Pacific Journal of Mathematics

ISOMORPHISME D'HYPERGROUPOÏ DES ISOTOPES

A. Sade

Vol. 9, No. 2 June 1959

ISOMORPHISME D'HYPERGROUPOÏDES ISOTOPES

A. SADE

Un *Hypergroupoïde* [2], est un ensemble, E, muni d'une loi de composition faisant correspondre à tout couple ordonné d'éléments $x, y \in E$ un sous-ensemble non vide de E, $x * y = (a, b, c, \cdots) \subseteqq E$. Un *scalaire*, [1, p. 707], est un élément s, tel que, $\forall x \in E$, $x * s$ et $s * x$ se réduisent à un seul élément. Un Hypergroupoïde est *associatif si* $\forall x, y, z \in E$, $(x * y) * z = x * (y * z)$. Une *unité scalaire* est un *élément*, u, tel que $\forall x \in E$, $x * u = u * x = x$. Deux hypergroupoïdes $H(*)$ et $H'(\times)$, définis sur le même ensemble E, sont *isotopes* si, ξ, η, ζ, étant trois applications biunivoques de E sur lui-même,

$$\forall x, y, z \in E,\ x * y = z \rightleftarrows x\xi \times y\eta = z\zeta\ , \tag{1}$$

ou $x * y = (x\xi \times y\eta)\zeta^{-1}$. Ils sont *isomorphes* si $\xi = \eta = \zeta$.

THÉORÈME. *Si un hypergroupoïde $H(\times)$, avec l'unité scalaire u, est isotope (ξ, η, ζ) d'un hypergroupoïde associatif $G(*)$, défini sur le même ensemble, alors G et H coïncident par l'isomorphisme $x \rightarrow x\theta = x\xi\zeta^{-1}\eta$.*

Preuve. Puisque G est associatif,

$$\forall x, y, z \in E,\ x * (y * z) = (x * y) * z\ .$$

Donc, sur l'isotope H, (1)

$$(x\xi \times (y\xi \times z\eta)\zeta^{-1}\eta)\zeta^{-1} = ((x\xi \times y\eta)\zeta^{-1}\xi \times z\eta)\zeta^{-1}\ . \tag{2}$$

ξ, η étant des permutations de E,

$$(\exists) x, z \in E, x\xi = u, z\eta = u\ .$$

Puisque (2) est vérifiée $\forall x, y$, en faisant $x\xi = u$, on a

$$(y\xi \times z\eta)\zeta^{-1}\eta = y\eta\zeta^{-1}\xi \times z\eta\ ,$$

$$(x * y)\eta = x\eta\zeta^{-1}\xi \times y\eta\ . \tag{3}$$

En faisant au contraire $z\eta = u$, on a

$$x\xi \times y\xi\zeta^{-1}\eta = (x\xi \times y\eta)\zeta^{-1}\xi\ ,$$

$$\forall t \in E, t \times y\theta = (t \times y\eta)\zeta^{-1}\xi\ . \tag{4}$$

Received December 8, 1958.

Enfin, en faisant à la fois $x\xi = u$ et $z\eta = u$, on a

(5) $$\forall y,\ y\eta\zeta^{-1}\xi = y\xi\zeta^{-1}\eta = y\theta\ .$$

Donc, d'après (3),

$$(x * y)\eta\zeta^{-1}\xi = (x\eta\zeta^{-1}\xi \times y\eta)\zeta^{-1}\xi\ .$$

D'après (5)

$$(x * y)\theta = (x\theta \times y\eta)\zeta^{-1}\xi\ ;$$

d'après (4)

$$(x * y)\theta = x\theta \times y\theta\ .$$

La démonstration ne serait plus valable si u n'était pas scalaire bilatère et si l'associativité se réduisait à l'inclusion

$$(x * y) * z \supseteqq x * (y * z)\ .$$

RÉFÉRENCES

1. Melvin Dresher, and Oystein Ore, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. **60** (1938), 705-733.

2. Yuzo Utumi, *On Hypergroups of qroup right cosets*, Osaka Math. J. **1** (1949), 73-80.

MARSEILLE

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be typewritten (double spaced), and the author should keep a complete copy. Manuscripts may be sent to any one of the four editors. All other communications to the editors should be addressed to the managing editor, L. J. Paige at the University of California, Los Angeles 24, California.

50 reprints per author of each article are furnished free of charge; additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* is published quarterly, in March, June, September, and December. The price per volume (4 numbers) is $12.00; single issues, $3.50. Back numbers are available. Special price to individual faculty members of supporting institutions and to individual members of the American Mathematical Society: $4.00 per volume; single issues, $1.25.

Subscriptions, orders for back numbers, and changes of address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, 2120 Oxford Street, Berkeley 4, California.

Printed at Kokusai Bunken Insatsusha (International Academic Printing Co., Ltd.), No. 6, 2-chome, Fujimi-cho, Chiyoda-ku, Tokyo, Japan.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION

The Supporting Institutions listed above contribute to the cost of publication of this Journal, but they are not owners or publishers and have no responsibility for its content or policies.

Pacific Journal of Mathematics
Vol. 9, No. 2 June, 1959