Pacific Journal of Mathematics

MESURES DE PATTERSON-SULLIVAN SUR LE BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE AU SENS DE GROMOV

MICHEL COORNAERT

Volume 159 No. 2 June 1993

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 159, No. 2, 1993

MESURES DE PATTERSON-SULLIVAN SUR LE BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE AU SENS DE GROMOV

MICHEL COORNAERT

Patterson et Sullivan ont mis en relation la croissance des orbites d'un groupe discret d'isométries de H^n et certaines propriétés géométriques et ergodiques de son ensemble limite. On étend quelques-uns de leurs résultats à des groupes d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov.

0. Introduction. Considérons l'espace hyperbolique usuel H^n, équipé d'un point base x_0. Munissons le bord ∂H^n de H^n de la *métrique visuelle* obtenue en regardant ∂H^n à partir de x_0 (la distance entre deux points de ∂H^n est l'angle que font entre eux les rayons géodésiques issus de x_0 et allant vers les deux points). ∂H^n est ainsi muni d'une structure de variété riemannienne isomorphe à celle de la sphère standard S^{n-1}. On sait que toute isométrie γ de H^n s'étend en un homéomorphisme conforme de ∂H^n. Soit $|\gamma'(\xi)|$ la *dilatation infinitésimale* de γ en $\xi \in \partial H^n$ (c'est-à-dire le rapport de similitude de $\gamma' \colon T_\xi \partial H^n \to T_{\gamma\xi} \partial H^n$).

Soit maintenant Γ un groupe discret non élémentaire d'isométries de H^n. Etant donné un réel $D \geq 0$, une mesure μ sur ∂H^n, de masse totale finie et non nulle, est dite *Γ-conforme de dimension D* si

$$\gamma^* \mu = |\gamma'|^D \mu \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

où $\gamma^* \mu$ est la mesure définie par $\gamma^* \mu(A) = \mu(\gamma A)$ pour tout $A \subset \partial H^n$.

Notons $n_Y(R)$ le nombre de points d'une orbite $Y \subset H^n$ de Γ situés à une distance $\leq R$ de x_0. *L'exposant critique* $e(\Gamma)$ du groupe Γ est

$$e(\Gamma) = \limsup_{R \to \infty} 1/R \operatorname{Log} n_Y(R).$$

L'inégalité triangulaire montre que $e(\Gamma)$ ne dépend ni du choix du point base x_0 ni de celui de l'orbite Y. Une minoration du volume de la boule de centre x_0 et de rayon R (volume en const$\cdot e^{(n-1)R}$ pour R grand) montre facilement $e(\Gamma) \leq n-1$. Cette minoration s'obtient en considérant des boules $B(y, r)$ ayant pour centres les $y \in Y$ et pour rayon un $r > 0$ assez petit pour que les boules $B(y, r)$ soient disjointes.

Patterson ($n = 2$, **[Pat-1]**) puis Sullivan (n quelconque, **[Sul-1]**) ont montré l'existence d'une mesure Γ-conforme de dimension $D = e(\Gamma)$ dont le support est l'ensemble limite $\Lambda \subset \partial H^n$ de Γ. Une telle mesure permet (sous certaines hypothèses sur Γ) d'obtenir des informations très intéressantes sur la croissance des orbites de Γ dans H^n, la mesure de Hausdorff sur Λ, les propriétés ergodiques de l'action de Γ sur Λ et les propriétés spectrales du laplacien de H^n/Γ. (voir **[Pat-1]**, **[Pat-2]**, **[Sul-1]**, **[Sul-2]**, **[Sul-3]**).

On se propose ici de généraliser la construction de Patterson-Sullivan à des groupes d'isométries d'un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov (**[Gro]**). On étend aussi quelques-uns des résultats de **[Sul-1]**, en suivant pas à pas les arguments qui y sont donnés.

Les résultats obtenus s'appliquent et particulier à l'étude de groupes proprement discontinus d'isométries d'arbres ou de variétés riemanniennes simplement connexes dont la courbure sectionnelle est majorée par une constante strictement négative. Ils s'appliquent aussi à l'étude des sous-groupes d'un groupe *hyperbolique* au sens de **[Gro]**.

Le plan de cet article est le suivant.

