0$, l'espace $\sum_{n=p}^q \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ est invariant pour $\text{ad } e_\alpha$ et $\text{ad } e_{-\alpha}$, ce qui prouve que $q = 0$; mais dans ces conditions $\alpha + \beta$ n'est pas une racine et $\mathfrak{L}^{\alpha+\beta} = \{0\}$.

BIBLIOGRAPHIE pour les exposés 1 - 4.

- Bourbaki : Algèbres de Lie. Chapitre 1. Hermann, Paris 1960.
 Dynkin : The structure of semi-simple Lie algebra's, Uspekki Mat Nauk 2 (1947) 59-127 AMS Translations Series 1 Providence R.I. 19
 Helgason : Differential Geometry of symmetric spaces. Academic Press, New-York 1962.

V RACINES ET GROUPES ENGENDRES PAR DES REFLEXIONS

par J. TITS

Notes rédigées par F. BUEKENHOUT et J. JACOBS

15. RACINES ET GROUPES DE WEYL.

15. 1. INTRODUCTION. Soit \mathfrak{L} une algèbre de Lie semi-simple, B la forme de Killing de \mathfrak{L} , \mathfrak{K} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{L} et Δ l'ensemble des racines non-nulles de \mathfrak{L} par rapport à \mathfrak{K} .

On a démontré dans le chapitre précédent que pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$ on a

$$(1) \quad B(\alpha, \alpha) \neq 0$$

$$(2) \quad \frac{2B(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \alpha)} \text{ est entier}$$

$$(3) \quad \beta - \frac{2B(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Delta$$

15. 2. SYSTEMES DE RACINES. Soit V un espace vectoriel à un nombre fini de dimensions sur le corps des complexes C , muni d'une forme bilinéaire symétrique B^1 . On dit qu'un sous-ensemble fini Δ de V est un système de racines si Δ jouit des propriétés (1), (2), (3) du 15. 1.

Désignons par ρ_α la réflexion (symétrie) par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal (pour B) à l'élément α de V . La condition (3) revient à dire que Δ est invariant par ρ_α pour tout $\alpha \in \Delta$.

15. 3. ETOILES RADICIELLES. On dit qu'un ensemble fini S de droites de V est une étoile radicielle si pour tout $\alpha \in S$ on a

$$(1) \quad \alpha \text{ n'est pas isotrope}$$

(2) S est invariant par ρ_α (où ρ_α désigne la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à la droite α).

(1) Il n'est pas exclu que B soit dégénérée.

Tout système de racines détermine, de manière évidente, une étoile radicielle.

15.4. ETOILES RADICIELLES IRREDUCTIBLES. Une étoile radicielle est dite irréductible si elle n'est pas la réunion de deux étoiles radicielles orthogonales l'une à l'autre. Un système de racines est dit irréductible s'il détermine une étoile radicielle irréductible.

Si la réunion de deux étoiles radicielles S_1 et S_2 orthogonales est encore une étoile radicielle, alors S_1 et S_2 sont disjointes (sinon la condition (1) (15.3) serait en défaut).

15.5. GROUPE DE WEYL d'une étoile radicielle S . C'est le groupe engendré par les réflexions ρ_α pour tout $\alpha \in S$.

Un groupe fini de transformations linéaires, engendré par des réflexions est toujours le groupe de Weyl d'une étoile radicielle.

15.6. Théorème. Soit S une étoile radicielle et W le groupe de Weyl de S . Alors

- (i) S est réunion d'un ensemble d'étoiles radicielles irréductibles S_i ($1 \leq i \leq p$) orthogonales deux à deux et disjointes deux à deux.
- (ii) Si V_i désigne le sous-espace engendré par S_i et si V_0 désigne le sous-espace orthogonal au sous-espace $\sum_{i=1}^p V_i$ on a $V = \bigoplus_{i=0}^p V_i$.
- (iii) La restriction de la forme B au sous-espace $V^* = \bigoplus_{i=1}^p V_i$ est non-dégénérée.
- (iv) Soit B_l la forme définie par $B_l|_{V_l \times V_k} = \delta_{lj} \delta_{lk} B|_{V_l \times V_k}$ ($1 \leq i \leq p$, $0 < j, k < p$). Alors les seules formes bilinéaires symétriques invariantes par W sont les formes $\sum_{i=0}^p c_i B_i$, $c_i \in C$ ($0 \leq i < p$), B_0 étant une forme quelconque, nulle sur $V^* \times V$.
- v) W est un groupe fini.

Démonstration.

i) Soit V^* le sous-espace engendré par S . V^* est invariant par W et $W|_{V^*}$, restriction du groupe W à V^* est un groupe fini. En effet, considérons une base de V^* formée de vecteurs de longueur un appartenant à des droites de S . Il y a un nombre fini de bases ayant ces propriétés et elles sont permutées entre elles par W .

Comme un groupe fini de transformations linéaires complexes est totalement réductible, il existe des sous-espaces V_i ($1 \leq i \leq p$) de V^* invariants par W et tels que $W|_{V_i}$ est irréductible. De plus, $V^* = \bigoplus_{i=1}^p V_i$.

- c) Soit α une droite non-isotrope de V . Les sous-espaces invariants par ρ_α sont contenus dans H_α ou contiennent α . Si α est une droite de S , les V_i sont invariants par ρ_α et si V_i est contenu dans H_α , pour tout i , V^* est contenu dans H_α . Mais ceci est impossible puisque $\alpha \in V^*$ est non-isotrope. Donc, pour tout $\alpha \in S$ il existe un i ($1 \leq i \leq p$) tel que $\alpha \subset V_i$.
- d) Chacun des sous-espaces V_i contient au moins un élément de S car les V_i qui contiennent des éléments de S engendrent V^* .
- e) Soit S_i l'ensemble des droites de S contenues dans V_i .
Pour tout $j \neq i$ V_j est orthogonal à S_i (pour tout $\alpha \in S_i$, V_j est contenu dans H_α , donc orthogonal à α). S_i engendre V_i et de ce fait V_j est orthogonal à V_i .
- f) Les S_i sont des étoiles radicielles orthogonales deux à deux (et disjointes). Supposons que S_i se décompose en deux étoiles radicielles S_i^1 et S_i^2 orthogonales. Les ensembles S_i^1 et S_i^2 sont invariants par W et il en est de même des espaces V_i^1 et V_i^2 qu'ils engendrent.
Comme $W|_{V_i}$ est irréductible, l'un des $V_i^1 \cdot V_i^2$ est nécessairement nul. De ce fait, S_i est irréductible et (i) est démontré.
- g) Le noyau de $B|_{V_i \times V_i}$ est un sous-espace de V_i invariant par $W|_{V_i}$.
Comme ce dernier est irréductible et que V_i contient des vecteurs non-isotropes, le noyau est nécessairement nul. La restriction de B à $V_i \times V_i$ est donc non-dégénérée et il en va de même pour la restriction de B à V^* . (ii) et (iii) en résultent.
- (h) Soit Γ une forme bilinéaire symétrique invariante par W . Les formes $(\Gamma - \lambda B)|_{V_i}$ sont invariantes par $W|_{V_i}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. L'une de ces formes est nécessairement dégénérée. Soit $(\Gamma - \lambda_i B)|_{V_i}$ une forme dégénérée. Son noyau est différent de $\{0\}$ et invariant par W ; ce noyau est donc V_i et on a $\Gamma|_{V_i} = \lambda_i B|_{V_i}$. (iv) en résulte.
- (i) (v) est immédiat puisque $W|_{V^*}$ est fini et que $W|_{V_0}$ se réduit à la transformation identique.

15.7. **Théorème.** Soit V un espace vectoriel complexe, de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B et soit W un groupe fini irréductible de transformations orthogonales.

Alors il existe un « sous-espace réel » V_R de V , invariant par W et tel que

- 1) $\dim_R V_R = \dim_{\mathbb{C}} V$ 2) la restriction de B à V_R est définie positive.

Démonstration.

- a) Désignons par \mathcal{B} l'application linéaire de V dans son dual V' définie comme suit :

$$\langle x^{\mathcal{E}}, y \rangle = B(x, y).$$

On a ${}^t\mathcal{E} = \mathcal{E}$ puisque B est symétrique. On sait que le groupe W conserve une forme hermitienne définie positive H . Celle-ci détermine une application semi-linéaire \mathcal{H} de V dans V' , définie comme \mathcal{E} ci-dessus et telle que ${}^t\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$.

${}^t(\mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{H}) = \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{H}$ est une application linéaire de V sur V' qui détermine une forme bilinéaire symétrique A , invariante par W .

b) Les formes $\lambda B - A$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) sont également invariantes par W et l'une d'elles, au moins, est dégénérée. Comme W est irréductible, il existe donc un $k \in \mathbb{C}$ tel que $kB = A$.

c) Montrons que k est réel positif. Comme $k\mathcal{E} = \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} H(x \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1}, x \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1}) &= \langle x \mathcal{H} \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{H}, x \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \rangle = k \langle x \mathcal{E}, x \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \rangle \\ &= k \langle x, x \mathcal{H} \rangle = k H(x, x). \end{aligned}$$

d) L'application $\Gamma = (\sqrt{k})^{-1} \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1}$ est semi-linéaire de V dans V et $\Gamma^2 = 1$ (puisque k est réel positif).

L'application Γ commute avec W , donc l'ensemble V_R des points fixes de Γ est invariant par W . On va montrer que V_R répond aux conditions du théorème. Soit

x_1, \dots, x_m un ensemble maximal de vecteurs de V_R linéairement indépendants dans V et supposons qu'il existe un élément $y \in V$ tel que $y \notin \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ (sous-espace engendré par les x_i).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda y + \overline{\lambda} \Gamma(y)$ est un point fixe de Γ et appartient donc à $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$. On en déduit aussitôt que $y \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ et par conséquent $m = \dim_{\mathbb{C}} V$. L'élément $y = \sum_{i=1}^m h_i x_i$ est un point fixe de Γ si et seulement si les h_i sont réels car $\Gamma(y) = \sum_{i=1}^m \overline{h_i} x_i$.

On a donc prouvé que V_R est un espace vectoriel réel de même dimension que V . La restriction de Γ à V_R est l'identité, donc sur V_R , $\mathcal{E} = (\sqrt{k})^{-1} \mathcal{H}$ et $B = (\sqrt{k})^{-1} H$ est définie positive, ce qui achève la démonstration.

15.8. **Corollaire.** Soit V un espace vectoriel complexe, de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique quelconque B et soit W un groupe fini de transformations orthogonales engendré par des réflexions. Alors il existe un « sous-espace réel », V_R de V invariant par W et tel que

1) $\dim_R V_R = \dim_{\mathbb{C}} V$ 2) $V_R = V' \oplus V''$ où V' est un sous-espace dont tous les points sont fixes pour W et V'' un sous-espace où B est définie positive.

Démonstration.

Soit S l'ensemble des droites α contenues dans V telles que la réflexion $\rho_\alpha \in W$. S est une étoile radicielle et donne lieu à une décomposition de V en $V = \bigoplus_{i=0}^p V_i$ (théorème 15.6). $W|_{V_i}$ ($1 \leq i \leq p$) est irréductible et $B|_{V_i}$ non dégénérée. Sur V_i ($1 \leq i \leq p$) on peut donc appliquer la théorie 15.7 ce qui fournit des V_{iR} réels de même dimension que les V_i et sur lesquels B est définie positive.

Soit V' un sous-espace réel quelconque de V_0 de même dimension que V_0 et $V'' = \bigoplus_{i=1}^p V_{iR}$. Alors V' et V'' satisfont aux conditions de l'énoncé.

