Model Theory

no. 1 vol. 3 2024

$M \not\models T$

Quelques modestes compléments aux travaux de Messieurs Mark DeBonis, Franz Delahan, David Epstein et Ali Nesin sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini

Bruno Poizat

msp

Model Theory
Vol. 3, No. 1, 2024
https://doi.org/10.2140/mt.2024.3.71

Quelques modestes compléments aux travaux de Messieurs Mark DeBonis, Franz Delahan, David Epstein et Ali Nesin sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini

Bruno Poizat

Nasılsın Hoca?

Bu makala, Ali Nesin'in takımın tarafından sonlu Morley ranklı Frobenius gruplar üzerine yapılan işlere yeni bir bakış atıyor; komplemanı içinde 2-eleman olan gruplar, psödo-yerli sonlu gruplar, bağlayılan gruplar üstünde has bir dikkat veriyoruz.

В статье по-новому обозреваюстя работы Али Несина и его соратников, посвященные группам Фробениуса конечкого ранга Морли, в часности тем, что имеют в своем дополнении инволюцию, или являюстя псевдо-локально конечными или связными.

Dieser Artikel wirt ein neues Licht auf die Arbeiten von Ali Nesin und seiner Koauthoren über Frobenius-Gruppen von endlichem Morley rang, insbesondere pseudo-lokal endliche, zusammenhängende, und solche, deren Komplement eine Involution enthalten.

This paper casts a new look on the works of Ali Nesin and his team concerning Frobenius groups of finite Morley rank, in particular those which have an involution in their complement, or are pseudo-locally finite, or are connected.

Ce papier procède à un réexamen des travaux de l'équipe d'Ali Nesin sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini, en particulier sur ceux qui ont une involution dans leur complément, ceux qui sont pseudo-localement finis, et ceux qui sont connexes.

Nous dirons que deux sous-groupes du groupe F sont *disjoints* si leur intersection est réduite à l'élément neutre, et qu'un sous-groupe T propre de F (c'est-à-dire différent de $\{1\}$ et de F) est *malnormal* s'il est autonormalisant et disjoint de ses conjugués. Cela signifie que, pour tout a hors de T, $T \cap aTa^{-1} = \{1\}$, ou encore que, dans l'action de F sur ses classes à gauche modulo T, le fixateur de deux points distincts est toujours réduit à l'identité.

MSC2020 : 14L99, 20E32, 20F11, 20F50.
Mots-clefs : groupe de Frobenius localement fini, rang de Morley fini.

Un *groupe de Frobenius* est un groupe F possédant un sous-groupe malnormal T ; on note $U(T)$ l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun conjugué de T, augmenté de l'élément neutre. Le groupe T est plus traditionnellement appelé *complément* (*de Frobenius*) de F, tandis que $U(T)$ est sa *base*, surtout quand elle forme un sous-groupe de F.

Nous utiliserons tout le temps les quatre faits évidents suivants, que nous nous abstenons de démontrer pour ne pas risquer d'affecter ce que les Américains appellent le sentiment de *self-respect* de nos lecteurs.

Lemme 0. (i) *L'intersection de deux sous-groupes de F malnormaux non disjoints est aussi malnormale.*

(ii) *Si T est malnormal dans F, et si H est un sous-groupe de F qui n'est ni inclus dans T, ni disjoint de T, alors $H \cap T$ est malnormal dans H : un sous-groupe propre de F est ou bien un groupe de Frobenius, ou bien est inclus dans un conjugué de T, ou bien est inclus dans $U(T)$.*

(iii) *Soient T malnormal dans F et $a \neq 1$ un point de F. S'il est dans T, son centralisateur est inclus dans T et s'il est dans $U(T)$, son centralisateur est inclus dans $U(T)$. Tout sous-groupe normal de F qui est abélien, ou même a un centre non trivial, est inclus dans $U(T)$. Si S est un sous-groupe normal non trivial de T, ce dernier est son normalisateur.*

(iv) *Si T est un sous-groupe malnormal de H et H est un sous-groupe malnormal de F, T est malnormal dans F.*

Si F est engendré par T et par un sous-groupe V normal et disjoint de T (F est alors le produit semi-direct de V par T), on dit qu'il est *scindé*. Dans ce cas, V est inclus dans $U(T)$, mais ne lui est pas forcément égal : quand cela se produit, nous dirons que F est *scindé nettement*.

À l'autre extrême, nous dirons que T *remplit* F si $U(T)$ est réduit à l'élément neutre, et que F est *plein* s'il possède un sous-groupe malnormal le remplissant ; cette terminologie a été introduite par [Jaligot 2001]. Elle est motivée par l'apparition, dans [Cherlin 1979], d'un groupe de Frobenius plein de rang de Morley trois (en fait, c'est [Nesin 1989] qui a montré que c'était un groupe de Frobenius) ; il a fallu attendre [Frécon 2018] pour qu'on se rende compte qu'il n'existe pas. La possible existence de groupes de Frobenius pleins de rang de Morley fini reste un obstacle majeur à la conjecture d'algébricité.

Les groupes de Frobenius finis, eux, sont scindés nettement. Ils ont une structure très particulière, qui intervient lourdement dans la classification des groupes simples finis ; en effet, dans le cas fini, pour chaque T malnormal, l'ensemble $U(T)$ est un sous-groupe non trivial [Frobenius 1901], qui est nilpotent [Thompson 1959]. Ce résultat de Thompson est un prélude au théorème de [Feit et Thompson 1963]. Quand le groupe T contient une involution i, il n'est pas dur de voir que $U(T)$ est un groupe abélien inversé par i ; quand $U(T)$ est un groupe résoluble, ce n'est pas la mer à boire de montrer qu'il est nilpotent (voir notre proposition 5.4) ; mais, dans le cas général, ce sont des résultats difficiles, dont les seules démonstrations connues s'appuient sur des calculs de caractères (inventés justement par Frobenius) dont on ne connaît pas d'équivalents en rang de Morley fini.

Nous allons faire notre possible pour tenir un discours nouveau sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini. Il est remarquable que ces groupes occupent une place substantielle, aux pages 203–219, de [Borovik et Nesin 1994], dont la référence sera B&N dans la suite de cet article, mais que les résultats obtenus en toute généralité sont peu exploités dans le reste du livre (probablement parce qu'ils ne sont pas assez décisifs), pas plus que dans d'autres travaux sur la conjecture d'algébricité. C'est ainsi que l'expression *Frobenius group* n'apparaît pas dans [Altınel et al. 2008].

Dans la section 1, nous démontrons quelques résultats faciles sur les groupes de Frobenius finis, en faisant semblant d'ignorer les théorèmes de Frobenius et de Thompson. Nous ne faisons pas cela pour le plaisir de redécouvrir des trivialités, mais parce que nous espérons pouvoir transférer certaines démonstrations aux groupes de Frobenius *connexes* de rang de Morley fini, en remplaçant les calculs multiplicatifs sur les cardinalités par des calculs additifs sur les rangs, combinés avec des arguments de généricité.

Dans la section 2 nous renforçons [B&N, Lemma 11.20, p. 207], concernant les groupes de Frobenius de rang de Morley fini dont le complément contient une involution.

Dans la section 3 nous examinons ce qui pourrait s'opposer à la netteté des scissions dans un contexte de rang de Morley fini.

Dans la section 4, nous étendons les propriétés des groupes de Frobenius finis à ceux qui sont pseudo-localement finis et ont un rang de Morley fini, aux groupes algébriques en particulier.

La section 5 détaille la structure des groupes de Frobenius de rang de Morley fini, avec une attention particulière donnée à ceux qui sont connexes ; nous constaterons que, dans leur cas, tous les groupes utiles sont définissables et connexes (ce qu'annonce [B&N, Corollary 11.24, p. 209]).

Enfin, la section 6 est consacrée aux actions sans points fixes sur un groupe commutatif, ce qui permet de préciser les résultats de la section 4 et nous fait revisiter la problématique du comportement des corps en situation de rang de Morley fini.

Comme l'indique son titre, l'ambition de cet article est modeste, puisqu'il est consacré à une révision, une trentaine d'années après leur parution, de travaux de pionniers : ceux de [DeBonis et Nesin 1994; Delahan et Nesin 1993; 1995; Epstein et Nesin 1994; Nesin 1992; 1994], qui sont exposés dans [B&N, p. 203–219]. Je redémontre tout ce dont je fais un usage essentiel, comme la facile, mais fondamentale, proposition 4.1 de définissabilité, qui leur appartient. Ces auteurs ont généralisé des résultats algébriques dans des contextes particuliers (présence d'une involution dans T, solvabilité de $U(T)$, etc.) où les propriétés des groupes de Frobenius finis sont relativement simples à établir ; assez souvent, les groupes connexes constituent le cas facile de leurs théorèmes. À l'opposé, je resterai résolument à l'intérieur de la théorie des modèles, en exploitant l'unicité du générique pour tenter d'isoler les pathologies des groupes de Frobenius connexes (quand l'algèbre ne peut être évitée, je me reposerai sur B&N !). Il faut dire que, pour quelqu'un qui est familier des groupes finis, ou des groupes algébriques, les groupes de rang de Morley fini connexes sont les objets les plus troublants qui soient, leur propriété la plus mystérieuse étant l'existence potentielle.

Cette étude accumule des petits faits, qui pour la plupart concernent des objets hypothétiques en désaccord avec la conjecture d'algébricité ; j'ai cru utile de les rendre publics, bien qu'aucun d'entre eux ne m'a semblé mériter le nom de théorème. Ses principales nouveautés de méthode sont :

- On peut montrer directement l'unicité de l'involution dans le complément, que le groupe soit connexe ou pas, en évitant le calcul de rang de B&N (section 2).

- C'est bien de constater qu'un groupe de Frobenius est scindé, mais il faut en plus se préoccuper de la netteté de la scission ; j'ai l'impression d'être la première conscience modèle-théorique à avoir été tourmentée par elle (section 3).

- La théorie des modèles donne une explication convaincante — la pseudo-finitude locale — du transfert des propriétés des groupes de Frobenius finis aux groupes de Frobenius algébriques (section 4).

- La considération du socle d'un groupe connexe semi-simple aide à la description de la structure des groupes de Frobenius de rang de Morley fini pathogènes (section 5).

- Le beau lemme 4.1 du chapitre 1 d'[Altınel et al. 2008] (est-ce sa première application ?) permet dans les bons cas de montrer l'abélianité de la composante connexe du complément quand la base est nilpotente (section 6).

Конец этово введения — идеальное место, чтобы выразить мою самую искреннюю благодарность Александру Васильевичу, который перевернул мою научную жизнь, объяснив мне около 36 лет назад, что инволюции суть вещи, имеющие определенную значимость в теории групп.

Exemple 0.1. Soient V un groupe commutatif et F le produit semi-direct de V par une involution i qui l'inverse. Le sous-groupe $T = \{1, i\}$ est malnormal dans F si et seulement s'il est égal à son centralisateur, c'est-à-dire si V ne contient pas d'involutions. Dans ce cas, $U(T) = V$ si et seulement V est divisible par 2.