Le §1 est fait de rappels sur les espaces hyperboliques au sens de Gromov (**[Gro]**). Soit X un espace métrique hyperbolique complet, géodésique et localement compact. Gromov attache à X son *bord hyperbolique* ∂X. Le choix d'un point base $x_0 \in X$ et d'une constante $a > 1$ (à prendre suffisamment proche de 1) permet de définir une métrique "visuelle" sur ∂X (**[Gro]**, 7.2).

Dans le §2 on rappelle la définition de la *fonction de Busemann* éssociée à un rayon géodésique de X et on en donne quelques propriétés élémentaires qui serviront par la suite.

Toute isométrie γ de X s'étend en un homéomorphisme de $X \cup \partial X$. Dans le §3, on étudie la dilatation de γ pour la métrique visuelle sur ∂X. Plus précisément, si ξ est un point de ∂X et si h est la fonction de Busemann attachée à un rayon géodésique quelconque d'extrémité ξ, on montre que cette dilatation est, au voisinage de ξ, *proportionnelle* à $a^{\Delta(\xi)}$, en posant $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$. (Le "proportionnelle à" signifie ici que le rapport des deux quantités reste entre deux constantes strictement positives ne dépendant ni de ξ ni de γ.)

Les §§4, 5, 6 et 7 sont une copie quasi-conforme des §§1, 2 et 3 de **[Sul-1]**. Prenons un groupe Γ proprement discontinu d'isométries de X. Dans le §4 on définit la notion de mesure Γ-*quasi-conforme de dimension* D sur ∂X (pour D réel ≥ 0).

Définissons *l'exposant critique de base* a de Γ par

$$e_a(\Gamma) = e(\Gamma)/\operatorname{Log} a = \limsup_{R\to\infty} 1/R \log_a n_Y(R).$$

(Où $\log_a$ désigne le logarithme de base a et où $n_Y(R)$ est le nombre de points d'une orbite $Y \subset X$ de Γ situés à une distance $\leq R$ du point base x_0.)

Le groupe Γ est dit *élémentaire* si son ensemble limite $\Lambda \subset \partial X$ est de cardinal ≤ 2. On supposera toujours Γ non élémentaire.

Si Γ est d'exposant critique fini, on montre dans le §5, en suivant la construction de Patterson-Sullivan, l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ dont le support est Λ. Cela permet par exemple de montrer que l'exposant critique de Γ est toujours strictement positif.

Dans le §6 on généralise le *lemme de l'ombre de Sullivan* (**[Sul-1]**, §2). Ce lemme permet de montrer que toute mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X doit vérifier $D \geq e_a(\Gamma)$. Le lemme de l'ombre permet aussi de montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R)$ pour tout R.

Soit $Q(\Lambda)$ *l'enveloppe de Gromov* de Λ, c'est-à-dire la réunion des géodésiques $\subset X$ dont les extrémités sont dans Λ. $Q(\Lambda)$ est un fermé Γ-invariant. Le groupe Γ est dit *quasi-convexe-cocompact* si $Q(\Lambda)/\Gamma$ est un compact. Dans le §7 on établit les résultats suivants pour Γ quasi-convexe-cocompact et d'exposant critique fini:

(i) la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}$ de dimension $e_a(\Gamma)$ sur Λ a une masse totale finie et non nulle. En particulier la dimension de Hausdorff de Λ est égale à $e_a(\Gamma)$.

(ii) $\mathscr{H}$ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$, dont le support est Λ. Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D, dont le support est contenu dans Λ, alors $D = e_a(\Gamma)$ et les mesures $\mathscr{H}$ et μ sont *équivalentes*, c'est-à-dire absolument continues l'une par rapport à l'autre. En fait, les seules mesures Γ-quasi-conformes, dont le support est contenu dans Λ, sont les mesures de la forme $\psi \cdot \mathscr{H}$ pour ψ une fonction sur Λ $\mathscr{H}$-mesurable et $\mathscr{H}$-presque-partout comprise entre deux constantes strictement positives.

(iii) L'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$ est ergodique (i.e. pour tout borélien Γ-invariant $B \subset \Lambda$, on a $\mathscr{H}(B) = 0$ ou $\mathscr{H}(\Lambda - B) = 0$).

