Model Theory

no. 2 vol. 3 2024

$M \not\models T$

La conjecture d'algébricité, dans une perspective historique, et surtout modèle-théorique

Bruno Poizat

msp

Model Theory
Vol. 3, No. 2, 2024
https://doi.org/10.2140/mt.2024.3.479

La conjecture d'algébricité, dans une perspective historique, et surtout modèle-théorique

Bruno Poizat

В статье описывается влияние гипотезы алгебраичности Черлина и Зильбера простых групп конечного ранга Морли, начиная с двух ее ишодных формулировок. В ней больше внимания уделяется их теоретико-модельным аспектам, чем алгебраическим. Излагаюстя истории, связанные со свойствами аддитивности ранга Морли и определениями групп конечкого ранга Морли по Боровику. Рассказывается о теореме о неразложимых множествах, о характеристике этих групп генерическими данными и о возможном распространении их свойств на структуры, более слабые, чем группы.

This paper describes the influence of the algebraicity conjecture of Cherlin and Zilber, concerning the simple groups of finite Morley rank, since its two original formulations. It insists on its model theoretic aspects more than on its algebraic aspects. It relates the history of the additivity properties of Morley rank and of the definition à la Borovik of groups of finite Morley rank. It accounts for the indecomposable sets theorem, the characterisation of these groups by generic data, and the possible extension of their properties to structures weaker than groups.

Cet article décrit l'influence de la conjecture d'algébricité de Zilber et de Cherlin, à propos des groupes simples de rang de Morley fini, depuis ses deux formulations originelles. Il insiste sur ses aspects plutôt modèle-théoriques qu'algébriques. On y fait l'historique des propriétés d'additivité du rang de Morley et de la définition à la Borovik des groupes de rang de Morley fini. On parle du théorème des indécomposables, de caractérisation des groupes par des données génériques, et de l'extension éventuelle de leurs propriétés à des structures plus faibles que des groupes.

Then spoke the king and said in Aramaic language: What! I hear that Zilber–Cherlin conjecture is open since fifty years! Who are these useless scholars who make conjectures instead of proving theorems? The thing is gone from me: if next morrow ye will not make the proof known unto me, ye shall be cut in pieces and your houses shall be made a dunghill!

Daniel 2.5, Unauthorized Version

MSC2020 : primary 03C45; secondary 03C60, 20E32, 20F11, 20F50.
Mots-clefs : groupes algébriques, groupes finis, groupes de rang de Morley fini, groupes superstables, groupes localement finis, conjecture de Cherlin–Zilber, espaces de symétries, symétrons.

1. Zilber et Cherlin

À la fin de son article aux Fundamenta, Boris Zilber [1977] pose quatre questions, que je reproduis ici accompagnées d'une traduction aussi littérale que possible, à l'intention de mes lectrices, et surtout de mes lecteurs, qui auraient du mal à apprécier les finesses de l'original.

(1) Существуют ли неабелевы связные слабо категоричные группы, неизоморфные алгебраическим группам над алгебраически замкнутым полем?

(1) Existe-t-il des groupes non abéliens connexes faiblement catégoriques qui ne soient isomorphes à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos ?

(2) Существуют ли простые категоричные группы, отличные от алгебраических над алгебраически замкнутым полем?

(2) Existe-t-il des groupes simples catégoriques distincts de ceux qui sont algébriques sur un corps algébriquement clos ?

(3) Можно ли группу $G = H_p + H_q$ интерпретировать в $\aleph_1$-категоричной теории? Здесь H_p, H_q — бесконечные абелены группы простых показателей p, q соответственно.

(3) Le groupe $G = H_p + H_q$ peut-il être interprété dans une théorie $\aleph_1$-catégorique ? Ici H_p, H_q sont des groupes abéliens infinis d'exposant premier p, q respectivement.

(4) Для любых ли двух $\aleph_1$-категоричных теорий T_1 и T_2 существует $\aleph_1$-категоричная теория T, в которой формулньо интерпретируются T_1 и T_2?

(4) Est-ce que, pour chaque paire de théories T_1 et T_2 $\aleph_1$-catégoriques, il existe une théorie $\aleph_1$-catégorique T avec des formules interprétant T_1 et T_2 ?

Il faut préciser que le cadre dans lequel travaille Zilber est celui d'une structure dont la théorie est $\aleph_1$-catégorique, et qu'il qualifie de *faiblement catégorique* ce qui y est interprétable. Ce contexte lui était familier depuis [Zilber 1974], où il donne une démonstration de la finitude du rang de Morley, tout en reconnaissant la priorité à [Baldwin 1973].

On sait maintenant que la réponse à la première question est positive. Par exemple, la fusion d'Ehud Hrushovski [1992] permet de définir sur un même ensemble fortement minimal deux corps algébriquement clos K et L de caractéristiques différentes, et on trouvera un contre-exemple en prenant le produit d'un groupe algébrique sur K et d'un groupe algébrique sur L ; ou encore en considérant le produit semi-direct du groupe additif du corps K par un de ses sous-groupes multiplicatifs M, où (K, M) est un corps vert de rang de Morley deux, dont la construction doit aussi beaucoup aux idées de Hrushovski [Poizat 2001a; Baudisch et al. 2009]. Un troisième exemple est constitué des groupes nilpotents d'Andreas Baudisch [1996], également construits par amalgame de Hrushovski.

La deuxième question est le premier avatar de la conjecture d'algébricité, qui reste ouverte aujourd'hui. On remarque un petit changement de vocabulaire : il est question d'un groupe simple catégorique, et non plus faiblement catégorique ; cela vient de ce que le théorème principal (теорема 5.2) de l'article déclare qu'un groupe simple faiblement catégorique est en fait $\aleph_1$-catégorique.

La réponse à la troisième question est également positive, car on peut fusionner les deux groupes.

Quant à la dernière, elle est bien entamée, mais reste encore du domaine de la conjecture. En effet, la fusion de Hrushovski permet d'amalgamer deux structures fortement minimales dénombrables en une troisième sous deux conditions : (i) elles sont toutes les deux ω-saturées, (ii) le degré de Morley y est définissable. À ma connaissance, et au grand désespoir de Hrushovski, la nécessité de la deuxième condition n'a pas été levée.

J'ai déclaré plus haut que le théorème 5.2 était le résultat principal de l'article ; c'est bien sûr matière à appréciation, influencée par l'évolution ultérieure du sujet. Il faut remarquer que, dans son introduction en russe, Zilber en donne un énoncé différent de celui qui figure dans le corps du texte, en le remplaçant par son corollaire : un groupe algébrique simple infini (sur un corps algébriquement clos) est une structure $\aleph_1$-catégorique.

Dans cette même introduction, il cite en premier son théorème 6.1, seul mentionné dans son résumé en anglais, et qui répond à une question d'Angus Macintyre : *un corps gauche* (тело) *faiblement catégorique est un corps* (поле) *commutatif*. Ce théorème est aussi démontré de façon indépendante dans [Cherlin 1978]. Une fois qu'on sait que le corps gauche L a un sous-corps commutatif infini K, sur lequel L est nécessairement de dimension finie, sa démonstration n'est plus qu'un exercice d'algèbre linéaire. En effet, depuis [Macintyre 1971], on sait que K, comme tout corps infini ω_1-catégorique, et même totalement transcendant, est algébriquement clos. On peut spéculer sur ce qui a manqué à Macintyre pour traiter des corps gauches (finitude du rang, existence d'un sous-corps commutatif infini ?), mais ce qui est sûr, c'est que sa démonstration n'est pas qu'un objet de curiosité pour amateurs d'archéologie mathématique : elle est toujours d'actualité, car pour montrer son théorème on ne connaît aujourd'hui rien d'autre que son appel à la théorie de Galois, ce qui fait qu'on ne sait toujours pas si un corps minimal (*pas* fortement minimal) de caractéristique nulle est algébriquement clos (voir [Wagner 2000a]).

Zilber cite aussi dans l'introduction son théorème 4.2, répondant à une question de Taitslin, déclarant qu'un groupe de théorie universelle $\aleph_1$-catégorique est abélien. Pour cela, il suffit de savoir qu'un groupe infini faiblement catégorique contient un sous-groupe commutatif infini, ce qu'il montre dans son lemme 12, tout en citant la prépublication [Reineke 1975] ; on peut dire de la démonstration de Reineke la même chose que de celle de Macintyre.

On a l'impression que Zilber, mû par un désir de communication, attire l'attention sur les conséquences de ses résultats qui parlent à ses contemporains ; dans la section 3, nous verrons un autre exemple où, pour des raisons de réclame, on met en valeur une conséquence anecdotique en escamotant le résultat profond et novateur, qu'il est plus difficile de leur faire apprécier.

Dans mon exposé, je vais rappeler quelques questions anciennes, mais aussi en introduire de plus personnelles, en prenant le risque qu'elles ne soient ni pertinentes, ni originales. Pour commencer, j'ose surcharger la partition d'un maître en parlant, à la différence de Zilber, d'interprétation de structures et non de théories :

Question 1. (i) *Deux structures ω_1-catégoriques dénombrables sont-elles interprétables dans une même troisième ?*

(ii) *En particulier, deux corps algébriquement clos dénombrables de degrés de transcendance différents sont-ils interprétables dans une même structure ω_1-catégorique ?*

Cette question n'a de sens que pour des structures dénombrables, car une structure ω_1-catégorique ne peut interpréter deux ensembles infinis de cardinaux distincts.