15.9. *Remarque.* Le théorème 15.7 peut aussi se déduire plus rapidement, mais de façon moins élémentaire, des théorèmes généraux sur les sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie.

15.10. *Théorème.* Soit Δ un système de racines. Alors

- (i) Δ est réunion d'un ensemble de systèmes de racines irréductibles Δ_i ($1 \leq i \leq p$).
- (ii) Si V_{Ri} est le « sous-espace » de V formé des combinaisons linéaires réelles en les éléments de Δ_i , V_{Ri} est engendré par des éléments linéairement indépendants dans V et $B|_{V_{Ri}}$ est définie positive à un facteur complexe près.
- (iii) Le groupe de Weyl W conserve V_{Ri} .

Démonstration (i) est immédiat grâce à 15.6 et (iii) également.

Dans Δ_i soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ un ensemble maximal d'éléments linéairement indépendants dans V_i .

Alors tout autre élément de Δ_i est combinaison linéaire réelle des α_i . En effet, soit $\beta = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$. Alors

$$2 \frac{B(\alpha_j, \beta)}{B(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 2 \frac{B(\alpha_i, \alpha_j)}{B(\alpha_j, \alpha_j)} \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{qui est un système}$$

d'équations linéaires à coefficients entiers dont le déterminant est non nul (parce que B est non-dégénérée sur V_i).

Les c_i sont donc réels.

Comme $W|_{V_{Ri}}$ est irréductible, ce groupe conserve une forme bilinéaire symétrique définie positive. Il résulte de 15.6 (iv) que $B|_{V_{Ri}}$ est égale à cette forme à un facteur complexe près.

16. GROUPE FINIS ENGENDRES PAR DES REFLEXIONS.

16.1. DEFINITION. On appelle domaine préfondamental pour un groupe G opérant sur un ensemble E , toute partie $P \subset E$ telle que $P \cap B_g = \emptyset$ pour tout $g \in G$, $g \neq 1$. L'existence d'un domaine préfondamental implique que G opère effectivement sur E .

16.2. Théorème. On se donne 1) un espace affiné réel A ; 2) un ensemble $\{H_i\} (i \in I)$ d'hyperplans dans A ; 3) pour tout $i \in I$, une réflexion affine ρ_i dont l'ensemble des points fixes est H_i ; 4) pour tout $i \in I$, l'un des deux demi-espaces ouverts déterminés par H_i , demi-espace qui sera désigné par B_i .

On suppose vérifiées les conditions suivantes 1) $B = \bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ 2) pour tout $i \neq j \in I$ $B_{ij} = B_i \cap B_j$ est un domaine préfondamental pour le groupe W_{ij} engendré par ρ_i et ρ_j .

Alors 1) B est un domaine préfondamental pour le groupe W engendré par les $\rho_i (i \in I)$; 2) si $2k_{ij}$ est l'ordre du groupe W_{ij} , W est défini, en tant que groupe abstrait, par les relations $(\rho_i \rho_j)^{k_{ij}} = \rho_i^2 = 1$ pour tout $i \neq j \in I$.

Démonstration.

a) Soit W^* le groupe abstrait engendré par des éléments ρ_i^* ($i \in I$), et défini par les relations $(\rho_i^* \rho_j^*)^{k_{ij}} = \rho_i^{*2} = 1$ ($i \neq j \in I$). Il existe un homomorphisme naturel de W^* sur W (qui applique ρ_i^* sur ρ_i) et de ce fait W^* opère sur A . Pour tout $w \in W^*$, $\ell(w)$ désigne la longueur minimale de w considéré comme mot en les ρ_i^* .

b) On achève la démonstration à l'aide des assertions suivantes qui seront établies plus loin.

(1_n). Pour tout $i \in I$ et tout $w \in W^*$ avec $\ell(w) = n$, Bw est contenu soit dans B_i , soit dans $B_i \rho_i$ et dans ce dernier cas $\ell(w \rho_i) = \ell(w) - 1$.

(2_n). Pour tout $i \neq j \in I$ et tout $w \in W^*$ avec $\ell(w) = n$, il existe $w_{ij} \in W_{ij}$ tel que $Bw \subset B_{ij} w_{ij}$ et $\ell(w) = \ell(w \cdot w_{ij}^{-1}) + \ell(w_{ij})$ (ℓ désignant la longueur de w_{ij} dans W_{ij}).

c) Montrons que (1_n) implique l'énoncé. Soit $w \in W^*$ tel que $Bw \cap B \neq \emptyset$. L'ensemble Bw est contenu dans B_i , pour tout $i \in I$ (grâce à (1_n)), donc Bw est contenu dans B . De même, $Bw^{-1} \subset B$, donc $B \subset Bw$. Par conséquent $B = Bw$.

Alors $Bw \rho_i = B \rho_i \subset B_i \rho_i$, $\ell(w \rho_i) = \ell(w) - 1$ pour tout $i \in I$ et w est l'élément neutre de W^* . De ce fait, B est un domaine préfondamental pour W^* , ce dernier opère effectivement sur A et W^* est isomorphe à W .

d) Lorsque $\text{card } I = 2$, (1_n) et (2_n) sont susceptibles de vérification élémentaire. Dans le cas général nous procédons par induction sur n ((1₀) et (2₀) sont évidents).

e) (1_n) et (2_n) entraînent (1_{n+1}) .

Si $\ell(w) = n+1$, il existe $j \in I$ et $w' \in W$ tels que $w = w' \rho_j$ avec $\ell(w') = n$

1° si $i = j$, $Bw = Bw' \rho_j$ est contenu soit dans $B_j \rho_j$, soit dans B_j en vertu de (1_n) et dans le premier cas $\ell(w \rho_j) = \ell(w') = n-1 = \ell(w) - 1$

2° si $i \neq j$, il existe $w_{ij} \in W_{ij}$ tel que $Bw' \subset B_{ij} w_{ij}$ avec

$$\ell(w') = \ell(w' \cdot w_{ij}^{-1}) + \ell(w_{ij}).$$

Alors $Bw = Bw' \rho_j \subset B_{ij} w_{ij} \rho_j = B_{ij} w'_{ij}$ avec $w'_{ij} \in W_{ij}$.

Comme (1_n) est vérifié pour W_{ij} , $B_{ij} w'_{ij}$ est contenu soit dans B_i , soit dans $B_i \rho_i$ et dans ce dernier cas $\ell(w_{ij} \rho_j \rho_i) = \ell(w_{ij} \rho_j) - 1$.

Mais $w \rho_i = (w' \cdot w_{ij}^{-1}) (w_{ij} \rho_j \rho_i)$ entraîne

$$\begin{aligned} \ell(w \rho_i) &\leq \ell(w') - \ell(w_{ij}) + \ell(w_{ij} \rho_j \rho_i) \\ &\leq n - \ell(w_{ij}) + \ell(w_{ij} \rho_j) - 1 \\ &\leq n \end{aligned}$$

et comme $\ell(w) = n+1$, on a $\ell(w \rho_i) = n$ et $\ell(w \rho_i) = \ell(w) - 1$

f) (1_n) et (2_{n-1}) entraînent (2_n) . Soit $w \in W^*$ avec $\ell(w) = n$.

Pour tout $i \in I$, Bw est contenu soit dans B_i , soit dans $B_i \rho_i$.

Pour $i \neq j \in I$ on peut se ramener à deux cas.

1° Bw est contenu dans B_i et B_j , donc dans B_{ij} et on a (2_n) .

2° Bw est contenu dans $B_i \rho_i$. Si $w' = w \rho_i$, $\ell(w') = \ell(w \rho_i) = \ell(w) - 1 = n-1$ donc il existe $w_{ij} \in W_{ij}$ tel que $Bw' \subset B_{ij} w_{ij}$ avec $\ell(w') = \ell(w' \cdot w_{ij}^{-1}) + \ell(w_{ij})$.

Alors $Bw = Bw' \rho_i \subset B_{ij} w_{ij} \rho_i$. Puisque $Bw \subset B_i \rho_i$ on a,

compte tenu de d) $\ell(w_{ij}) = \ell(w_{ij} \rho_i) - 1$. Donc finalement

$$\ell(w) = \ell(w') + 1 = \ell(w' \cdot w_{ij}^{-1}) + \ell(w_{ij} \rho_i) \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

16.3. EXEMPLE. Dans le plan euclidien, le groupe engendré par les réflexions ρ_1, ρ_2, ρ_3 par rapport aux côtés d'un triangle équilatéral est défini en tant que groupe abstrait par les relations $\rho_i^2 = (\rho_i \rho_j)^3 = 1$ ($i \neq j = 1, 2, 3$).

16.4. MATRICE DE COXETER. On appelle matrice de Coxeter $K = (k_{ij})$, $i, j \in I$, toute matrice carrée d'ordre fini ⁽¹⁾, à éléments entiers ou infinis tels que $k_{ij} = k_{ji} \geq 2$ pour tout $i \neq j$ et $k_{ii} = 1$ pour tout $i \in I$.

(1) La restriction à l'ordre fini n'est pas essentielle pour les résultats qui suivent, mais elle facilite l'exposé.

- 16.5. GROUPE DE COXETER. Soit $K = (k_{ij})$, $i, j \in I$, une matrice de Coxeter. Considérons le groupe C engendré par des générateurs ρ_i ($i \in I$) et défini par les relations $(\rho_i \rho_j)^{k_{ij}} = 1$ pour tout $i, j \in I$ (si $k_{ij} = \infty$, on convient que la relation est triviale). On appelle groupe de Coxeter $C(K)$ de type K , le groupe C dans lequel le système de générateurs $\{\rho_i\}$ est distingué ou encore, par abus de langage, le groupe C lui-même.
- 16.6. DIAGRAMME DE COXETER. On appelle diagramme de Coxeter d'une matrice de Coxeter K , ou du groupe $C(K)$, une figure formée de points et de traits, déterminée comme suit : les points sont en correspondance biunivoque avec les ρ_i et les points correspondants à ρ_i et ρ_j sont reliés par un trait $(k_{ij} - 2)$ -uple. Ainsi pour l'exemple 16.3 ci-dessus, le diagramme est un triangle.
- 16.7. SOMME DIRECTE. Soient K' et K'' deux matrices de Coxeter d'ordre n' et n'' respectivement. On appelle matrice (somme directe de K' et K'') la matrice de Coxeter K , d'ordre $n = n' + n''$ définie par $k_{ij} = k'_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq n'$), $k_{ij} = k''_{(i-n')(j-n')}$ ($n' < i, j \leq n$) et $k_{ij} = 2$ dans les autres cas. Une matrice de Coxeter K sera dite irréductible si elle n'est pas somme directe de deux matrices de Coxeter. Si K est somme directe des matrices K' et K'' , le groupe de Coxeter $C(K)$ est produit direct des groupes $C(K')$ et $C(K'')$. Aux facteurs directs d'une matrice K correspondent biunivoquement les « composantes connexes » du diagramme de K , en particulier, K est irréductible si et seulement si son diagramme est connexe.
- 16.8. Théorème. On se donne une matrice de Coxeter K d'ordre n , un espace vectoriel réel V de dimension n , un ensemble $\{H_i\}$ $1 \leq i \leq n$ d'hyperplans linéairement indépendants dans V et pour chaque i , un demi-espace ouvert B_i délimité par H_i . Alors il existe des réflexions ρ_i ayant les H_i pour hyperplans de points fixes et satisfaisant aux conditions du théorème 16.2 où les k_{ij} sont les éléments de la matrice K .
- Démonstration.* Dans V' , l'espace dual de V , H_i détermine une droite sur laquelle on choisit un vecteur u'_i (pour tout $i \in I$). Les u'_i forment une base et nous considérons la forme bilinéaire F sur $V' \times V'$ définie par $F(u'_i, u'_j) = -\cos \frac{\pi}{k_{ij}}$. Soit ρ'_i l'application de V' sur V' définie par $x \rightarrow x - 2F(u'_i, x) \cdot u'_i$ et ρ_i l'application contragrédiente de ρ'_i dans V , définie par $\langle \rho_i(x), \rho'_i(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in V$, $y \in V'$. On vérifie aisément que les ρ_i répondent aux conditions de l'énoncé.