(iv) Il existe un réel $C \geq 1$ tel que

$$C^{-1} \exp(e(\Gamma)R) \leq n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R) \quad \text{pour tout } R.$$

(v) La *série de Poincaré* $g_Y(s) = \sum_{y\in Y} a^{-s|y|}$ (où $|y|$ est la distance de y au point base) diverge en $s = e_a(\Gamma)$.

Dans le §8, X est un arbre. On définit la notion de *mesure* Γ-*conforme* sur ∂X, notion plus restrictive que celle de mesure Γ-quasi-conforme. La construction du §5 donne, pour Γ d'exposant critique fini, une mesure Γ-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ dont le support est Λ. Sous l'hypothèse Γ *convexe-cocompact* et d'exposant critique fini, on montre l'existence d'une unique mesure Γ-conforme supportée par Λ (à un facteur constant près). Cette mesure Γ-conforme canonique est la mesure de Hausdorff de dimension $e_a(\Gamma)$ sur Λ. On a donc, dans les arbres, une analogie encore plus grande avec le cas $X = H^n$ (cf. **[Sul-1]**, §3).

Une version arboriséee du *théorème géométrique des valeurs intermédiaires* (**[Sul-1]**, §4) montre (§9) que toute mesure μ Γ-conforme de dimension D sur le bord d'un arbre X permet de définir une mesure Γ-invariante m sur l'espace $\partial^2 X \subset \partial X \times \partial X$ des couples de points distincts de ∂X, si l'on pose

$$m = \mu \times \mu / |\xi - \eta|_a^{2D}$$

(où $|\xi - \eta|_a$ est la distance visuelle entre les points ξ et η de ∂X).

Pour X hyperbolique au sens de Gromov et μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X, la construction précédente donne une mesure m Γ-*quasi-invariante* sur $\partial^2 X$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $C \geq 1$ tel que $C^{-1} m(A) \leq m(\gamma A) \leq C m(A)$ pour tout $A \subset \partial^2 X$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Je remercie Athanase Papadopoulos pour son aide et pour ses nombreuses suggestions.

1. Rappels et notations. On rappelle quelques définitions et résultats de **[Gro]**. (Pour ces résultats, le lecteur trouvera des détails de démonstrations dans **[CDP]** et dans **[GH]**.)

Soit X un espace métrique et x_0 un point base de X. On note $|x - y|$ la distance entre les points x et y de X et $|x|$ la distance de x au point base x_0. Le *produit de Gromov* des points x et y est $(x \cdot y) = (|x| + |y| - |x - y|)/2$. Etant donné un réel $\delta \geq 0$, on dit que X est δ-*hyperbolique* si

$$(1.1) \qquad (x \cdot y) \geq \min((x \cdot z), (y \cdot z)) - \delta$$

pour tous les $x, y, z \in X$ et pour tout choix du point base x_0.

L'espace X est dit *hyperbolique* s'il existe un $\delta \geq 0$ tel que X soit δ-hyperbolique.

Tout arbre (réel) est 0-hyperbolique. Toute variété riemannienne complète simplement connexe dont la courbure sectionnelle est partout majorée par une constant $-a^2 < 0$ est δ-hyperbolique pour $\delta = a^{-1} \log 3$. Un groupe de type fini G est dit *hyperbolique* si son graphe de Cayley, relativement à un système générateur fini S, est hyperbolique pour la métrique du mot (on montre que cette définition ne dépend pas du choix de S).

Une *géodésique* de X est une application g d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans X telle que $|g(t_1) - g(t_2)| = |t_1 - t_2|$ pour tous les $t_1, t_2 \in I$. Un *segment* (resp. *rayon*) *géodésique* est une géodésique $g: I \to \mathbb{R}$ avec $I = [a, b]$ (resp. $I = [0, \infty[$). On se permettra parfois d'identifier une géodésique à son image.

L'espace métrique X est dit *géodésique* si deux points de X peuvent toujours être reliés par un segment géodésique.

Si X est géodésique et δ-hyperbolique, on a (voir par exemple **[CDP]**, Ch. 3, Lemme 2.7):

$$\text{dist}(x_0, [x, y]) - 4\delta \leq (x \cdot y) \leq \text{dist}(x_0, [x, y]) \tag{1.2}$$

pour tout segment géodésique $[x, y] \subset X$.

