Pacific Journal of Mathematics

RÉSOLUBILITÉ SEMI-GLOBALE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS SUR LES GROUPES DE DÉPLACEMENTS

KAHAR EL-HUSSEIN

Vol. 144, No. 2 June 1990

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 144, No. 2, 1990

RESOLUBILITE SEMI-GLOBALE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS INVARIANTS SUR LES GROUPES DE DEPLACEMENTS

KAHAR EL HUSSEIN

We study the existence of global fundamental solution of certain invariant linear differential operators on the semi-direct product $G = V \ltimes K$ where V is a real vector space of finite dimension and K a connected compact Lie group which acts on V as a linear group.

Using the scalar Fourier transform on G and the A. Cerezo and F. Rouviere's method ("Solution élémentaire d'un operateur différentiel invariant sur un group de Lie compact", Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 4, séri t; 1969, pp. 561–581). We prove that a *left invariant* differential operator P on G and *right invariant* by K admits a fundamental solution on G if and only if its partial Fourier coefficients satisfy a condition of slow growth. Hence we deduce an explicit necessary and sufficient condition for the existence of a fundamental solution for a bi-invariant differential operator P on the Cartan's motion group.

1. Introduction. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, K un groupe de Lie compact connexe qui opére linéairement et continument dans V et $G = V \ltimes K$ le groupe des displacements produit semi-direct de V par K, rélativement à l'opération donnée de K dans V.

Soit P un operateur différentiel *invariant* sur G. Alors P est dit semi-globalement résoluble si pour toute fonction fC^∞, et à support compact dans G, il existe une fonction gC^∞ sur G, tel que $Pf = g$. Le but de ce travail est l'étude de la résolubilité semi-globale des opérateurs différéntiels invariants à *gauche* sur G et à *droite* par K. Pour célà on utilise des résultats d'analyse harmoniques sur G ([**8**]) et ([3]), et le fait que P est invariant à *droite* par le sous-groupe compact maximal K. Ceci raméne le probleme à un probleme équivalent sur un groupe de Lie noté $\widetilde{G}$, qui le produit *direct* de V par K. Il se trouve dans ce cas que la conditoin de A. Cerezo et F. Rouviere ([2]) est une condition nécessaire et suffisante, pour qu'un opérateur differéntiel invariant à *gauche* sur G et à *droite* par K admette une solution élémentaire sur G. On obtient alors le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit G le groupe des deplacements et soit P un opérateur différéntiel invariant à gauche sur G et à droite par K. Alors P*

admet une solution élémentaire si et seulement si les coefficients de Fourier de P vérifient la conditoin de A. Cerezo et F. Rouviere (*voir Théorème* 6.5.).

Si G est le groupe des *deplacements de Cartan*, alors on déduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différéntiel P bi-invariant sur G ait une solution élémentaire sur G (voir Théorème 7.3).

1.1. *Notations et rappels.* Soit X une variété C^∞. On note $C^\infty(X)$, $D(X)$, $D'(X)$ et $\varepsilon'(X)$, respectivement les espaces des fonctions C^∞, C^∞ à support compact, distributions, et distributions à support compact dans X. Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Tout élément X de $\mathfrak{g}$ peut être considéré comme un champ des vecteurs invariants *à droite* sur G, tel que pour tout $f \in C^\infty(G)$, on a:

$$(Xf)(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 f(\exp(-tXx)), \qquad x \in G.$$

Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre complexifié de $\mathfrak{g}$. On note u l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, alors u peut être considérée comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariants *à droite* sur G. Soit $\langle\ \rangle$ le dualité entre $D'(G)$ et $D(G)$. Si P est un opérateur différentiels invariants sur G, la transposée ${}^tP$ de P est définie par:

$$\langle {}^tPE, f\rangle = \langle E, Pf\rangle$$

pour tout f dans $D(G)$ et E dans $D'(G)$.

Si K est un groupe de Lie compact et si γ dans $\hat{K}$. On note E_γ l'espace de γ, d_γ sa dimension, χ_σ son caractère, et $\mathrm{End}(E_\gamma)$ l'espace de tous les endomorphismes de E_γ.

Soit f dans $D(K)$, sa tranformée de Fourier $\hat{f}$ est définie par:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_K f(x)\gamma(x^{-1})\,dx, \qquad \forall \gamma \in \hat{K} \tag{1.1}$$

(où dx est la mesure de Haar normalisée de K). Si $f \in C^\infty(K)$, alors on a une fomule d'inversion de Fourier!

$$f(x) = \sum_{\gamma\in\hat{K}} d_\gamma \mathrm{tr}(\hat{f}(\gamma)\gamma(x)) \tag{1.2}$$

où tr signifie trace; La convergence de la série (1.2) étant uniforme sur K (voir [**1**]).

Si P est un opérateur différentiel invariant *à droite* sur K, on définit les coefficients de Fourier $P(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, de P de la façon suivante: $P(\gamma)$ est l'endomorphisme de E_γ tel que, pour tout $x \in K$,

$$(1.3) \qquad (P_\gamma)(x) = P(\gamma) \cdot \gamma(x).$$

Dans cette égalité $P(\gamma)$ désigne l'endomorphisme obtenue en appliquant l'opérateur P à la fonction γ (au point x) et $P(\gamma) \cdot \gamma(x)$ est le produit des deux endomorphismes de $\gamma(x)$ et $P(\gamma)$ de E_γ.