16.9. REPRESENTATION NATURELLE. On appelle représentation naturelle d'un groupe de Coxeter $C(K)$ toute représentation du type décrit dans l'énoncé du théorème 16.8. Lorsque nous parlerons de la représentation naturelle de $C(K)$ il s'agira toujours de celle qui a été explicitée dans la démonstration du théorème 16.8.

16.10. MATRICES SPHERIQUES, EUCLIDIENNES ET HYPERBOLIQUES.

On dit qu'une matrice de Coxeter $K = (k_{ij})$ ($i, j \in I$) d'ordre n est sphérique (resp. euclidienne, hyperbolique) s'il existe un simplexe sur une sphère (resp. dans un espace euclidien, dans un espace hyperbolique) de dimension $(n-1)$, dont les faces de codimension un sont indexées par I de telle manière que l'angle des faces d'indices i, j soit égal à $\frac{\pi}{k_{ij}}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

En 16.3 on a un exemple de matrice euclidienne.

16.11. **Théorème.** Etant donnée une matrice de Coxeter K , les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) K est sphérique
- (ii) $C(K)$ est fini.
- (iii) $\sum_{i,j} (-\cos \frac{\pi}{k_{ij}} x_i x_j)$ est définie positive
- (iv) $C(K)$ possède une représentation naturelle par un groupe d'isométries d'un espace euclidien.

Dans ce cas $C(K)$ possède une seule représentation naturelle, à équivalence près.

Démonstration.

- a) (i) implique (ii). En effet, en projetant le simplexe sphérique depuis le centre de la sphère on obtient un cône simplicial B dont les faces ont des angles $\frac{\pi}{k_{ij}}$.

L'application du théorème 16.2 fournit une représentation naturelle dont le domaine fondamental B possède un angle solide fini non nul. Ce domaine B ne possède donc qu'un nombre fini de transformés.

- b) (ii) implique (iii). Il suffit de considérer le cas où K est irréductible. Si $C(K)$ est fini, la représentation naturelle possède une forme définie positive invariante. Comme K est supposée irréductible, les réflexions ρ_i de $C(K)$ déterminent une étoile radicielle irréductible, donc la représentation naturelle de $C(K)$ est irréductible et il n'y a qu'une seule forme invariante à un facteur près. Comme $\sum_{i,j} (-\cos \frac{\pi}{k_{ij}} x_i x_j)$ est positive sur la base, on a (iii).
- c) (iii) implique (iv). Evident.
- d) (iv) implique (i). Une sphère est coupée par le domaine fondamental B suivant un simplexe qui possède les propriétés requises.

e) Partons d'une représentation naturelle quelconque. Elle conserve une forme définie positive parce que $C(K)$ est fini. L'angle des hyperplans H_i et H_j est $\frac{\pi}{k_{ij}}$ en vertu de 16.2 et 16.8 donc notre représentation n'est autre que la représentation naturelle. La dernière assertion du théorème est donc démontrée.

16.12. Nous donnons les résultats qui suivent sans démonstrations.

Etant donnée une matrice de Coxeter K les propriétés a) (resp. b, c, d) ci-dessous sont équivalentes.

a. (i) K est sphérique.

(ii) Dans toute représentation naturelle de $C(K)$ le cône Ω réunion des adhérences de B et de ses transformés est l'espace tout entier.

b. (i) K est euclidienne.

(ii) La forme quadratique $\sum_{i,j} \left(-\cos \frac{\pi}{k_{ij}} x_i x_j \right)$ est semi-définie positive et de rang $(n-1)$.

(iii) Le cône Ω est un demi-espace.

Dans ce cas il n'y a qu'une représentation naturelle « projective » de $C(K)$ à équivalence près.

c. (i) K est hyperbolique.

Le cône Ω est un cône quadratique ouvert d'indice un (plus l'origine).

Dans ce cas il n'y a qu'une représentation naturelle de $C(K)$ et la forme quadratique associée est hyperbolique normale.

d. (i) K est sphérique, euclidienne ou hyperbolique.

(ii) Tous les diagrammes résiduels de K , obtenus en retirant un sommet du diagramme de K et tous les traits qui y aboutissent, sont du type sphérique.

16.13. DIAGRAMMES SPHERIQUES, EUCLIDIENS ET HYPERBOLIQUES.

Nous donnons une description complète de ces diagrammes. Pour les démonstrations on peut se référer à :

H. S. M. COXETER - The complete enumeration of finite groups of the form

$$R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1 \quad \text{J. Lond. Math. Soc. 10 (21-25) 1935}$$

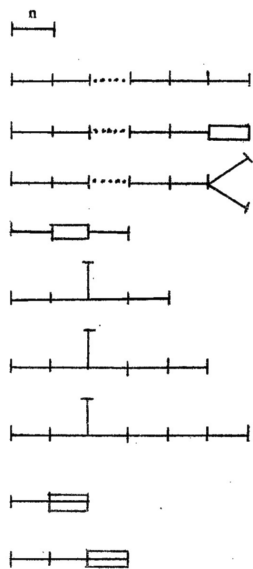
F. LANNER - On complexes with transitive groups of automorphisms

Medd. Lunds-univ. Math. Sem. 11(1-71) 1950

E. WITT - Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe

Abh. - Math - Sem - Univ. Hamburg 14 (289-322) 1941.

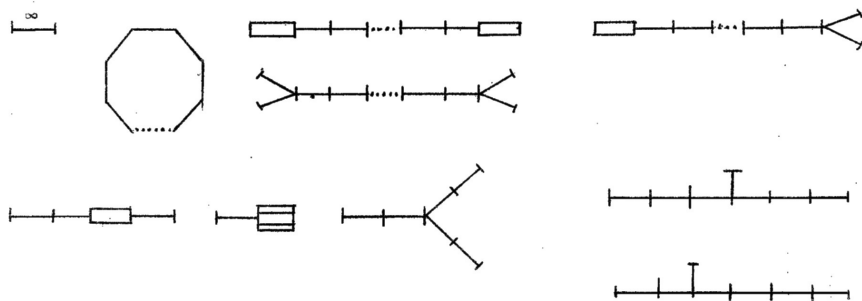
Diagrammes sphériques irréductibles



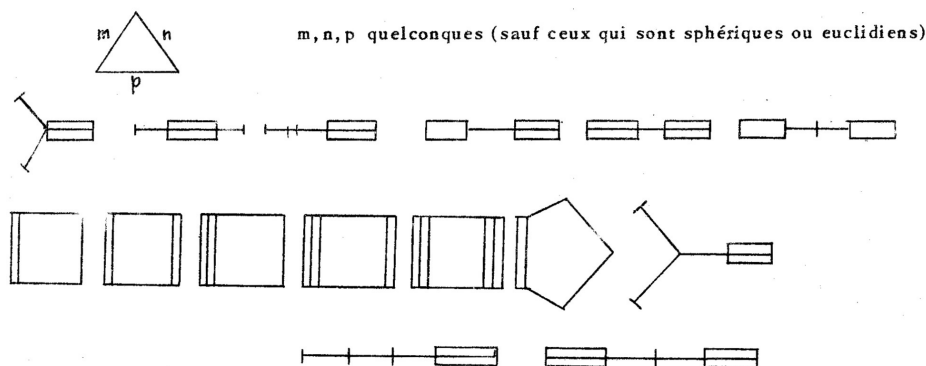
Les autres diagrammes sphériques sont donnés par toutes les réunions disjointes des diagrammes ci-dessus.

Diagrammes euclidiens :

Ces diagrammes sont tous irréductibles.



Diagrammes hyperboliques : ces diagrammes sont tous irréductibles.



16. 14 **Théorème.** Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension n , \mathcal{H} un ensemble d'hyperplans tel que le groupe W engendré par les réflexions ρ_H par rapport aux hyperplans $H \in \mathcal{H}$ conserve l'ensemble \mathcal{H} et soit fini. Appelons chambres, les composants connexes du complémentaire de $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ et murs d'une chambre. Les H qui contiennent une face de codimension un de la chambre. Alors

- (i) W est simplement transitif sur les chambres.
- (ii) Les chambres sont des cônes simpliciaux et le groupe W est engendré par les réflexions par rapport aux murs d'une chambre.
- (iii) W est une représentation d'un groupe de Coxeter.
- (iv) Les seules réflexions appartenant à W sont les ρ_H avec $H \in \mathcal{H}$.

Démonstration.

a. Soit C une chambre et H_1, \dots, H_n les murs de C . Le groupe W^* engendré par les $\rho_i = \rho_{H_i}$, $1 \leq i \leq n$ est un groupe de Coxeter $C(K)$ en vertu du théorème 16.2. Comme W est fini, $C(K)$ est fini et si $\frac{\pi}{k_{ij}}$ est l'angle des hyperplans H_i et H_j

($i \leq i, j \leq n$), la forme $\sum_{i,j} (-\cos \frac{\pi}{k_{ij}} x_i x_j)$ est définie positive.

b. Montrons que les $H_i (1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants. Il leur correspond des droites du dual V' sur lesquelles nous choisissons des vecteurs $u_i (i \leq i \leq n)$.

L'angle $\widehat{u_i, u_j} = \pi - \frac{\pi}{k_{ij}}$.

Supposons que $\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$. Alors $\sum_{i,j} (u_i, u_j) a_i a_j = 0$, ($(,)$ désignant la forme métrique de V'). On a donc

$$\sum_{i,j} \cos \frac{\pi}{k_{ij}} a_i a_j = 0 \quad \text{d'où} \quad a_i = 0 \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n.$$

On a donc prouvé que les chambres sont des cônes simpliciaux.

- c. Soit Ω la réunion des adhérences de C et de ses transformés par W^* .
 Tout point frontière du cône Ω est point frontière de C ou de l'un de ses transformés.
 Or les éléments des faces de codimension un d'une chambre ne peuvent être des points frontière de Ω . Il en résulte que la frontière est contenue dans une réunion finie de faces de codimension deux. Cette situation étant impossible le cône Ω est l'espace tout entier.
- d. Il en résulte que W^* est transitif sur les chambres et simplement transitif puisque la chambre C est un domaine préfondamental pour W^* . Il suffit de montrer que $W^* = W$ ou encore que W^* contient toutes les réflexions ρ_H . Soit H un hyperplan dans \mathcal{H} . Il est le mur d'au moins une chambre C_1 . Il existe $w \in W^*$ tel que Hw soit un mur de C . Donc $Hw = H_i$ et comme $\rho_{H_i} \in W^*$, $w \rho_H$; $w^{-1} = \rho_H$ appartient également à W^* .
- e. Si ρ_H est une réflexion appartenant à W avec H n'appartenant pas à \mathcal{H} , H traverse une chambre C et alors $C \cap C \rho_H$ n'est pas vide ce qui est impossible.
 (iv) est donc établi.

16. 15. **Théorème.** *Les hypothèses étant celles du théorème 16.14, soit C une chambre, et F une face relativement ouverte⁽¹⁾ de C . Alors le groupe de stabilité de F est aussi le groupe de stabilité de chacun de ses points. Il est engendré par les réflexions par rapport aux murs de C qui contiennent F et il est simplement transitif sur les chambres dont F est une face.*

Démonstration.