Dans tout ce qui suit, X est un espace *métrique géodésique, complet, localement compact et δ-hyperbolique.* Rappelons que, dans un espace géodésique, complet et localement compact, toutes les boules fermées sont compactes.

Gromov attache à X son *bord hyperbolique* ∂X. La topologie de X s'étend de manière naturelle à $X \cup \partial X$. L'espace $X \cup \partial X$ est un compact dans lequel X est un ouvert dense. Deux points distincts de $X \cup \partial X$ peuvent toujours être reliés par une géodésique. Toute isométrie de X s'étend en un homéomorphisme de $X \cup \partial X$ de manière unique.

Gromov définit (**[Gro]**, 7.2; **[CDP]**, Chapitre 11) une classe de métriques sur ∂X de la manière suivante. Fixons un réel $a > 1$ et définissons la a-longueur d'un chemin continu dans X comme étant l'intégrale le long du chemin de la fonction $f(x) = a^{-|x|}$. Définissons la a-distance $|x - y|_a$ entre deux points x et y de X comme étant la borne inférieure des a-longueurs des chemins continus reliant x et y. On montre qu'il existe une constante $a_0 > 1$ (qui ne dépend que de δ) telle que pour $1 < a < a_0$ les propriétés suivantes soient vérifiées:

(P1) L'application identique de X s'étend en un homéomorphisme de $X \cup \partial X$ sur le complété de X pour la métrique $|\ |_a$. En particulier, la métriqe $|\ |_a$ définit une métrique sur ∂X.

(P2) Il existe une constante $\lambda \geq 1$ (qui ne dépend que de δ et a) telle que, ξ et η étant des points de ∂X,

$$\lambda^{-1} a^{-(x \cdot y)} \leq |\xi - \eta|_a \leq \lambda a^{-(x \cdot y)} \tag{1.3}$$

pour tous les $x, y \in X$ situés dans des voisinages convenables respectivement de ξ et de η.

Remarque. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$) et $\xi \in \partial X$, il y a un unique rayon géodésique r tel que $r(0) = x_0$ et $r(\infty) = \xi$. On peut prendre $a_0 = \infty$ et, si ξ et η sont deux points de ∂X, on a $|\xi - \eta|_a = (2/\operatorname{Log} a) a^{-|p|}$ où $p \in X$ est le point à partir duquel les deux rayons géodésiques d'origine x_0 et d'extrémités respectives ξ et η se séparent. On notera que $|\ |_a$ définit une distance ultramétrique sur le bord de l'arbre, c'est-à-dire vérifie $|\xi - \eta|_a \leq \max(|\xi - \upsilon|_a, |\upsilon - \eta|_a)$ pour tous les $\xi, \eta, \upsilon \in \partial X$.

Il résulte immédiatement de (1.3) que si l'on change de point base (a fixé) la nouvelle métrique est Lipschitz-équivalente à l'ancienne. (Deux métriques d et d' sont dites *Lipschitz-équivalentes* s'il existe une constante $L \geq 1$ telle que $L^{-1} d \leq d' \leq Ld$.) De même, si l'on fait varier a, la métrique obtenue est Hölder-équivalente à la métrique initiale. (Les métriques d et d' sont dites Hölder-équivalentes s'il existe des constantes $L \geq 1$ et $\alpha > 0$ telles que $L^{-1} d^\alpha \leq d' \leq L d^\alpha$.) En fait, pour $a, a' \in]1, a_0[$, on déduit de (1.3):

$$L^{-1} |\xi - \eta|_a^\alpha \leq |\xi - \eta|_{a'} \leq L |\xi - \eta|_a^\alpha$$

pour une certaine constant $L \geq 1$ et pour $\alpha = \operatorname{Log} a' / \operatorname{Log} a$.

Dans tout ce qui suit on se *fixe* $a \in]1, a_0[$.

Comme on l'a dit dans l'introduction, les démonstrations se feront tout d'abord dans les arbres ($\delta = 0$). On passera au cas général en utilisant le théorème de Gromov *d'approximation par les arbres*:

Théorème 1.1 (*Gromov*, **[Gro]** 6.1). *Soit $g_1, \ldots, g_n$ des géodésiques définies sur des intervalles du type $[0, T]$ ou $[0, \infty[$ et telles que $g_i(0) = x_0$ pour tout i. Posons $Z = \operatorname{Im} g_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Im} g_n$. Alors il existe un arbre réel pointé $(T, *)$ et une application $f: (Z, x_0) \to (T, *)$ tels que*:

(1) $|z - z'| - C \leq |f(z) - f(z')| \leq |z - z'|$ *pour tous les $z, z' \in Z$ et pour une certaine constante $C = C(\delta, n)$.*

(2) *la restriction de* f *à* $\operatorname{Im} g_i$ *préserve les distances pour tout* i.