Observons que le successeur des entiers $(\mathbb{Z}, x+1)$ interprète son double $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, sur la base $(0, \mathbb{Z}) \cup (1, \mathbb{Z})$; en fait, il interprète (avec paramètres) chacune de ses extensions élémentaires non saturées comme un sous-ensemble propre de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, ainsi que son extension dénombrable saturée sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tout entier.

Nous examinons maintenant la deuxième apparition de la conjecture, sous la plume de Gregory Cherlin, qui conclut ainsi son article [1979] d'un ton plus assuré que celui de la modeste question (вопрос) de Zilber :

Main Conjecture. *Every simple ω-stable group is an algebraic group over an algebraically closed field.*

Conjecture principale. *Tout groupe simple ω-stable est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.*

Je crois que si Cherlin n'est pas allé jusqu'à superstable, c'est qu'il n'était pas encore totalement sûr qu'un corps infini superstable fût algébriquement clos (voir la page 2 de son article, et [Cherlin et Shelah 1980]). Il ajoute que le cas de rang de Morley fini lui semble particulièrement important, ainsi que celui des groupes localement finis, et aussi celui des groupes (définissablement) linéaires.

Alors que l'article de Zilber est consacré à des considérations abstraites sur les groupes $\aleph_1$-catégoriques, celui de Cherlin est une étude plus terre à terre des propriétés algébriques des groupes de rang de Morley un, deux et trois ; sa contribution théorique est l'identification des groupes connexes aux groupes de degré de Morley un, par une méthode qui préfigure les arguments de généricité.

Cherlin attire l'attention sur l'existence possible de contre-exemples à sa conjecture de rang de Morley trois, qu'il qualifie de « bad groups » ; disons tout de suite que ces mauvais groupes de rang trois n'ont été éliminés que très récemment par Olivier Frécon [2018].

Cherlin parle dans son introduction de l'article de Zilber, qu'il n'a découvert qu'après avoir achevé le sien ; il exprime son admiration pour le corollaire sur les groupes algébriques simples, qu'il avait obtenu lui-même grâce à une inspection de la structure algébrique de ces groupes, alors que la démonstration de Zilber n'est que pure théorie des modèles. Curieusement, il ne le cite pas à propos de la conjecture.

De nos jours, on a coutume de l'énoncer ainsi, bien qu'aucun de ses deux auteurs ne l'ait formulée exactement en ces termes :

Conjecture d'algébricité [Zilber 1977; Cherlin 1979]. *Un groupe simple de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.*

Dès son apparition, cette conjecture s'offre à deux regards : est-elle de nature algébrique, structurelle, ou bien de nature modèle-théorique ? Nous avons vu que Cherlin penche vers le premier côté, et Zilber vers le second. Moi-même, dès que je suis entré dans l'arène, j'ai toujours espéré qu'elle serait résolue non pas par une laborieuse classification, mais par une sorte de *general nonsense* modèle-théorique ; j'étais frustré à l'idée que, pour montrer qu'une famille de groupes est algébrique, il fallût nécessairement en donner la liste. La suite des évéènements [1] n'a pas tout à fait répondu à mon attente naïve.

Pour nous exprimer plus clairement, nous faisons la convention suivante. Un groupe de rang de Morley fini sera une structure de groupe *enrichie* : la base de la structure est munie d'une loi de groupe définissable, mais il peut y avoir des ensembles définissables dans cette structure qui ne le sont pas en termes de la seule loi de groupe ; c'est cette structure enrichie qui a un rang de Morley fini. Quand toute la structure est définissable (avec paramètres) à partir de la loi de groupe, nous parlerons de groupe *nu*. Bien que la théorie des modèles ne fasse pas de différence entre les groupes nus et les groupes vêtus, il importe de noter que la conjecture d'algébricité ne parle que du groupe nu.

Et à ce propos, je dois m'excuser d'avoir attribué à Zilber, dans la préface de [Poizat 1987], une conjecture trop enthousiaste, à savoir qu'un groupe simple de rang de Morley fini était un groupe algébrique *nu* sur un corps algébriquement clos, c'est-à-dire qu'il était impossible d'enrichir sa structure en conservant la catégoricité (on sait maintenant que c'est possible grâce à un amalgame de Hrushovski). Cette dernière hypothèse était issue de nos discussions, lorsque j'étais son hôte pendant

1. Écriture inclusive.

un mois à Kemerovo en 1986, mais ne correspond à rien de ce qu'il a écrit ou rendu public.

Cette problématique de nudité renvoie à ce qu'on appelle aujourd'hui la « trichotomie de Zilber », thème d'une autre saga que celle que je chante ici ; voir [Pillay 2013, p. 177; Poizat 2000]. Je ne parlerai pas d'elle, et en particulier pas de son sommet, [Hrushovski et Zilber 1996], où la conjecture est montrée dans un cadre « géométrique » qui reste très abstrait, bien que plus restreint que celui de la finitude du rang de Morley. Je ne parlerai pas non plus d'autres résultats de Zilber, de nature plus algébrique, concernant les groupes de rang de Morley fini, dont plusieurs contributeurs à ce volume rendent compte.

2. Borovik

Un théoricien des groupes étranger à la théorie des modèles, Aleksandr Borovik, dès qu'il a eu connaissance des travaux de Zilber, a voulu dégager une description de son cadre directement accessible à un pur algébriste. Dans [Borovik 1984b], il introduit la liste d'axiomes suivante, définissant ce qu'il appelle les « groupes avec dimension ». Ces conditions ne font intervenir que le groupe lui-même, et pas ses extensions élémentaires.

Аксиома А и аксиома Б. Définition de la collection W des sous-ensembles définissables (конструктивны, *constructibles*, terme emprunté à la géométrie algébrique), avec paramètres, des puissances cartésiennes de G. À chaque constructible A est associé un entier positif $\dim A$.

Аксиома В. $\dim A = 0 \iff A$ — конечно (A est fini).

Аксиома Г. $\dim(A \cup B) = \max\{\dim A, \dim B\}$.

Аксиома Д (принцип связности). Для любого $A \in W$ существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что A нельзя представить в виде объединения $n+1$ попарно непересекающихся конструктивных множеств $A_1, \dots, A_{n+1}$ той же размерности, что и A: $\dim A_i = \dim A$.

> **Axiome D** (principe de connexité). Pour chaque $A \in W$ il existe un certain nombre $n \in \mathbb{N}$, tel que A ne puisse pas se présenter sous l'aspect d'une réunion de $n+1$ ensembles constructibles ne se coupant pas par paire $A_1, \dots, A_{n+1}$ de même dimension que A : $\dim A_i = \dim A$.

Аксиома Е (принцип слоев морфизма). Если $A, B \in W$, $f : A \to B$ — морфизм, то множества $B_n = \{x \in B \mid \dim f^{-1}[x] = n\}$ конструктивны и $\dim f^{-1}[B_n] = n + \dim B_n$.

> **Axiome E** (principe à propos des morphismes). Si $A, B \in W$, et $f : A \to B$ est un morphisme, alors l'ensemble $B_n = \{x \in B \mid \dim f^{-1}[x] = n\}$ est constructible et $\dim f^{-1}[B_n] = n + \dim B_n$.

Les axiomes B à Д forcent la dimension de Borovik à majorer le rang de Cantor, mais rien n'impose qu'elle soit le rang de Morley : elle peut être par exemple deux fois le rang de Morley. Ou, plus significativement, si M est interprétable dans une structure $\aleph_1$-catégorique, elle peut être le rang de Morley au sens de la structure-mère et non le rang de Morley intrinsèque de M.

L'axiome E décrit en fait deux propriétés de la dimension : sa définissabilité (pour une famille uniforme de formules avec paramètres) et son additivité. Borovik, citant [Zilber 1974], affirme qu'un groupe G interprétable dans une théorie $\aleph_1$-catégorique satisfait à ces axiomes si on prend pour dimension le rang de Morley au sens de la théorie-mère ; il faut comprendre que G n'est pas muni de sa seule loi de groupe, mais aussi de toute la structure induite, pour garantir la définissabilité du rang. On voit que Borovik, qui n'est pas logicien, et a même l'intention explicite de contourner la théorie des modèles, n'échappe pas à la nécessité d'enrichir les groupes, et il est remarquable que, en ce qui concerne les groupes simples, le résultat de Zilber rende cette précaution inutile.

Une faiblesse de sa présentation, c'est que dans les axiomes A et B, il ne parle que d'images de groupes par des homomorphismes dont les graphes sont constructibles, et jamais de quotient d'un ensemble constructible par une relation d'équivalence constructible. À vrai dire, dans la suite de la prépublication, Borovik parle en une occasion de quotient par un sous-groupe normal *fermé* (замкнутая), un lapsus qui vient de ce qu'il sait qu'un sous-groupe constructible d'un groupe algébrique est Zariski-clos ; il sait aussi qu'un quotient d'un groupe algébrique par un sous-groupe algébrique normal est un groupe algébrique. Nous pensons aller au-devant de ses intentions en qualifiant de *groupe avec dimension* un groupe G habillé dont les ensembles interprétables (avec paramètres) dans G, c'est-à-dire définissables dans la structure G^{eq} obtenue par Shelah en lui ajoutant ses éléments imaginaires, sont munis d'un rang fini satisfaisant aux conditions de Borovik. Cette convention n'a pas d'incidence sur celle de Zilber, pour la raison évidente qu'une structure interprétable dans une théorie $\aleph_1$-catégorique est définissable dans une théorie $\aleph_1$-catégorique obtenue en ajoutant une seule sorte imaginaire à la précédente.

