

Pacific Journal of Mathematics

SUR LES SUITES D'INTERPOLATION EN PLUSIEURS VARIABLES

DENISE AMAR AND ERIC AMAR

SUR LES SUITES D'INTERPOLATION EN PLUSIEURS VARIABLES

DENISE ET ERIC AMAR

We prove that there exists a sequence σ in the polydisc D^2 of C^2 (resp in the unit ball B_2 of C^2) such that σ is strongly $H^2(D^2)$ (resp. $H^2(B^2)$) interpolating but not $H^\infty(D^2)$ (resp. $H^\infty(B_2)$) interpolating. These results are corollaries of a result of this kind for the Bergman class $A^2(D)$ of the unit disc.

1. Introduction et notations. Soit λ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité D de C ; on note $H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans D et $A^2(D)$ l'espace de Bergman des fonctions analytiques dans D telles que:

$$\int_D |f(z)|^2 d\lambda(z) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Soit $\sigma = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite dans D , on dit que σ est fortement d'interpolation $A^2(D)$ si l'opérateur T_2 défini sur $A^2(D)$ dans l'espace des suites par

$$\forall f \in A^2(D), \quad T_2 f = \{(1 - |z_n|^2) f(z_n), \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est continu et surjectif sur $l^2(\mathbb{N})$;

on dit que σ est d'interpolation $H^\infty(D)$ si l'opérateur T_∞ de $H^\infty(D)$ dans l'espace des suites définit par:

$$\forall f \in H^\infty(D), \quad T_\infty f = \{f(z_n), n \in \mathbb{N}\}$$

est surjectif sur $l^\infty(\mathbb{N})$.

Dans cette note on montre le

THEOREME 1. *Il existe une suite σ qui est fortement d'interpolation $A^2(D)$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(D)$.*

Ce résultat contraste avec le cas de la classe de Hardy $H^2(D)$ car on sait [6] que interpolation $H^2(D)$ entraîne interpolation $H^\infty(D)$.

Soit $d\mathcal{M}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $T^2 = \{(z, w) \in C^2, |z| = |w| = 1\}$ (respectivement $d\mu$ la mesure de Lebesgue

normalisée sur la sphère $S_2 = \partial \mathbf{B}_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ on note encore $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans le polydisque \mathbf{D}^2 et $H^2(S^2)$ l'espace des fonctions analytiques f dans \mathbf{D}^2 telles que:

$$\sup_{r < 1} \int_{\mathbf{T}^2} |f(rz, rw)|^2 dm(z, w) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

De même $H^\infty(\mathbf{B}_2)$ désignera l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbf{B}_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ et $H^2(\mathbf{B}_2)$ l'espace des fonctions analytiques f dans \mathbf{B}_2 telles que

$$\sup_{r < 1} \int_{S_2} |f(rz, rw)|^2 d\mu(z, w) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Soit $\sigma = (z_n, n \in \mathbf{N})$ une suite de \mathbf{D}^2 (resp. de \mathbf{B}_2) on dit que σ est d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ si l'opérateur $T_\sigma: \forall f \in H^\infty(\mathbf{D}^2), T_\sigma f = \{f(z_n), n \in \mathbf{N}\}$ est surjectif sur $l^\infty(\mathbf{N})$ (de même pour $H^\infty(\mathbf{B}_2)$).

On dit que σ est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$ si l'opérateur

$$T_2: \forall f \in H^2(\mathbf{D}^2), T_2 f = \{(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |w_n|^2)^{\frac{1}{2}}f(z_n), n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif et continu sur $l^2(\mathbf{N})$, avec $z_n = (z_n, w_n)$.

De même σ est fortement d'interpolation pour $H^2(\mathbf{B}_2)$ si

$$T_2: \forall f \in H^2(\mathbf{B}_2), T_2 f = \{(1 - |z_n|^2)f(z_n), n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif et continu sur $l^2(\mathbf{N})$, ($z_n = (z_n, w_n)$, $|z_n|^2 = |z_n|^2 + |w_n|^2$).

Comme application du théorème 1, on montre alors:

THEOREME 2. *Il existe une suite σ dans \mathbf{D}^2 qui est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$ mais n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.*

THEOREME 3. *Il existe une suite σ dans \mathbf{B}_2 qui est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{B}_2)$ mais n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{B}_2)$.*

Une autre application du théorème 1 montre que le classique théorème de Pick–Nevanlinna [4] [5] ne se généralise pas du tout en plusieurs variables [1].