(3) *Si les géodésiques* g_i *et* g_j *sont définies sur* $[0, \infty[$ *et si l'on pose* $\xi_i = g_i(\infty)$ *et* $\xi_j = g_j(\infty)$ *alors*

$$K^{-1}|\xi_i - \xi_j|_a \leq |f(\xi_i) - f(\xi_j)|_a \leq K|\xi_i - \xi_j|_a,$$

pour une certaine constante $K = K(\delta, n, a) \geq 1$.

En fait on peut prendre $C = 2(1 + \log_2 n)\delta$ (**[Gro]**, **[CDP]**, **[GH]**). On notera que (3) est une conséquence immédiate de (1) et de (1.3).

2. Fonctions de Busemann. Soit $\xi \in \partial X$ et r un rayon géodésique tel que $r(\infty) = \xi$. La *fonction de Busemann* associée au rayon géodésique r est la fonction $h: X \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \lim_{t \to \infty}(|x - r(t)| - t) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

(La limite existe et est finie d'après l'inégalité triangulaire. On a aussi $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$; en particulier h est continue.)

On utilisera les lemmes élémentaires suivants (cf. **[Gro]**, 7.5.D).

LEMME 2.1. *Soit* r *et* r' *des rayons géodésiques de même extrémité* $\xi \in \partial X$. *Soit* h *et* h' *les fonctions de Busemann associées respectivement à* r *et* r'. *Alors pour tous les* $x_1, x_2 \in X$:

$$|(h(x_1) - h(x_2)) - (h'(x_1) - h'(x_2))| \leq C$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* δ.

Démonstration. On peut prendre $C = 20\delta$. Pour le détail voir **[Coo]** (Proposition 6). La démonstration utilise le théorème d'approximation par les arbres. □

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$), la fonction $h - h'$ est constante sur X.

LEMME 2.2. *Soit* ξ *un point de* ∂X, r *un rayon géodésique d'extrémité* ξ *et* h *la fonction de Busemann associée à* r. *Soit* x_1, x_2 *des points de* X. *Alors il existe un voisinage* $V \subset X \cup \partial X$ *de* ξ *tel que pour tout* $y \in V \cap X$:

$$|(h(x_1) - h(x_2)) - (|y - x_1| - |y - x_2|)| \leq C,$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* δ.

Démonstration. Supposons tout d'abord $r(0) = x_1$. Prenons x_1 comme point base de X. Appliquons le théorème d'approximation

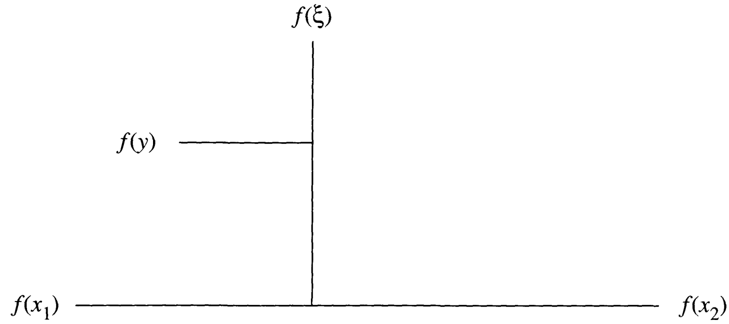


FIGURE 1

par les arbres (Th. 1.1) pour $n = 3$, $g_1 = r$, $g_2 =$ un segment géodésique $[x_1, x_2]$ et $g_3 =$ un segment géodésique $[x_1, y]$. On obtient, en posant $Z = \operatorname{Im} g_1 \cup \operatorname{Im} g_2 \cup \operatorname{Im} g_3$, un arbre réel pointé $(T, *)$ et une application $f: (Z, x_1) \to (T, *)$ qui préserve les distances le long des géodésiques g_1, g_2, g_3 et telle que

$$(2.1) \qquad |z - z'| - C_1 \leq |f(z) - f(z')| \leq |z - z'|.$$

pour tous les $z, z' \in Z$ et pour une certaine constante $C_1 = C_1(\delta)$.