L'additivité du rang de Morley dans un cadre $\aleph_1$-catégorique est bien connue de Zilber, mais il ne l'utilise pas dans [1977], car il n'en a pas besoin pour décrire les propriétés modèle-théoriques des groupes faiblement catégoriques. Cherlin [1979] ne la connaît pas pour les groupes de rang de Morley fini sous sa forme générale ; il se débrouille de façon artisanale, puisque $1+1=2,\ 1+2=3$, et qu'il est inutile de savoir combien font $2+2$ car cela sort du cadre de l'étude.

Voici la version borovikienne de la conjecture d'algébricité :

Гипотеза. Простая бесконечная группа с размерностью является линейной алгебраической группой над алгебраически замкнутым полем.

Conjecture. *Un groupe simple infini avec dimension se trouve être un groupe linéaire algébrique sur un corps algébriquement clos.*

En vrai théoricien des groupes, Borovik n'oublie pas de mentionner qu'un groupe algébrique simple est linéaire. Sa conjecture appelle une triple question :

Question 2. (i) *La structure de groupe nue d'un « groupe avec dimension » au sens de Borovik a-t-elle un rang de Morley fini ?*

(ii) *La conjecture de Borovik est-elle équivalente à la conjecture d'algébricité ?*

(iii) *Qu'en est-il en particulier si le groupe contient un sous-groupe infini d'exposant deux ?*

Les motivations de ces questions s'éclaireront après la section 4, où nous montrerons qu'un groupe, nu ou habillé, de rang de Morley fini satisfait aux conditions de Borovik, la dimension étant le rang de Morley. Si la réponse au premier point est négative, la pertinence du deuxième résidera dans la possibilité de montrer l'équivalence des deux conjectures sans les résoudre ; une réponse négative au troisième permettrait d'évaluer la part de théorie des modèles indispensable à [Altınel et al. 2008] : nous en dirons plus dans la section 6.1.

3. Blum

Les propriétés d'additivité du rang de Morley, dans un cadre général, ont été traitées bien plus tôt dans la première partie du mémoire de doctorat de Lenore Blum [1969] ; j'en extrais les inégalités suivantes dans le cas particulier où les rangs de Morley sont des nombres finis.

(0) Si (a, b) satisfait une formule $\varphi(x, y)$ impliquant $\mathrm{RM}(y/x) \leq m$, alors

$$\mathrm{RM}(a, b) \leq \mathrm{RM}(a) + \mathrm{RM}(b/a) + \mathrm{RM}(a) \cdot m.$$

(1) $$\mathrm{RM}(a, b) \leq \mathrm{RM}(a) + \mathrm{RM}(b/a) + \mathrm{RM}(a) \cdot \mathrm{RM}(b).$$

(2) $$\mathrm{RM}(A \times B) < (1 + \mathrm{RM}(A)) \cdot (1 + \mathrm{RM}(B)).$$

(3) Si tous les 1-types sont de rang de Morley fini, alors tous les n-types sont de rang de Morley fini.

On montre le premier point pour le rang de Cantor par induction sur le rang, puis pour le rang de Morley en montant à un modèle ω-saturé. On en déduit immédiatement les trois dernières inégalités ; elles sont optimales, et ne sont pas valables pour le rang de Cantor, car $\mathrm{RC}(b)$ ne majore pas $\mathrm{RC}(b/a)$. En fait, on peut avoir $\mathrm{RM}(a) = \mathrm{RM}(b/a) = 1$ et $\mathrm{RM}(a, b) = \mathrm{RM}(b) = \mathrm{RM}(M) = \omega$, ou n'importe quoi plus grand ou égal à 2 !

La deuxième partie de la thèse est consacrée aux corps différentiellement clos de caractéristique nulle : c'est là qu'apparaît leur axiomatisation basée sur l'existence de solutions aussi génériques que possible des équations différentielles algébriques en une variable. La question qui gouverne la thèse est celle de la transitivité de la relation « être de rang de Morley fini sur … », qui n'est pas vérifiée en général, mais qui est valide pour les corps différentiellement clos, où l'ordre de l'équation différentielle minimale borne le rang de Morley.

La partie différentielle de la thèse a été publiée dans [Sacks 1972], mais la première partie, profondément novatrice et plus difficilement appréciable aux contemporains, est restée inédite. C'est la raison pour laquelle [Lachlan 1980] ne la cite pas quand il retrouve ses résultats. Entretemps, Daniel Lascar [1976] avait introduit son rang U et ses fameuses inégalités qui, dans le cas fini, deviennent l'égalité $\mathrm{RU}(a, b) = \mathrm{RU}(a) + \mathrm{RU}(b/a)$.

4. Le petit livre jaune

La préface et le chapitre 2 de [Poizat 1987] apportent au sujet la clarification suivante, en montrant qu'un groupe enrichi G est de rang de Morley fini si et seulement si G^{eq} satisfait aux trois conditions suivantes :

(1) Chaque ensemble définissable a un rang de Cantor fini.

(2) Les cardinaux des membres d'une famille uniforme d'ensembles définissables finis sont bornés (absence de la propriété de recouvrement fini).

(3) Le rang de Cantor est définissable.

Nous insistons sur quelques aspects spécifiques de ces conditions :

(i) Elles ne mentionnent que G lui-même, sans demander de monter à une de ses extensions élémentaires saturées (de fait, il est rare qu'on doive faire appel à des arguments de compacité — le pain quotidien du théoricien des modèles — lors d'études structurelles de groupes de rang de Morley fini).

(ii) L'additivité n'est pas un axiome, c'est une conséquence des axiomes, qui impliquent que le rang de Cantor est aussi le rang de Morley, ainsi que le rang U de Lascar. Elle est toutefois considérée comme un axiome par Borovik et Nesin [1994, p. 57], qui l'utilisent pour montrer des résultats de base, concernant la généricité en particulier, où elle tient lieu de symétrie de la déviation.

(iii) Il en est de même de la stabilité, rarement utilisée en tant que telle (voir [Borovik et Nesin 1994, p. 63]), et de ses conséquences comme la condition de Baldwin–Saxl (que Borovik et Nesin [1994, p. 80] se donnent la peine de montrer à partir de leurs axiomes).

(iv) Si un groupe enrichi les satisfait, il en est de même de n'importe quel groupe interprétable dans la structure, et en particulier du groupe nu associé. Ses extensions élémentaires les satisfont également.

(v) En l'absence de groupe, (1), (2) et (3) n'impliquent que la superstabilité [Burdges et Cherlin 2002] ; à l'inverse, ces propriétés ne sont pas valides dans toutes les structures de rang de Morley fini.

Le petit livre jaune reste jusqu'à ce jour le seul document où est exposée la démonstration de ce fait, qui pourtant n'est ni très compliquée, ni même très originale. Elle repose sur une décomposition du groupe considéré en une tour finie de sous-groupes normaux définissables, chaque quotient étant sous le contrôle d'un ensemble minimal ; elle a été initiée par Lascar [1985] dans le prolongement du théorème de [Zilber 1977] sur les groupes simples.

Son ingrédient principal est le « théorème des indécomposables » de Zilber ([1977, Теорема 3.3; Poizat 1987, p. 44–47] ; voir la section 8), affirmant que, sous certaines circonstances, le sous-groupe engendré par une partie définissable est lui-même définissable, et connexe ; il généralise un résultat, semble-t-il dû à Chevalley, à propos des fermés de Zariski irréductibles d'un groupe algébrique.

Pour appliquer cette décomposition à un groupe infini G de rang de Morley fini, on procède ainsi : on considère, dans une extension élémentaire ω-saturée Γ de G, une partie définissable A fortement minimale ; on l'émonde d'une partie finie pour la rendre indécomposable, puis on la translate pour qu'elle contienne l'élément neutre, et engendre un groupe définissable connexe. Les conjugués de ce groupe engendrent un groupe définissable connexe normal Γ_1, et on itère le procédé dans Γ / Γ_1, qui est de rang de Morley inférieur (on n'a pas besoin de l'additivité pour le montrer !) ; on est arrêté au bout d'un nombre fini de pas, pour constater qu'on a affaire à une structure fini-dimensionnelle dont chaque dimension est portée par un ensemble fortement minimal. Dans une telle structure, le rang de Cantor est égal au rang de Morley, au rang U et au poids, et la condition d'uniformité est vérifiée, comme c'est le cas pour une structure $\aleph_1$-catégorique, c'est-à-dire dans le cas unidimensionnel [Baldwin 1973; Belegradek 1973; Poizat 1978] ; dans ces structures, le degré de Morley d'une famille uniforme d'ensembles définissables est borné, mais pas nécessairement définissable [Hrushovski 1992]. Cerise sur le gâteau : il s'agit de propriétés de la *théorie* de Γ, qui est aussi celle de G, si bien que la décomposition de Lascar peut se conduire dans G lui-même, qu'il est a posteriori inutile de le remplacer par un modèle saturé.