2. Preuve du Théorème 1. On note $K_z(\zeta)$ le noyau de Cauchy–Bergman de \mathbf{D} et $E_z(\zeta)$ ce noyau normalisé dans $A^2(\mathbf{D})$:

$$E_z(\zeta) = \frac{K_z(\zeta)}{\|K_z\|} = \frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}\zeta)^2}.$$

Dans [2], on montre que la suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $(z_n) \subset D$ est d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$ si et seulement si l'opérateur S de $l^2(\mathbf{N})$ défini par la matrice $((E_{z_n}, E_{z_k}))_{n,k}$ est bicontinu. Une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$ est une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$ [2].

(b) Construction d'une suite d'interpolation de $A^2(\mathbf{D})$ qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(\mathbf{D})$.

Cette suite (σ) sera réunion de suites finies G_n de points situés sur un même cercle et équiréparties sur ce cercle

$$G_n = \left\{ z_k ; |z_k| = 1 - 2^{-g(n)}, \quad \text{Arg } z_k = \frac{2k\pi}{2^{g(n)}} \quad 0 \leq k < g(n) \right\}$$

où g est une fonction strictement croissante. G_n est la $n^{\text{ième}}$ génération de la suite σ au sens de Garnett [3]. $\sigma = \bigcup_n G_n$ n'est pas une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$. En effet $\sum_{z_k \in G_n} (1 - |z_k|) = 1$ d'où la suite $\sum_{z_i \in \sigma} (1 - |z_i|)$ est divergente. Par construction, chaque génération est un ensemble d'interpolation de $A^2(\mathbf{D})$ pour une même constante C . On montre qu'on peut choisir la fonction g pour que σ soit d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$.

DÉMONSTRATION. Soit S_p la matrice $((E_{z_i}, E_{z_j}))_{ij}$, $z_i \in G_p$, $z_j \in G_p$. S_p est bicontinue et

$$\begin{aligned} \|S_p\| &\leq C^2 \\ \|S_p^{-1}\| &\leq C^2. \end{aligned}$$

On note T_n la matrice $((E_{z_i}, E_{z_j}))_{ij}$, $z_i \in \bigcup_1^n G_p$, $z_j \in \bigcup_1^n G_p$. On démontre par récurrence que T_n est une matrice inversible. Supposons

$$\begin{aligned} \|T_n\| &\leq K_n^2 \quad \text{où} \quad C^2 \leq K_n^2 \\ \|T_n^{-1}\| &\leq K_n^2. \end{aligned}$$

T_{n+1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} T_n & G \\ G^* & S_{n+1} \end{pmatrix}$$

où G est la matrice $((E_{z_k}, E_{z_p}), z_k \in \bigcup_1^n G_p, z_p \in G_{n+1})$. Si $z_k \in G_p$, $z_p \in G_{n+1}$

$$\begin{aligned}
|\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle| &= \frac{(1 - |z_k|^2)(1 - |z_p|^2)}{|1 - \bar{z}_k z_p|^2} \\
&\leq \frac{4 \cdot 2^{-g(j)-g(n+1)}}{[1 - (1 - 2^{-g(j)})(1 - 2^{-g(n+1)})]^2} \\
&\leq 4 \cdot 2^{g(j)-g(n+1)} \\
|\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle|^2 &\leq 16 \cdot 2^{2g(j)-2g(n+1)} \\
\sum_{z_k \in G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle|^2 &\leq 16 \cdot 2^{2g(j)-2g(n+1)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{z_k \in \cup_1^n G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle|^2 &\leq 16 \cdot 2^{-g(n+1)} \left(\sum_1^n 2^{2g(j)} \right) \\
&= \epsilon^2(n).
\end{aligned}$$