Soit P un point de F et V_1 l'espace orthogonal à F en P . Nous considérons V_1 comme un espace vectoriel centré en P . Alors $V_1 \cap C = C_1$ est localement un cône simplicial. Les murs de C qui contiennent F découpent dans V_1 les murs de C_1 . Les réflexions par rapport aux murs de C qui contiennent F induisent dans V_1 les réflexions par rapport aux murs de C_1 . Les transformés du cône C_1 par ces réflexions et leurs produits remplissent V_1 (par le théor. 16.14). Soit G le groupe engendré par les réflexions par rapport aux murs de C qui contiennent F . Localement C est produit direct de F et du cône C_1 . Par conséquent, les transformés de C par les éléments du groupe G forment un ouvert entourant P . On a donc simultanément les résultats qui suivent : le groupe G est le groupe de stabilité de P , le groupe G est transitif sur les chambres dont F est une face, F est invariant par G donc le groupe de stabilité de P conserve F . Pour achever la démonstration il suffit de constater que toute transformation w conservant F envoie C sur une chambre C' dont F est une face. De ce fait w appartient au groupe G car il n'y a qu'une transformation dans W qui envoie C sur C' . Le groupe de stabilité de F est donc confondu avec celui de P .

(1) i. e. ouverte dans la variété linéaire qu'elle engendre.

16. 16. **Corollaires.**

- (i) Si un point d'une face est invariant, tous les points de la face sont invariants et si une face est invariante, tous ses points le sont.
- (ii) Si un hyperplan $H \in \mathcal{H}$ contient un point d'une face, il contient toute la face.
- (iii) Chaque hyperplan $H \in \mathcal{H}$ détermine une partition de l'espace. Alors la partition intersection des précédentes est constituée exactement par les faces des chambres.
- (iv) Deux faces d'une même chambre ne sont jamais équivalentes.
- (v) Si un point P d'une face F_1 de la chambre C_1 est adhérent à une face F_2 d'une chambre C_2 , F_1 est adhérent à F_2 .
- (vi) Soit un ensemble d'hyperplans H_1, H_2, \dots, H_p linéairement indépendants, appartenant à \mathcal{H} . Alors il existe une chambre C telle que $H_1, H_1 \cap H_2, \dots, H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$ contiennent respectivement des faces de codimension $1, 2, \dots, p$.

Démonstration.

- a. (i), (ii), (iii) sont immédiats.
- b. Prouvons (iv). Si $w \in W$ transforme une face F_1 de la chambre C en une face F_2 de C alors w transforme C en une chambre C' qui contient F_2 . En vertu du théorème 15.15, il existe une transformation w' du groupe qui conserve F_2 et ramène C' sur C . Alors, ww' conserve C et est donc l'identité. Il s'en suit que $F_1 = F_2 w^{-1} = F_2 w' = F_2$.
- c. Prouvons (v). Comme $P \in F_1$ est adhérent à C_1 et C_2 , il existe une transformation du groupe qui transforme C_1 en C_2 et qui conserve F_1 et P . Alors F_1 et F_2 sont des faces de C_2 et on est ramené à un cône simplicial où (v) est évident.
- d. Prouvons (vi). $H_1 \cap \dots \cap H_p$ est une variété linéaire de codimension p qui contient certainement des faces de codimension p . Soit C_p une telle face. $H_1 \cap \dots \cap H_{p-1}$ est couvert par les adhérences de faces de codimension $(p-1)$. Parmi celles-ci, il en est qui contiennent un point de C_p dans leur adhérence et de ce fait elles contiennent C_p dans leur adhérence (corol. v). En procédant par induction sur p , (vi) en résulte.

16. 17. **DEMI-ESPACES RADICIELS FONDAMENTAUX.**

Conservons les hypothèses du théorème 16.14. Nous appelons hyperplans radiciels les murs de toutes les chambres et demi-espaces radiciels, les demi-espaces fermés limités par des hyperplans radiciels.

Étant donnée une chambre C , nous dirons qu'un demi-espace radiciel est fondamental (par rapport à C) s'il contient C et si sa frontière est un mur de C .

Si H est la frontière du demi-espace radiciel D on désigne par ρ_D la réflexion ρ_H .

16. 18. **Théorème.** *Les hypothèses étant celles du théorème 16.14 soit C une chambre, D un demi-espace radiciel fondamental et $w \in W$ tel que Dw soit également fondamental. Alors il existe une décomposition $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_p$ telle que $D_i = Dw_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_i$ soit fondamental pour tout $1 \leq i \leq p$ et que w_{i+1} appartienne au groupe engendré par ρ_{D_i} et $\rho_{D_{i+1}}$ sauf si $\rho_{D_i} = \rho_{D_{i+1}}$ auquel cas w_{i+1} appartient à un groupe engendré par ρ_{D_i} et une autre réflexion ρ_{D_j} .*

Démonstration.

Nous procédons par induction sur le nombre n d'hyperplans radiciels qui séparent C et Cw (ce nombre s'avère égal à la longueur de w comme mot en les ρ_i).

Soit H_1 un hyperplan radiciel qui sépare C et Cw et considérons le groupe G engendré par ρ_{H_1} et ρ_{H_w} . Le dièdre $E = D_1 \cap Dw$ est un domaine préfondamental pour ce groupe et l'un de ses transformés contient Cw . Soit E_w ce transformé avec w_p engendré par

ρ_{H_1} et ρ_{H_w} . Alors Cw_p n'est séparé de C que par des hyperplans contenant leur face commune de codimension deux c'est-à-dire par des hyperplans qui délimitent des dièdres transformés de E par G . De ce fait les hyperplans qui séparent C et Cw_p séparent également C et Cw et le nombre d'hyperplans séparant Cw_p et Cw est strictement inférieur à n . Donc le nombre d'hyperplans séparant C et $Cw \cdot w_p^{-1}$ est également strictement inférieur à n .

La démonstration s'achève par induction sur p . Il suffit de montrer que $Dw \cdot w_p^{-1}$ est fondamental et que w_p appartient au groupe engendré par $\rho_{D_{p-1}}$ et $\rho_{D_p} = \rho_{D_w}$.

Pour vérifier que $Dw \cdot w_p^{-1}$ est fondamental par rapport à C il suffit de vérifier que Dw est fondamental par rapport à Cw_p ou encore que Hw est un mur de Cw_p . Mais ceci résulte du fait que Hw est un mur du dièdre E_w . Enfin pour montrer que w_p appartient au groupe engendré par $\rho_{D_{p-1}}$ et ρ_{D_w} il suffit d'observer que $\rho_{D_{p-1}} = \rho_{D_w \cdot w_p^{-1}}$ et que cette dernière réflexion est dans G .

16. 19. **Théorème.** *Etant donné un groupe de Coxeter $C(K)$ il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

- (i) *Les deux générateurs ρ_i et ρ_j sont conjugués dans $C(K)$.*
- (ii) *Il existe une suite d'indices $i = i_1, i_2, \dots, i_p = j$ telle que k_{i_t}, i_{t+1} soit impair (∞ n'est pas impair).*

Ceci est un corollaire immédiat du théorème précédent (lorsque $C(K)$ est fini) mais on peut aussi en donner la démonstration très simple suivante :

a. (ii) implique (i). Il suffit de montrer que k_{i_j} impair implique que ρ_i et ρ_j sont conjugués. Soit $k_{ij} = 2k - 1$

$$(\rho_1 \rho_2)^{k-1} \cdot \rho_1 \text{ est une involution qui transforme } \rho_2 \text{ en}$$

$$(\rho_1 \rho_2)^{k-1} \cdot \rho_1 \rho_2 \cdot \rho_1 (\rho_2 \rho_1)^{k-1} = (\rho_1 \rho_2)^{2k-1} \rho_1 = \rho_1$$

b) non (ii) implique non (i). Soit K' la matrice de Coxeter définie par $k'_{ij} = k_{ij}$ si k_{ij} est impair et $k'_{ij} = 2$ si k_{ij} est pair.

Il existe un homomorphisme naturel de $C(K)$ dans $C(K')$.

Soient ρ_i et ρ_j deux générateurs distingués de $C(K)$, et ρ'_i et ρ'_j les générateurs correspondants de $C(K')$. S'il n'existe pas de suite du type (ii) ρ_i et ρ'_j sont représentés par des sommets du diagramme de K' appartenant à des composantes connexes différentes ; ils appartiennent donc à des facteurs directs distincts de $C(K')$ et ne peuvent être conjugués. Il s'en suit que ρ_i et ρ_j ne sont pas conjugués dans $C(K)$.

16. 20. *Remarque.* Moyennant certaines précautions les résultats obtenus de 16.15 à 16.18 demeurent valables pour un groupe de Coxeter quelconque.

17. SYSTEMES DE RACINES.

17.1. RAPPELS. Soit Δ un système de racines irréductible dans l'espace vectoriel V sur C muni de la forme bilinéaire symétrique B et soit V_R l'ensemble des combinaisons linéaires réelles des racines. La restriction de B à V_R est définie positive à un facteur complexe près et nous supposons toujours que B a été choisie de manière à ce que ce facteur soit réel positif. L'espace V_R est engendré, sur R , par des éléments linéairement indépendants dans V (15.10). Le groupe Weyl W du système Δ est un groupe de Coxeter (16.14) du type sphérique. Dans ce qui suit nous travaillons dans V_R .

17.2. SYSTEMES DE RACINES DE RANG DEUX (W possède deux générateurs).

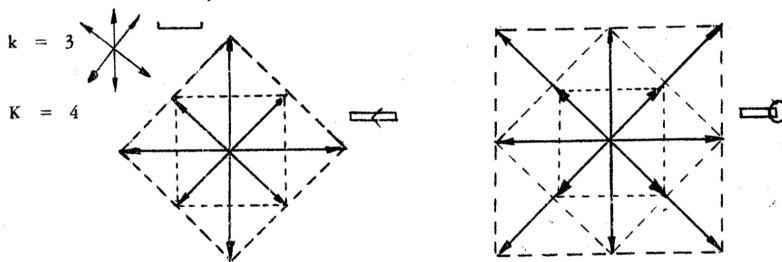
Si α et β sont deux racines d'un tel système, $\frac{4B(\alpha, \beta)^2}{B(\alpha, \alpha) \cdot B(\beta, \beta)}$ est entier, donc $4 \cos^2(\widehat{\alpha\beta})$ est entier et on a les relations $\cos^2(\widehat{\alpha\beta}) = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ ou $\widehat{\alpha\beta} = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 0^\circ$. L'ordre k de $(\rho_\alpha \cdot \rho_\beta)$ dans le groupe de Weyl prend les valeurs $k = 2, 3, 4, 6, 0$.

La condition $\frac{2 \cdot B(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \alpha)}$ entier signifie que la projection de β sur α est un

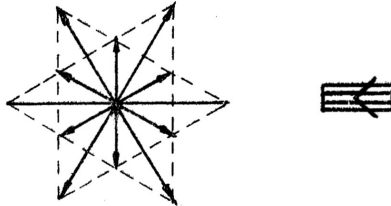
multiple entier de $\frac{\alpha}{2}$. En particulier, si $\alpha = m\beta$ avec $|m| \geq 1$ on doit avoir $m = \pm 1$ ou $m = \pm 2$.

Examinons les différentes valeurs de k .

$k = 2$ fournit un système réductible



$k = 6$



La flèche placée sur un trait se dirige de la racine la plus grande vers la racine la plus petite. Un sommet entouré d'un cercle représente une paire de racines dont l'une est double de l'autre.