Soit z un point sur le rayon géodésique r. En prenant y et z dans un voisinage convenable de ξ, on peut rendre arbitrairement grand le produit de Gromov $(y \cdot z)$, et donc aussi le produit $(f(y) \cdot f(z))$ d'après (2.1). Or, pour $(f(y) \cdot f(z))$ assez grand, $f(y)$ et $f(\xi)$ ont même projection sur le segment $[f(x_1), f(x_2)]$ (Fig. 1). Par conséquent, il existe un voisinage V de ξ tel que pour $y \in V$ les points $f(y)$ et $f(\xi)$ ont même projection sur $[f(x_1), f(x_2)]$, ce qui implique

$$h_T(f(x_1)) - h_T(f(x_2)) = |f(y) - f(x_1)| - |f(y) - f(x_2)|,$$

où l'on a noté h_T la fonction de Busemann associée au rayon géodésique image de r par f.

Or $h_T(f(x_1)) = h(x_1) = 0$. D'autre part, d'après (2.1), $h_T(f(x_2))$ est égal à $h(x_2)$ à moins de C_1 près; de même, $|f(y) - f(x_i)|$ est égal à $|y - x_i|$ $(i = 1, 2)$ à moins de C_1 près. On a donc l'inégalité cherchée avec $C = 3C_1$, quand $r(0) = x_1$, et avec $C = 3C_1 + C_2$, où $C_2 = C_2(\delta)$ est la constante donnée par le Lemme 2.1, dans le cas général. □

LEMME 2.3. *Soit $\xi \in \partial X$ et h la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique r d'extrémité ξ. Il existe un voisinage $V \subset \partial X$*

de ξ tel que pour tout rayon géodésique r' d'extrémité $\xi' \in V$:

$$|(h(x_1) - h(x_2)) - (h'(x_1) - h'(x_2))| \leq C,$$

où h' est la fonction de Busemann associée à r' et où C est une constante qui ne dépend que de δ.

Démonstration. D'après le Lemme 2.1 on peut supposer $r(0) = r'(0) = x_1$. On applique de nouveau le théorème d'approximation par les arbres en prenant x_1 comme point base, $n = 3$, $g_1 =$ un segment géodésique $[x_1, x_2]$, $g_2 = r$ et $g_3 = r'$. D'où un arbre réel pointé $(T, *)$ et une application $f: (Z, x_1) \to (T, *)$, pour $Z = \operatorname{Im} g_1 \cup \operatorname{Im} g_2 \cup \operatorname{Im} g_3$, préservant les distances le long des g_i et vérifiant (2.1). Pour ξ' suffisament proche de ξ, les points $f(\xi')$ et $f(\xi)$ se projettent sur le même point du segment géodésique $[f(x_1), f(x_2)]$. Les fonctions de Busemann associées respectivement aux rayons géodésiques $f(r)$ et $f(r')$ prennent donc les mêmes valeurs en $f(x_1)$ et en $f(x_2)$. D'où, en utilisant (2.1), l'inégalité cherchée pour une constante $C = C(\delta)$. □

3. Dilatation au bord d'une isométrie. Soit γ une isométrie de X. Notons

$$\operatorname{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) = |\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|_a / |\eta_1 - \eta_2|_a$$

la dilatation de γ en un couple (η_1, η_2) de points distincts de ∂X.

Soit ξ un point de ∂X. Choisissons arbitrairement un rayon géodésique r d'extrémité ξ et soit h la fonction de Busemann associée à r. Posons

$$j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)} \quad \text{où } \Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0).$$

PROPOSITION 3.1. *Il existe une constante $C \geq 1$ (qui ne dépend que de δ et de a) et un voisinage V de ξ dans ∂X tels que*

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) \leq \operatorname{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) \leq C j_\gamma(\xi)$$

pour tous les points η_1, η_2 distincts de V.