Par exemple, si V est le groupe cyclique infini $\mathbb{Z}$, F est le groupe diédral infini, isomorphe au groupe des transformations affines $(-1)^n x + m$ de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers ; les conjuguées de l'involution $-x$ sont les $-x+2m$, si bien que $U(T)$ est formé des $x+m$ et des $-x+2m+1$: ce n'est pas un groupe. Il y a deux classes de conjugaison d'involutions dans F. On remarque que le quotient de ce groupe par $2\mathbb{Z}$ n'est pas un groupe de Frobenius.

Exemple 0.2. [Olchanski 1982] construit, pour chaque nombre premier p assez grand, des groupes Ol_p dénombrables dont tous les sous-groupes propres ont exactement p éléments. Chacun d'entre eux est malnormal, et ces groupes de Frobenius Ol_p ne sont pas scindés puisqu'ils sont simples ; ils sont même pleins si jamais tous leurs sous-groupes propres sont conjugués. Comme ils n'ont pas de sous-groupes abéliens infinis, ils ne peuvent être superstables.

Par compacité, on obtient à la limite des groupes Ol_∞ qui vérifient :

(i) Le centralisateur de chaque $a \neq 1$ est un groupe abélien sans torsion divisible.

(ii) Le groupe n'est pas commutatif, et si a et b ne commutent pas, leurs centralisateurs sont disjoints.

(iii) Tout sous-groupe définissable propre est le centralisateur d'un point.

L'état présent de nos connaissances ne permet pas d'exclure que certains de ces groupes de Frobenius soient pleins et de rang de Morley quatre.

Notons que, pour qu'un groupe de Ol_∞ ait un rang de Morley fini, il est nécessaire que tous les centralisateurs soient conjugués et qu'il existe un entier n tel que : (a) pour tout $x \neq 1$, chaque y est produit de n conjugués de x ou de x^{-1} ; (b) si C_1 et C_2 sont deux centralisateurs distincts, chaque y est produit de n points de $C_1 \cup C_2$. Les limites de groupes dans Ol_p ne satisfont pas à la dernière condition.

Exemple 0.3. Dans un groupe libre non commutatif, les sous-groupes commutatifs sont cycliques et malnormaux. Les groupes libres sont la source de nombreuses constructions de groupes de Frobenius exotiques.

1. Quelques résultats faciles sur les groupes de Frobenius finis

Lemme 1.1. *Soient un groupe fini F et un de ses sous-groupes propres T.*

(i) *Le nombre de points de $U(T)$ est supérieur ou égal à l'indice de T dans F ; il lui est égal si et seulement si T est malnormal.*

(ii) *Il n'y a pas de groupe de Frobenius fini plein.*

Si T est malnormal :

(iii) *F est scindé relativement à T si et seulement si $U(T)$ est un groupe.*

(iv) *Si V est un sous-groupe normal dans F strictement inclus dans $U(T)$, alors $T_1 = T/V$ est malnormal dans $F_1 = F/V$, et $U(T_1) = U(T)/V$.*

(v) *Si T contient une involution i, il n'en contient pas d'autres, et $U(T)$ est un groupe commutatif sans involutions inversé par i.*

Démonstration. (i) Notons t et f les ordres respectifs de T et de F. Si T est malnormal, on compte, en mettant de côté l'élément neutre, le nombre de points dans l'union des conjugués de T, ce qui donne $1 + (t-1)f/t = f + 1 - f/t$; le nombre de points de $U(T)$ est donc $f - (f + 1 - f/t) + 1 = f/t$. Si T n'est pas malnormal, ou bien ses conjugués sont en nombre inférieur à son indice, ou bien ils ne sont pas disjoints.

(ii) f/t vaut au moins 3 quand T n'est pas normal dans F.

(iii) Si $U(T)$ est un groupe, il est normal dans F et disjoint de T, si bien que le groupe G engendré par $U(T)$ et T est leur produit semi-direct. D'après le point (i), F et G ont même ordre, et sont égaux.

Si F est scindé et est produit semi-direct de V par T, V est inclus dans $U(T)$ car disjoint de T et de ses conjugués (il est normal dans F). Comme son nombre d'éléments est l'indice de T dans F, c'est $U(T)$ tout entier : on voit donc que la scission est nette.

(iv) On remarque que T est isomorphe à T_1 puisqu'il est disjoint de V. Notons f, t et v les ordres respectifs de F, T et V ; l'indice de T_1 dans F_1 vaut f/tv, et T_1 est un sous-groupe propre de F_1 puisque $v < f/t$. Comme VT est nettement scindé, $VT \cap U(T) = V$. C'est également vrai si on remplace T par un de ses conjugués, si bien que $U(T_1)$ est formé des points dont l'image réciproque est dans $U(T)$; il a donc f/tv éléments.

(v) Soit j une involution dans un autre conjugué de T ; i comme j inversent par conjugaison leur produit ij, qui ne peut être dans un conjugué de T car cela forcerait i et j à être dans ce dernier. Ce produit ij est donc dans $U(T)$. Comme en prenant une involution j dans chaque conjugué de T on a déjà le compte, il n'y a qu'une seule involution par conjugué de T, et $U(T)$ est l'ensemble des points ij inversés par i. Il ne peut pas contenir d'involutions, qui commuteraient avec i. Comme $U(T)$ est inversé par chaque involution, un produit de deux involutions le centralise, si bien que c'est un groupe commutatif, centralisateur de chacun de ses points autres que l'identité. □

Lemme 1.2. (i) *Si un groupe fini a deux sous-groupes malnormaux, chacun intersecte non trivialement un conjugué de l'autre.*

(ii) *Dans un groupe de Frobenius fini, les sous-groupes malnormaux minimaux sont conjugués.*

(iii) *Soient T malnormal dans F fini, et G un sous-groupe de F contenant T, alors tout conjugué de T qui intersecte G non trivialement est inclus dans G et conjugué de T dans G. Alors $G \cap U(T)$ est formé de* 1 *et des points de G*

qui ne sont dans aucun conjugué de T au sens de G, et si G est engendré par T et par l'une de ses parties A, il est aussi engendré par T et ses conjugués ${}^aT = aTa^{-1}$, où a parcourt A.

(iv) *Si T est malnormal dans F fini, F est engendré par $U(T)$ et T.*

Remarque. Je suis la tradition française qui note les automorphismes intérieurs comme des actions à gauche, ce qui conduit fort logiquement à placer les exposants à gauche.

Démonstration. (i) Si les conjugués de T étaient tous disjoints de ceux de T_1, le nombre d'éléments conjugués d'un point de T ou d'un point de T_1 vaudrait $1 + f - f/t + f - f/t_1 \geq 1 + 2f - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}f = 1 + f$.

(ii) L'intersection de deux sous-groupes malnormaux est triviale ou malnormale.

(iii) Soit T_1 un conjugué de T coupant G non trivialement. D'après (i), cette intersection est conjuguée de T à l'intérieur de G. Si un point $g \neq 1$ de G n'appartient pas à $U(T)$, il est dans un conjugué de T au sens de G. Le groupe H engendré par T et ${}^aT$ contient a : en effet, ${}^aT$ est conjugué de T par un h de H, et a est dans hT.

(iv) Le groupe G engendré par T et $U(T)$ est réunion de $U(T)$ et de conjugués de T. S'il existe a hors de G, le groupe ${}^aG = aGa^{-1}$ contient $U(T)$, qui est un ensemble normal, et les conjugués de T qui sont dans G sont disjoints de ceux qui sont dans ${}^aG$. Par conséquent l'intersection de G et de ${}^aG$ est réduite à $U(T)$, qui est un groupe ; F est donc le produit semi-direct de $U(T)$ par T, ce qui contrarie l'hypothèse. □

Lemme 1.3. *Soit F un groupe fini avec un sous-groupe malnormal T. On suppose que les centralisateurs de deux points de $U(T)$ ne sont jamais disjoints ; alors $U(T)$ est un groupe et T est malnormal maximal.*

Démonstration. Prenons $u \neq 1$ et $v \neq 1$ dans $U(T)$, et $w \neq 1$ qui commute avec chacun d'eux. Comme w commute avec u, il est dans $U(T)$, ainsi que uv qui commute avec w.

Soit G un surgroupe propre de T. Comme il n'est pas plein, il doit contenir un point u de $U(T)$ non trivial. Pour tout a hors de G, G^a contient $v = u^a$, et si G était malnormal aucun point non trivial ne pourrait commuter avec u et v. □

Remarque. D'après les théorèmes de Frobenius et de Thompson, l'hypothèse du lemme 1.3 est toujours vérifiée, si bien que, dans un groupe de Frobenius fini F, les sous-groupes malnormaux T sont tous maximaux, et donc aussi tous minimaux, et tous conjugués ; le groupe nilpotent $U(T)$ est uniquement déterminé (c'est le plus grand sous-groupe nilpotent normal dans F).

2. Une involution dans le complément

Pour ne pas lasser d'emblée la patience de nos lectrices par un exposé rébarbatif des propriétés générales des groupes de Frobenius de rang de Morley fini, nous préférons entrer dans le vif du sujet en adaptant à leur cas notre lemme 1.1(v), bien que cela nous oblige à l'occasion, pour éviter les redites, de faire appel à quelques lemmes faciles montrés par la suite. Cela précise [B&N, p. 207–208], et donne l'espoir qu'il reste quelques épis à glaner dans la relecture des œuvres de nos glorieux précurseurs. Il s'agit typiquement d'arguments déductibles d'un simple comptage dans le cas des groupes finis, mais qui sont par ailleurs susceptibles d'une analyse locale pouvant s'étendre aux groupes de rang de Morley fini, principalement lorsqu'il est question d'involutions. Le plus ancien résultat de ce genre est la conjugaison des 2-sylows, montrée dans [Borovik et Poizat 1990].

Nous suivons l'usage de surnommer *fortement réels* les produits de deux involutions.

Dans un groupe uniquement 2-divisible, comme le sont les groupes de rang de Morley fini sans involutions, le *milieu* de a et de b est l'unique point m tel que $ma^{-1}m = b$; voir [Poizat 2018].

Proposition 2.1. *Soit F un groupe de Frobenius de rang de Morley fini, avec un sous-groupe malnormal T contenant une involution i. Nous notons I l'ensemble des involutions de F.*

(i) *T ne contient pas de deuxième involution : il est le centralisateur de i. Deux involutions de F sont conjuguées par une unique involution. Tout point de F s'écrit de manière unique comme produit d'une involution et d'un élément de T, ainsi que comme produit d'un point de iI et d'un point de T. Les points fortement réels gisent dans $U(T)$, et ce sont les commutateurs d'involutions.*

(ii) *Nous avons*

$$\mathrm{RM}(T) \leq \mathrm{RM}(I)\ ; \quad \mathrm{RM}(F) = \mathrm{RM}(T) + \mathrm{RM}(I)\ ;$$
$$d^\circ M(F) = d^\circ M(T) \times d^\circ M(I).$$

Si T est infini, toutes les involutions sont conjuguées sous l'action de F°, tous les points fortement réels sont dans F°, et $d^\circ M(I) = 1$.