Réciproquement, si un groupe satisfait aux trois conditions, ses ensembles définissables infinis minimaux le sont fortement grâce à la condition 2 d'uniformité, c'est-à-dire qu'ils restent minimaux dans ses extensions élémentaires. On conduit alors la décomposition de Lascar en s'appuyant sur le rang de Cantor pour montrer la fini-dimensionnalité.

On voit de même que, si un groupe avec dimension au sens de Borovik satisfait à la condition 2 d'uniformité, par exemple s'il est ω-saturé, la décomposition de Lascar (reposant sur la dimension) montre que ce groupe est de rang de Morley fini.

Dans ce cas, il est clair qu'on obtient une fonction de dimension sur chaque extension élémentaire de ce groupe G en faisant usage de la définition de la dimension au sens de G.

Ce qui a été dit plus haut du degré de Morley rend nécessaire de rappeler une double question qui ne m'appartient pas, liée à l'obstacle qu'a rencontré Hrushovski dans ses amalgames [1992].

Question 3 [Borovik et Nesin 1994, p. 371]. *Dans un groupe de rang de Morley fini* :

(i) *Le degré de Morley est-il définissable* ?

(ii) *Les composantes connexes d'une famille uniforme de groupes définissables forment-elles une famille uniforme* ?

5. Berline et Lascar

Chantal Berline et Daniel Lascar [Berline 1986; Berline et Lascar 1986] montrent que, dans l'étude d'un groupe superstable G, le développement de Cantor de son rang, $\mathrm{RU}(G) = \omega^{\alpha k} \cdot n_k + \cdots + \omega \cdot n_1 + n_0$, joue un rôle essentiel. Tout d'abord, il y a des types de RU maximal, qui sont les types génériques, si bien que l'écriture $\mathrm{RU}(G)$ a un sens ; ensuite, grâce à une version infinitaire du théorème des indécomposables, ils obtiennent une décomposition de Lascar de G en une tour $G \supset G_k \supset \cdots \supset G_1 \supset G_0$ de groupes définissables normaux dont les quotients consécutifs G_{i+1}/G_i ont un RU monomial. C'est ainsi qu'un groupe superstable simple doit avoir un RU monomial, $\mathrm{RU}(G) = \omega^\alpha \cdot n$, et doit contenir un sous-groupe abélien de rang au moins ω^α, et qu'un corps gauche superstable est commutatif. Tout ceci est aussi exposé dans [Poizat 1987, chapitre 6].

Ils reprennent ensuite les résultats de Cherlin pour les groupes de rang ω^α, $\omega^\alpha \cdot 2$ et $\omega^\alpha \cdot 3$. Maintenant qu'on sait, grâce à Frécon, que les « bad groups » de rang 3 n'existent pas, il est naturel de poser la question de l'extension de son résultat au cas superstable.

Question 4. *Peut-on adapter la démonstration de Frécon aux groupes superstables de rang* $\omega^\alpha \cdot 3$?

Comme préalable à la question, il faudra décider de quel rang on parle. L'unicité de la racine carrée dans un groupe de rang de Morley fini sans involutions jouant un tel rôle dans la démonstration de Frécon, il faudra vraisemblablement se placer dans un contexte ω-stable.

6. Wagner and the ABC murders

6.1. ***Imiter la classification des groupes simples finis.*** L'idée-force de ce qu'on appelle maintenant le « programme de Borovik » est d'attaquer la conjecture en adaptant les techniques employées lors de la classification des groupes simples finis, en s'appuyant principalement sur le comportement des involutions dans un contexte de rang de Morley fini. Borovik, dès [1984a], entreprend de généraliser des propriétés bien connues des involutions d'un groupe fini, mais le premier résultat de quelque ampleur est la conjugaison des 2-sylows, montrée dans [Borovik et Poizat 1990] ; [Poizat et Wagner 1993] en donne une démonstration plus algébrique. Comme en 1987 je mettais en doute la possibilité de montrer quelque chose à propos de sous-groupes non définissables, mon coauteur m'a répondu que ce qui importait n'était pas qu'ils fussent définissables ou pas, mais que c'étaient les 2-sylows.

Cette approche algébrique a ensuite donné lieu à une somme considérable de travaux, dus à une multitude d'auteurs, dont je ne rends pas compte ici (pas plus que de leurs généralisations à des contextes plus larges, comme le cadre o-minimal) ; une première génération d'entre eux est exposée dans [Borovik et Nesin 1994].

Elle culmine dans [Altınel et al. 2008], où la conjecture est montrée pour les groupes dont les 2-sylows sont non triviaux et ont un exposant borné. Ce monumental ouvrage donne aussi des informations sur les groupes contenant des 2-groupes de Prüfer, mais dit peu de choses sur les possibles groupes simples de rang de Morley fini sans involutions (incompatibles avec la conjecture), qu'il réussit à contourner.

Ses résultats sont principalement de nature algébrique, structurelle, mais ils sont conditionnés par un théorème d'essence modèle-théorique, une conséquence très inattendue des axiomes caractérisant le rang, le théorème de [Wagner 2001] sur les corps de rang de Morley fini (K algébriquement clos, avec structure supplémentaire), déclarant que : (i) K élimine les imaginaires ; (ii) son modèle premier est la clôture algébrique modèle-théorique de $\varnothing$; (iii) si K a un automorphisme définissable non trivial, ce modèle premier est porté par la clôture algébrique algébrique de $\varnothing$. Il a pour conséquence qu'en caractéristique p un tore (c'est-à-dire un sous-groupe définissable de $K^* \times \cdots \times K^*$) est clôture définissable de sa torsion.

6.2. ***Utiliser la classification des groupes simples finis.*** La classification des groupes simples finis a par elle-même des conséquences sur la conjecture d'algébricité : c'est en s'appuyant sur elle que Simon Thomas [1983] a montré que cette conjecture est vraie pour les groupes localement finis. Il a ensuite observé qu'elle était aussi vraie pour les groupes pseudo-localement finis.

Une structure est *localement finie* si chaque partie finie de sa base engendre une sous-structure finie, et *pseudo-localement finie* si c'est un modèle de la théorie des structures localement finies de même langage.

Cette définition repose sur une convention linguistique, puisque toute structure de langage purement relationnel est localement finie. Pour l'éviter, nous introduisons le solide *principe de finitude locale*, qui, par définition, est satisfait par les structures dans lesquelles toute structure interprétable (avec paramètres) est pseudo-localement finie. Voici comment ce principe s'introduit dans notre sujet :

Fait. *Les corps algébriquement clos nus*, *ainsi que les corps de Wagner* (*avec automorphisme*) *mentionnés ci-dessus*, *satisfont au principe de finitude locale.*

Les ingrédients de la démonstration sont l'élimination des imaginaires, et le fait que les corps finis sont définissablement clos (si un détail vous échappe, consultez [Poizat 2001b]).

Après avoir constaté que les groupes définissablement linéaires en caractéristique positive sont définissables dans un corps de Wagner, [Poizat 2001b] en conclut que :

Corollaire. *La conjecture d'algébricité est vraie pour les groupes définissablement linéaires en caractéristique p.*

Cela mène inévitablement à la question suivante, posée aussi dans [Macpherson et Pillay 1995] :

Question 5. *Est-elle vraie pour un groupe définissablement linéaire en caractéristique nulle* ? (*Il faut éliminer un mauvais groupe qui ne contient que des éléments semi-simples* ; *ce serait un groupe linéaire simple sans involutions*, *dont aucun exemple n'est connu à ce jour.*)

Le principe de finitude locale implique le *principe de surjectivité*, dit aussi *principe d'Ax* [1968], déclarant que toute injection définissable d'un ensemble définissable dans lui-même est surjective. Cela nous rappelle une question ancienne qui n'a de sens que pour les groupes nus, car on peut enrichir un corps en lui amalgamant une extension élémentaire du successeur des entiers naturels :

Question 6 [Borovik et Nesin 1994, p. 371]. *Un groupe nu de rang de Morley fini satisfait-il au principe de surjectivité* ?

Il est bien des contextes où la pseudo-finitude locale permet d'étendre immédiatement, ou presque, aux groupes de rang de Morley fini des propriétés des groupes finis, par exemple celui des groupes de Frobenius [Poizat 2024]. Nous pouvons rêver que c'est dans cette pseudo-finitude locale que nous trouverons le chaînon manquant entre ces deux familles de groupes, et croire que postuler la conjecture d'algébricité revient à dire que tout groupe de rang de Morley fini satisfait au principe de finitude locale ; cela nous donnerait une formulation de la conjecture qui s'abstiendrait de privilégier les groupes simples. Avant de planer dans ces hauteurs, il est prudent de réfléchir à une question plus terre à terre :

Question 7. *En caractéristique nulle*, *les corps verts de rang de Morley fini*, *et plus précisément ceux dont l'existence est assurée par* [Baudisch et al. 2009], *sont-ils pseudo-localement finis ?*

Rappelons qu'on ne sait pas s'il y a des « corps de Wagner » autres que les corps nus et que, d'après [Wagner 2003], l'existence de corps verts en caractéristique p aurait des conséquences arithmétiques surprenantes sur les nombres de Mersenne.