La fonction g sera choisie telle que:

$$\sum_n \epsilon(n) < \frac{1}{2C^2}.$$

La norme de Hilbert–Schmidt de la matrice G est inférieure à $\epsilon(n)$.
Si $\lambda \in l^2(2^{g(1)} + 2^{g(2)} + \dots + 2^{g(n)} + 2^{g(n+1)})$ alors $\lambda = \mu + \nu$ où:

$$\mu \in l^2(2^{g(1)} + \dots + 2^{g(n)}), \nu \in l^2(2^{g(n+1)})$$

$$\begin{aligned}
\|\lambda\|^2 &= \|\mu\|^2 + \|\nu\|^2 \\
\|T_{n+1}\lambda\|^2 &= \|T_n\mu + G\nu\|^2 + \|G^\infty\mu + S_{n+1}\nu\|^2 \\
\|T_{n+1}\lambda\|^2 &\leq (K_n^2 \|\mu\| + \epsilon(n)\|\nu\|)^2 + (C^2\|\nu\| + \epsilon(n)\|\mu\|)^2 \\
&\leq [K_n^2 + \epsilon(n)]^2 \|\lambda\|^2
\end{aligned}$$

de même

$$\|T_{n+1}(\lambda)\|^2 \geq \left[\frac{1}{K_n^2} - \epsilon(n) \right]^2 \|\lambda\|^2.$$

La matrice T_{n+1} de $\cup_1^{n+1} G_p$ vérifie donc

$$\begin{aligned}
\|T_{n+1}\| &\leq K_n^2 + \epsilon(n) \\
\|T_{n+1}^{-1}\| &\leq \frac{1}{\frac{1}{K_n^2} - \epsilon(n)}.
\end{aligned}$$

La matrice S de $\bigcup_n G_n$ vérifiera donc

$$\|S\| \leq C^2 + \sum_n \epsilon(n) \leq 2C^2$$

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{C^2} - \sum_n \epsilon(n)} \leq 2C^2$$

d'où $\bigcup_n G_n$ est une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$.

3. Applications.

Preuve du Théorème 2. On considère la suite $\tilde{\sigma} = \{(z_n, z_n), n \in \mathbf{N}\}$ où $\sigma = \{z_n, n \in \mathbf{N}\}$ est la suite construite dans la preuve du Théorème 1; clairement, puisque σ n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$, $\tilde{\sigma}$ n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.

Si l'on note

$$e_{(z,w)}(\xi, \eta) = \frac{(1 - |z|^2)^{1/2} (1 - |w|^2)^{1/2}}{(1 - \bar{z}\xi)(1 - \bar{w}\eta)}$$

le noyau de Cauchy Szegö \mathbf{D}^2 normalisé dans $H^2(\mathbf{D}^2)$ on a facilement

$$\forall n, p \in \mathbf{N}, \langle e_{(z_n, z_n)}, e_{(z_p, z_p)} \rangle = \langle E_{z_n}, E_{z_p} \rangle$$

donc les matrices $(\langle e_{(z_n, z_n)}, e_{(z_p, z_p)} \rangle, (n, p) \in \mathbf{N}^2)$ et $(\langle E_{z_n}, E_{z_p} \rangle, (n, p) \in \mathbf{N}^2)$ définissent le même opérateur sur $l^2(\mathbf{N})$.

On en déduit alors aisément que σ est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$.

Preuve du Théorème 3. On considère dans \mathbf{B}_2 la suite $\tilde{\tilde{\sigma}} = \{(z_n, 0), n \in \mathbf{N}\}$ et on remarque, comme ci-dessus que $\langle e_{(z_n, 0)}, e_{(z_p, 0)} \rangle = \langle E_{z_n}, E_{z_p} \rangle$ où ici $e_{(z_n, 0)}$ désigne le noyau de Cauchy-Szegö normalisé dans $H^2(\mathbf{B}_2)$.

REFERENCES

1. D. et E. Amar, *Sur les théorèmes de Schwarz-Pick et Nevanlinna dans C^n* , Preprint, Anal. Harm. Orsay, **167** (1975).
2. E. Amar, *Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach*, Preprint Anal. Harm. Orsay, **152** (1975) et thèse (1977).
3. J. Garnett, *Interpolating sequences for bounded harmonic functions*. Indiana Univ. Math. J., **21** (1971).

4. R. Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A, **13** (1919), n. 1.
5. G. Pick, *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann., **77** (1961), 7–23.
6. H. Shapiro, et A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl., **83** (1961).

Received January 28, 1976 and in revised form May 3, 1977.