(iii) *Les centralisateurs des points fortement réels non triviaux sont commutatifs et autocentralisants ; ce sont les sous-groupes définissables maximaux contenus dans $U(T)$ et normalisés par une involution. Si i et j sont deux involutions distinctes, le centralisateur de ij est contenu dans $iI \cap jI$.*

(iv) *S'il existe un point $a \neq 1$ inversé par toutes les involutions, $U(T)$ est un groupe commutatif inversé par chaque involution, qui est formé des points* *fortement réels, et F est le produit semi-direct de $U(T)$ et de T. Si de plus T est infini, $U(T)$ est connexe.*

(v) *Dans le cas contraire, T est infini, et aucun sous-groupe définissable non trivial normalisé par toutes les involutions n'est contenu dans $U(T)$. Le groupe engendré par les points fortement réels de F est son plus petit sous-groupe non trivial normal définissable ; c'est un groupe de Frobenius simple.*

Démonstration. (i) Soit j une involution qui n'est pas dans T, c'est-à-dire qui est dans $U(T)$ ou dans un autre conjugué de T. Autant i que j inversent leur produit ij, qui ne peut être dans un conjugué ${}^aT$ de T, car cela forcerait i et j à être dans ce conjugué : il est donc dans $U(T)$, et le plus petit sous-groupe définissable le contenant est inclus dans $U(T)$, car il est commutatif. Il est normalisé par i, qui inverse chacun de ses points, si bien qu'il ne contient pas d'involutions. Il est donc uniquement 2-divisible. La racine carrée $(ij)^{1/2}$ de ij, étant inversée par i, est de la forme ik, où k est une involution, et donc $ik \cdot ik = ij$, soit $kik = j$. Comme j est conjuguée de i (par une involution), elle ne peut être dans $U(T)$.

Si i et i' sont deux involutions de T et j est une involution dans un autre conjugué de T, il existe une involution k qui conjugue i et j, et une involution k' qui conjugue i' et j. Le produit $k'k$ conjugue i et i' ; s'il est différent de 1, il doit être dans T, et comme il est inversé par k et par k', ces derniers doivent aussi être dans T, ce qui est une situation absurde. Donc $k = k'$ et $i = i'$; i, étant la seule involution de T, est centrale dans T. Ce dernier est donc le centralisateur de i ; nous constatons qu'il est définissable, ainsi que $U(T)$.

Le produit de deux involutions est toujours dans $U(T)$, soit qu'elles soient égales, soit qu'elles appartiennent à des conjugués de T différents. Si deux involutions k et k' conjuguent i et j, leur produit kk' est dans $U(T)$ et commute avec i ; donc $kk' = 1$, $k = k'$. Comme T est le centralisateur de i, tout point a est congru modulo T à l'involution qui conjugue i et aia^{-1}.

Par conséquent $F = IT = i \cdot iIi \cdot iT = iIT$, et ces décompositions se font de manière unique.

Quel que soit a, le commutateur $[a, i] = (aia^{-1})i$ est bien produit de deux involutions ; réciproquement, toute involution j est conjuguée de i par une involution k, si bien que $ji = kik \cdot i = [k, i]$.

(ii) Aucun point non trivial de T ne commute avec une involution $j \neq i$, si bien que les conjuguées de j par les points de T sont toutes distinctes ; les deux égalités suivantes proviennent de la décomposition $F = IT$.

Si T est infini, la proposition 5.1 nous apprendra que $T \cap F^\circ = T^\circ$ est malnormal dans F°, et que F° agit transitivement sur les conjugués de T. Comme chacun d'entre eux ne contient qu'une involution, F° agit transitivement sur les involutions ; comme deux involutions sont toujours congrues modulo F°, ce dernier contient tous les points fortement réels. Comme iI est inclus dans F°, chacun de ses points s'écrit de manière unique comme produit d'un point de iI et d'un point de T°, si bien que $d^\circ M(iI) = d^\circ M(I) = 1$.

(iii) Soit A un sous-groupe définissable non trivial, normalisé par i et contenu dans $U(T)$; il n'a pas d'involutions. Pour chacun de ses points a, i commute avec le milieu de a et de iai ; ce milieu vaut donc 1, ce qui signifie que A est un groupe abélien inversé par i. Il en est de même de son centralisateur.

Le centralisateur de ij est normalisé par i comme par j.

(iv) Le point a centralise tout les éléments semi-réels, qui forment donc un groupe commutatif R, et F est le produit semi-direct de R et de T. Notre corollaire 3.2 expliquera bientôt pourquoi la commutativité de R implique la netteté de la scission, c'est-à-dire que $U(T) = R$. Si T est infini, comme $R = iI$, il est connexe.

(v) Si F est fini, le lemme 1.1(v) nous a montré que nous sommes dans le cas précédent ; il en est de même si F est infini et T est fini, car alors F° est inclus dans $U(T)$, d'après la proposition 5.1 à venir.

D'après le point (iii), un sous-groupe définissable normal, ou même seulement normalisé par toutes les involutions, et contenu dans $U(T)$, est trivial. Un sous-groupe de F définissable, normal et non trivial ne peut être fini, car sinon il commuterait avec F°. D'après la proposition 5.1, il agit transitivement sur les involutions, et contient tous les points semi-réels. Ces derniers forment donc un ensemble indécomposable au sens de Zilber, et engendrent un groupe G définissable, qui est l'unique sous-groupe définissable normal minimal de F.

Le groupe G est égal à son socle, composé du produit d'un nombre fini de groupes simples. Comme $T' = T \cap G$ est malnormal dans G, il n'est pas possible que tous soient contenus dans $U(T')$, et, comme ils commutent, il n'y en a qu'un seul (nous reprendrons ce type de raisonnement dans la proposition 5.4). □

Remarques. (i) Nos involutions forment ce que j'ai appelé un *symétron* dans [Poizat 2021], où je constate que bien des propriétés connues pour les groupes s'étendent aux symétrons de rang de Morley fini ; elles ont été étendues dans la première partie de [Zamour 2022].

(ii) Nous verrons dans la section 4 qu'un groupe de Frobenius simple ne peut être algébrique. S'il existe, le groupe paradoxal décrit en (v) ou bien n'a pas d'involutions, ou bien ses 2-sylows sont des groupes de Prüfer de rang un. Dans ce deuxième cas il est engendré par un symétron d'involutions qui contredit de manière extrême un classique de la théorie des groupes finis, le théorème Z^* de Glauberman ; voir [B&N, Question B.5, p. 355].

(iii) En se laissant guider par les démonstrations du théorème 4 et de la proposition 13 de [Poizat 2018], on voit facilement que, dans n'importe quel groupe de rang de Morley fini, le sous-groupe engendré par les involutions et celui engendré par les points fortement réels sont définissables. En fait, il en est ainsi du groupe engendré par n'importe quel ensemble définissable clos par conjugaison et par carré (ou plus généralement par élévation à la puissance n, pour un $n > 1$ fixé).

3. Obstruction à la netteté des scissions

Nous examinons ici des problèmes causés par les quotients qui n'apparaissent pas chez les groupes finis, mais qui tourneront à l'obsession dans l'étude des groupes de Frobenius de rang de Morley fini. Nous sommes bien sûr incapables de donner des exemples de leur nuisance, pour la raison qu'elle ne se manifeste que dans des contextes infirmant la conjecture d'algébricité.

Étant donné un groupe d'automorphismes $T \neq \{\mathrm{id}\}$ du groupe V, nous déterminons tout d'abord les circonstances qui font que T est malnormal dans le produit semi-direct F de V par T.

Pour cela nous calculons à quelle condition $(vs)^{-1}$ conjugue ut dans T, lorsque u et v sont dans V et s et t dans T : $s^{-1}v^{-1} \cdot ut \cdot vs$ est dans T, soit encore $v^{-1} \cdot ut \cdot v$ est dans T, soit encore $v^{-1} \cdot ut \cdot v \cdot t^{-1} = v^{-1} \cdot u \cdot tvt^{-1}$ est dans T, c'est-à-dire vaut 1 puisqu'il s'agit du produit de trois éléments de V. La condition est donc que $u = vtv^{-1}t^{-1} = [v, t]$.

Dire que T est malnormal signifie que, quand $u = 1$ et $t \neq 1$, cela se produit seulement si $v = 1$; autrement dit 1 est le seul point de V qui commute avec t, le seul point fixe de l'action de t sur V par automorphisme intérieur (quand cela se produit pour tout $t \neq 1$, nous dirons que T agit *sans points fixes* sur V, ou encore que T agit *librement* sur V). Cela veut dire aussi que, à $t \neq 1$ fixé, l'application $[v, t]$ de V dans V est injective, car $[v, t] = [w, t]$ équivaut à $[t, w^{-1}v] = 1$.

Par contre, dire que tout ut a un conjugué dans T, soit encore que la scission est nette, signifie que cette application est surjective. On remarque que, dans ce cas, ut est conjugué de t par un point de V.

Si V est fini, l'injectivité implique la surjectivité (et réciproquement d'ailleurs), ce qui donne une autre explication des points (iii) et (iv) du lemme 1.1, mais l'exemple 0.1 montre que cette vérité ne franchit pas les Pyrénées ; il n'est pas certain que ce soit toujours le cas dans un contexte de rang de Morley fini, bien qu'aucun contre-exemple ne soit connu.

Par contre *c'est vrai dans un contexte localement fini*, c'est-à-dire si, pour chaque t de T, chaque partie finie de V est contenue dans un groupe fini normalisé par t.

Nous avons besoin de deux faits de pure théorie des groupes.

Si s est un endomorphisme du groupe V, l'*adjointe* de s est l'opération $a(x) = s(x)x^{-1}$; elle est soumise à la loi $a(xy) = a(x) \cdot {}^{x}a(y)$. Réciproquement, si $a(x)$ obéit à cette loi, c'est l'adjointe de l'endomorphisme $a(x)x$. L'endomorphisme s

agit sur V sans point fixe (autre que 1) si et seulement si son adjointe est injective. Le fait suivant autorise des récurrences.

Fait 3.1. *Soient s un automorphisme sans points fixes du groupe V, et W un sous-groupe normal de V normalisé par s. Si l'adjointe de s restreinte à W est surjective, l'endomorphisme s' induit par s sur V/W est sans points fixes ; si de plus l'adjointe de s' est surjective, celle de s l'est aussi.*

Démonstration. Si s fixe v modulo W, $s(v) = wv = s(w')w'^{-1}v$, si bien que $s(w'^{-1}v) = w'^{-1}v$, que v est congru modulo W à un point fixe de s, c'est-à-dire est dans W.