17.3. SYSTEMES DE RACINES IRREDUCTIBLES DE RANG QUELCONQUE.

Etant donné un système de racines Δ , le groupe de Weyl qu'il détermine est isomorphe à un groupe de Coxeter sphérique, dont il fournit une représentation naturelle. Soit C une chambre fondamentale dans cette représentation. A chaque sommet du diagramme de Coxeter correspond un mur de C , donc une racine au moins dans Δ . Deux racines linéairement indépendantes déterminent un plan et un sous-système de racines de rang deux, auquel correspond une liaison binaire du diagramme de Coxeter. Cette liaison binaire est éventuellement complétée par une flèche ou un cercle entourant un sommet suivant les conventions introduites en 17.2.

Le diagramme complété de Δ est le diagramme de Coxeter dont chaque liaison binaire est complétée de la manière indiquée ci-dessus.

17.4. **Théorème.** Un système de racines irréductible Δ est déterminé par son diagramme complété. Pour qu'un diagramme complété connexe soit le diagramme d'un système de racines il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i) Le diagramme de Coxeter sous-jacent est sphérique.
- (ii) Chaque liaison binaire est de l'un des types




Démonstration.

- a. Si un diagramme complété est le diagramme d'un système de racines il satisfait (i) et (ii) grâce à 17.2).
- b. Supposons (i) et (ii) vérifiés et soit C une chambre fondamentale dans la représentation naturelle du groupe de Coxeter sous-jacent au diagramme. Pour chaque hyperplan fondamental H on choisit une racine orthogonale à H et l'on s'arrange pour que la condition 15.1. (2) soit respectée pour ces racines ce qui est possible grâce au fait qu'il n'y a pas de cycles dans les diagrammes ⁽¹⁾

(1) Ici on utilise partiellement la classification des diagrammes sphériques. On pourrait s'en passer en ajoutant une condition à l'énoncé du théorème.

On transforme toutes ces racines de toutes les manières possibles par le groupe de Weyl W et on obtient un ensemble de racines pour lequel nous devons vérifier les conditions 15.1. (2) . (3).

Notons qu'à ce stade nous avons prouvé l'unicité de la solution car la construction indiquée ci-dessus est possible d'une seule façon (à une homothétie près).

Pour les hyperplans fondamentaux on n'a pu obtenir de nouvelles racines. En effet si H_1 et H_2 sont deux hyperplans fondamentaux et si $w \in W$ transforme H_1 en H_2 les réflexions correspondantes ρ_1 et ρ_2 sont reliés par une chaîne du type  dans le diagramme de Coxeter. De ce fait les racines correspondant aux extrémités de la chaîne ont même longueur.

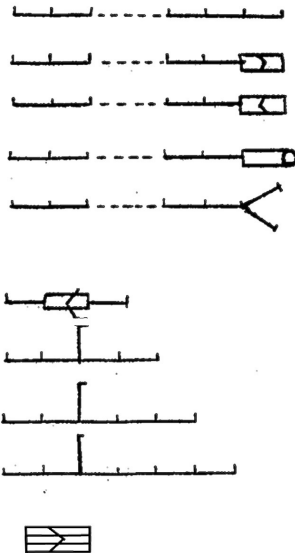
Il reste à prouver que deux racines quelconques vérifient la condition d'entier.

Soient α_1, α_2 ces racines et H_1, H_2 les hyperplans correspondants. Le corollaire

16.16 (vi) nous apprend qu'il existe une chambre C' telle que $H_1, H_1 \cap H_2$ contiennent des faces de codimension 1, 2 de C' . Par une transformation du groupe de Weyl on peut se ramener au cas où C' est la chambre fondamentale C , H_1 un hyperplan fondamental et H_2 un hyperplan qui contient une face de codimension deux de C .

Soit H'_2 l'hyperplan fondamental qui contient $H_1 \cap H_2$ L'hyperplan H_2 est conjugué soit à H'_2 soit à H_1 (théorème 16.15) et de ce fait on est ramené à une vérification pour le rang deux.

17.5. DESCRIPTION DES SYSTEMES DE RACINES.



17.6. RACINES POSITIVES ET RACINES SIMPLES.

Soit Δ un système de racines irréductibles dans $V_{\mathbb{R}}$ avec B définie positive. Considérons un hyperplan ne contenant aucune racine et appelons racines positives, toutes les racines situées d'un même côté de l'hyperplan. Les racines positives engendrent un cône convexe et nous appelons racines simples, les plus petites racines situées sur les arêtes du cône.

17.7. **Théorème.** Soit Δ un système de racines. Alors

- (i) Pour tout système de racines simples dans Δ , il existe une chambre fondamentale telle que les racines simples soient orthogonales aux murs.
- (ii) Tous les systèmes de racines simples sont équivalents pour le groupe de Weyl.
- (iii) Toute racine positive est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de racines simples.
- (iv) Si α est une racine positive non simple, il existe une racine simple α_i telle que $\alpha - \alpha_i$ soit une racine positive.
- (v) Si α est une racine simple, ρ_{α} transforme toute racine positive non proportionnelle à α en une racine positive.

Démonstration.

En se donnant un système de racines simples dans Δ on a choisi un hyperplan H . Soit d la droite orthogonale à H . Alors d est dans une chambre C (sinon il y aurait des racines dans H).

Les racines positives situées sur les droites perpendiculaires aux murs de C engendrent un cône convexe γ intérieur au cône convexe des racines positives. Toute racine positive est intérieure à γ sinon l'hyperplan correspondant traverserait C . De ce fait γ coïncide avec le cône des racines positives et (i) est établi. Comme toutes les chambres sont équivalentes pour le groupe de Weyl (ii) résulte de ce qui précède.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines simples. Alors pour toute racine positive α on a

$$\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \quad \text{où} \quad c_i \geq 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Comme $0 < B(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^n c_i B(\alpha_i, \alpha)$ et que B est définie positive l'un au moins des $B(\alpha_i, \alpha)$ est strictement positif.

Donc pour toute racine positive α il existe une racine simple α_i dont l'angle avec α est inférieur à 90° . Alors $\alpha - \alpha_i$ est une racine et même une racine positive (α et α_i déterminent un sous-système de rang deux et il suffit de vérifier la propriété pour tous ces systèmes en 19.2). On a donc prouvé (iv).

Prouvons (iii). Soit β une racine positive et $\beta = \sum_{i=1}^p c_i \alpha_i$ où on suppose cette fois que les c_i sont strictement positifs (donc $p \leq n$).

Dans le sous-système de racines engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ il y a une racine simple α_i ($1 \leq i \leq p$) telle que $\beta - \alpha_i$ soit racine positive. Ce raisonnement peut être répété pour $(\beta - \alpha_i)$, etc... Il en résulte que les c_i sont tous entiers.

Pour prouver (v) on est immédiatement ramené à une vérification pour les systèmes de rang deux.

17.8. SYSTEMES EQUIVALENTS.

Théorème. Soient V, V' des espaces vectoriels réels de même dimension, Δ et Δ' des systèmes de racines qui engendrent V et V' respectivement. On suppose donnée une application biunivoque ϕ de Δ sur Δ' telle que pour tout $x, y \in \Delta$ on ait $\phi(x+y) = \phi_x + \phi_y$ et réciproquement (à des racines opposées correspondent des racines opposées). Alors ϕ s'étend de manière unique en une application linéaire Ψ de V sur V' telle que dans chaque partie irréductible V_i la forme quadratique $\Psi(B/V_i) = k_i B'/\Psi(V_i)$.

Démonstration.

Soit une base de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans V et $\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_p)$ leurs images dans V' .

Le choix de cette base détermine une application linéaire ψ de V dans V' dont la restriction à Δ est ϕ grâce au théorème 17.7. Alors l'image de V par ψ dans V' est V' lui-même puisque Δ' engendre V' .

Pour la dernière partie du théorème on peut se limiter à la considération des parties irréductibles V_i et il suffit de se rappeler qu'il n'y a qu'une seule forme quadratique invariante par le groupe de Weyl dans V_i (15.6).

VI BASES DE CHEVALLEY

par Jacques TITS

exposés rédigés par Pierre DELIGNE

1. Préliminaires.

On a vu que toute algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{L} contenait une sous-algèbre de Cartan. Si \mathfrak{H} est l'une d'elle, \mathfrak{H} est muni d'un système de racines Δ et \mathfrak{L} se décompose en somme directe $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{L}^\alpha$ où les \mathfrak{L}^α sont unidimensionnels. Pour $e_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$,

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad (h \in \mathfrak{H})$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta \neq 0, \alpha + \beta \notin \Delta \\ N_{\alpha, \beta} e_{\alpha + \beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \Delta, N_{\alpha, \beta} \neq 0 \end{cases}$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = B(e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha, \text{ où } h_\alpha \text{ est le vecteur de } \mathfrak{H} \text{ tel que } \alpha(h) = B(h_\alpha, h), B(e_\alpha, e_{-\alpha}) \neq 0$$

Posons $H_\alpha = 2 \frac{h_\alpha}{B(h_\alpha, h_\alpha)}$, et prenons des e_α tels que $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_\alpha$. Alors,

$$[H_\alpha, e_\beta] = 2 \frac{B(h_\alpha, h_\beta)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} e_\beta \quad \text{où le coefficient est entier. En particulier,}$$

$[H_\alpha, e_\alpha] = 2 e_\alpha, [H_\alpha, e_{-\alpha}] = -2 e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_\alpha$ et $H_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha}$ forment la base d'une sous-algèbre isomorphe à SL_2 , une base correspondante de SL_2 étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

L'existence d'une décomposition du type précédent caractérise les algèbres de Lie semi-simples :

Proposition 1 :

Si une algèbre de Lie sans centre \mathfrak{L} admet une décomposition $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{L}^i$ où

- \mathfrak{H} est commutative et les \mathfrak{L}^i sont unidimensionnels
- $[\mathfrak{H}, \mathfrak{L}^i] \subset \mathfrak{L}^i$; pour $e \in \mathfrak{L}^i$, $[h, e] = \alpha_i(h)e$. Les α_i sont non nuls et distincts
- $\forall i \in I \exists j$ et une droite d dans \mathfrak{H} tels que $d \oplus \mathfrak{L}^i \oplus \mathfrak{L}^j$ soit isomorphe à SL_2

Alors \mathfrak{L} est semi-simple.

DEMONSTRATION.

Les algèbres de Lie semi-simples sont celles dont le radical \mathfrak{r} , plus grand idéal résoluble, est nul. Le critère de Cartan exprime l'équivalence de cette condition avec la non dégénérescence de la forme de Killing - \mathfrak{L} étant un \mathfrak{H} - module semi-simple, \mathfrak{r} est somme de sous-espaces unidimensionnels stables par \mathfrak{H} . Si $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{H} \neq 0$, le centre étant nul, il existe i tel que $[\mathfrak{r} \cap \mathfrak{H}, \mathfrak{L}^i] \neq 0$. De toute façon donc un \mathfrak{L}^i est dans \mathfrak{r} , si $\mathfrak{r} \neq 0$, ce qui est absurde car alors l'intersection de \mathfrak{r} et d'une sous-algèbre isomorphe à SL_2 serait non nulle, et le radical de SL_2 est nul (exercice)

\mathfrak{L} détermine complètement la structure des systèmes de racines de ses sous-algèbres de Cartan. De façon plus précise

Proposition 2 .

Dans une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{L} , les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées par automorphisme intérieur .

DEMONSTRATION.