UNIVERSITE PARIS XI
91405 ORSAY, FRANCE

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

EDITORS

RICHARD ARENS (Managing Editor)
University of California
Los Angeles, CA 90024

J. DUGUNDJI
Department of Mathematics
University of Southern California
Los Angeles, CA 90007

R. A. BEAUMONT
University of Washington
Seattle, WA 98105

R. FINN AND J. MILGRAM
Stanford University
Stanford, CA 94305

R. C. MOORE
University of California
Berkeley, CA 94720

ASSOCIATE EDITORS

R. F. BECKENBACH

B. H. NEUMANN

F. WOLF

K. YOSHIDA

SUPPORTING INSTITUTIONS

UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
MONTANA STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF NEVADA
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
OREGON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF OREGON
SAKA UNIVERSITY

UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA
STANFORD UNIVERSITY
UNIVERSITY OF HAWAII
UNIVERSITY OF TOKYO
UNIVERSITY OF UTAH
WASHINGTON STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF WASHINGTON
* * *
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

The Supporting Institutions listed above contribute to the cost of publication of this Journal, but they are not owners or publishers and have no responsibility for its contents or policies.

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typewritten or offset-reproduced (not dittoed), double spaced with large margins. Underline Greek letters in red, German in green, and script in blue. The first paragraph or two must be capable of being used separately as synopsis of the entire paper. Items of the bibliography should not be cited there unless absolutely necessary, in which case they must be identified by author and Journal, rather than by item number. Manuscripts, duplicate, may be sent to any one of the four editors. Please classify according to the scheme of Math. Review index to Vol. 39. All other communications should be addressed to the managing editor, or Elaine Bartlett, University of California, Los Angeles, California, 90024.

100 reprints are provided free for each article, only if page charges have been substantially paid. Additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* is issued monthly as of January 1966. Regular subscription rate: \$72.00 a year (6 Vols., 12 issues). Special rate: \$36.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for numbers issued in the last three calendar years, and changes of address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, 103 Highland Boulevard, Berkeley, California, 94708.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION
Printed at Jerusalem Academic Press, POB 2390, Jerusalem, Israel.

Copyright © 1978 Pacific Journal of Mathematics
All Rights Reserved

Mieczyslaw Altman, <i>General solvability theorems</i>	1
Denise Amar and Eric Amar, <i>Sur les suites d'interpolation en plusieurs variables</i>	15
Herbert Stanley Bear, Jr. and Gerald Norman Hile, <i>Algebras which satisfy a second order linear partial differential equation</i>	21
Marilyn Breen, <i>Sets in R^d having $(d - 2)$-dimensional kernels</i>	37
Gavin Brown and William Moran, <i>Analytic discs in the maximal ideal space of $M(G)$</i>	45
Ronald P. Brown, <i>Quadratic forms with prescribed Stiefel-Whitney invariants</i>	59
Gulbank D. Chakerian and H. Groemer, <i>On coverings of Euclidean space by convex sets</i>	77
S. Feigelstock and Z. Schlussek, <i>Principal ideal and Noetherian groups</i>	87
Ralph S. Freese and James Bryant Nation, <i>Projective lattices</i>	93
Harry Gingold, <i>Uniqueness of linear boundary value problems for differential systems</i>	107
John R. Hedstrom and Evan Green Houston, Jr., <i>Pseudo-valuation domains</i>	137
William Josephson, <i>Coallocation between lattices with applications to measure extensions</i>	149
M. Koskela, <i>A characterization of non-negative matrix operators on l^p to l^q with $\infty > p \geq q > 1$</i>	165
Kurt Kreith and Charles Andrew Swanson, <i>Conjugate points for nonlinear differential equations</i>	171
Shoji Kyuno, <i>On prime gamma rings</i>	185
Alois Andreas Lechicki, <i>On bounded and subcontinuous multifunctions</i>	191
Roberto Longo, <i>A simple proof of the existence of modular automorphisms in approximately finite-dimensional von Neumann algebras</i>	199
Kenneth Millett, <i>Obstructions to pseudoisotopy implying isotopy for embeddings</i>	207
William F. Moss and John Piepenbrink, <i>Positive solutions of elliptic equations</i>	219
Mitsuru Nakai and Leo Sario, <i>Duffin's function and Hadamard's conjecture</i>	227
Mohan S. Putcha, <i>Word equations in some geometric semigroups</i>	243
Walter Rudin, <i>Peak-interpolation sets of class C^1</i>	267
Elias Saab, <i>On the Radon-Nikodým property in a class of locally convex spaces</i>	281
Stuart Sui Sheng Wang, <i>Splitting ring of a monic separable polynomial</i>	293