Si v modulo W est dans l'image de s', il s'écrit

$$v = s(u)wu^{-1} = s(u)s(w')w'^{-1}u^{-1} = s(uw')(uw')^{-1}. \qquad \square$$

Corollaire 3.2. *Un groupe V résoluble par fini ne donne que des scissions nettes si le contexte est de rang de Morley fini.*

Démonstration. Notre hypothèse implique que, pour chaque t dans T, la structure formée de V et de l'automorphisme s induit par t est de rang de Morley fini. C'est clair si V est fini ; sinon V° a un sous-groupe définissable infini commutatif caractéristique A, qui est normalisé par s. L'adjointe de la restriction de s à A est un endomorphisme injectif de A dans A, et est donc surjective ; on divise par A pour conclure par induction sur le rang. $\square$

La netteté des scissions est ce qui permet de faire des quotients propres :

Fait 3.3. *Soient F un groupe de Frobenius quelconque, T un de ses sous-groupes malnormaux, et V un sous-groupe normal de F contenu dans $U(T)$. On suppose que le produit semi-direct VT est nettement scindé et strictement inclus dans F. Alors l'image T_1 de T dans F/V (qui est isomorphe à T) est malnormale dans F/V, et $U(T_1)$ est l'image de $U(T)$.*

Démonstration. Supposons que, modulo V, a conjugue $t \neq 1$ et t' dans T, et mettons en œuvre la surjectivité de l'adjointe : $ata^{-1} = vt' = [u,t']\cdot t' = ut'u^{-1}$; on en déduit que $u^{-1}a$ est dans T, que a est dans T modulo V.

Supposons que, modulo V, x soit dans ${}^aT$: $axa^{-1} = vt = utu^{-1}t^{-1}\cdot t = utu^{-1}$; on en déduit que x est bien dans un conjugué de T. $\square$

Corollaire 3.4. *On considère un groupe de Frobenius F, un de ses sous-groupes malnormaux T, et deux de ses sous-groupes normaux V et W contenus dans $U(T)$. Alors, si VT est nettement scindé, VW est inclus dans $U(T)$; si WT est aussi nettement scindé, VWT l'est également.*

Démonstration. Si V est net, W reste disjoint de T et de ses conjugués dans le quotient F/V, et son image réciproque est dans $U(T)$. Si W est net lui aussi et

$t \neq 1$, on considère v dans V et w dans W ; $t \cdot vw = t^u \cdot w = u \cdot t(u^{-1}wu) \cdot u^{-1}$ si $v = t^{-1}utu^{-1}$, et $t(u^{-1}wu)$ est conjugué de t par un point de W. □

Remarque. La(e) rapporteuse(r) de la version préliminaire de cet article a fait l'observation suivante : si V et W sont des sous-groupes normaux contenus dans $U(T)$, et si pour un v de V et un w de W le produit vw n'est pas dans $U(T)$, l'automorphisme intérieur s associé à vw n'a pas de point fixe sur W, mais il en a dans $W/W \cap V$; son adjointe est donc injective et non surjective sur $W \cap V$.

4. Groupes de Frobenius de rang de Morley fini pseudo-localement finis

Un groupe F est *pseudo-localement fini* si tout énoncé du langage des groupes qu'il satisfait l'est aussi dans un groupe localement fini. Comme les sections d'un groupe localement fini sont localement finies, les sections définissables d'un groupe pseudo-localement fini le sont aussi.

Il est facile de constater que toute structure définissable dans un corps algébriquement clos est pseudo-localement finie ; voir par exemple [Poizat 2021]. La conjecture d'algébricité a été montrée pour les groupes localement finis dans [Thomas 1983], mais il a été ensuite remarqué par Simon Thomas lui-même que son résultat s'étendait aux groupes pseudo-localement finis. Les groupes simples de rang de Morley fini et pseudo-localement finis sont exactement les groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos, le travail de Thomas consistant en somme à déduire la classification de ces groupes à partir de la classification des groupes simples finis [1].

Cette pseudo-finitude locale est la clef de certains transferts immédiats de propriétés des groupes finis aux groupes algébriques (précisons-le : de corps de base algébriquement clos). Pour les groupes de Frobenius, plutôt que de reproduire des techniques de groupes algébriques comme dans [Hertzig 1961; B&N, Lemma 11.39, p. 218], nous pouvons effectuer, grâce à la proposition suivante, un transfert brutal de nature modèle-théorique.

Proposition 4.1 [B&N, Proposition 11.19, p. 206]. *Dans un groupe de Frobenius F de rang de Morley fini, tout sous-groupe malnormal est définissable* (*par une formule du langage des groupes*, *avec paramètres*).

Démonstration. C'est vrai si T est fini. Sinon chaque point de $T \cap F^\circ$ a un centralisateur infini [Altınel et al. 2008, Chapter 4, Corollary 4.18, p. 270] [2], qui est inclus

1. Celle-ci repose elle-même sur une bonne connaissance des groupes de Lie simples !

2. On peut se passer d'un résultat aussi délicat : si a est un point de $T \cap F^\circ$ de centralisateur fini, sa classe de conjugaison est générique dans F°, ainsi que celle de a^{-1} (différent de a) ; a et a^{-1} sont conjugués par un point b de F°, qui est dans T. Comme b^2 centralise a, l'ordre de b est fini et pair, et l'une de ses puissances est une involution, qui a un centralisateur infini ; on sait d'ailleurs que T est son centralisateur (proposition 2.1).

dans T ; le groupe engendré par les composantes connexes des centralisateurs de ses points est un groupe définissable connexe non trivial, et T est son normalisateur. $\square$

Dans un contexte pseudo-localement fini, les groupes de Frobenius définissables scindés le sont nettement : c'est un cas particulier de ce qu'on appelle le *principe de surjectivité d'Ax*.

Proposition 4.2. *Dans un groupe de Frobenius F de rang de Morley fini et pseudo-localement fini* :

(i) *Tous les sous-groupes T malnormaux sont conjugués.*

(ii) *$U(T)$ est un sous-groupe nilpotent non trivial, qui est connexe quand T est infini, et F est le produit semi-direct de $U(T)$ par T.*

(iii) *Si T contient une involution i, $U(T)$ est un groupe commutatif sans involutions inversé par i.*

Démonstration. Considérons, dans un groupe de Frobenius Φ localement fini, un sous-groupe malnormal Θ, et montrons que $U(\Theta)$ est un groupe et que Φ est le produit semi-direct de $U(\Theta)$ par Θ. En effet, si $t \neq 1$ est dans Θ, t' est dans un autre conjugué de Θ, et u et v sont dans $U(\Theta)$, ils engendrent un groupe de Frobenius fini φ, dont $\varphi \cap \Theta$ et ses conjugués dans φ sont les sous-groupes malnormaux ; ce sont aussi les traces sur φ des conjugués de Θ qui intersectent φ non trivialement, si bien que le produit uv est aussi dans $U(\Theta)$. On voit de la même façon que tout point de Φ est produit d'un point de $U(\Theta)$ et d'un point de Θ.

Si Θ' est un autre sous-groupe malnormal, une vérification locale permet de voir que $U(\Theta) = U(\Theta')$. Il existe donc un conjugué Θ'' de Θ' non disjoint de Θ ; mais alors $\Theta \cap \Theta''$ est aussi malnormal, si bien que Φ est engendré par $U(\Theta)$ et $\Theta \cap \Theta''$, par $U(\Theta)$ et Θ, et par $U(\Theta)$ et Θ'', ce qui nécessite que $\Theta = \Theta''$. Autrement dit, Θ et Θ' sont conjugués.

Le groupe $U(\Theta)$ est localement nilpotent. Il est même nilpotent d'après un théorème de [Kegel et Wehrfritz 1973], mais notre contexte, où il y a partout des bornes aux chaînes de centralisateurs, va nous permettre d'éviter l'emploi d'un résultat aussi sophistiqué.

Revenons à F. Soit $\theta(x, \underline{a})$ une formule définissant T ; c'est un énoncé élémentaire qui déclare que, si $\theta(x, \underline{y})$ définit un sous-groupe malnormal, alors $U(\theta(x, \underline{y}))$ est un groupe et chaque point de F est produit d'un point satisfaisant $U(\theta(x, \underline{y}))$ et d'un point satisfaisant $\theta(x, \underline{y})$. Comme il est vrai dans tout groupe localement fini, il l'est aussi dans F. On voit semblablement que deux sous-groupes malnormaux sont conjugués.

Reste à voir que $U(T)$ est nilpotent, alors que pour l'instant il ne l'est que pseudo-localement. On est assuré que, étant donnés $u_1, \ldots, u_n$ dans $U(T)$, il existe $v \neq 1$ qui commute avec chacun d'eux. Comme $U(T)$ vérifie la condition de chaîne sur les centralisateurs, il a un centre non trivial ; $U(T)/Z(U(T))$ vérifie aussi cette condition de chaîne, si bien que $U(T)$ est abélien ou bien a un deuxième centre non trivial.

Si $U(T)$ est connexe, il n'est pas possible que son centre soit fini, car alors il serait égal à son deuxième centre. Dans ce cas, on le divise par son centre et on conclut par récurrence sur le rang.

Si $U(T)$ n'est pas connexe, d'après le raisonnement précédent $U(T)^\circ$ est nilpotent. Comme la scission de $U(T)^\circ T$ est nette, l'image T_1 de T dans le quotient $F/U(T)^\circ$ est malnormale, et $U(T_1) = U(T)/U(T)^\circ$; $U(T_1)$ est donc centralisé par la composante connexe de T_1, ce qui est impossible si T est infini. Par conséquent T est fini, $F/U(T)^\circ$ est un groupe de Frobenius fini, $U(T)/U(T)^\circ$ est nilpotent et $U(T)$ est résoluble. Pour éviter de nous fatiguer davantage, nous concluons en faisant appel à [B&N, Theorem 11.29, p. 211–214], dont le cas pénible est justement quand T est fini.

Le point (iii) se vérifie localement. □

Le résultat suivant nous permettra de vérifier, dans la section 5, qu'en fait la conjecture d'algébricité élimine les groupes de Frobenius non scindés.

Proposition 4.3. *Soient F un groupe de Frobenius de rang de Morley fini, T un sous-groupe malnormal de F, et G un sous-groupe définissable de F qui soit isomorphe à un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos. Alors, ou bien G est contenu dans un conjugué de T, ou bien G, ainsi que son normalisateur, sont inclus dans $U(T)$.*

Démonstration. Comme G n'est pas un groupe de Frobenius, ou bien il est contenu dans un conjugué de T, ou bien il est disjoint de tous (lemme 0 : pas besoin de logique). S'il est inclus dans $U(T)$, on nomme Θ l'intersection de T et du normalisateur de G.