Soit H une sous-algèbre de Cartan,

Posons $e_{\alpha_i} \in \mathfrak{L}^{\alpha_i}$, et soit $\varphi : C^\Delta \times H \rightarrow \mathfrak{L} : \exp(t_1 e_{\alpha_1}) \dots \exp(t_n e_{\alpha_n}) [h]$, ou $\alpha_1 \dots \alpha_n$ est une énumérations des racines. La différentielle de φ pour $t_i = 0$ est

$dt_1 \alpha_1(h) e_{\alpha_1} + \dots + dt_n \alpha_n(h) e_{\alpha_n}$, de rang maximum lorsque h n'est sur aucun hyperplan radiciel, et d'image transversale à H . Si U est l'ouvert de H complémentaire des hyperplans radiciels, $\varphi(C^\Delta \times U)$ contient un ouvert. U est un ouvert de Zariski et φ est algébrique, parce que les e_α sont nilpotents ; $\varphi(C^\Delta \times U)$ est donc une partie quasi-fermée pour la topologie de Zariski, et puisqu'elle contient un ouvert, elle contient un ouvert partout dense.

Soit H_1 une seconde sous-algèbre de Cartan, et U_1 le complémentaire dans H_1 de ses hyperplans radiciels, φ_1 comme plus haut. $\varphi(C^\Delta \times U) \cap \varphi_1(C^{\Delta_1} \times U_1) \neq \emptyset$, car ce sont deux parties quasi-fermées denses. Il existe donc $u \in U$, $u_1 \in U_1$, $\sigma \in \text{int}(\mathfrak{L})$, $\sigma_1 \in \text{int}(\mathfrak{L}_1)$ tels que $\sigma(u) = \sigma_1(u_1)$, $u_1 \subset \alpha_1^{-1} \sigma(u)$: u et u_1 sont conjugués par $\sigma^{-1} \sigma_1 \in \text{Int}(\mathfrak{L})$. Comme H et H_1 sont les centraliseurs de u et u_1 , on a $\sigma^{-1} \sigma_1(H) = H_1$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité des algèbres de Lie correspondant aux diagrammes sphériques, la méthode la plus élégante est de passer par la théorie des représentations. L'esprit est le suivant (voir Jacobson ; Lie Algebras) :

a) on considère l'algèbre de Lie \mathfrak{L}' engendrée par \mathfrak{H} et des $E_\alpha, E_{-\alpha}$ correspondant à un système de racines simples, et soumis aux seules relations :

\mathfrak{H} commutatif ,

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha \quad [H, E_{-\alpha}] = -\alpha(H) E_{-\alpha} ,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha ,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = 0 . \quad (\text{N.B : si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont racines simples, } \alpha - \beta \text{ n'est pas racine})$$

b) on étudie les représentations irréductibles fini-dimensionnelles de cette algèbre (de dimension infinie), la théorie des poids dominants s'applique .

c) le quotient \mathfrak{L} de \mathfrak{L}' par l'annulateur de toutes les représentations irréductibles fini-dimensionnelles est l'algèbre de Lie correspondant au diagramme considéré.

La lacune de cette méthode est de ne pas fournir de formules explicites. Dans ce qui suit, on va trouver une base dans laquelle le crochet s'exprime simplement. et avec des coefficients entiers, ce qui est important lorsqu'on passe des groupes analytiques aux groupes algébriques : cela permet des réductions modules p .

En fait, plutôt qu'une base, on prendra les H_α , et des e_α judicieusement choisis, déterminés à partir d'un choix arbitraire des $e_\alpha, e_{-\alpha}$ (où $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_\alpha$) correspondant à un système de racines simples. Ce choix n'influencera pas essentiellement le résultat final, en vertu du

Lemme 1 :

Si S est un système de racines simples, tous les choix de $e_\alpha, e_{-\alpha}$ tels que $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in H_\alpha, \alpha \in S$ sont équivalents par les automorphismes intérieurs définis par les $\exp h, h \in \mathfrak{H}$.

DEMONSTRATION.

$\exp(h) \cdot e_\alpha = e^{\alpha(h)} e_\alpha$, et les e_α sont linéairement indépendants, donc les $e^{\alpha(h)} (\alpha \in S)$ quelconques.

2. Le groupe $SL_2(\mathbb{C})$.

Proposition 3.

Le groupe $SL_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

Raisonnons par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant trivial ($\{e\}$). Soit $v \in \mathbb{C}^n$, son stabilisateur. $SL_n(\mathbb{C})$ est un espace fibré de fibre G_1 et base $SL_n(\mathbb{C})/G_1 \approx \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$ simplement connexe. Soit π un hyperplan supplémentaire de v . G_1 est produit semi-direct de $SL(\pi)$ et du groupe des transformations T telles que $T(x) = x // v$, et ce dernier est isomorphe en dual de π ($f \rightarrow (x \rightarrow (x + f(\text{prg } x) v))$, où prg est la projection sur π), donc simplement connexe. On applique alors l'hypothèse de récurrence- et le théorème qu'un espace fibré (localement trivial) de base et fibre simplement connexes et connexes est simplement connexe.

L'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{C})$ est la seule algèbre de Lie semi-simple de rang 1, elle est formée des matrices 2×2 de trace nulle. Une sous-algèbre de Cartan est formée des matrices diagonales, et on a :

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H_{-\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ les couples } (e_\alpha, e_{-\alpha}) \text{ tels que } [e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_\alpha \text{ étant}$$

$$e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Le normaliseur } N \text{ du groupe } H \text{ engendré par la sous-}$$

algèbre de Cartan \mathfrak{H} est formée des transformations conservant globalement les deux directions respectées par H , soit les

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad N/H \text{ agissant sur } \mathfrak{H} \text{ est isomorphe au groupe de Weyl}$$

A chaque couple $(e_\alpha - e_{-\alpha})$ on peut associer un élément de N , par

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $w = \exp\left(\frac{\pi}{2}(e_\alpha - e_{-\alpha})\right) = \exp(e_\alpha) \exp(-e_{-\alpha}) \exp(e_\alpha)$ (on se ramène à $a = 1$ par le lemme 1, alors $e_\alpha^2 = 0$, donc $\exp(e_\alpha) = 1 + e_\alpha$; $e_\alpha - e_{-\alpha}$ est une rotation infinitésimale).

Réciproquement, w détermine les couples $(e_\alpha, e_{-\alpha})$ et $(-e_{-\alpha}, e_\alpha)$, ce dernier relatif à $H_{-\alpha}$; on note $e_{\beta, w}$ l'élément de \mathfrak{L}^β tel que si $f \in \mathfrak{L}^{-\beta}$ est l'élément satisfaisant à $[e_{\beta, w}, f] = H_\beta$, on ait $w = \exp\left(\frac{\pi}{2}(e_{\beta, w} - f)\right)$.

Proposition 4 :

- 1) $w^2 = \exp(i\pi H_\alpha)$ est l'élément central du groupe, $w^4 = e$,
- 2) $e_{\beta, w} = -e_{\beta, w^{-1}}$, $[e_{\beta, w}, e_{-\beta, w^{-1}}] = H_\beta$,
- 3) $w(H_\alpha) = -H_\alpha$, $w(e_\alpha) = -e_{-\alpha}$, $w(e_{-\alpha}) = -e_\alpha$ pour $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_\alpha$.

Proposition 5.

Soit G un groupe de Lie semi-simple simplement connexe, \mathfrak{L} son algèbre de Lie, \mathfrak{H} une sous-algèbre de Cartan, α une racine, et G_α engendré par $CH_\alpha, \mathfrak{L}^\alpha, \mathfrak{L}^{-\alpha}$. Alors G_α est isomorphe à $SL_2(C)$.

A priori, G_α est isomorphe à $SL_2(C)$ ou $SL_2(C)$ modulo son centre. Il suffit donc de vérifier que $\exp(i\pi H_\alpha) \neq e$.

Puisque toute racine fait partie d'un système de racines simples, et que les H_α pour α simple sont linéairement indépendants, cela résulte de la :

Proposition 6.

- 1) le réseau X engendré par les H_α est engendré par les H_α pour α simple,
- 2) le noyau de la représentation $\exp : \mathfrak{H} \rightarrow G$ est $2\pi i X$.

DEMONSTRATION.

- 1) $\frac{(H_\alpha, H_\beta)}{(H_\alpha, H_\alpha)} = \frac{(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\alpha, h_\alpha)}$ est demi-entier : les H_α forment un système de racine (les autres conditions sont aisément vérifiées), et les H_α pour α simple en forment un système de racines simples, d'où 1).

- 2) a) dans SL_2 , qui est simplement connexe, $\exp(2\pi i H_\alpha) = e$. Le noyau est donc au moins celui indiqué.
- b) si une forme linéaire λ sur \mathfrak{H} est un poids, c'est-à-dire si les $\lambda(H_\alpha)$ sont entiers, il existe une représentation ρ_α et $v \in V$ pour lesquels $Hv = \lambda(H)v$, d'où $\exp(H)v = e^{\lambda(H)}v$. Si $\exp(H) = e$, on a donc $\lambda(H) \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ pour tout poids. Les poids étant toutes les applications $X \rightarrow \mathbb{Z}$, et X étant libre, cela implique $H \in 2\pi X$.

Puisque $G_\alpha \cong SL_2$, les $e_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$ sont en correspondance avec des éléments $w_\alpha = \exp\left(\frac{\pi}{2}(e_\alpha \cdot e_{-\alpha})\right)$ de G_α .

Si $h \perp H_\alpha$, $[h, e_{\pm\alpha}] = 0$, et donc $w_\alpha(h) = h$, $w_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha$; w_α est dans le normalisateur de H , et son action sur \mathfrak{H} est celle de ρ_α . $w_\alpha^2 = \exp(i\pi H_\alpha)$ est l'élément central de G_α , $w_\alpha^4 = e$.

3. Les groupes de rang 2.

Si G est un groupe semi-simple simplement connexe, algèbre de Lie \mathfrak{L} , sous-algèbre de Cartan \mathfrak{H} , w_α un w correspondant à la racine α , on se propose d'expliciter les relations entre les w_α , et d'exprimer $[e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\beta, w_\beta}]$ à l'aide de la loi de groupe. Si α et β sont deux racines, Δ' le sous-système de racine qu'elles engendrent, $G_{\Delta'}$ le sous-groupe de rang 2 correspondant, engendré par H_α, H_β et les $\mathfrak{L}^\gamma (\gamma \in \Delta')$, toute relation vérifiée dans $G_{\Delta'}$ le sera dans G . On va donc commencer par l'étude des groupes de rang 2.

Si α et β sont deux racines linéairement indépendantes, G_α opère de façon irréductible sur $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$, les $\mathfrak{L}^{\beta+n\alpha}$ étant propres pour H_α . $SL_2(C)$ n'ayant qu'une représentation irréductible de dimension donnée, cette représentation est connue à isomorphisme près. Choisissons $e_\alpha, e_{-\alpha}$, donc w_α . Tout ce qu'on a fait étant canonique, on a $w_\alpha(e_{\beta, w}) = e_{\rho_\alpha(\beta), w_\alpha w w_\alpha^{-1}}$. En outre, si $w_\alpha(e_{\beta, w}) = \pm e_{\beta, w}$, ou si $w_\alpha^2(e_{\beta, w}) = \pm e_{\beta, w}$, on a de même $w_\alpha w w_\alpha^{-1} = w^{\pm 1}$, ou $w_\alpha^2 w w_\alpha^{-2} = w^{\pm 1}$ selon le cas, pour la même raison. Rappelons que :

Proposition 7.