7. Weil et Hrushovski

Le travail de Thomas consiste en définitive, grâce au principe de finitude locale, à déduire la classification des groupes algébriques simples de celle des groupes simples finis, ce qui ne manque pas de paradoxe ; il a pour conséquence que la conjecture n'a pas de contre-exemple parmi les groupes définissables dans un corps algébriquement clos nu !

C'était sans doute la première chose à vérifier dès qu'elle est apparue, mais personne n'a songé à le faire à ce moment. De fait, il n'y a pas besoin de mobiliser la classification des groupes simples finis pour cela, car tout groupe définissable dans un corps algébriquement clos est définissablement isomorphe à un groupe algébrique ; ce n'est pas tout à fait évident, et demande l'adaptation par Hrushovski d'un théorème de [Weil 1955].

En effet, un groupe définissable connexe permet de définir génériquement des morphismes représentant la restriction de la multiplication et celle de l'inverse. C'est évident en caractéristique nulle, et demande un petit travail en caractéristique p ; comme l'a remarqué Laurentius van den Dries, on peut alors faire appel à un théorème d'André Weil, déclarant qu'un « groupe partiel », un « group chunk », correspond à une partie générique d'un groupe algébrique [van den Dries 1982]. On trouvera dans [Poizat 1987, chapitre 4(e)] un exposé du résultat accessible à un théoricien des modèles, qui doit beaucoup à Hrushovski (voir aussi les notes historiques aux pages 154–155).

Le chapitre 5(f) de [Poizat 1987] expose ce qu'on peut considérer comme la version modèle-théorique ultime du théorème de Weil, démontrée par [Hrushovski 1986] dans un contexte stable : une opération binaire qui satisfait associativité générique et simplificabilité générique (à gauche et à droite) correspond à une partie générique d'un groupe définissable.

Le chapitre 2(f) décrit une décomposition d'un groupe de rang de Morley fini en une tour de groupes définissables, basée sur la notion d'internité au sens de Hrushovski, qui, à la différence de la décomposition de Lascar, se fait à partir du haut. Sa première étape consiste à choisir un type q régulier, non orthogonal aux types génériques du groupe G, ce qui permet d'obtenir un sous-groupe G_1 définissable et normal dans G tel que le quotient G/G_1 soit q-interne.

Le chapitre 4(g) donne une version modèle-théorique du théorème de Borel–Tits basé sur l'internité : si G est un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos K, on peut définir dans G un corps K_1 tel que G soit K_1-interne. À partir du seul résultat de nature algébrique affirmant que, puisque K_1 est définissable dans le corps nu K, il lui est nécessairement définissablement isomorphe, on en déduit que tout ensemble de G^{eq} qui est définissable au sens de K est en fait définissable au sens du groupe nu G.

C'est peut-être un bon endroit pour rappeler un cas particulier où, à ce qu'il me semble, la conjecture d'algébricité est toujours ouverte :

Question 8 [Borovik et Nesin 1994, p. 367; Kramer et al. 1999; Mustafin et Poizat 2006]. *Soient $G(K)$ un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos K, et L un sous-corps infini de K contenant le corps de définition de $G(\cdot)$. On note $G(L)$ le groupe des points L-rationnels de $G(\cdot)$. Si $G(L)$ est simple et de rang de Morley fini, est-ce que L est algébriquement clos ?*

L'introduction de [Kramer et al. 1999] explique pourquoi c'est vrai quand le corps L est localement fini.

8. Génération elliptique et théorème sans indécomposables

Nous dirons qu'une partie A du groupe G engendre *elliptiquement* le sous-groupe H s'il existe un entier m tel que chaque point de H soit le produit de m points de $A \cup \{1\} \cup A^{-1}$ (cette définition ne suppose pas que H soit tout le groupe engendré par A).

Le « théorème des indécomposables » de [Zilber 1977] affirme justement que le sous-groupe engendré par l'ensemble définissable A, indécomposable et contenant l'élément neutre, l'est de façon elliptique, ce qui le rend définissable (il est de plus connexe). Il fait intervenir une notion *ad hoc* d'ensemble indécomposable, généralisant la notion de fermé de Zariski irréductible en géométrie ; dans bien des situations concrètes, son usage demande de l'ingéniosité, car on doit utiliser des propriétés de l'ensemble A pour restreindre la famille des groupes pour lesquels il suffit de tester l'indécomposabilité. Il est plus pratique de le remplacer par l'énoncé équivalent suivant, qui est plus flexible justement parce qu'il ne mentionne pas l'indécomposabilité, ni aucune autre propriété des ensembles définissables (on le montre facilement à partir du théorème des indécomposables, comme dans [Poizat 2021]. Sa version première apparaît dans [Wagner 2000b, Chapter 4] dans un contexte plus général).

Théorème sans indécomposables. *On considère une famille $\{A_i\}$ de parties définissables d'un groupe G de rang de Morley fini ; il existe alors un plus grand sous-groupe H de G qui soit définissable, connexe, et elliptiquement engendré par la réunion d'un nombre fini de A_i. De plus, chaque A_i normalise H et se répartit en un nombre fini de classes modulo H.*

Je ne résiste pas au plaisir d'en illustrer la facilité d'emploi par un petit corollaire :

Corollaire. *Le groupe engendré par un ensemble A définissable clos par conjugaison et par élévation à la puissance m^e, pour un $m > 1$, est définissable, car elliptiquement engendré.*

Démonstration. On montre que tout produit d'éléments de A peut se remplacer par un produit où chaque point ne se répète que moins de m fois ; on en déduit que A engendre un groupe fini modulo le groupe H ci-dessus. □

Exemples d'application. Les puissances n^{es}, les solutions de l'équation $x^n = 1$, les produits de deux involutions sont clos par prise de carré. Les éléments d'ordre exactement n sont clos par puissance p^{e}, pour chaque p premier à n. Si S est un ensemble convexe (c'est-à-dire clos par symétries ; voir la section 9) contenant l'élément neutre, $S \cdot S$ est clos par conjugaison et prise de carré (voir [Poizat 2018, proposition 13]). Le groupe dérivé G' du groupe G de rang de Morley fini est elliptiquement engendré par les commutateurs, car $G' \times \{1\}$ est l'intersection avec $G \times \{1\}$ du sous-groupe de $G \times G$ engendré par le « convexe symétrique » formé des (x, x^{-1}) [Poizat 2018].

La question se pose d'une sorte de réciproque, à savoir : *si une partie définissable engendre un sous-groupe définissable*, *est-ce-que cette génération est elliptique* ? Modulo le théorème sans indécomposables, une question équivalente est :

Question 9 [Deloro 2007; Ould Houcine 2007; Poizat 2021]. *Existe-t-il un groupe infini*, *de rang de Morley fini*, *qui soit finiment engendré* ?

Son étrangeté est de mettre en scène des groupes de rang de Morley fini non saturés, alors que Borovik comme le petit livre jaune nous ont habitués à vivre sans le souci des propriétés de saturation du seul modèle que nous avons à l'horizon.

Une réponse positive contredirait la conjecture d'algébricité, car :

- Si G est finiment engendré, G° l'est également, puisqu'il est d'indice fini dans G.
- Si on divise G° par un groupe normal définissable connexe maximal M, on ne peut pas obtenir un groupe commutatif : en effet, comme il est finiment engendré, ce serait le produit d'un nombre fini de groupes cycliques, et comme il est infini il ne serait divisible par aucun nombre premier, alors qu'il devrait l'être par presque tous.
- G/M est donc, à un centre fini près, un groupe simple ; mais un groupe simple infini et finiment engendré ne peut être linéaire, car selon [Maltsev 1940] un groupe linéaire finiment engendré est résiduellement fini (c'est-à-dire que l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est réduite à l'élément neutre).

9. D'autres questions désespérées

La conjecture d'algébricité, si elle se confirme, aurait un certain nombre de conséquences de nature purement algébrique sur la structure nue d'un groupe quelconque de rang de Morley fini. Pour s'en rendre compte, la règle du jeu est de considérer un contre-exemple minimal, et de montrer qu'il s'agit d'un groupe simple, qui serait linéaire d'après la conjecture, et d'utiliser des propriétés bien connues en pure théorie des groupes, comme :

— Tout groupe linéaire finiment engendré est résiduellement fini.
— Tout groupe linéaire périodique est localement fini.
— Tout groupe infini, localement fini, et satisfaisant à la condition de chaîne sur les centralisateurs, contient un sous-groupe abélien infini.

On introduit alors ces propriétés sous forme de questions, auxquelles je prédis qu'il y a peu d'espoir d'apporter une réponse sans résoudre la conjecture :

Question 10. *Un sous-groupe périodique d'un groupe de rang de Morley fini est-il localement fini ?*

Question 11. *Un sous-groupe infini d'un groupe de rang de Morley fini contient-il un groupe abélien infini ?*

Question 12 [Borovik et Nesin 1994, p. 368]. *Un groupe de rang de Morley fini est-il localement résiduellement fini ?*

10. Zamour

La section finale de cet article élargit la problématique de la conjecture d'algébricité à des structures plus faibles que des groupes. Même si l'on pense que les résultats dont je vais parler ici ont un côté anecdotique, il est du moins certain qu'ils éclairent la nature modèle-théorique si particulière des groupes de rang de Morley fini ; les questions posées seront plus naïves, car, à la différence des précédentes, ce ne sont pas des problèmes qui ont cassé toutes les têtes depuis cinquante ans.