On fait alors intervenir une des conséquences les plus subtiles de la structure d'un groupe algébrique simple : si H est un groupe d'automorphismes de G telle que l'action de H sur G reste de rang de Morley fini, alors chaque point de H est un automorphisme rationnel, définissable dans le corps de base de G (et en fait dans la structure de groupe de G), et H° est formé d'automorphismes intérieurs [Altınel et al. 2008, p. 134; B&N, p. 124]. Comme les automorphismes intérieurs ont une infinité de points fixes, Θ est fini, et $G\Theta$ est algébrique ; comme il ne peut pas être un groupe de Frobenius algébrique, Θ est trivial. Le même raisonnement vaut pour les conjugués de T. □

Dans un groupe de Frobenius algébrique, T° est commutatif [B&N, Lemma 11.39, p. 218]. Dans la section 6, cette propriété sera étendue au contexte pseudo-localement fini.

5. Structure des groupes de Frobenius de rang de Morley fini

Nous allons voir dans cette section que l'étude des groupes de Frobenius de rang de Morley fini s'aborde différemment suivant que le complément est fini ou infini, et que le deuxième cas se ramène pour l'essentiel à celui où il est connexe.

Proposition 5.1. *Soit F un groupe de rang de Morley fini ayant un sous-groupe malnormal T.*

(i) *T est fini si et seulement si F° est inclus dans $U(T)$.*

(ii) *F est connexe si et seulement si T est connexe.*

(iii) *T° est l'intersection de F° et de T.*

(iv) *Tout sous-groupe V de F, normal, définissable, connexe et non inclus dans $U(T)$, agit transitivement sur les conjugués de T, si bien que $VT = F$. Cette hypothèse implique que T est infini, et alors elle s'applique à $V = F^\circ$. Si T remplit F, alors $T \cap V$ remplit V.*

(v) $2 \cdot \mathrm{RM}(T) \leq \mathrm{RM}(F)$; *si T ne remplit pas F, alors* $\mathrm{RM}(F) \leq 2 \cdot \mathrm{RM}(U(T))$; *si F est connexe, alors* $\mathrm{RM}(U(T)) < \mathrm{RM}(F)$.

Démonstration. (i) Si l'intersection de T et de F° n'est pas triviale, elle est infinie d'après la démonstration de la proposition 4.1.

(ii) Si T est connexe, F est la réunion des conjugués de T, qui sont tous inclus dans F°. Si F est connexe, T est infini, et la réunion de ses conjugués est une partie générique de F ; si T n'était pas connexe, T serait partitionné en deux sous-ensembles génériques, la réunion des conjugués de T° et son complément.

(iii) C'est vrai si T est fini d'après le point (i) ; quand T est infini, $T \cap F^\circ$ est non triviale, donc malnormale dans F°, et connexe d'après le point (ii).

(iv) Soit T_1 un conjugué de T au sens de F. La réunion des conjugués de $T \cap V$ dans V, ainsi que celle des conjugués de $T_1 \cap V$ dans V, sont génériques, et doivent avoir une intersection non triviale ; $T \cap V$ et $T_1 \cap V$ sont donc conjugués par un point de V, qui conjugue aussi T et T_1.

Tout point de F est congru modulo V a un point du normalisateur de T, qui est autonormalisant.

Comme V est connexe, il est inclus dans F° ; d'après le point (i), T est infini, et F° n'est pas inclus dans $U(T)$.

Si T remplit F, V est la réunion des conjugués de $T \cap V$ au sens de F, qui sont aussi ses conjugués au sens de V.

(v) Dans l'action de F sur les conjugués de T, ce dernier ne fixe que T, si bien qu'il agit injectivement sur ses autres conjugués.

Si a est un point non trivial de $U(T)$, son centralisateur et sa classe de conjugaison sont inclus dans $U(T)$, et $\mathrm{RM}(U(T)) \geq \mathrm{RM}(a^F) \geq \mathrm{RM}(F) - \mathrm{RM}(U(T))$. Si F est connexe, $U(T)$ n'est pas générique car son complémentaire l'est. □

Note. Si le sous-groupe malnormal T est fini, il est montré [B&N, p. 210] que F est scindé, de la forme VT ; comme alors le groupe V contient F°, il est définissable.

Proposition 5.2. *On considère un groupe de Frobenius F connexe de rang de Morley fini.*

(i) *Deux sous-groupes malnormaux de F ont des conjugués non disjoints.*

(ii) *Les sous-groupes malnormaux minimaux de F sont conjugués.*

(iii) *Quels que soient le sous-groupe malnormal T et le point a de F, le groupe engendré par T et a est le groupe (définissable et connexe) engendré par T et T^a.*

(iv) *Si H est un sous-groupe de F contenant un sous-groupe malnormal T, il est définissable, connexe et autonormalisant. Les conjugués de T dans F qui ont une intersection non triviale avec H sont inclus dans H, et conjugués de T dans H ; $H \cap U(T)$ est formé de 1 et des points de H qui ne sont pas dans un conjugué de T au sens de H.*

(v) *Quel que soit le sous-groupe malnormal T, le groupe engendré par $U(T)$ est définissable.*

Démonstration. (i) La réunion des conjugués du premier intersecte non trivialement la réunion des conjugués du second.

(ii) Si T et T' sont malnormaux minimaux, pour un certain a, ${}^aT \cap T'$ n'est pas trivial, et est donc malnormal ; par minimalité, ${}^aT = T'$.

(iii) C'est vrai si a est dans T. Sinon, comme T est connexe, ${}^aT = aTa^{-1}$ l'est aussi, ainsi que le groupe G engendré par T et ${}^aT$. Comme T et ${}^aT$ sont malnormaux dans G, à l'intérieur de G la réunion des conjugués de T et celle des conjugués de ${}^aT$ sont des parties génériques, qui ne peuvent être disjointes ; par conséquent T et ${}^aT$ sont conjugués par un g de G, et $g^{-1}a$ est dans G, qui est donc aussi le groupe engendré par T et a.

(iv) Comme, d'après (iii), H est engendré par des conjugués de T, il est définissable et connexe. Le reste vient de ce que, si un conjugué T' de T n'est pas disjoint de H, à l'intérieur de H la réunion des conjugués de T ne peut être disjointe de celle des conjugués de $T' \cap H$; ce dernier est conjugué de T dans H, et en fait égal à T'.

(v) Soit H le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par $U(T)$. Modulo H, $U(T)$ est un ensemble fini normal, donc central, dans le groupe connexe F/H ; comme il est clos par puissances, il engendre un groupe fini. □

Proposition 5.3. *On considère un groupe de Frobenius F, de rang de Morley fini, ayant un sous-groupe malnormal T infini.*

(i) [B&N, Proposition 11.24, p. 208] *Tout groupe V contenu dans $U(T)$ et normalisé par T° est définissable et connexe.*

(ii) *Il y a un plus grand sous-groupe normal contenu dans $U(T)$ et donnant avec T une scission nette.*

(iii) *Si F est scindé relativement à T, étant produit semi-direct de V par T, ce groupe V est définissable et connexe, et F° est le produit semi-direct de V et de T°.*

(iv) *Si V est un sous-groupe normal de F contenu dans $U(T)$, ou bien $F = VT$, ou bien l'image de T reste malnormale dans le quotient F/V. Si $U(T)$ n'est pas un groupe, F est engendré par T et $U(T)$; sinon F est scindé, ou bien le quotient $F/U(T)$ est un groupe de Frobenius plein.*

Démonstration. (i) Le groupe $G = VT^\circ$ est un produit semi-direct, et comme un point $v \neq 1$ de V ne peut normaliser ni T ni T°, ce dernier est malnormal dans G. On montre alors, comme dans la proposition 5.2(iii), que le groupe engendré par T° et v est définissable et connexe, car il est identique à celui engendré par T° et ${}^vT^\circ$; il en suit que G lui-même, étant engendré par les ${}^vT^\circ$, est définissable et connexe.

Les classes de conjugaison (au sens de G) des points de V sont incluses dans V. On considère son plus petit sous-groupe V° définissable connexe elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre elles [Poizat 2018; 2021] ; V° est normal dans G, et on sait que chaque point de V a une classe de conjugaison finie modulo V°. Comme G/V° est connexe, V y est central modulo V°.

Soit alors H le groupe $V^\circ T^\circ$. Pour tout v de V, ${}^vT^\circ$ est inclus dans $V^\circ T^\circ = H$, et est donc conjugué de T° dans H. On en déduit que v est dans H, de la forme tu avec t dans T° et u dans V°, ou encore qu'il est dans V°. En conclusion $V = V^\circ$.

(ii) Conséquence du corollaire 3.4 et de la connexité des groupes considérés.

(iii) Le groupe V satisfait aux hypothèses du point (i), et VT° a même rang de Morley que F°.

(iv) Puisque $F = F^\circ T$ d'après la proposition 5.1(iv), si $F^\circ = VT^\circ$, alors $F = VT$; et si $F = VT$, sa composante connexe F° est VT°.

Sinon, considérons un point a de VT° tel que T° et ${}^aT^\circ$ ne soient pas disjoints modulo V. L'intersection S de ${}^aT^\circ$ et de VT° n'est donc pas triviale ; elle est par conséquent malnormale dans VT°, comme l'est T°. Comme VT° est connexe, S et T° y ont des conjugués non disjoints, et on trouve v dans V, t et t' non triviaux dans T°, tels que $ata^{-1} = vt'v^{-1}$; par conséquent $v^{-1}a$ est dans T° et a est dans T° modulo V. On voit que T° reste malnormal dans le quotient F°/V.

Si $U(T)$ n'est pas un groupe, on procède comme dans le lemme 1.2(iv) ; si c'est un groupe, il s'agit du fait 3.3, qui n'a rien à voir avec la finitude du rang. □

Remarque. La démonstration du point (iv) doit beaucoup à [B&N, Lemma 11.37, p. 217]. Il est assez troublant, car T reste malnormal dans le quotient sans que la netteté de la scission soit garantie, sans qu'on soit certain qu'aucun point de $U(T)$ n'entre dans T. On méditera également sur le corollaire 11.24 à la page 209 et sur l'exercice 5 aux pages 71 et 380.

Proposition 5.4. *On considère un groupe de Frobenius F, de rang de Morley fini, ayant un sous-groupe malnormal T infini.*

(i) *$U(T)$ contient un plus grand sous-groupe $R(F)$ normal résoluble. Il est définissable, connexe et nilpotent ; c'est le plus grand sous-groupe nilpotent normal dans F (il est indépendant du choix de T).*

(ii) *Si $F \neq R(F)T$, le quotient $F/R(F)$, ainsi que sa composante connexe $F^\circ/R(F)$, sont des groupes de Frobenius semi-simples (sans sous-groupe normal commutatif différent de $\{1\}$).*

(iii) *Quand $R(F) = \{1\}$, le socle de F° est composé soit d'un seul groupe de Frobenius simple non disjoint de T, qui engendre F avec T, soit est contenu dans $U(T)$, étant produit d'un nombre fini de groupes simples ; aucun de ces groupes simples n'est isomorphe à un groupe algébrique.*

(iv) *Sous la conjecture d'algébricité, un groupe de Frobenius de rang de Morley fini F connexe est scindé. Sa base est $R(F)$ et ses compléments sont tous conjugués.*

Démonstration. (i) Supposons que $U(T)$ contienne un sous-groupe normal R résoluble non trivial. Il contient un groupe abélien caractéristique non trivial A, qui est lui aussi normal dans F ; il est définissable et connexe d'après la proposition 5.3(i), et par conséquent infini. Comme il donne une scission nette, l'hypothèse se reproduit dans le quotient F/A (fait 3.3), et comme le rang de Morley diminue on finit par inclure R dans un groupe R_1 résoluble, normal, définissable et connexe, et contenu dans $U(T)$.