Pour tout f dans $D(K)$ et γ dans $\hat{K}$, on a:

$$(1.4) \qquad \widehat{Pf}(\gamma) = \hat{f}(\gamma) \cdot P(\gamma),$$

$$(1.5) \qquad ({}^tP)(\gamma) = {}^tP(\check{\gamma}),$$

où $\check{\gamma}$ est la représentation *contragradiente* de γ. Si V est un espace vectoriel réel de dimension n, on choisit une base hilbertienne $(v_1, \dots, v_n)$ de V, et on identifie V à $\mathbb{R}^n$. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un multi-indices, on note Q_v^α l'opérateur différentiel sur V, tel que:

$$Q_v^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Si $P(v)$ est un polynôme de n variables ($v = (v_1, \dots, v_n)$) sur V à valeur complexe, on note encore $P(v)$ l'opérateur différentiel (à coefficients constants) sur V, en remplaçant chaque variable v_j ($1 \leq j \leq n$) par l'opérateur différentiel $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial v_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

2. Représentations de groupes de deplacements.

2.1. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, K un groupe de Lie compact connexe et $\rho: K \to \mathrm{GL}(V)$ un représentation linéaire continue de K dans V et $G = V \ltimes_\rho K$ le groupe des déplacements produit semi-direct de V par K, rélativement à ρ. On munit V d'un produit scalaire K-invariant, noté (1), et le complexifié $V_\mathbb{C} = V \times \mathbb{C}$ de V du produit scalaire Hermitien qui prolonge (1), et qui sera noté de la même manière. Le groupe K opére naturellement dans $V_\mathbb{C}$; si x est dans K et ζ dans $V_\mathbb{C}$, on écrira $x \cdot \zeta$ au lieu de $\rho(x)\zeta$.

2.2. Soint ζ dans $V_\mathbb{C}$ et K_ζ le stabilasateur de ζ dans K. Soint H un sous-groupe fermé de K_ζ et σ une représentation unitaire irreductible de H, dans un espace E_σ (Hilbertien, de dimension fini). Ala donnée (ζ, σ); il est possible d'associer une représentation linéaire continue (en général non unitaire) de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\sigma$, qui n'est autre que celui des "fonctions" $\phi: K \to E_\sigma$ telles que $\phi(xy) = \sigma(y^{-1})\phi(x)$ pour tous x dans K et y dans H, et:

$$\int_K \|\phi(x)\|^2\, dx < +\infty \tag{1.1}$$

où dx désigne la mesure de Haar normalisée de K et $\|\phi(x)\|$ la norme de $\phi(x)$, caculée dans E_σ. Le produit scalaire dans $\mathscr{H}_\sigma$ est défeni par:

$$(\phi|\psi) = \int_K (\phi(x)|\psi(x))\, dx$$

où le produit scalaire figurant dans l'intégrale est celui de E_σ. L'opération de G dans $\mathscr{H}_\sigma$ est décrite de la manière suivante: à chaque (v, x) dans G, est associé l'opérateur $\pi_{\zeta,\sigma}$ tel que:

$$(\pi_{\zeta,\sigma}(v, x)\phi)(y) = e^{i(y\cdot\zeta|v)}\phi(x^{-1}y) \qquad (\phi \in \mathscr{H}_\sigma).$$

On notera que la restriction à K de cette représentatin n'est autre que la représentation induite (unitaire) $\mathrm{Ind}_{H\uparrow K}\sigma$. Deux cas particuliers de cette construction vont jouer un rôle privilégié.

2.3. On prend pour H le sous-groupe trivial de K_ζ, à savoir $H = \{1\}$, et pour σ la représentation triviale de dimension 1. Dans ce cas, l'espace $\mathscr{H}_\sigma$ n'est autre que l'espace $\mathscr{H}$ des fonctions de carré intégrable sur K, et on notera π_ζ la représentation construite cidessus, π_ζ étant l'homomorphisme de G dans le groupe linéaire de $\mathscr{H}$. Précisément:

$$(\pi_\zeta(v, x)\cdot\phi)(y) = e^{i(y\cdot\zeta|v)}\phi(x^{-1}y) \qquad (\phi \in \mathscr{H}).$$

2.4. On prend $H = K_\zeta$ et σ variable dans $\hat{K}_\zeta$, et $\pi_{\zeta,\sigma}$ la représentation associée à (ζ, σ). Alors on a:

Proposition. *Pour tout σ dans $\hat{K}$:*

$$\pi_{\zeta,\sigma} = \sum_{\sigma\in\hat{K}_\zeta} d_\sigma \pi_{\zeta,\sigma}.$$

Pour la démonstraton de cette proposition (*voir* **[3]**, II, 19).

2.6. Rappellons ici que si $\zeta = \xi \in V$ est réel, alors les représentations $\pi_{\xi,\sigma}$ sont toutes irréductibles et toute représentation unitaire irréductible de G est équivalente à l'une de $\pi_{\xi,\sigma}$ (voir **[9]**, Ch. I).

3. La transformation de Fourier sur les groupes de deplacements.

3.1. Soit f dans $\mathscr{D}(G)$, on peut définir un opérateur $\pi_\zeta(f)$, pour chaque ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, de la manière habituelle:

$$\pi_\zeta(f) = \int_G f(v, y)\pi_\zeta(v, y)\, dv\, dy \tag{3.1}$$

(où dv est une mesure de Haar du groupe vectoriel V.) L'opérateur $\pi_\zeta(f)$: $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ est en fait défini par un noyau $F_f(\zeta)$ qui appartient à $C^\infty(K \times K)$. Précisement:

$$F_f(\zeta)(x, y) = \int_V e^{i(\zeta|v)} f(x \cdot v, xy^{-1})\, dv. \tag{3.2}$$