Si V est une représentation irréductible de dimension d de $SL_2(C)$, et si on a choisi $H, E^+, E^- \in SL_2$ donc $w \in SL_2$, V admet une base unique à un facteur près,

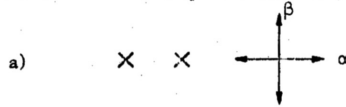
$v_{-\rho}, v_{-\rho+1} \dots v_{+\rho}$ où $\rho = \frac{d-1}{2}$, telle que

$$\begin{cases} H v'_n = 2n v_n \\ E^+ v_n = (\rho - n) v_{n+1} \\ E^- v_n = (-\rho - (-n)) v_{n-1} \end{cases} \quad w(v_n) = (-1)^{\rho+n} v_{-n}$$

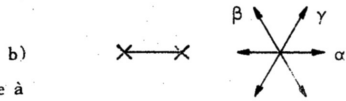
50

Tous ces renseignements permettront d'obtenir les formules explicites, dans chaque cas.

On pose $w(w') = w w' w^{-1}$ (représentation adjointe)



$w_\alpha(w_\beta) = w_\beta$, c'est-à-dire $w_\alpha w_\beta = w_\beta w_\alpha$ $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ (1)



La méthode appliquée à

α et β donne $w_\alpha^2 w_\beta w_\alpha^{-2} = w_\beta^{-1}$, et $w_\alpha(e_\beta, w_\beta) = e_{\gamma, w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}}$

$(e_\beta, w_\beta, e_{\gamma, w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}})$ est une base à laquelle s'appliquent les formules de la proposition 7.

$[e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\beta, w_\beta}] = e_{\alpha+\beta, w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}}$ (2)

pour tout système de racines simples

Exprimons l'identité de Jacobi pour $e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\beta, w_\beta}$ et $e_{-\gamma, w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1}}$

$[e_{-\gamma, w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1}}, [e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\beta, w_\beta}]] = [e_{-\gamma, w_\alpha(w_\beta^{-1})}, e_{\gamma, w_\alpha(w_\beta)}] = H_{-\gamma} = -H_\gamma$

$= [[e_{-\gamma, w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1}}, e_{\beta, w_\beta}] + [e_{\alpha, w_\alpha}, e_{-\gamma, w_\alpha(w_\beta^{-1})}, e_{\beta, w_\beta}]]$

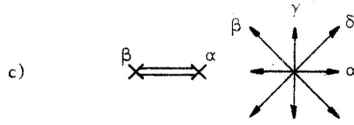
$= [e_{-\beta, w_\alpha(w_\alpha(w_\beta))}, e_{\beta, w_\beta}] + [e_{\alpha, w_\alpha}, e_{-\alpha, w_\beta(w_\alpha(w_\beta))}]$

Puisque $w_\alpha^2(w_\beta) = w_\beta^{-1}$, le premier terme est $H_{-\beta}$, le second est donc $H_{-\alpha}$, et il

faut que $w_\alpha = w_\beta(w_\alpha(w_\alpha(w_\beta)))$. $([e_{\alpha, w_\alpha}, e_{-\alpha, w_\alpha}] = -H_\alpha = H_{-\alpha})$

$w_\alpha = w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1}$; $w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\beta w_\alpha w_\beta$; $(w_\alpha w_\beta)^3 = w_\alpha w_\beta w_\alpha (w_\beta w_\alpha w_\beta) = w_\alpha w_\beta w_\alpha^2 w_\beta w_\alpha =$
 $= w_\alpha w_\beta (w_\alpha^2 w_\beta w_\alpha^{-2}) w_\alpha^2 w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\beta^{-1} w_\alpha^2 w_\alpha = w_\alpha^4 = e$

$(w_\alpha w_\beta)^3 = e$ et $w_\beta w_\alpha^2 w_\beta^{-1} = w_\alpha^2 w_\beta^2$ (3)



la même méthode appliquée à β et α donne $w_\alpha^2(w_\alpha) = w_\alpha^{-1}$ et

$$[e_{\beta, w_\beta}, e_{\alpha, w_\alpha}] = e_{\alpha+\beta, w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1}} \quad (4)$$

Appliquons-la maintenant à α et β . Puisque $w_\alpha(e_{\beta, w_\beta}) = e_{\delta, w_\alpha(w_\beta)}$, et que (4), une base à laquelle s'appliquent les formules explicitées de la proposition 7 est

$(e_{\beta, w_\beta}, \frac{1}{2} e_{\gamma, w_\beta(w_\alpha^{-1})}, e_{\delta, w_\alpha(w_\beta)}) \cdot w_\alpha^2$ a pour action l'identité, il est donc dans le centre du groupe (commute avec $G_\alpha, \mathcal{H}, \mathcal{L}^\beta, \mathcal{L}^\gamma, \mathcal{L}^\delta$, et de même avec $\mathcal{L}^{-\beta}, \mathcal{L}^{-\gamma}, \mathcal{L}^{-\delta}$).

$$w_\alpha(e_{\gamma, w_\gamma}) = -e_{\gamma, w_\gamma} \text{ donc } w_\alpha(w_\gamma) = w_\gamma^{-1},$$

$$w_\alpha(w_\beta(w_\alpha)) = (w_\beta(w_\alpha))^{-1}, w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} = w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^2 w_\beta = w_\beta w_\beta^2 w_\alpha w_\beta = w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} w_\alpha^2 w_\beta$$

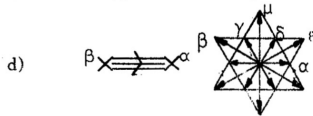
$w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} = w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\beta^2 w_\alpha^{-1} = w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^2 = w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} w_\alpha^2 w_\beta$. Multipliant à gauche par $w_\alpha w_\beta$ et à droite par w_β^{-1} , on trouve $(w_\alpha w_\beta)^4 = w_\alpha^2$

$$(w_\alpha w_\beta)^4 = w_\alpha^2 \quad w_\beta w_\alpha^2 w_\beta^{-1} = w_\alpha^2 \quad w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha^{-1} = w_\alpha^2 w_\beta^2 \quad (5)$$

En outre, $[e_{\alpha, w_\alpha}, \frac{1}{2} e_{\gamma, w_\beta(w_\alpha^{-1})}] = e_{\delta, w_\alpha(w_\beta)}$ (proposition 7), ce qui peut s'écrire

$$[e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\gamma, w_\gamma}] = 2 e_{\delta, w_\delta} \text{ où } w_\delta w_\alpha w_\delta^{-1} = w_\gamma^{-1} \quad (6)$$

En effet, $(w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}) w_\alpha (w_\alpha w_\beta w_\alpha)^{-1} = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} = w_\alpha (w_\beta (w_\alpha^{-1})) =$
 $= w_\beta (w_\alpha) = w_\gamma^{-1} \quad (w_\alpha (w_\gamma)) = w_\gamma^{-1}$



Toujours la même méthode, pour β et α , puis pour β et ϵ donne :

$$w_\beta^2(w_\alpha) = w_\alpha^{-1} \quad w_\beta^2(w_\epsilon) = w_\epsilon^{-1} \text{ et}$$

$$[e_{\beta, w_\beta}, e_{\alpha, w_\alpha}] = e_{\alpha+\beta, w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1}} \quad [e_{\beta, w_\beta}, e_{\epsilon, w_\epsilon}] = e_{\beta+\epsilon, w_\beta w_\epsilon w_\beta^{-1}} \quad (7)$$

Pour α et β , on a $w_\alpha(e_{\beta, w_\beta}) = e_{\epsilon, w_\alpha(w_\beta)}$, $w_\alpha(e_{\gamma, w_\gamma}) = e_{\delta, w_\alpha(w_\gamma)}$, et (7), d'où l'on déduit que $(e_{\beta, w_\beta}, \frac{1}{3} e_{\gamma, w_\beta(w_\alpha^{-1})}, \frac{1}{3} e_{\delta, w_\alpha(w_\beta(w_\alpha))}, e_{\epsilon, w_\alpha(w_\beta)})$ est une base à laquelle

s'appliquent les formules de la proposition 7. Si on applique la méthode à α et μ , on trouve

$$w_\alpha w_\mu = w_\mu w_\alpha$$

Un w_μ est $w_\beta(w_\alpha(w_\beta))$, et donc $(w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1}) w_\alpha = w_\alpha (w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1})$.

$w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} = w_\alpha w_\alpha^2 w_\beta^{-1} = w_\alpha w_\beta w_\alpha^2$ car $w_\alpha^2(w_\beta) = w_\beta^{-1}$. Remplaçons dans le 2^e membre $w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1}$ par cette valeur, et multiplions à droite par $w_\alpha^{-1} w_\beta w_\alpha$ on trouve

$$(w_\alpha w_\beta)^6 = e \quad w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha^{-1} = w_\beta w_\alpha^2 w_\beta^{-1} = w_\alpha^2 w_\beta^2 \quad (8)$$

La proposition 7 donne $[e_{\alpha, w_\alpha}, \frac{1}{3} e_{\gamma, w_\beta(w_\alpha^{-1})}] = 2 \cdot \frac{1}{3} e_{\delta, w_\alpha(w_\beta(w_\alpha))}$

et $[e_{\alpha, w_\alpha}, \frac{1}{3} e_{\delta, w_\alpha(w_\beta(w_\alpha))}] = e_{\epsilon, w_\alpha(w_\beta)}$, soit

$$[e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\gamma, w_\gamma}] = -2 e_{\delta, w_\alpha w_\gamma w_\alpha^{-1}} \quad [e_{\alpha, w_\alpha}, e_{\delta, w_\beta}] = 3 e_{\epsilon, w_\epsilon} \quad \text{où } w_\epsilon w_\alpha w_\epsilon^{-1} = w_\beta$$

(9)

Pour la dernière formule en effet $(w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}) w_\alpha (w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1})^{-1} = w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} = w_\alpha (w_\beta(w_\alpha))$

4. Base de Chevalley.

Soit G un groupe Lie semi-simple simplement connexe, algèbre de Lie \mathfrak{L} , sous-algèbre de Cartan \mathfrak{H} , système de racines Δ , et soit S un système de racines simples. Pour $\alpha \in S$, choisissons $E_\alpha \in \mathfrak{L}^\alpha$ et donc $E_{-\alpha} \in \mathfrak{L}^{-\alpha}$, w_α . Soit W le groupe engendré par les w_α . Des calculs faits en 3 résulte que les w_α^2 et $(w_{\alpha_i} w_{\alpha_j})^{k_{ij}}$ sont des éléments d'ordre 2 de H .

Proposition 8.

- 1) $H \cap \tilde{W}$ est le groupe des éléments d'ordre 2 du tore H , c'est un groupe d'ordre 2^l ou l est le rang,
- 2) $H\tilde{W}$ est le groupe engendré par les normaliseurs des $C. H_\alpha$ dans G_α ($\alpha \in \Delta$), et est donc indépendant du choix particulier de S et des E_α ,
- 3) $\tilde{W}/H \cap \tilde{W} = H\tilde{W}/H$, agissant sur \mathcal{H} , est isomorphe au groupe de Weyl agissant sur \mathcal{H} ,
- 4) $\tilde{W} \cap G_\alpha$ est un groupe cyclique d'ordre 4, engendré par un certain w_α correspondant à la racine α ($\alpha \in \Delta$).

DEMONSTRATION.