Si R' est un deuxième sous-groupe normal résoluble inclus dans $U(T)$, le passage au quotient F/A montre par induction que le groupe engendré par R et R', qui est résoluble et normal, est lui aussi inclus dans $U(T)$. D'où l'existence de $R(T)$, qui est définissable et connexe comme le sont tous les groupes normaux contenus dans $U(T)$.

Pour voir que $R(F)$ est nilpotent, nous redémontrons le cas facile de [B&N, Theorem 11.29, p. 211] : on considère un sous-groupe abélien définissable connexe infini B de T ; d'après le corollaire 3.2, pour tout $b \neq 1$ de B, le commutateur $[b, x] = bxb^{-1} \cdot x^{-1}$ définit une bijection de $R(F)$ dans $R(F)$, si bien que $R(F)$ est le dérivé du groupe résoluble connexe $R(F)B$. Selon un théorème dû à Ali Hoca Effendi, il est nilpotent [Poizat 1987, p. 94].

Enfin, si N est un sous-groupe nilpotent normal dans F, son centre est aussi normal, et contenu dans $U(T)$, ainsi que N.

(ii) Quand F n'est pas le produit semi-direct $R(F)T$, l'image de T modulo $R(F)$, qui est isomorphe à T, est malnormale dans le quotient $F/R(F)$, et celle de T° est malnormale dans sa composante connexe $F^\circ/R(F)$. Ces deux quotients n'ont pas de groupes résolubles normaux non triviaux.

(iii) Le socle (c'est-à-dire le groupe engendré par les sous-groupes normaux minimaux) du groupe connexe semi-simple F° est formé d'un produit de groupes simples normaux dans T° [Poizat 1987, p. 97]. Si l'un d'entre eux coupe T, c'est un groupe de Frobenius simple, qui n'est pas algébrique. Comme il coupe chaque conjugué de T, il est le seul groupe du socle, car il ne peut commuter avec un groupe de même espèce, ni avec un point non trivial de $U(T)$. Comme il contrôle la conjugaison de T, il engendre F avec celui-ci.

Dans le cas contraire, le socle de F est un produit de groupes simples contenus dans $U(T)$. Comme ils commutent, leur produit l'est aussi ; ce ne sont pas non plus des groupes algébriques (proposition 4.3).

(iv) Sous la conjecture d'algébricité, il ne peut pas y avoir de groupes de Frobenius de rang de Morley fini connexes semi-simples. Pour n'importe quel complément T, $F = R(F)T$. Tous les compléments sont définissablement isomorphes à $F/R(F)$; ils sont minimaux, et conjugués d'après la proposition 5.2(ii). □

Quand le socle est un groupe de Frobenius, notre analyse s'arrête là ; notons bien que nous n'avons pas affirmé que ce socle contenait la base $U(T)$. Dans le deuxième cas, nous ne savons pas si nous pouvons la poursuivre par une scission nette. Du moins avons-nous précisé les points où B&N ne peuvent éviter les groupes simples non algébriques dans leur analyse de contre-exemples minimaux aux pages 215–219, et, sous la conjecture d'algébricité, nous avons étendu les théorèmes de Frobenius et de Thompson aux groupes de Frobenius connexes de rang de Morley fini. Le sort des compléments sera réglé dans la dernière section.

En attendant, désireux de montrer tout ce que nous savons sur les groupes de Frobenius, nous ajoutons un minuscule supplément.

Proposition 5.5. *Soient F un groupe de Frobenius de rang de Morley fini, connexe et semi-simple, et T un de ses sous-groupes malnormaux. Alors* :

(i) *Tout $a \neq 1$ de $U(T)$ a une infinité de conjugués sous l'action du centralisateur d'un certain point b de $U(T)$.*

(ii) *Tout sous-groupe abélien V contenu dans $U(T)$ et normalisé par ce dernier est trivial.*

Démonstration. (i) Chaque $b \neq 1$ de $U(T)$ a un centralisateur infini $Z(b)$ — pas besoin d'[Altınel et al. 2008, Chapter 4, Corollary 4.18] : $U(T)$ n'est pas générique car son complémentaire l'est — qui est inclus dans $U(T)$. Si a n'a qu'un nombre fini de conjugués sous l'action de $Z(b)$, il est centralisé par $Z(b)^\circ$; si cela se produit pour chaque b, a est dans l'intersection Z des centralisateurs $Z(Z(b)^\circ)$, qui est un groupe définissable, contenu dans $U(T)$, et normal dans F. Ce Z est donc connexe d'après la proposition 5.3(i), et le centralisateur de a dans Z est un groupe infini, dont la composante connexe est centrale dans Z ; ce dernier a un centre non trivial, ce qui contredit la semi-simplicité de F.

(ii) Si V est un contre-exemple, on peut le supposer définissable, en le remplaçant par le centre de son centralisateur. Il ne peut être fini d'après le point (i). Si on le prend définissable minimal, il est connexe ; V est alors disjoint de chacun de ses conjugués W, au sens de F, distinct de lui-même, si bien que V et W commutent (comme ils se normalisent l'un l'autre, le commutateur d'un point de V et d'un point de W est dans leur intersection). Les conjugués de V engendrent donc un groupe commutatif, normal dans F, ce qui contredit sa semi-simplicité. □

Nous nous soucions maintenant du sort des groupes pleins.

Proposition 5.6. *Soit F un groupe connexe de rang de Morley fini, possédant des sous-groupes malnormaux remplissants.*

(i) *Si H est un sous-groupe propre de F contenant un groupe malnormal remplissant T, il est lui-même rempli par T, et c'est un sous-groupe malnormal dans F qui le remplit.*

(ii) *L'intersection de deux sous-groupes malnormaux non disjoints T et T' est remplissante si et seulement si T et T' le sont.*

(iii) *Les sous-groupes malnormaux remplissants minimaux sont conjugués ; ce ne sont pas des groupes de Frobenius pleins.*

(iv) *F n'a pas d'involutions, et chacun de ses sous-groupes finis est contenu dans un sous-groupe malnormal remplissant minimal.*

(v) *Chaque sous-groupe G définissable et connexe de F non contenu dans un groupe remplissant minimal est un groupe de Frobenius plein, et c'est vrai en particulier de son socle, qui est composé d'un seul groupe simple.*

Démonstration. (i) H est un groupe définissable connexe, qui est rempli par les conjugués de T qui l'intersectent non trivialement ; ces derniers sont tous conjugués de T dans H. Comme $U(T) \cap H = \{1\}$, H est malnormal dans F, et comme F est rempli par T il est aussi rempli par H.

(ii) Si $T \cap T'$ remplit F, nous avons vu que T et T' aussi. Réciproquement, si T' remplit F, $T \cap T'$ remplit T ; si de plus T remplit F, $T \cap T'$ aussi.

(iii) Deux sous-groupes malnormaux remplissants ont des conjugués qui se coupent non trivialement. Si T a lui même un sous-groupe malnormal le remplissant, ce dernier remplit F, et T n'est pas minimal.

(iv) Soient i et j des involutions situées dans des conjugués différents du groupe malnormal remplissant T. Le produit ij, étant inversé par i comme par j, ne peut être dans un conjugué de T ; donc $ij = 1$, $i = j$, ce qui ne se peut.

Soit T un sous-groupe remplissant minimal, et φ un groupe fini non trivial qui n'est pas contenu dans un conjugué de T. Comme φ n'est pas un groupe de Frobenius plein, les intersections non triviales de φ avec un conjugué de T se répartissent en au moins deux classes de conjugaisons, celle de θ et de θ', et le calcul fait dans le lemme 1.2(i) rend la chose impossible.

(v) Si T est malnormal remplissant et G n'est pas inclus dans T, il est rempli par toutes les intersections $G \cap T^a$ qui ne sont pas triviales ; comme il est connexe, elles sont toutes conjuguées dans G.

Comme $U(T)$ est trivial, F est semi-simple, et on est dans le premier cas de la proposition 5.4(iii). □

Nous dirons qu'un groupe de Frobenius plein, de rang de Morley fini et connexe, est *petit* si tous ses sous-groupes définissables maximaux sont conjugués (et malnormaux remplissants). Nous mettons l'emphase sur cette notion, car la carence d'un petit groupe plein en automorphismes involutifs est la partie facile, et de portée générale, de l'argumentation par contradiction de [Frécon 2018] ; la partie délicate, et de portée limitée, réside dans l'étude du symétron de ce groupe.

Proposition 5.7. (i) *Si F est un groupe connexe ayant un sous-groupe malnormal remplissant T, tout sous-groupe définissable G de F qui est minimal pour n'être pas inclus dans un conjugué de T est petit.*

(ii) *Un petit groupe est simple et n'a pas d'automorphisme définissable involutif non trivial.*

Démonstration. (i) Comme G est connexe, toutes les intersections non triviales de G avec un conjugué de T sont conjuguées dans G à l'une d'entre elles, soit T_1. Si H est un sous-groupe définissable propre de G, il est contenu dans un conjugué de T_1, qui est malnormal remplissant : c'est vrai s'il est fini, et sinon c'est vrai parce que c'est vrai pour H° par minimalité de G.

(ii) Les sous-groupes définissables propres de G, étant contenus dans un conjugué de son groupe malnormal maximal T, ne sont pas normaux.

Soit s un automorphisme involutif de G. Comme G n'a pas d'involutions, il est uniquement 2-divisible, et chaque point de G s'écrit de manière unique comme produit d'un point fixé par s et d'un point inversé par s ; voir par exemple [Poizat 2018]. Comme G n'est pas commutatif, s a des points fixes non triviaux, et si s

n'est pas l'identité il a des points inversés non triviaux. Par ailleurs s permute les conjugués de T, qui sont les sous-groupes malnormaux maximaux de G.

Si s est définissable et différent de l'identité, à conjugaison près son groupe de points fixes est contenu dans T, qui est normalisé par s. Il est nécessaire qu'il y ait d'autres points inversés que ceux de T ; si un autre conjugué T' de T en contient un, il est aussi normalisé par s, et comme il ne contient pas de points fixes c'est un groupe commutatif inversé par s. Comme T et T' sont conjugués, un point fixe non trivial a un conjugué inversé, si bien qu'il est conjugué de son inverse, ce qui produit des involutions. □

6. Où on retrouve un vieil ami

Dans cette section de conclusion, nous rappelons quelques questions, liées aux comportement des corps dans une situation de rang de Morley fini, qui surgissent de l'étude des groupes de Frobenius où $U(T)$ est un groupe commutatif. Si, dans les années 1970, était répandue la croyance optimiste, ou naïve, que tous les problèmes concernant les corps dans un environnement de rang de Morley fini étaient réglés par [Macintyre 1971], on sait aujourd'hui qu'il n'en est rien, à la lumière des travaux de Frank Wagner [2001].