Achaque f dans $\mathscr{D}(G)$. on peut ainsi associer une fonction F_f: $V_{\mathbb{C}} \times k \times k \to \mathbb{C}$, telle que:

$$F_f(\zeta)(x, y) = F_f(\zeta, x, y)$$

et une fonction $\tilde{f}$: $V \times K \times K \to \mathbb{C}$, telle que:

$$\tilde{f}(v; x, y) = f(x \cdot v, xy^{-1}) \tag{3.4}$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, v dans V, et (x, y) dans $K \times K$. A la suite de Kumahara ([**6**]), on appellera la fonction F_f la transformée de Fourier scalaire de f, où la transformée de Fourier additive de la fonction $\tilde{f}$. En sense invers des théorèmes de type Paley-Wiener dûs à Kumahara ([**8**]) et ([2, **a**]) permettent de caracterise l'image de $\mathscr{D}(G)$ par la transformée de Fourier scalaire où opérateur.

3.2. La transformée de Fourier opérateur $\pi_\zeta(f)$ de f est K-invariant au sens suivant:

$$\pi_{k,\zeta}(f) = \tau_k \pi_\zeta(f) \tau_k^{-1} \qquad (\forall k \in K,\ \forall \zeta \in V_{\mathbb{C}}), \tag{3.5}$$

où τ est la représentation régulière droite de K, (voir [**8**], p. 28). Alors la fonction F_f est k-invariante au sens suivant:

$$F_f(k \cdot \zeta; x, y) = F_f(\zeta; xk, yk) \tag{3.6}$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, et (x, y, k) dans $K \times K \times K$, et la fonction $\tilde{f}$ est aussi K-invariante au sens (3.6).

4. Soient f l'algèbre de Lie de K, et $(X_1, \dots, X_m)$ une base de f, telle que l'opérateur $\Delta = \sum_{i=1}^m X_f^2$ soit b-invariant sur K, une telle base existe ([**1**], p. 564). Pour $l \in \mathbb{N}$, on pose:

$$D^l = (1 - \Delta)^l. \tag{4.1}$$

Alors la famille de semi-normes $\{\gamma_l\,,\ l \in \mathbb{N}\}$ telle que:

$$\gamma_l(f) = \left(\int_K |D^l f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}, \qquad f \in C^\infty(K)$$

définit sur $C^\infty(K)$, la même topologie que les semi-normes $\|X^\alpha f\|_2$, c'est-à-dire sa topologie habituelle d'espace de Frechet (voir **[1]**, pp. 565), et:

$$\|X^\alpha f\|_2 = \left(\int_k |X^\alpha f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}, \qquad \alpha = (\alpha_1\,, \dots\,, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m.$$

4.1. Soit $\mathscr{S}(V)$ l'espace des fonctions C^∞, et à décroissance rapide sur V. On note $\mathscr{S}(G)$ l'espace complété de l'espace $\mathscr{S}(V) \otimes C^\infty(V)$ produit tensoriel de $\mathscr{S}(V)$ par $C^\infty(K)$, dont la topologie est définie par la famille de semi-normes $\{\partial^l_{\alpha\,,\,\beta}\,,\ l \in \mathbb{N}\,,\ \beta \in \mathbb{N}\,,\ \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ telle que:

$$\partial^l_{\alpha\,,\,\beta}(f) = \sup_{|\alpha| \le p} \sup_{(v\,,\,y) \in V \times K} (1 + |v|^2)^\beta \|Q^\alpha_v D^1 f(v\,,\, y)\|_2$$

où $|\ |$ signifie la norme sur V associée à $(|)$. Pour l'espace $\mathscr{S}(G)$ (voir aussi **[11]**, Chapitre 45).

L'espace $\mathscr{S}(G)$ est un espace de Fréchet (voir **[8]**, Lemme 2 et Proposition 1), et ce qu'on appelle l'espace des fonction C^∞, et à *décroissance rapide sur* G, ou *l'espace des Schwartz* de G.

De même on définit l'espace de Schwartz de $V \times K \times K$, qu'on notera $\mathscr{S}(V \times K \times K)$.

4.2. Soit $\mathscr{S}_K(V \times k \times K)$ l'ensemble des fonctions $F(v\,;\, x\,,\, y)$ sur $V \times K \times K$, K-invariantes au sens (3.6) et telles que:

(i) $F(v\,;\, x\,,\, y)$ est C^∞ sur $V \times K \times K$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C^l_{\alpha\,,\,\beta}$ telle que:

$$(1 + |v|^2)^\beta \|(Q^\alpha_v D^l_y F)(v\,;\, x\,,\, y)\|_2 \le C^1_{\alpha\,,\,\beta}$$

où Dy est l'opérateur différentiel $(1 - \Delta)$ agissant sur la variable y. On munit $\mathscr{S}_K(V \times K \times K)$ par la topologie définite par la famille des semi-normes:

$$\gamma^l_{\alpha\,,\,\beta}(F) = \sup_{|\alpha| \le p} \sup_{(v\,,\,x\,,\,y) \in V \times K \times K} (1 + |v|^2)^\beta \|Q^\alpha_v D^l_y F(v\,;\, x\,,\, y)\|_2$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$. Alors $\mathscr{S}_K(V \times K \times K)$ est un espace de Fréchet (voir **[8]**, Proposition 2). De même on défini les espaces $D_K(V \times K \times K)$ et de $C^\infty_K(V \times K \times K)$ respectivement, alors on a:

4.3. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont vérifiées*:

(i) $\sim: C^\infty(G) \to C_K^\infty(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

(ii) $\sim: D^\infty(G) \to D_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

(iii) $\sim: \mathscr{S}(G) \to \mathscr{S}_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

où $\sim$ *est l'application de* $C^\infty(G)$ *dans* $C^\infty(V\times K\times K)$ *définie par*:

$$\sim(f) = \tilde{f}$$

la démonstration de cette proposition est identique à celle donnée dans ([**8**], *Lemme* 3).