D'après la proposition 6, le groupe des éléments d'ordre 2 de H est engendré par les $\exp(i\pi H_\alpha)$, $\alpha \in S$, c'est-à-dire par les w_α^2 ($\alpha \in S$); il est contenu dans \tilde{W} . Les formules explicitées montrent alors que \tilde{W} module ce groupe (distingué) est isomorphe à W : si $w \in \tilde{W}$ est hors de ce groupe, w ne centralise pas H , dans $w \notin H$ 1) et 3) sont ainsi vérifiés. Si β est une racine simple, et si $w \in \tilde{W}$ transforme β en α , $w w_\beta w^{-1} \in G_\alpha$ \tilde{W} est un certain w_α correspondant à la racine α . Si u est un autre élément de $G_\alpha \cap \tilde{W}$, soit $u \in H$, et u est le centre de G_α car d'ordre 2, soit $u \notin H$ et $u^{-1} w w_\beta w^{-1} \in H$, $u = (w w_\beta w^{-1})^{\pm 1}$. A chaque racine α on associe ainsi deux w_α , les générateurs de $\tilde{W} \cap G_\alpha \cdot \exp(C. H_\alpha)$ ($G_\alpha \cap \tilde{W}$) est le normalisateur de CH_α dans G_α et 2) est aisément vérifié.

Définition.

Les H_α et $\pm E_{\alpha, w_\alpha}$ (w_α générateur de $\tilde{W} \cap G_\alpha$) sont une « base » de Chevalley. \tilde{W} est un groupe de Weyl étendu.

Si S' est un nouveau système de racines simples, prenons un w_α dans \tilde{W} ($\alpha \in S'$); les w_α engendrent un groupe de Weyl relatifs à H et S' , et ce groupe ayant même ordre que \tilde{W} coïncide avec lui. Si on garde S , mais qu'on change le choix des E_α ($\alpha \in S$), le lemme 1 montre que le nouveau groupe obtenu est transformé du précédent par un automorphisme intérieur défini par un élément de H :

Proposition 9.

Tous les groupes de Weyl étendus, et toutes les « bases » de Chevalley correspondant à la sous-algèbre de Cartan \mathcal{H} sont conjugués par les automorphismes intérieurs définis par les éléments de \mathcal{H} .

Théorème 1 :

A) Dans une « base » de Chevalley, la structure de l'algèbre de Lie est définie par les formules explicites

$$a) \mathcal{H} \text{ est commutatif. } [H_\alpha, E_{\beta, w_\beta}] = 2 \frac{(H_\beta, H_\alpha)}{(H_\beta, H_\beta)} E_{\beta, w_\beta}, \quad [E_{\beta, w_\beta}, E_{-\alpha, w_\alpha^{-1}}] = H_\alpha$$

b) si α et β sont deux racines linéairement indépendantes :

1) si $\alpha + \beta \notin \Delta$ $[E_{\alpha, w_\alpha}, E_{\beta, w_\alpha}] = 0$

2) si la α -échelle par β a deux échelons, β étant le premier

$$[E_{\alpha, w_\alpha}, E_{\beta, w_\beta}] = E_{\alpha+\beta, w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}}$$

3) pour



$$[E_{\alpha, w_\alpha}, E_{\beta, w_\beta}] = 2 E_{\alpha+\beta, w_\gamma} \text{ où } w_\gamma w_\alpha w_\gamma^{-1} = w_\beta^{-1}$$

4) pour



$$[E_{\alpha, w_\alpha}, E_{\beta, w_\beta}] = 2 E_{\alpha+\beta, w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}}$$

$$[E_{\alpha, w_\alpha}, E_{\gamma, w_\gamma}] = 3 E_{\alpha+\gamma, w_\delta} \text{ où } w_\delta w_\alpha w_\delta^{-1} = w_\gamma$$

B) les coefficients sont entiers : l'algèbre de Lie donne lieu à une algèbre de Lie sur les entiers

C) si pour chaque racine on choisit un des deux E_α , et qu'on pose $[E_\alpha E_\beta] = N_{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta}$ (on suppose $[E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha$)

1) pour $\alpha + \beta$ racine, $|N_{\alpha, \beta}| = 1 - p$, $n\alpha + \beta$ étant racine pour $p \leq n \leq q$

2) $N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$

DEMONSTRATION. Seul C) 2) est encore à vérifier. Soit σ la transformation linéaire de \mathfrak{L} définie par $\sigma(H_\alpha) = H_{-\alpha}$, $\sigma(E_{\alpha, w_\alpha}) = E_{-\alpha, w_\alpha^{-1}}$.

De la forme des formules explicites : résulte que σ est un automorphisme (involutif) de \mathfrak{L} .

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \text{ entraîne } [E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = [-E_{-\alpha, w_\alpha}, -E_{-\beta, w_\beta}] = \sigma(N_{\alpha, \beta} \cdot E_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha, \beta} E_{-(\alpha+\beta)}$$

Le théorème 1 permet de reconstruire l'algèbre de Lie à partir du système de racines et du groupe de Weyl étendu. Les résultats de C) permettant en outre de définir ce dernier à isomorphisme près par générateurs et relations. On a donc là une méthode pour montrer l'existence des algèbres correspondant aux diagrammes sphériques. Il se présente cependant des difficultés :

- a) il n'est pas évident a priori que le groupe \tilde{W} obtenu est réellement une extension de W par un groupe d'ordre 2^l , ni que $w_\alpha \neq w_\alpha^{-1}$. Il est cependant possible de définir autrement que par générateurs et relations une telle extension de W , pour laquelle on peut vérifier que par miracle les relations à satisfaire dans W sont satisfaites.
- b) \tilde{W} est engendré par les w_α pour α parcourant un système de racines simples S , et il faut encore définir $w_\beta^{\pm 1}$ pour β racine quelconque. Si $w \in \tilde{W}$, $w(\alpha) = \beta$, on posera $w_\beta^{\pm 1} = w w_\alpha^{\pm 1} w^{-1}$, mais il faut montrer que cette définition ne dépend pas du w choisi ;

on peut se ramener à ne devoir le vérifier qu'en rang 2.

- c) Il faut montrer que la structure obtenue est une algèbre de Lie. Il suffit de vérifier l'identité de Jacobi pour les triples de E_α , on se ramène à un problème de rang 3, et il suffit de montrer directement le théorème d'existence pour $r \leq 3$. L'algèbre sera semi-simple grâce à la proposition 1.

5. Applications .

On garde les notations du début de D. Soit B le groupe de Borel engendré par \mathcal{H} et les \mathcal{L}^α pour $\alpha \geq 0$. On montrera ultérieurement que $G = B\tilde{W}B$ (décomposition de Bruhat). S'appuyant sur ce résultat, on va préciser la position de H dans G .

Proposition 10.

H est son propre centralisateur, et $\tilde{W}H$ est son normalisateur.

Si $g \in G$ normalise H , l'automorphisme intérieur $\text{ad } g$ conserve \mathcal{H} , donc le système de racine Δ , et transforme la chambre fondamentale C en $wC = \text{ad } w'C$ ($w \in W, w' \in \tilde{W}$ au-dessus). $w^{-1}g$ normalise H et conserve C , donc normalise B . $w^{-1}g$ ne peut donc être dans un BwB ($w \in \tilde{W} \setminus 1$): $w^{-1}g \in B$.

L'algèbre de Lie \mathcal{E} de B est produit semi-direct de \mathcal{H} et de $\mathcal{N} = \sum_{\alpha > 0} \mathcal{L}^\alpha$, B est donc l'image d'un produit semi-direct des groupes correspondants : $w^{-1}g \in H$, il existe $u \in \mathcal{N}$ qui normalise H . \mathcal{N} étant nilpotent, il existe aussi $\hat{u} \in \mathcal{N}$ tel que $\exp(\hat{u})$ normalise H ; l'ensemble de ces \hat{u} est stable par l'action de H , donc non discret, et \mathcal{N} contiendrait un sous-groupe connexe normalisant H . C'est absurde car \mathcal{H} est son propre normalisateur dans \mathcal{E} . Dès lors $w^{-1}g \in H$, $g \in \tilde{W}H$. Le centralisateur de H est dans $\tilde{W}H$, et il est clair que c'est H .

Corollaire 1 :

Le centre de G est dans H .

Corollaire 2 :

Soit Δ' un sous-système de racine de Δ , $\mathcal{L}_{\Delta'} = \sum_{\alpha \in \Delta'} (C\mathcal{H}_\alpha + \mathcal{L}^\alpha + \mathcal{L}^{-\alpha})$, et $G_{\Delta'}$ le sous-groupe engendré par $\mathcal{L}_{\Delta'}$. $G_{\Delta'}$ est simplement connexe.

DEMONSTRATION.

$G_{\Delta'}$ est clairement semi-simple ; on a une application $\tilde{G}_{\Delta'} \rightarrow G_{\Delta'}$ où $\tilde{G}_{\Delta'}$ est le revêtement universel de $G_{\Delta'}$. Il résulte de la proposition 6 que cette application, restreinte à $H_{\Delta'}$, est injective. Le noyau devant être dans le centre, est nul d'après le corollaire 1.

Corollaire 3 :

Le groupe des automorphismes extérieurs de \mathcal{L} , c'est-à-dire le quotient du groupe des automorphismes par le groupe des automorphismes intérieurs, est un groupe isomorphe au groupe des automorphismes du schéma de Dynkin.

DEMONSTRATION.

Si σ est un automorphisme du schéma de Dynkin, il donne lieu à un automorphisme du système de racine conservant la chambre fondamentale. Il résulte aisément du théorème 1 que ce dernier peut être étendu de façon unique à un automorphisme intérieur près en un automorphisme de \mathcal{L} , qui ne peut être intérieur si σ n'est pas l'identité, car tout automorphisme intérieur conservant \mathcal{H} et sa chambre fondamentale est l'identité sur \mathcal{H} (proposition 10). Réciproquement, tout automorphisme σ transforme \mathcal{H} et la chambre C en une sous-algèbre de Cartan \mathcal{H}' , et une chambre C' . Il existe un automorphisme intérieur τ transformant aussi \mathcal{H} en \mathcal{H}' , C en C' (appliquer la proposition 2, puis la proposition 8 3)), $\tau^{-1}\sigma$ conserve \mathcal{H} et sa chambre fondamentale, donc est du type précédent.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

MANAGING EDITOR

Tom De Medts Ghent University
tom.demedts@ugent.be

Linus Kramer Universität Münster
linus.kramer@wwu.de

Klaus Metsch Justus-Liebig Universität Gießen
klaus.metsch@math.uni-giessen.de

Bernhard Mühlherr Justus-Liebig Universität Gießen
bernhard.m.muehlherr@math.uni-giessen.de

Joseph A. Thas Ghent University
thas.joseph@gmail.com

Koen Thas Ghent University
koen.thas@gmail.com

Hendrik Van Maldeghem Ghent University
hendrik.vanmaldeghem@ugent.be

HONORARY EDITORS

Jacques Tits
Ernest E. Shult †

EDITORS

Peter Abramenko University of Virginia

Francis Buekenhout Université Libre de Bruxelles

Philippe Cara Vrije Universiteit Brussel

Antonio Cossidente Università della Basilicata

Hans Cuypers Eindhoven University of Technology

Bart De Bruyn University of Ghent

Alice Devillers University of Western Australia

Massimo Giulietti Università degli Studi di Perugia

James Hirschfeld University of Sussex

Dimitri Leemans Université Libre de Bruxelles

Oliver Lorscheid Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

Guglielmo Lunardon Università di Napoli “Federico II”

Alessandro Montinaro Università di Salento

James Parkinson University of Sydney

Antonio Pasini Università di Siena (emeritus)

Valentina Pepe Università di Roma “La Sapienza”

Bertrand Rémy École Polytechnique

Tamás Szonyi ELTE Eötvös Loránd University, Budapest

PRODUCTION

Silvio Levy (Scientific Editor)
production@msp.org

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US \$275/year for the electronic version, and \$325/year (+\$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
 **mathematical sciences publishers**
nonprofit scientific publishing
<http://msp.org/>
© 2019 Mathematical Sciences Publishers

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1

2018

Complement to the Collected Works of
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series *Heritage of European Mathematics*.