Proposition 6.1. *Soit T un groupe commutatif infini agissant librement sur un groupe abélien U, de sorte que le produit semi-direct UT soit un groupe* (*de Frobenius*) *de rang de Morley fini. On peut alors définir dans ce dernier un ou plusieurs corps infinis $K_1, \dots, K_n$, des isomorphismes $f_1, \dots, f_n$ entre T et des sous-groupes de $K_1^*, \dots, K_n^*$, ainsi qu'une décomposition du sous-groupe de U engendré par ses sous-groupes normalisés par T minimaux en tant que somme directe d'espaces vectoriels V_1 sur $K_1, \dots, V_n$ sur K_n, sur laquelle T agit diagonalement comme $(f_1(t), \dots, f_n(t))$.*

Démonstration. Nous notons additivement la loi de groupe de U et multiplicativement l'action de T sur ce dernier.

Soit U_1 le plus grand sous-groupe de U définissable connexe elliptiquement engendré par la réunion d'un nombre fini de Ta. Si b est hors de U_1, Tb est fini modulo U_1, si bien que b commute avec des points de l'image de T dans le quotient UT/U_1, ce qui n'est pas conforme à la surjectivité des adjointes $tx - x$. Par conséquent $U = U_1 = Ta_1 + \dots + Ta_m - Ta_{m+1} - \dots - Ta_n$, ce qui permet de définir l'anneau commutatif $R = Z[T]$ des endomorphismes de U engendré par T ; en effet, tout point de U se représente dans le système générateur des a_i par une colonne de coordonnées de longueur n à valeur dans T, deux colonnes étant dites équivalentes si elles représentent le même vecteur. Ces endomorphismes sont représentés par les matrices $n \times n$ à valeur dans T qui respectent l'équivalence, propriété qui se définit en utilisant les a_i comme paramètres.

La même démonstration montre que tout sous-R-module de U, et en particulier U lui-même, est connexe (voir la proposition 5.3(i)) et finiment engendré. Un R-module minimal est engendré par chacun de ses points non nuls, si bien que R agit sur lui comme un corps. Le groupe V engendré par les R-modules minimaux est somme directe d'un nombre fini d'entre eux, si bien que la restriction de R à V n'a pas d'éléments nilpotents ; d'après [Altınel et al. 2008, Chapter 1, Lemma 4.1, p. 44], c'est un produit de corps $K_1 \times \cdots \times K_n$. Si on note V_i l'annulateur de $K_1 \times \cdots \times K_{i-1} \times \{0\} \times K_{i+1} \times \ldots K_n$, où $i = 1, \ldots, n$, on obtient la décomposition de V cherchée ; l'action de T sur V_i est celle d'un sous-groupe $f_i(T)$ de K_i^*. $\square$

Exemples. On considère trois actions de $T = K^*$ sur $V = K^+ \times K^+$:

(i) t agit comme la matrice diagonale (t, t^{-1}) ; si t_1 et t_2 sont algébriquement indépendants, $t_1 + t_2$ et $t_1^{-1} + t_2^{-1}$ le sont aussi, si bien que l'anneau R est le produit de corps $K \times K$: il y a deux corps (tous deux isomorphes à K), et deux espaces vectoriels (de dimension un).

(ii) En caractéristique p, t agit comme (t, t^p) ; les points de la forme (t, t^p) forment un corps L (isomorphe à K), et nous avons affaire en réalité à l'action diagonale de L^* sur $L^+ \times L^+$: il n'y a qu'un seul corps, et qu'un seul espace vectoriel de dimension deux.

(iii) t agit comme (t^2, t^3) : ce n'est pas une action libre.

Notation. Dans un groupe commutatif U de rang de Morley fini, l'intersection de deux sous-groupes définissables sans torsion est divisible, si bien qu'il y en a un plus grand, que nous notons U_0 ; pour chaque nombre premier p, nous notons U_p son plus grand sous-groupe définissable connexe d'exposant p.

Proposition 6.2. *Soit T un groupe agissant librement sur un groupe abélien U, de sorte que le produit semi-direct UT soit un groupe connexe de rang de Morley fini ; alors tout sous-groupe résoluble définissable connexe de T est commutatif. Plus précisément, si $U_p \neq \{0\}$ pour un p premier, la composante connexe du normalisateur d'un sous-groupe infini abélien définissable de T est toujours commutative ; si $U_0 \neq \{0\}$, T est un groupe définissablement linéaire sans unipotents sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.*

Démonstration. Soit M un sous-groupe de T abélien infini définissable. Le normalisateur de M induit un groupe d'automorphismes de l'anneau R_M engendré par l'action de M sur U, et agit semi-R_M-linéairement suivant la formule $s(\lambda x) = (s\lambda s^{-1}) \cdot sx$. Il normalise le groupe V_M engendré par les R_M-modules minimaux, et permute les corps dont la restriction de R_M à V_M est le produit (car ce sont les quotients de R_M par ses idéaux maximaux). Sa composante connexe N fixe chacun de ces corps K ; elle définit un groupe d'automorphismes de K, qui est nécessairement réduit à l'identité. Donc N agit R_M-linéairement sur V_M ; il normalise l'espace vectoriel V associé à K, et agit sur lui K-linéairement.

Comme il agit sur V sans points fixes, N ne contient pas d'unipotents. Ses sous-groupes définissables résolubles sont triangularisables par fini d'après le théorème de Lie–Kolchin–Maltsev ; comme les commutateurs d'un groupe triangulaire sont unipotents, leurs composantes connexes sont commutatives. Si N n'est pas commutatif, nous notons C son plus grand sous-groupe définissable connexe normal commutatif, et N_1 et C_1 leurs clôtures de Zariski respectives. Le groupe N/C est un sous-groupe du groupe algébrique linéaire N_1/C_1 ; il peut avoir un centre fini, mais après quotient par ce dernier on obtient un groupe linéaire semi-simple dont le socle est formé de groupes simples linéaires à borels commutatifs.

D'après [Poizat 2001], c'est impossible s'il y a un corps de caractéristique p, et N est alors commutatif. Comme un groupe infini résoluble connexe normalise un sous-groupe commutatif infini connexe, T satisfait bien à la condition dite dans l'énoncé.

S'il y a un corps de caractéristique nulle, nous considérons l'action de T sur U_0. Pour chaque rationnel r on voit, en exprimant les coordonnées des ra_i dans le système générateur des a_i, que l'anneau R_M engendré par M contient la multiplication par r : l'intersection R de tous les R_M, qui est celle d'un nombre fini d'entre eux, est un anneau infini. Les R-modules sont définissables et connexes (ils sont divisibles sans torsion) ; T normalise l'espace engendré par les R-modules minimaux, et fixe chacun des corps associés à l'action de R sur ce dernier. Si K est l'un d'entre eux et si V est l'espace vectoriel associé, T agit K-linéairement sur V, et sans points fixes, et en particulier sans unipotents. Par conséquent, tout ses sous-groupes résolubles définissables connexes, qui sont triangularisables, sont diagonalisables. □

Remarques. (i) Samuel Zamour a montré dans sa thèse [2022], qui a été conduite de façon totalement indépendante des recherches exposées dans cet article, qu'un groupe de Frobenius de rang de Morley fini connexe et définissablement linéaire en caractéristique p était résoluble.

(ii) Une conséquence d'[Altınel et al. 2019, Theorem 8] est que, quand $U_p \neq \{0\}$ pour un p premier (autre que 2 !) et T contient une involution, il est commutatif (on peut aussi utiliser [Altınel et Burdges 2008, Theorem 2]). Cela éclaire notre proposition 2.1(iv).

La proposition 6.2 permet de donner à [B&N, Theorem 11.34, p. 216] une démonstration qui précise la place des sections simples non algébriques dans un contre-exemple, même s'il n'est pas minimal.

Corollaire 6.3. *Un groupe de Frobenius F connexe de rang de Morley fini qui est pseudo-localement fini, ou même qui ne contredit pas la conjecture d'algébricité* (*dans le sens où toutes ses sections définissables simples sont algébriques*), *est* *résoluble. Le groupe malnormal T est isomorphe à un sous-groupe multiplicatif de un ou plusieurs corps définissables dans F, et $U(T)$ est le groupe dérivé de F.*

Démonstration. Si $U(T)$ est trivial ou n'est pas un groupe nilpotent, on trouve des sections simples non algébriques dans le socle du quotient de F par $R(F)$ (proposition 5.4(iii)). Quand $U(T)$ est nilpotent non trivial, on obtient une action libre de T sur son centre. Si T n'est pas commutatif, on considère un sous-groupe S de T définissable connexe et minimal pour n'être pas commutatif. Le quotient de S par son radical est un groupe simple (en fait un groupe de Frobenius plein dont les compléments sont des bons tores en caractéristique p, un groupe définissablement linéaire en caractéristique nulle) qui n'est pas un groupe algébrique. □

Exemples. (i) Si F est un groupe de Frobenius algébrique connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2, le tore T contient une involution, si bien que $U(T)$ est commutatif d'après la proposition 2.1.

(ii) En caractéristique 2, le groupe diagonal $T = (x \quad 1 \quad x^{-1})$ agit librement sur les matrices triangulaires unipotentes d'ordre 3, si bien que le groupe

$$\begin{pmatrix} x & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$$

est de Frobenius ; il en est de même du groupe

$$\begin{pmatrix} x & u & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{pmatrix},$$

chez qui $U(T)$ est commutatif d'exposant 4.

(iii) On obtient des exemples semblables, de rang de Morley fini mais non algébriques, en prenant un corps avec un groupe multiplicatif T infini sans involutions, dont on est sûr de l'existence en caractéristique nulle grâce à [Baudisch et al. 2009].

Tout cela mène à quatre questions sur les corps de rang de Morley fini :

Question 1. *Le groupe additif d'un corps de rang de Morley fini peut-il avoir un groupe définissable connexe infini non commutatif d'automorphismes ?*

Cette question, qui ne se pose pas en caractéristique nulle, apparaît dans la proposition 3.12, p. 117 de [Poizat 1987]. Elle suppose l'existence d'un sous-groupe infini définissable propre du groupe multiplicatif d'un corps de caractéristique p, ce qui, d'après [Wagner 2003], implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de p-nombres de Marin Mersenne (un frère mineur ayant vécu au début du XVIIᵉ siècle). Cette hypothèse arithmétique semble très peu probable, et surtout hors de portée des méthodes de la théorie des modèles. Depuis [Altınel et al. 2008], tout le monde, nous compris, s'emploie à la contourner : en effet, les démonstrations ci-dessus se simplifient drastiquement si on suppose que tout sous-groupe définissable infini commutatif de T est connexe, sans sous-groupes propres définissables autres que cycliques finis.