4.4. COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\sim: D'(G) \to D'_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

(ii) $\sim: \varepsilon'(G) \to \varepsilon'_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

(iii) $\sim: \mathscr{S}'(G) \to \mathscr{S}'_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3.

4.5. LEMME (*Kumahar* [**6**]). *La transformée de Fourier scalaire* F *est un isomorphisme topologique de* $\mathscr{S}(G)$ *sur* $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$, *pour les structures d'espaces vectoriels topolgiques l'isomorphisme réciproque noté par* F^{-1}; *autrement dit, pour toutes fonctions* f *dans* $\mathscr{S}(G)$ *on a*:

$$F_{F_f}^{-1} = f. \tag{4.2}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier vectoriele sur V. Alors on a:

$$F = \mathscr{F}\circ\sim \tag{4.3}$$

mais comme $\mathscr{F}$ est un isoimorphisme topologique de $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$ sur $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$, d'après la Proposition 2.7 on voit que F est un isomorphisme topologique de $\mathscr{S}(G)$ sur $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$.

4.6. DÉFINITION. On appelle transformée de Fourier scalaire de $\mathscr{S}'(G)$ dans $\mathscr{S}'_K(V\times K\times K)$ la transposée ${}^tF^{-1}$ de la transformée de Fourier scalaire F^{-1} de $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$ sur $\mathscr{S}(G)$.

On notera encore par F (au lieu de ${}^tF^{-1}$) cette transformée. Alors on a:

$$\langle F_T, \varphi\rangle = \langle T, F_\varphi^{-1}\rangle \tag{4.4}$$

pour tout T dans $\mathscr{S}'(G)$, et φ dans $\mathscr{S}'(V\times K\times K)$. Alors il en résulte de ce qui précède la théorème suivant:

4.7. THÉORÈME. *La transformée de Fourier scalaire* F *est un isomorphisme topologique de* $\mathcal{S}'(G)$ *sur* $\mathcal{S}'_K(V \times K \times K)$.

5. Opérateurs différentiels invariants sur G.

5.1. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\mathfrak{g}$. On note u l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, qui peut être concidérée comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariant à *gauche* sur G; on note $U^{\mathfrak{k}}$ le centralisateur de $\mathfrak{k}$ dans U. On fixe une base $v_1, \dots, v_n$ de V qu'on pourra supposer orthonormée par rapport à $(|)$, et une base $(X_1, \dots, X_m)$ de $\mathfrak{k}$ telle que $\Delta = -\sum_{i=1}^m x_i^2$ soit bi-invariant. Tout élément P du U s'écrit (de manière unique) sous la forme:

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} v^\beta X^\alpha$$

où sous le forme:

$$P = \sum_{\alpha} P_\alpha X^\alpha \tag{5.1}$$

où les α (respectivements β) sont multi-indices $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (resp. $= (\beta_1, \dots, \beta_n)$), $v^\beta = v_1^{\beta_1} \cdots v_n^{\beta_n}$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_m^{\alpha_m}$, $a_{\alpha,\beta}$ sont des nombres complexes, et P_α sont des fonctions polynômes sur V à valeurs complexes.

5.2. Soit t réel et soit X dans $\mathfrak{k}$, identifié à l'élément $(0, X)$ de $\mathfrak{g}$. On a alors:

$$\tilde{f}(v; x, \exp -tXy) = \tilde{f}(xv, xy^{-1} \exp tX). \tag{5.2}$$

En dérivant par rapport à t, on trouve:

$$(R_X \tilde{f})(v; x, y) = (L_X f)^{\sim}(v; x, y) \tag{5.3}$$

où R_X et L_X sont les champs de vecteurs associés à X, le premier sur $V \times K \times K$, le deuxième sur $V \times K$:

$$(R_X \phi)(v; x, y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v; x, \exp -tXy), \quad (\phi \in C^\infty(V \times K \times K)), \tag{5.4}$$

$$(L_X \phi)(v; y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v; y \exp tX), \qquad (\phi \in C^\infty(V \times K)). \tag{5.5}$$

On remarquera que les champs de vecteurs R_X et L_X peuvent être interprétés de la manière suivante: R_X est un champ de vecteurs sur $V \times K \times K$ qui en fait n'opère pas sur les deux premières variables (v, x) mais seulement sur y; c'est essentiellement le champ de vecteurs *invariant à droite* sur K associé à X, étendue de manière naturelle en un opérateur différentiel sur $(V \times K) \times K$. De même pour L_X, mais ici L_X est invariant *à gauche*, et c'est un champ *invariant à gauche* sur le groupe $G = V \times K$.

5.3. Soit t réel et soit w dans V, identifié à l'élément $(w, 0)$ dans $\mathfrak{g}$. On a alors:

$$\tilde{f}(v + ty^{-1}w ; x, y) = f(xv + txy^{-1}w, xy^{-1}). \tag{5.6}$$

En dérivant par rapport à t, on trouve:

$$\tilde{w}\tilde{f}(v ; x, y) = (wf)^{\sim}(v ; x, y)$$

où $\tilde{w} = y^{-1}w$ et:

$$(\tilde{w}\phi)(v ; x, y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v + ty^{-1}w ; x, y), \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}(w\phi)(v ; y) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi((v, y)(tw, 0)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v + tyw, y)\end{aligned} \tag{5.8}$$

où comme dans 5.2, $\tilde{w}$ et w peuvent être interprétés de la manière suivante: $\tilde{w}$ est un champ de vecteurs sur $V \times K \times K$ qui opère seulement sur la *première variable* v comme dans la formule (5.7); c'est le champ de vecteurs sur V associé à w. De même pour w, mais ici w est *invariant à gauche*, et c'est un champ invariant à gauche sur le groupe G.