Dans un groupe G, l'opération binaire $s(x, y) = yx^{-1}y$ satisfait aux trois équations suivantes : (i) $s(x, x) = x$; (ii) $s(s(x, y), y) = x$; (iii) $s(s(x, z), s(y, z)) = s(s(x, y), z)$. Si on convient d'appeler, une fois y fixé, l'opération unaire $s_y(x) = s(x, y)$ *symétrie de centre* y, ces équations ont l'interprétation transparente suivante : (i) chaque symétrie fixe son centre (ou plus exactement fixe chacun de ses centres) ; (ii) chaque symétrie est une bijection involutive ; (iii) chaque symétrie est un automorphisme de la structure.

Une loi binaire satisfaisant à ces trois conditions est appelée *espace de symétries* ; dans [Poizat 2021], j'ai rebaptisé *symétron* ceux de ces espaces dans lesquels, pour tous x et y, il existe un unique z tel que $s(x, z) = y$; il est appelé le *milieu* $m(x, y)$ de x et de y.

L'espace des symétries du groupe G est un symétron si et seulement si ce dernier est uniquement 2-divisible, c'est-à-dire si chaque x possède une unique racine carrée $x^{1/2}$. C'est le cas de tous les groupes de rang de Morley fini, ou plus généralement de tous les groupes ω-stables, qui n'ont pas d'involutions (car alors le centre du centralisateur de x est 2-divisible). Dans le contexte du rang de Morley fini, ces symétrons sont apparus dans [Poizat 2018] comme un outil exégétique pour commenter la démonstration de [Frécon 2018] ; ils interviennent aussi dans la structure des groupes de Frobenius ayant une involution dans leur complément [Clausen et Tent 2023; Poizat 2024].

Dans [Poizat 2018], on étudie les sous-symétrons définissables d'un groupe de rang de Morley fini. Par contre, dans [Poizat 2021], les symétrons de rang de Morley fini sont considérés comme des structures *per se*. Il est constaté que bien des propriétés qu'on montre habituellement pour les groupes se généralisent à ces symétrons : condition de chaîne (car, pour une partie définissable d'un symétron ω-stable, il est équivalent d'être clos par symétrie ou d'être clos par prise de milieu), décomposition en composantes connexes, ainsi que des théorèmes de génération elliptique. Toute cette théorie repose sur une base fragile (faut-il évoquer le songe que Daniel a dû interpréter ?), à savoir que, dans un symétron ω-stable, deux points sont toujours reliés par un sous-symétron isomorphe à celui des symétries d'un groupe commutatif définissable sans involutions. On en déduit qu'un sous-symétron définissable est le symétriseur de l'ensemble de ses types génériques (de même qu'un sous-groupe définissable est le stabilisateur, par translations à droite comme par translations à gauche, de l'ensemble de ses types génériques ; cette description des sous-symétrons définissables par des données génériques permet de court-circuiter les calculs de Frécon).

Mais que se passe-t-il si on considère des lois valables génériquement, c'est-à-dire deux opérations partielles $s(x, y)$ et $m(x, y)$ qui satisfont génériquement les équations de symétrons, sans qu'on soit déjà enveloppé à l'intérieur d'un symétron ? Autrement dit :

Question 13. *Existe-t-il un théorème de Weil–Hrushovski pour les symétrons*?

L'acuité de la question est renforcée par le fait qu'il existe des structures assez voisines pour lesquelles le théorème de Weil est faux [Grishkov et Nagy 2011]. La question suivante lui est probablement liée :

Question 14. *En caractéristique autre que* 2, *un symétron constructible est-il définissablement isomorphe à un symétron algébrique*, *basé sur une variété algébrique pour laquelle symétrie et milieu sont des morphismes*?

Ce n'est pas vrai en caractéristique 2, car dans le groupe multiplicatif K^* la racine carrée de x, qui n'est pas un morphisme, est le milieu de 1 et de x.

[Borovik et Nesin 1994, p. 355] demandent si le théorème Z^* de Glauberman — un classique de la théorie des groupes finis — s'étend aux groupes de rang de Morley fini. Cela se traduit par la question suivante, à laquelle le théorème 1 de [Glauberman 1966] apporte une réponse positive dans le cas des symétrons finis.

Question 15. *Dans un symétron de rang de Morley fini*, *est-ce que le dérivé du groupe de permutations engendré par les symétries est dépourvu d'involutions*?

Cette question, qui ne concerne que le symétron nu, a un lien étroit avec la conjecture d'algébricité. En effet, d'après [Poizat 2018; 2021], d'une part, la réponse est positive pour les symétrons pseudo-localement finis, et d'autre part, quand le groupe engendré par les symétries est définissable (on parle alors de symétron *borné*), ce qui est le cadre de la question de Borovik et Nesin, une réponse négative contredit la conjecture d'algébricité.

Venons-en finalement à la question que s'est posée Samuel Zamour dans la première partie de sa thèse, dont je n'ai eu connaissance que quelques jours avant sa soutenance. Elle est purement théorique, car d'après la proposition 13 de [Poizat 2018], un sous-symétron définissable d'un groupe de rang de Morley fini est inter-définissable avec un groupe habillé, et il semble peu probable que les symétrons non bornés interviennent un jour dans la solution de la conjecture d'algébricité (pour les groupes sans involutions).

Question 16 [Zamour 2022]. *Les symétrons rangés, c'est-à-dire satisfaisant aux conditions* 1, 2 *et* 3 *de la section 4, sont-ils les mêmes que les symétrons de rang de Morley fini ?*

Zamour reprend la problématique de Zilber à son début, car sa question est très proche du théorème 5.2 de [Zilber 1974] ; on s'en rend compte si on substitue au mot группа le mot симметрон dans son énoncé :

Теорема 5.2. Пусты G — простая слабо категоричная группа. Тогда теория G в групповой сигнатуре $\aleph_1$-категорична, т.е. G — категоричная группа.

> **Théorème 5.2.** Soit G un groupe simple faiblement catégorique. Alors la théorie de G dans le langage des groupes est $\aleph_1$-catégorique, c'est-à-dire G est un groupe catégorique.

C'est aussi vrai de tout ce qui l'accompagne, comme le théorème 5.1 : un symétron faiblement catégorique définissablement simple (sans congruence non triviale définissable ; voir ci-après) est-il simple ?

Zamour cherche à reproduire une décomposition de Lascar pour apporter une réponse positive, mais il ne réussit que partiellement pour les raisons que nous allons exposer. Il montre d'abord, pour les symétrons, une version du théorème des indécomposables sous sa forme classique : il déclare qu'un ensemble définissable est *indécomposable* si, chaque fois qu'il est contenu dans une réunion finie de sous-symétrons définissables deux à deux disjoints, il est inclus dans l'un d'entre eux ; il montre que le sous-symétron engendré (par symétrie et prise de milieu) par un ensemble indécomposable est définissable, connexe et elliptiquement engendré.

Cela lui permet de franchir sans peine la première étape de la décomposition, c'est-à-dire la construction d'un sous-symétron connexe elliptiquement engendré par un ensemble fortement minimal ; mais il rencontre un obstacle dès qu'il s'agit de faire un quotient. Appelons *congruence* de symétrons une relation d'équivalence définissable telle que la symétrie passe au quotient : si $x \sim x'$ et $y \sim y'$, alors $s(x, y) \sim s(x', y')$. Les classes d'équivalence d'une congruence sont des sous-symétrons qui se correspondent par symétries : chacune d'entre elles détermine la relation $\sim$; nous les qualifions de sous-symétrons *normaux*. Comme la conjonction de deux congruences est une congruence, la condition de chaîne montre que chaque sous-symétron a une clôture normale définissable, qui est le plus petit sous-symétron définissable et normal le contenant.

Dans le cas où les applications $m(x, a)$ sont des automorphismes, ce qui se produit rarement (par exemple dans les systèmes de triplets de Steiner que sont les symétrons où milieu et symétrie coïncident), Zamour montre que la clôture normale d'un sous-symétron S définissable et connexe est elliptiquement engendrée par S et par un nombre fini de paramètres. Cela lui permet de conduire la décomposition de Lascar comme dans le cas des groupes.

À vrai dire, afin de bénéficier du savoir accumulé par les théoriciens des groupes dans l'étude des symétries des groupes finis, Zamour travaille avec des Z-boucles uniquement 2-divisibles, qui sont des structures connues pour être bi-interprétables avec les symétrons ; par exemple, dans le cas des groupes, la boucle est l'opération $y^{1/2} \cdot x \cdot y^{1/2}$. Ces boucles sont mieux aimées de bien des théoriciens des groupes, qui chérissent les structures qui ressemblent le plus possible à des groupes, aussi bizarres soient-elles ; pour ma part, je préfère le langage des symétrons (symétrie et milieu), qui donne une axiomatique claire, et permet d'exprimer naturellement les propriétés spécifiques aux symétrons de rang de Morley fini.

En vertu du principe dangereux qu'il est permis de conjecturer ce qu'on ne sait pas démontrer, on peut poser une dernière question :

Question 17. *Si S est un sous-symétron définissable connexe d'un symétron de rang de Morley fini, est-ce que sa clôture normale est elliptiquement engendrée par S et par un nombre fini de paramètres ?*

Afin d'éviter d'attirer sur nos têtes le courroux du Grand Roi, nous allons prudemment conclure l'article par trois théorèmes ; le premier est la version symétrique du théorème sans indécomposables, et le deuxième une élucidation de l'obstacle qu'a rencontré Zamour dans son étude de la question ci-dessus.