En amalgamant des corps de caractéristique p au-dessus de leur groupe additif, on doit pouvoir obtenir des corps non définissablement isomorphes de même groupe additif.

Question 2. *S'il existe un isomorphisme définissable entre les groupes multiplicatifs de deux corps de rang de Morley fini, sont-ils définissablement isomorphes ?*

Question 3. *S'il existe un isomorphisme définissable entre des sous-groupes multiplicatifs infinis de deux corps de rang de Morley fini, sont-ils définissablement isomorphes ?*

Question 4. *La structure formée d'un corps de caractéristique nulle, avec un sous-groupe multiplicatif infini propre, peut-elle avoir un rang de Morley fini et être pseudo-localement finie ?*

Nous terminons par un bref examen du cas minimal de groupe de Frobenius de rang de Morley fini.

Proposition 6.4. *Soit F un groupe de rang de Morley fini connexe, avec un sous-groupe malnormal T, tel que* $\mathrm{RM}(F) = 2 \cdot \mathrm{RM}(U(T))$; *alors $U(T)$ est un groupe commutatif qui est d'exposant p pour un certain nombre premier, ou bien sans torsion divisible. En outre, si* $\mathrm{RM}(T) = \mathrm{RM}(U(T))$, *$F$ est scindé ; si de plus T est commutatif, F est isomorphe au produit semi-direct de K^+ par K^*, où K est un corps définissable.*

Démonstration. Considérons $a \neq 1$ dans $U(T)$. Sa classe de conjugaison C et son centralisateur $Z(a)$ sont inclus dans $U(T)$, et $\mathrm{RM}(F) = 2 \cdot \mathrm{RM}(U(T)) = \mathrm{RM}(C) + \mathrm{RM}(Z(a))$; on en déduit que $\mathrm{RM}(C) = \mathrm{RM}(Z(a)) = \mathrm{RM}(U(T))$. Comme F est connexe, C est de degré de Morley 1 ; $U(T)$ se répartit donc en un nombre fini de classes de conjugaison génériques $C = C_0, \ldots, C_d$, sans compter l'élément neutre ; $Z(a)$ doit couper génériquement au moins une classe de conjugaison C'. Le centralisateur de C est celui d'un nombre fini de ses points, qui tous commutent avec le générique de C' ; comme il est normal il doit contenir C', et sa composante connexe est égale à une classe de conjugaison C'', augmentée de l'identité.

Il ne peut pas y avoir deux groupes composés d'une classe de conjugaison, car leur intersection devrait être triviale, et ils commuteraient l'un avec l'autre, si bien que $U(T)$ devrait contenir leur produit, qui est de dimension double. Donc l'une des classes de conjugaison, augmentée de 1, est un groupe A commutatif, qui est la composante connexe du centralisateur de $U(T)$. Dans le quotient F/A, l'image de

$U(T)$ est finie, et en fait triviale car la scission est nette : autrement dit $U(T) = A$. Comme tous les points non triviaux de A sont conjugués, ils ont tous même ordre.

Si $\mathrm{RM}(T) < \mathrm{RM}(U(T))$, $F/U(T)$ est rempli ; sinon F est scindé, et quand T est commutatif, comme il a même rang que A, la proposition 6.1 nous dit que nous avons affaire à un espace vectoriel de dimension 1 sur un corps, $A = K^+$, $T = K^*$. $\square$

Remarque. Altınel et al. [2019] montrent que T est toujours commutatif quand $\mathrm{RM}(T) = \mathrm{RM}(U(T))$, sauf peut-être en caractéristique 2 ; on trouve dans [Zamour 2022] bien d'autres précisions sur les groupes exactement deux fois transitifs de rang de Morley fini.

Remerciements

Je remercie très sincèrement Erjan Baisal pour le résumé en russe, Frank Wagner pour celui en allemand, et la rapporteuse ou le rapporteur anonyme de la première version de cet article, dont les très nombreuses remarques m'ont permis — je l'espère — d'en améliorer la présentation et l'intelligibilité.

Bibliographie

[Altınel et Burdges 2008] T. Altınel et J. Burdges, "On analogies between algebraic groups and groups of finite Morley rank", *J. Lond. Math. Soc.* (2) **78**:1 (2008), 213–232. MR Zbl

[Altınel et al. 2008] T. Altınel, A. V. Borovik et G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank*, Mathematical Surveys and Monographs **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. MR Zbl

[Altınel et al. 2019] T. Altınel, A. Berkman et F. O. Wagner, "Sharply 2-transitive groups of finite Morley rank", prépublication, 2019, voir https://hal.science/hal-01935537v2.

[Baudisch et al. 2009] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, "Die böse Farbe", *J. Inst. Math. Jussieu* **8**:3 (2009), 415–443. MR Zbl

[Borovik et Nesin 1994] A. Borovik et A. Nesin, *Groups of finite Morley rank*, Oxford Logic Guides **26**, The Clarendon Press, New York, 1994. MR Zbl

[Borovik et Poizat 1990] A. V. Borovik et B. P. Poizat, "Tores et p-groupes", *J. Symbolic Logic* **55**:2 (1990), 478–491. MR Zbl

[Cherlin 1979] G. Cherlin, "Groups of small Morley rank", *Ann. Math. Logic* **17**:1-2 (1979), 1–28. MR Zbl

[DeBonis et Nesin 1994] M. DeBonis et A. Nesin, "On split Zassenhaus groups of mixed characteristic and of finite Morley rank", *J. London Math. Soc.* (2) **50**:3 (1994), 430–439. MR Zbl

[Delahan et Nesin 1993] F. Delahan et A. Nesin, "Sharply 2-transitive groups revisited", *Doğa Mat.* **17**:1 (1993), 70–83. MR Zbl

[Delahan et Nesin 1995] F. Delahan et A. Nesin, "On Zassenhaus groups of finite Morley rank", *Comm. Algebra* **23**:2 (1995), 455–466. MR Zbl

[Epstein et Nesin 1994] D. Epstein et A. Nesin, "On Frobenius groups of finite Morley rank, II", pp. 341–350 dans *Automorphisms of first-order structures*, édité par R. Kaye et D. Macpherson, Oxford Univ. Press, New York, 1994. MR Zbl

[Feit et Thompson 1963] W. Feit et J. G. Thompson, "Solvability of groups of odd order", *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775–1029. MR Zbl

[Frécon 2018] O. Frécon, "Simple groups of Morley rank 3 are algebraic", *J. Amer. Math. Soc.* **31**:3 (2018), 643–659. MR Zbl

[Frobenius 1901] G. Frobenius, "Über auflösbare Gruppen, IV", *Berl. Ber.* (1901), 1216–1230. Zbl

[Hertzig 1961] D. Hertzig, "The structure of Frobenius algebraic groups", *Amer. J. Math.* **83** (1961), 421–431. MR Zbl

[Jaligot 2001] E. Jaligot, "Full Frobenius groups of finite Morley rank and the Feit–Thompson theorem", *Bull. Symbolic Logic* **7**:3 (2001), 315–328. MR Zbl

[Kegel et Wehrfritz 1973] O. H. Kegel et B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North-Holland Mathematical Library **3**, 1973. MR Zbl

[Macintyre 1971] A. Macintyre, "On ω_1-categorical theories of fields", *Fund. Math.* **71**:1 (1971), 1–25. MR Zbl

[Nesin 1989] A. Nesin, "Nonsolvable groups of Morley rank 3", *J. Algebra* **124**:1 (1989), 199–218. MR Zbl

[Nesin 1992] A. Nesin, "Notes on sharply 2-transitive permutation groups", *Doğa Mat.* **16**:1 (1992), 69–84. MR Zbl

[Nesin 1994] A. Nesin, "On Frobenius groups of finite Morley rank, I", pp. 325–339 dans *Automorphisms of first-order structures*, édité par R. Kaye et D. Macpherson, Oxford Univ. Press, New York, 1994. MR Zbl

[Olchanski 1982] A. I. Olchanski, "Groups of bounded period with subgroups of prime order", *Algebra i Logika* **21**:5 (1982), 553–618. En russe; traduit en anglais à *Algebra and Logic* **21** (1982), 369–418. MR Zbl

[Poizat 1987] B. Poizat, *Groupes stables : une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah **2**, Bruno Poizat, Lyon, 1987. MR Zbl

[Poizat 2001] B. Poizat, "Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner", *J. Symbolic Logic* **66**:4 (2001), 1637–1646. MR Zbl

[Poizat 2018] B. Poizat, "Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions", *J. Algebra* **497** (2018), 143–163. MR Zbl

[Poizat 2021] B. Poizat, "Symétries et transvexions, principalement dans les groupes de rang de Morley fini sans involutions", *J. Symb. Log.* **86**:3 (2021), 965–990. MR Zbl

[Thomas 1983] S. Thomas, "The classification of the simple periodic linear groups", *Arch. Math.* (*Basel*) **41**:2 (1983), 103–116. MR Zbl

[Thompson 1959] J. Thompson, "Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959), 578–581. MR Zbl

[Wagner 2001] F. Wagner, "Fields of finite Morley rank", *J. Symbolic Logic* **66**:2 (2001), 703–706. MR Zbl

[Wagner 2003] F. O. Wagner, "Bad fields in positive characteristic", *Bull. London Math. Soc.* **35**:4 (2003), 499–502. MR Zbl

[Zamour 2022] S. Zamour, *Étude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini*, thèse de doctorat, Université Claude Bernard (Lyon 1), 2022, voir https://theses.hal.science/tel-03765160.

Received 2 Jun 2022. Revised 22 Dec 2022.

BRUNO POIZAT:

poizat@math.univ-lyon1.fr
Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard (Lyon 1), Villeurbanne, France

Model Theory

msp.org/mt

See inside back cover or msp.org/mt for submission instructions.

Model Theory (ISSN 2832-904X electronic, 2832-9058 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

MT peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
mathematical sciences publishers
nonprofit scientific publishing
https://msp.org/

Model Theory

no. 1 vol. 3 2024

Complete type amalgamation for nonstandard finite groups 1
AMADOR MARTIN-PIZARRO and DANIEL PALACÍN

Bounded ultraimaginary independence and its total Morley sequences 39
JAMES E. HANSON

Quelques modestes compléments aux travaux de Messieurs Mark DeBonis, Franz Delahan, David Epstein et Ali Nesin sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini 71
BRUNO POIZAT

Nonelementary categoricity and projective locally o-minimal classes 101
BORIS ZILBER

A Pila–Wilkie theorem for Hensel minimal curves 119
VICTORIA CANTORAL FARFÁN, KIEN HUU NGUYEN, MATHIAS STOUT and FLORIS VERMEULEN

Model theory in compactly generated (tensor-)triangulated categories 147
MIKE PREST and ROSE WAGSTAFFE