5.4. PROPOSITION. *Soit $P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha$ un opérateur différentiel invariant à gauche sur G. Alors il existe un opérateur différentiel linéaire $\widetilde{P}$ sur $V \times K \times K$, tel que:*

$$\widetilde{P}\tilde{f} = \widetilde{Pf} \qquad \forall f \in C^\infty(G).$$

Démonstration. En fait si $P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha$ est un opérateur différentiel invariant à gauche sur G; le calcul précédent montre bien qu'il existe un opérateur différentiel noté $\widetilde{P}(w, R)$ agissant sur la première et la troisième variables, telque:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(w, R)\tilde{f}(v ; x, y) &= \sum_\alpha P_\alpha(y^{-1}w)R^\alpha \tilde{f}(v ; x, y) \\ &= \widetilde{Pf}(v ; x, y)\end{aligned} \tag{5.9}$$

où $R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \cdots R_m^{\alpha_m}$ chaque R_j n'autre que le champ de vecteurs R_{X_j} (invariant à droite sur K) et $P_\alpha(y^{-1}w)$ sont des polynômes de $(y^{-1}w)$.

5.5. Corollaire. *Soit P un opérateur différéntiel invariant à gauche sur G. Alors il existe un opérateur différéntiel noté F sur $V_{\mathbb{C}} \times K \times K$ agissant seulement sur la troisième variable telle que:*

$$F_P F_f = F_{Pf} \qquad \forall f \in \mathscr{D}(G). \tag{5.10}$$

Démonstration. En effet, il suffit de rémarquer que $F = \mathscr{F} \circ \sim$. Donc d'apres la Proposition 5.4, on a:

$$\begin{aligned} F_{Pf}(\zeta\,; x\,, y) &= \mathscr{F}\widetilde{Pf}(\zeta\,; x\,, y) \\ &= \mathscr{F}(\tilde{P}(w\,, R)\tilde{f})(\zeta\,; x\,, y) \\ &= \sum_\alpha \mathscr{F} P_\alpha(iy \cdot \zeta) R^\alpha F_f(\zeta\,; x\,, y) \end{aligned} \tag{5.11}$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$ et $(x\,, y)$ dans k, d'où le *corollaire.*

5.6. Si il n'y a pas de confusion l'opérateur F_P s'appelle la transformée de Fourier scalaire où la transformée de Fourier additive de $\tilde{P}$. Désormais on notera P la transformée de Fourier scalaire de P, alors on a:

$$\begin{aligned} (F_P F_f)(\zeta\,; x\,, y) &= \sum \mathscr{F} P_\alpha(iy \cdot \zeta) R^\alpha F_f(\zeta\,; x\,, y) \\ &= \mathscr{F}\tilde{P}(iy \cdot \zeta\,; R)\mathscr{F}\tilde{f}(\zeta\,; x\,, y) \\ &= P(iy \cdot \zeta\,, R) F_f(\zeta\,; x\,, y) \end{aligned} \tag{5.12}$$

où comme dans 5.6 $P(iy \cdot \zeta\,, R)$ est l'opérateur differéntiel sur $V_{\mathbb{C}} \times K \times K$ agissant seulement sur la troisième variable et qu'il a la forme:

$$P(iy \cdot \zeta\,, R) = \sum_\alpha P_\alpha(iy \cdot \zeta) R^\alpha. \tag{5.13}$$

$P_\alpha(iy \cdot \zeta)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $y \mapsto P_\alpha(y \cdot \zeta)$.

6. Solution élémentaire d'un élément $P \in u^{\mathfrak{k}}$.

6.1. On considere le groupe de Lie $B = V \times K \times K$ produit direct de trois groupes V, K, et K. On rappele que le produit de deux éléments de B est donné par la formule:

$$(v\,; x\,, y)\,, (v'\,; x'\,, y') = (v + v'\,, xx'\,, yy'). \tag{6.1}$$

Soit $\widetilde{G} = V \times K$ le groupe de Lie produit direct de V par K, qu'on pourra identifié au sous-groupe fermé $V \times \{1\} \times K$ de B.

6.2. THÉORÈME. *Soient* G *le gorupe de déplacements, et* $P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha$ *un opérateur différéntiel invariant à* gauche *sur* G *et à* droite *par* K. *Alors il exist un unique opérateur différentiel noté* Q *invariant à* gauche *sur* $\widetilde{G}$ *tel que*:

$$\widetilde{P}\tilde{f}(v\,;1\,,y) = (Q\tilde{f})(v\,;1\,,y)\,,\qquad \forall f\in C^\infty(G)\,,\tag{6.2}$$

avec:

$$Q = \sum_\alpha P_\alpha L^\alpha\,,\tag{6.3}$$

où $L^\alpha = L_1^{\alpha_1}\cdots L_m^{\alpha_m}$, *chaque* L_j *n'autre que le champ des vecteurs* L_{X_j} (*invariant à gauche sur* K) *associé à* X_j $(1\le j\le m)$.