Si A est une partie du symétron S, nous appellerons *composantes* du sous-symétron Σ engendré par A les sous-symétrons définissables connexes maximaux qui sont elliptiquement engendrés par A (en usant du milieu et de la symétrie) ; dans le cas des groupes, leurs analogues seraient les cossettes modulo le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par A.

Théorème. *Soient S un symétron de rang de Morley fini et A un sous-ensemble de S définissable. Alors, le sous-symétron engendré par A est réunion de ses* *composantes ; celles-ci sont deux à deux disjointes, se correspondent par symétries, et A est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'entre elles.*

Démonstration. C'est évident quand A est vide. Sinon, chaque point de Σ constitue un symétron définissable connexe elliptiquement engendré par A, et s'étend en un tel sous-symétron de rang de Morley maximal. Comme, d'après [Poizat 2021], deux sous-symétrons définissables connexes d'intersection non vide en engendrent un troisième, et ce de façon elliptique, deux composantes non disjointes sont égales. Si a est un point de la composante C et a' un point de la composante C', la symétrie ayant pour centre le milieu m de a et de a' échange C et C'. Le dernier point vient de ce que, d'après [Zamour 2022], A s'écrit comme réunion d'un nombre fini d'ensembles définissables indécomposables. □

Nous dirons que la relation d'équivalence définissable $\sim$ est une *demi-congruence* si chaque symétrie en est un automorphisme, c'est-à-dire si $x \sim x'$ implique $s(x, y) \sim s(x', y)$. Ses classes seront qualifiées de sous-symétrons *semi-normaux.*

Lemme. (i) *Une demi-congruence est une congruence si et seulement si le milieu passe au quotient, c'est-à-dire si $x \sim x'$ implique que $m(x, y) \sim m(x', y)$.*

(ii) *Le sous-symétron définissable non vide S est semi-normal si et seulement si, quels que soient les points a, b et c, $s_a\big(s_b(s_c(S))\big)$ est égal à S ou disjoint de S.*

Démonstration. (i) Dans une demi-congruence, toutes les classes ont même rang et même degré de Morley. Si c'est aussi une congruence pour le milieu, quel que soit le point a et la classe C, $m(C, a)$ est inclus dans une classe C' ; si b est un point de C', $m(C'', a)$ est aussi inclus dans $m(C, a)$, où C'' désigne la classe de b : comme $m(x, a)$ est une bijection, il faut que $C = C''$; autrement dit $m(x, a)$ définit une bijection entre C et C'. Le même raisonnement vaut pour la bijection inverse $s(a, x)$.

(ii) La propriété est possédée par un sous-symétron S semi-normal, car alors $s_a\big(s_b(s_c(S))\big)$ et S sont des classes de la relation d'équivalence $\sim$ associée.

Réciproquement, on considère deux points a et b, un point x dans S et le milieu m de x et de $s_a(s_b(x))$; comme il ne sont pas disjoints, S et $s_m\big(s_a(s_b(S))\big)$ sont égaux, soit encore $s_m(S) = s_a(s_b(S))$.

Considérons maintenant un translaté $S' = t(S)$ de S par un produit de symétries t : $s_a(s_b(S')) = s_a \cdot s_b \cdot t \cdot S = t \cdot t^{-1} s_a t \cdot t^{-1} s_b t \cdot S = t \cdot s_c \cdot S = t s_c t^{-1}(S')$, où c est le milieu de $t(a)$ et de $t(b)$. Autrement dit, si s' et s'' sont deux symétries, il en existe une troisième s telle que $s(S') = s's''(S')$.

On en déduit que chaque translaté $t(S)$ est de la forme $s(S)$, et que les translatés de S ont la même propriété. Or S et $s(S)$ sont égaux si le centre de s est dans S, et disjoints s'il n'y est pas, puisque S est clos par prise de milieu. En résumé, les translatés de S forment bien une partition. □

Théorème. *Soient S un sous-symétron définissable et connexe d'un symétron de rang de Morley fini, et Σ le plus grand sous-symétron définissable et connexe contenant S qui soit elliptiquement engendré par S et un nombre fini de paramètres. Alors Σ est semi-normal, et pour tout a et toute classe C de la demi-congruence $\sim$ associée, il existe une (unique) classe C', telles que $m(x, a)$ définisse une bijection entre une partie générique de C et une partie générique de C'. De même il existe une unique classe C'' telle que $s(a, y)$ définisse une bijection entre une partie générique de C et une partie générique de C''. Ce résultat est aussi valable pour un symétron rangé.*

Démonstration. Comme deux sous-symétrons connexes d'intersection non vide s'amalgament de façon elliptique, Σ est bien unique, et contient tout sous-symétron définissable connexe et elliptiquement engendré par S et un nombre fini de paramètres qui le coupe ; il satisfait donc au critère du lemme et définit une demi-congruence $\sim$.

Considérons la composante Σ' du symétron engendré par $m(\Sigma, a)$ qui intersecte génériquement l'ensemble $m(\Sigma, a)$, et le milieu m d'un point de Σ' et de Σ ; Σ' est connexe et elliptiquement engendré par S et un nombre fini de paramètres, si bien que $s(\Sigma', m)$ est inclus dans Σ. Il lui est en fait égal, car son rang majore celui de Σ ; Σ' est donc une classe de la demi-congruence $\sim$, et la bijection $m(x, a)$ échange des parties génériques des deux classes Σ' et Σ. Le même raisonnement vaut pour chaque symétrisé de Σ.

Pour le dernier point, il faut vérifier que tout ce qui est utilisé pour la démonstration du théorème, dans cet article et dans [Poizat 2021], est aussi valable dans le cas rangé, ce qui n'est qu'affaire de patience. □

Mea culpa, mea culpa, mea maxima culpa ! Je profite de l'occasion qui m'est offerte (Спасибо, Борис!) pour confesser deux péchés commis dans [Poizat 2021]. Le premier est que j'y affirme gratuitement l'énoncé du théorème suivant :

Théorème. *La partition en composantes connexes d'un symétron ω-stable est une congruence.*

Démonstration. Elle est évidemment une demi-congruence. Pour chaque a du symétron S, la symétrie de centre a permute les composantes du symétron, si bien qu'à toute permutation π est associé l'ensemble S_π des points de S qui permute ses composantes selon π. Les S_π non vides constituent une partition de S ; si les symétries s_a et s_b échangent les ensembles A et B, il en est de même de $s_b s_a s_b$, ce qui signifie que les points dont la symétrie associée échange A et B constituent un sous-symétron ; par conséquent les S_π sont des symétrons définissables. Comme les composantes sont closes par prise de milieu, un point a fixe sa propre composante et seulement celle-là. Par conséquent, si S_π n'est pas vide, π fixe un point et un seul ; donc, si S_π a même rang de Morley que S, il ne contient qu'un seul type générique, et c'est une composante connexe de S. L'unicité de la décomposition de S en un nombre fini de sous-symétrons définissables connexes deux à deux disjoints impose aux S_π d'être ces composantes connexes. Autrement dit, tous les points d'une même composante agissent sur les autres de la même façon. □

Le deuxième est que j'ai omis de préciser, à la fin de l'exemple 2, que a devait être central dans G. On obtient donc un exemple avec un centre non trivial en prenant pour G un groupe de rang de Morley fini, nilpotent non abélien, et sans involutions.

Remerciements

Орысша түйінісі үшін Ержанға үлкен рақмет! Je tiens aussi à remercier Gopal Prasad pour l'aide qu'il m'a apportée, il y a plus de quarante ans, dans la détermination des corps constructibles.

Bibliographie

[Altınel et al. 2008] T. Altınel, A. V. Borovik et G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank*, Mathematical Surveys and Monographs **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. MR Zbl

[Ax 1968] J. Ax, "The elementary theory of finite fields", *Ann. of Math.* (2) **88** (1968), 239–271. MR Zbl

[Baldwin 1973] J. T. Baldwin, "α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T", *Trans. Amer. Math. Soc.* **181** (1973), 37–51. MR Zbl

[Baudisch 1996] A. Baudisch, "A new uncountably categorical group", *Trans. Amer. Math. Soc.* **348**:10 (1996), 3889–3940. MR Zbl

[Baudisch et al. 2009] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, "Die böse Farbe", *J. Inst. Math. Jussieu* **8**:3 (2009), 415–443. MR Zbl

[Belegradek 1973] O. V. Belegradek, "Almost categorical theories", *Sibirsk. Mat. Zh.* **14** (1973), 277–288. MR Zbl

[Berline 1986] C. Berline, "Superstable groups; a partial answer to conjectures of Cherlin and Zilber", *Ann. Pure Appl. Logic* **30**:1 (1986), 45–61. MR Zbl

[Berline et Lascar 1986] C. Berline et D. Lascar, "Superstable groups", *Ann. Pure Appl. Logic* **30**:1 (1986), 1–43. MR Zbl

[Blum 1969] L. C. Blum, *Generalized algebraic theories: a model theoretic approach*, thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1969, voir https://www.proquest.com/docview/302381589. MR