Démonstration. Soit ν la représentation régulière *gauche* de K. Alors pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$, on a:

$$F_{P(f\circ\tau_k)}(\xi\,;x\,,y) = F_{\tau_k\circ(Pf)}(\xi\,;x\,,y)\tag{6.4}$$

pour tout ξ dans V et $(x\,,y\,,k)$ dans $K\times K\times K$. En faisant le calcule du première et du seconde membre de l'èquation (6.4), on trouve:

$$F_{P(f\circ\tau_k)}(\xi\,;x\,,y) = P(y\cdot\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y)$$

et:

$$F_{\tau_k\circ(Pf)}(\xi\,;x\,,y) = P(k^{-1}y\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y).$$

Donc, on a:

$$P(y\cdot\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y) = P(k^{-1}y\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y)$$

ou encore:

$$P(y\cdot\xi\,,R)(F_f\circ\nu_k)(\xi\,;x\,,y) = \nu_k\circ P(y\cdot\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,y)$$

pour tout ξ dans V et $(x\,,y\,,k)$ dans $K\times K\times K$. On en déduit de l'équation (6.5) que l'opérateur $P(y\cdot\xi\,,R)$ est un opérateur invariant à *gauche* sur K dont les coefficients sont des fonctions polynômes sur V, on a donc:

$$P(y\cdot\xi\,,R) = \sum_\alpha P_\alpha(\xi)L^\alpha\tag{6.6}$$

où $L^\alpha = L_1^{\alpha_1}\cdots L_{m^r}^{\alpha_m}$ chaque L_j n'est autre que le champ des vecteurs invariant à gauche sur K associé à X_j. Soit $P_\alpha(w)$ l'unique opérateur différentiel (à coefficients constantes) sur V qui correspond naturellement au polynome $P_\alpha(\xi)$. Alors l'opérateur

$$Q = \sum_\alpha P_\alpha(w)L^\alpha$$

est un opérateur différentiel invariant à *gauche* sur $\widetilde{G}$.

6.2′. Le passage de Pà Q et vice-versa, est donné par les diagrams commutatfs suivants:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{S}'(G) & \xrightarrow{P} & \mathscr{S}'(G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}'(B) & \xrightarrow{\widetilde{P}} & \mathscr{S}'(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}_k(B) & \xrightarrow{F_P} & \mathscr{S}'_k(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}'(\widetilde{G}) & \xrightarrow{Q} & \mathscr{S}'(\widetilde{G}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}(\widetilde{G}) & \xrightarrow{Q} & \mathscr{S}'(\widetilde{G})
\end{array}$$

6.3. *Remarques.* Le Théorème 6.2 dit en definitif que pour P dans $u^{\mathfrak{k}}$ il est possible d'associer un opérateur différéntiel Q invariant à *gauche* sur $\widetilde{G}$ tel que:

$$Q\tilde{f} = \widetilde{Pf} \qquad \forall f \in C^\infty(G) \tag{6.7'}$$

car si $P \in u^{\mathfrak{k}}$, on a:

$$\widetilde{(\tau_k \circ Pf)}(v\,;x\,,y) = \widetilde{P(f \circ \tau_k)}(v\,;x\,,j)$$

pour tout $(v\,,x\,,y)$ dans $V \times K \times K$, et f dans $C^\infty(G)$. Alors par un simple calcule, on montre qu'il existe un opérateur differéntiel invariant à *gauche* sur $\widetilde{G}$, tel que $(6.7)'$ soit vérifié.

6.4. Soit $A(\xi) \in \operatorname{End}(E_\gamma)$, dont les coefficients dan une base orthonormal de E_γ sont des polynômes $a_{ij}(\xi)$. On note $\widetilde{A}(\xi)$ la matrice de coefficients $a_{ij}(\xi)$ dans cette base, où:

$$\tilde{a}_{ij}(\xi) = \left(\sum |a_{ij}(\xi)^{(\alpha)}|^2\right)^{1/2}$$

et:

$$a_{ij}(\xi)^{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha a_{ij}(\xi)}{(\partial\xi)^\alpha}, \qquad \alpha = (\alpha_2\,,\,\dots\,,\,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Cette définition ne depend pas de la bas orthonormale choisie, et on a:

$$\|\widetilde{A}(\xi)\|^2 = \sum_\beta \|A(\xi)^{(\beta)}\|^2.$$

On peut maintenant énoncer ce qui suit:

6.5. Théorème. *Soient G le groupe des deplacements, P un opérateur différéntiel invariant à* gauche *sur G et à* droite *par K. Alors les* *conditions suivantes sont équivalantes*:

(i) P *admet une solution* élémentaire sur G.

(ii) *il existe une constante* $C > 0$, *et un entier* $l \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* γ *dans* $\hat{K}$, *la fonction* (*de* ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ *ne soit pas identiquement nulle sur* $V_{\mathbb{C}}$ *et*:

$$\left\| \frac{({}^{\omega}P(0, \gamma))^{\sim}}{(\det P(0, \gamma))^{\sim}} \right\| \leq C d_l(\gamma)$$

où les $P(\zeta, \gamma)$ *sont les coefficients de Fourier de* P, $d_l(\gamma)$ *les coefficients de Fourier de* D^l, *et* ${}^{\omega}P(0, \gamma)$ *est la comatrice de* $P(0, \gamma)$.

Démonstration. Soit $E \in \mathscr{D}'_k(V \times K \times K)$, tel que:

$$P\widetilde{E}(v, y) = \delta_G(v, y)$$

où δ_G est la mesure de Dirac à l'élément neutre de G et $\widetilde{E}(v, y)$ est la distribution sur G, telle que:

$$\langle \widetilde{E}(v, y), f(v, y) \rangle = \langle E(v; x, y), f(xv, xy^{-1}) \rangle \tag{6.8}$$

pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$. D'après le Théorème 6.2, on a:

$$\begin{aligned}(\widetilde{PE})(v; 1, y) &= (QE)(v; 1, y) \\ &= \tilde{\delta}_G(v; 1, y) = \delta_{\widetilde{G}}(v; y)\end{aligned}$$

pour tout (v, y) dans $V \times K$. Donc dire que $\widetilde{E} \in \mathscr{D}'(G)$ est une solution élémentaire de P sur G équivaut à dire que $E|_{\widetilde{G}}$ la restriction de E à $\widetilde{G}$ est une solution élémentaire de Q sur $\widetilde{G}$. Ceci montre à la fois que (i) implique (ii) et (ii) implique (i) (voir **[1]**, Théorème III), d'où le *théorème*.

7. Le cas particulier des groupes de deplacements de Cartan.

7.1. Soit G_0 un groupe de Lie semi-simple connexe réel de centre fini; $\mathfrak{g}_0$ son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une decomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Soit K le sous-groupe compact maximal de G_0 correspondant à K. En pernant pour V l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{p}$, muni de l'action adjoint de K. On construit le groupe des deplacements de Cartan $G = V \times_{\mathrm{Ad}} K$ produit semi-directe de V par K. Notons $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ son complexifié, sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$.

Soient M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, et $\mathfrak{M}$ son algèbre de Lie. On choisit une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathfrak{M}$, telle que l'opérateur

$D_M^l = (1 - \sum_{i-1}^n X_i^n)^l$ $(l \in \mathbb{N})$ soit bi-invariant sur M. On note $d_l(\sigma)$ les coefficients de Fourier de D^l. On aura à faire intervenir le groupe réductif connexe complexe $K_\mathbb{C}$, qui est le complexifié (universel) de K ; par construction, ce groupe $K_\mathbb{C}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$; il opére donc naturellement dans $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$.

Reprons maintenant dans cette situation les objets, $P(\zeta, \gamma)$, avec γ dans $\hat{K}$ et ζ dans $p_\mathbb{C}$. La fonction (de ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ étant K-invariante, elle est aussi $K_\mathbb{C}$-invariant par prolongement analytique (car $\pi_\zeta(p)$ est K-invariant au sens (3.5)).

7.2. Lemme. *Les deux propriétés suivantes sont équivalantes.*

(i) *pour tout γ dans $\hat{K}$, la fonction polynome (de ζ) dét $P(\xi, \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{p}_a$.*

(ii) *pour tout γ dans $\hat{K}$, la fonction polynome de (de ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$.*

Démonstration. Supposons dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Du fait de l'invariance sous K remarqué plus haut, il vient que dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $K_\mathbb{C} \cdot a_\mathbb{C}$ (réunion des K_0-orbits rencontrant $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$). Or ce dernier ensemble est Zariski dense dans $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ (**[6]**). Donc dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$. Ainsi (ii) implique (i), l'implication inverse étant triviale.

7.3. Théorème. *Soit G le groupe des deplacement de Cartan, et soit P un opèrateur différéntiel bi-invariant sur G. Alors P admet une solution élémentaire sur G si et seulement si P vérifié la conditon de A. Cerezo et F. Rouviere i.e. pour tout σ dans $\widehat{M}$, il existe une constante $C > 0$, et un entier $l \in \mathbb{N}$, telle, que:*

$$\|P(0, \sigma)^\sim\|^{-1} \leq C d_l(\sigma).$$

Démonstration. D'après le Théorème -6.2 pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$ on a:

$$\begin{aligned} F_{Pf}(\zeta ; x, y) &= F_P(y \cdot \zeta, R) F_f(\zeta ; x, y) \\ &= \mathscr{F}\widetilde{P}(y, \zeta, R)\mathscr{F}\widetilde{f}(\zeta ; x, y) \\ &= P(\zeta, L)\mathscr{F}\widetilde{f}(\zeta ; x, y) \end{aligned}$$

pour tout ζ dans $V_\mathbb{C}$, et (x, y) dans K ; où $P(\zeta, L)$ comme dans (6.6) est un opérateur différentiel invariant à gauche sur K dont les coefficients sont des fonctions polynomes sur $V_\mathbb{C}$. Si λ dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, alors d'après ([**4**] Lemme 4.2 et 3.9), on a pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$:

$$\begin{aligned} P(\lambda, \sigma)(\mathscr{F}\tilde{f}_\sigma)(\lambda; x, y) &= P(\lambda, \sigma)(\mathscr{F}\tilde{f})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y) \\ &= \mathscr{F}(\widetilde{Pf})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Pour tout (λ, x, y) dans $a \times K \times K$ (voir [**4**] p. 13).

On rappelle que $P(\lambda, \sigma)$ est une fonction polynome sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ pour tout σ dans $\widehat{M}$, et:

$$(\mathscr{F}\tilde{f}_\sigma)(\lambda; x, y) = \int_M \mathscr{F}\tilde{f}(\lambda, x, yz^{-1})x_\sigma(3)\, dz, \tag{7.2}$$

$$(\mathscr{F}\tilde{f})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y) = \int_M \mathscr{F}\tilde{f}(\lambda; xz, y)x_\sigma(z)\, dz. \tag{7.3}$$