[Borovik 1984a] A. V. Borovik, "Инволюции в группах с размерностью [Involutions dans les groupes avec dimension]", prépublication 84-512, Centre de calcul de la division sibérienne de l'académie des sciences de l'URSS, Novosibirsk, 1984. MR

[Borovik 1984b] A. V. Borovik, “Теория конечных групп и несчётно категоричные группы [Théorie des groupes finis et groupes incomptablement catégoriques]”, prépublication 84-511, Centre de calcul de la division sibérienne de l’académie des sciences de l’URSS, Novosibirsk, 1984. MR

[Borovik et Nesin 1994] A. Borovik et A. Nesin, *Groups of finite Morley rank*, Oxford Logic Guides **26**, The Clarendon Press, New York, 1994. MR Zbl

[Borovik et Poizat 1990] A. V. Borovik et B. P. Poizat, “Tores et p-groupes”, *J. Symbolic Logic* **55**:2 (1990), 478–491. MR Zbl

[Burdges et Cherlin 2002] J. Burdges et G. Cherlin, “Borovik–Poizat rank and stability”, *J. Symbolic Logic* **67**:4 (2002), 1570–1578. MR Zbl

[Cherlin 1978] G. Cherlin, “Superstable division rings”, pp. 99–111 dans *Logic Colloquium ’77* (Wrocław, 1977), édité par A. Macintyre et al., Stud. Logic Found. Math. **96**, North-Holland, 1978. MR Zbl

[Cherlin 1979] G. Cherlin, “Groups of small Morley rank”, *Ann. Math. Logic* **17**:1-2 (1979), 1–28. MR Zbl

[Cherlin et Shelah 1980] G. Cherlin et S. Shelah, “Superstable fields and groups”, *Ann. Math. Logic* **18**:3 (1980), 227–270. MR Zbl

[Clausen et Tent 2023] T. Clausen et K. Tent, “Mock hyperbolic reflection spaces and Frobenius groups of finite Morley rank”, *Model Theory* **2**:2 (2023), 137–175. MR

[Deloro 2007] A. Deloro, *Groupes simples connexes minimaux de type impair*, thèse de doctorat, Université Denis-Diderot (Paris-VII), 2007, voir https://theses.fr/2007PA077036.

[van den Dries 1982] L. P. D. van den Dries, “Definable groups in characteristic 0 are algebraic groups”, *Abstracts Amer. Math. Soc.* 3 (1982), 142.

[Frécon 2018] O. Frécon, “Simple groups of Morley rank 3 are algebraic”, *J. Amer. Math. Soc.* **31**:3 (2018), 643–659. MR Zbl

[Glauberman 1966] G. Glauberman, “Central elements in core-free groups”, *J. Algebra* **4** (1966), 403–420. MR Zbl

[Grishkov et Nagy 2011] A. Grishkov et G. P. Nagy, “Algebraic Bol loops”, *Forum Math.* **23**:3 (2011), 655–668. MR Zbl

[Hrushovski 1986] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, thèse de doctorat, University of California, Berkeley, 1986, voir https://www.proquest.com/docview/303450288.

[Hrushovski 1992] E. Hrushovski, “Strongly minimal expansions of algebraically closed fields”, *Israel J. Math.* **79**:2-3 (1992), 129–151. MR Zbl

[Hrushovski et Zilber 1996] E. Hrushovski et B. Zilber, “Zariski geometries”, *J. Amer. Math. Soc.* **9**:1 (1996), 1–56. MR Zbl

[Kramer et al. 1999] L. Kramer, G. Röhrle et K. Tent, “Defining k in $G(k)$”, *J. Algebra* **216**:1 (1999), 77–85. MR Zbl

[Lachlan 1980] A. H. Lachlan, “Singular properties of Morley rank”, *Fund. Math.* **108**:3 (1980), 145–157. MR Zbl

[Lascar 1976] D. Lascar, “Ranks and definability in superstable theories”, *Israel J. Math.* **23**:1 (1976), 53–87. MR Zbl

[Lascar 1985] D. Lascar, “Les groupes ω-stables de rang fini”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **292**:2 (1985), 451–462. MR Zbl

[Macintyre 1971] A. Macintyre, "On ω_1-categorical theories of fields", *Fund. Math.* **71**:1 (1971), 1–25. MR Zbl

[Macpherson et Pillay 1995] D. Macpherson et A. Pillay, "Primitive permutation groups of finite Morley rank", *Proc. London Math. Soc.* (3) **70**:3 (1995), 481–504. MR Zbl

[Maltsev 1940] A. Maltsev, "On isomorphic matrix representations of infinite groups", *Rec. Math. Moscou*, *N.S.* **8**:50 (1940), 405–422. En russe. MR Zbl

[Mustafin et Poizat 2006] Y. Mustafin et B. Poizat, "Sous-groupes superstables de $\mathrm{SL}_2(K)$ et de $\mathrm{PSL}_2(K)$", *J. Algebra* **297**:1 (2006), 155–167. MR Zbl

[Ould Houcine 2007] A. Ould Houcine, "On superstable groups with residual properties", *MLQ Math. Log. Q.* **53**:1 (2007), 19–26. MR Zbl

[Pillay 2013] A. Pillay, "Review of *Zariski geometries: Geometry from the logician's point of view* by Boris Zilber", *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*) **50**:1 (2013), 175–180. MR

[Poizat 1978] B. Poizat, "Une preuve par la théorie de la déviation d'un théorème de J. Baldwin", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **287**:8 (1978), 589–591. MR Zbl

[Poizat 1987] B. Poizat, *Groupes stables* : *une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah **2**, Bruno Poizat, Lyon, 1987. MR Zbl

[Poizat 2000] B. Poizat, "Autour du théorème de Morley", pp. 879–896 dans *Development of mathematics* 1950–2000, édité par J.-P. Pier, Birkhäuser, 2000. MR Zbl

[Poizat 2001a] B. Poizat, "L'égalité au cube", *J. Symbolic Logic* **66**:4 (2001), 1647–1676. MR Zbl

[Poizat 2001b] B. Poizat, "Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner", *J. Symbolic Logic* **66**:4 (2001), 1637–1646. MR Zbl

[Poizat 2018] B. Poizat, "Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions", *J. Algebra* **497** (2018), 143–163. MR Zbl

[Poizat 2021] B. Poizat, "Symétries et transvexions, principalement dans les groupes de rang de Morley fini sans involutions", *J. Symb. Log.* **86**:3 (2021), 965–990. MR Zbl

[Poizat 2024] B. Poizat, "Quelques modestes compléments aux travaux de messieurs Mark Debonis, Franz Delahan, David Epstein et Ali Nesin sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini", *Model Theory* **3**:1 (2024), 71–100.

[Poizat et Wagner 1993] B. Poizat et F. Wagner, "Sous-groupes périodiques d'un groupe stable", *J. Symbolic Logic* **58**:2 (1993), 385–400. MR Zbl

[Reineke 1975] J. Reineke, "Minimale Gruppen", *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **21**:4 (1975), 357–359. MR Zbl

[Sacks 1972] G. E. Sacks, *Saturated model theory*, W. A. Benjamin, Reading, MA, 1972. MR Zbl

[Thomas 1983] S. Thomas, "The classification of the simple periodic linear groups", *Arch. Math.* (*Basel*) **41**:2 (1983), 103–116. MR Zbl

[Wagner 2000a] F. O. Wagner, "Minimal fields", *J. Symbolic Logic* **65**:4 (2000), 1833–1835. MR Zbl

[Wagner 2000b] F. O. Wagner, *Simple theories*, Mathematics and its Applications **503**, Kluwer, Dordrecht, 2000. MR Zbl

[Wagner 2001] F. Wagner, "Fields of finite Morley rank", *J. Symbolic Logic* **66**:2 (2001), 703–706. MR Zbl

[Wagner 2003] F. O. Wagner, "Bad fields in positive characteristic", *Bull. London Math. Soc.* **35**:4 (2003), 499–502. MR Zbl

[Weil 1955] A. Weil, "On algebraic groups of transformations", *Amer. J. Math.* **77** (1955), 355–391. MR Zbl

[Zamour 2022] S. Zamour, *Étude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini*, thèse de doctorat, Université Claude Bernard (Lyon 1), 2022, voir https://theses.hal.science/tel-03765160.

[Zilber 1974] B. I. Zilber, "The transcendental rank of the formulas of an $\aleph_1$-categorical theory", *Mat. Zametki* **15** (1974), 321–329. En russe ; traduit en anglais à *Math. Notes Acad. Sci. USSR* **15**(2) (1974), 182–186. MR Zbl

[Zilber 1977] B. I. Zilber, "Groups and rings whose theory is categorical", *Fund. Math.* **95**:3 (1977), 173–188. En russe. MR Zbl

Received 13 Dec 2022. Revised 13 Mar 2023.

BRUNO POIZAT:

poizat@math.univ-lyon1.fr
Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard (Lyon 1), Villeurbanne, France

Model Theory

msp.org/mt

See inside back cover or msp.org/mt for submission instructions.

Model Theory (ISSN 2832-904X electronic, 2832-9058 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

MT peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
mathematical sciences publishers
nonprofit scientific publishing
https://msp.org/

Model Theory

no. 2 vol. 3 2024

Special issue on the occasion of the 75th birthday of
Boris Zilber