(où dz est la mesure de Haar normalisée de M). Appliquons maintenant la transformée de Fourier partielle sur K, relativement à la variable y, à l'equation (7.1); on trouve:

$$P(\lambda, \gamma)(\widehat{\mathscr{F}\tilde{f}})_{\check{\sigma}}(\lambda, x, \gamma) = P(\lambda, \sigma)(\widetilde{\mathscr{F}\tilde{f}})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, \gamma) \tag{7.4}$$

pour tout γ dans $\widehat{K}$, σ dans $\widehat{M}$, et (λ, x) dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \times K$. Alors on a une relation entre les $P(\lambda, \gamma)$ et les scalaires $P(\lambda, \sigma)$:

$$P(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} P(\lambda, \sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda, \sigma) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que $P(\lambda, \gamma)$ est une matrice digonalisée dont les valeurs propres sont les $P(\lambda, \sigma)$. Donc on a:

$$\text{dét}P(\zeta, \gamma) = P(\zeta, \sigma)^{d_\sigma}, \qquad \zeta \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}. \tag{7.5}$$

Alors on en déduit la suivant:

"La fonction (de ζ) det $P(\zeta; \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur $V_{-\mathbb{C}}$ pour tout γ dans $\widehat{K}$ si et seulement si la fonction (de ζ), $P(\zeta, \sigma)$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ pour tout σ dans $\hat{M}$". D'où le théorème.

7.3. Exemple. Soient $K = SO(2, \mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^2$, et $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ le produit semi-direct de $\mathbb{R}^2$ par SO(2), relativement à l'action naturelle de SO(2) dans $\mathbb{R}^2$; autrement dit, G est le groupe des deplacement du plan; il est réoluble mais non simplement connexe et c'est le groupe des deplacements de Cartan associé $SL(2, \mathbb{R})$. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ c'est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K). On posera:

$$v_1 = (e_1, 0), \quad v_2 = (e_2, 0), \quad Y = (0, X)$$

de sorte que (v_1, v_2, Y) est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. D'après ([2], Lemme II), l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G, et invariant à droite par K, est engendrée par les deux "opérateurs":

$$P_1 = v_1^2 + v_2^2, \quad P_2 = Y$$

tandis que celle des opérateurs différentiels bi-invariants par G est engendrée par P_1.

Soit $P = \sum_{r,q} a_{r,q} P_1^r P_2^q$, les $a_{r,q}$ etant des nombres complexes. Alors, pour $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ dans $\mathbb{C}^2$, l'opérateur $\pi_\zeta(P)$ est l'opérateur différentiel invariant à gauche sur SO(2).

$$\pi_\zeta(P) = (\zeta, L) = \sum (-1)^2 a_{2,q} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^r L^q$$

où L est le champ de vecteurs sur SO(2), associé à X (dans les coordonnées habituelles: $L = \partial/\partial\theta$). La condition (ii) du Théorème 7.3 s'exprime ici de la manière suivante:

Pour tout entier m, il existe r tel que:

$$\sum_q a_{r,q} (im)^q \neq 0$$

et il existe une constante $C > 0$ et un entier $l \in \mathbb{N}$ telle que:

$$\left(\sum_{0 \le j \le r} \sum_q |a_{j,q} (im)^q| \right)^{-1} \le C(1 + m^2)^l.$$

REFERENCES

[1] A. Cerezo et F. Rouviere, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel invariant sur un groupe de Lie compact*, Ann. Scient. EC. Norm. Sup. 4e série, t. 2 (1969), 561–581.

[2] F. D. Battesti, *Solvability of differential operators* I. *Direct and semi direct product of Lie group* (to appear).

[3] K. El-Hussein, *Théorème de Paley-Wiener pour les groupes de déplacements*, Thèse de Doctorat de 3e cycle, Poitiers, 1982.

[4] ——, *P-convexité pour certains opérateurs différentiels sur les groupes des déplacements de Cartan*, preprint Poitiers n^{o} 27 1987.

[5] F. R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, Tome 1, Dunod, Paris, 1966.

[6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Acad. Press 1984.

[7] L. Hormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[8] K. Kumahar, *Fourier transform on the motion groups*, J. Math. Soc. Japan, **28** (1976).

[9] G. W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, University of Chicago Press, 1976.
[10] F. Rouviere, *Invariant differential equations on certain semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **243** (1978).
[11] F. Trèves, *Topological Vector Sapce Distribution and Kernels*, Academic Press, New-York, London, 1966.

Received July 30, 1988.

UNIVERSITÉ DE LATTAQUE
LATTAQUE, SYRIE

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typed form or offset-reproduced (not dittoed), double spaced with large margins. Please do not use built up fractions in the text of the manuscript. However, you may use them in the displayed equations. Underline Greek letters in red, German in green, and script in blue. The first paragraph must be capable of being used separately as a synopsis of the entire paper. In particular it should contain no bibliographic references. Please propose a heading for the odd numbered pages of less than 35 characters. Manuscripts, in triplicate, may be sent to any one of the editors. Please classify according to the 1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*) scheme which can be found in the December index volumes of *Mathematical Reviews*. Supply name and address of author to whom proofs should be sent. All other communications should be addressed to the managing editor, or Elaine Barth, University of California, Los Angeles, California 90024-1555-05.

There are page-charges associated with articles appearing in the Pacific Journal of Mathematics. These charges are expected to be paid by the author's University, Government Agency or Company. If the author or authors do not have access to such Institutional support these charges are waived. Single authors will receive 50 free reprints; joint authors will receive a total of 100 free reprints. Additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* (ISSN 0030-8730) is published monthly. Regular subscription rate: $190.00 a year (12 issues). Special rate: $95.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for numbers issued in the last three calendar years, and changes of address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924, U.S.A. Old back numbers obtainable from Kraus Periodicals Co., Route 100, Millwood, NY 10546.

The Pacific Journal of Mathematics at P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924 (ISSN 0030-8730) is published monthly. Second-class postage paid at Carmel Valley, California 93924, and additional mailing offices. Postmaster: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION

Pacific Journal of Mathematics

Vol. 144, No. 2 June, 1990