Démonstration. On sait (propriété (P2) du §1) qu'il existe une constante $\lambda = \lambda(\delta, a) \geq 1$ telle que

$$\lambda^{-1} a^{-p} \leq |\eta_1 - \eta_2|_a \leq \lambda a^{-p} \quad \text{et}$$
$$\lambda^{-1} a^{-q} \leq |\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|_a \leq \lambda a^{-q}$$

où l'on a posé $p = (x_1 \cdot x_2)$, $q = (\gamma x_1 \cdot \gamma x_2)$, et où x_1 et x_2 sont des points de X suffisamment proches respectivement de η_1 et de η_2. On a donc

$$\lambda^{-2} a^{p-q} \leq \mathrm{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) \leq \lambda^2 a^{p-q}. \tag{3.1}$$

Si l'on pose $d(x) = |x| - |\gamma x| = |x - x_0| - |x - \gamma^{-1} x_0|$, on a

$$\begin{aligned} p - q &= (|x_1| + |x_2| - |\gamma x_1| - |\gamma x_2|)/2 \\ &= (d(x_1) + d(x_2))/2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

D'après le Lemme 2.2, on peut trouver une constante $C' = C'(\delta)$ et un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tels que pour $\eta_i \in V$ et pour $x_i \in X$ assez proche de η_i, on ait

$$|\Delta(\xi) - d(x_i)| \leq C' \qquad (i = 1, 2). \tag{3.3}$$

En utilisant (3.1), (3.2) et (3.3) il vient pour $\eta_i \in V$:

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) \leq \mathrm{dil}_\gamma(\eta_1, \eta_2) \leq C j_\gamma(\xi)$$

pour $C = \lambda^2 a^{C'}$. □

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$), $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1} x_0)$ ne dépend pas du choix du rayon géodésique r d'extrémité ξ servant à définir la fonction de Busemann h. On notera aussi que $\Delta(\xi)$ (et donc $j_\gamma(\xi)$) est alors une fonction localement constante, et donc continue, de ξ. En fait si ξ est un point du bord de l'arbre, on a $\Delta(\xi) = |p - x_0| - |p - \gamma^{-1} x_0| = |p| - |\gamma p|$, p étant la projection de ξ sur $[x_0, \gamma^{-1} x_0]$.

4. Mesures Γ-quasi-conformes. Toutes les mesures considérées sont *boréliennes et régulières.* (Rappelons (voir [F], Ch. 2) qu'une *mesure* sur un ensemble E est une application μ de l'ensemble des parties de E dans $[0, \infty]$ qui vérifie, pour tout $A \subset E$ et pour toute famille dénombrable (A_i) de parties de E telle que $A \subset \bigcup A_i$, $\mu(A) \leq \sum \mu(A_i)$. Si E est un espace métrique, la mesure μ est dite *borélienne* si tout borélien $B \subset E$ est μ-mesurable, c'est-à-dire vérifie $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap (E - B))$ pour tout $A \subset E$. La mesure borélienne μ est dite *régulière* si, pour tout $A \subset E$, $\mu(A)$ est la borne inférieure des $\mu(B)$ pour B borélien tel que $A \subset B$.)

Soit γ une isométrie de X. Etant donné une mesure μ sur ∂X, on notera $\gamma^* \mu$ la mesure définie par $\gamma^* \mu(A) - \mu(\gamma A)$ pour tout $A \subset \partial X$. Rappelons aussi que la mesure μ' est *absolument continue* par rapport à la mesure μ si $\mu(A) = 0$ implique $\mu'(A) = 0$. La dérivée de Radon-Nikodym $d\mu'/d\mu \in L^1(\mu)$ est alors définie par $\mu'(f) = \mu(f\, d\mu'/d\mu)$ pour tout $f \in L^1(\mu')$.

Choisissons pour tout $\xi \in \partial X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. Cela permet de définir (§3) une application $j_\gamma\colon \partial X \to]0, \infty[$ par $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$ où $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$ et où h est la fonction de Busemann associée au rayon géodésique d'extrémité ξ que l'on a choisi.

Soit Γ un groupe d'isométries de X.

DÉFINITION 4.1. Soit D un réel ≥ 0 et μ une mesure sur ∂X de masse totale finie et non nulle. La mesure μ est dite *Γ-quasi-conforme de dimension D* si les mesures $\gamma^*\mu$ $(\gamma \in \Gamma)$ sont absolument continues les unes par rapport aux autres et s'il existe un réel $C \geq 1$ tel que

$$C^{-1} j_\gamma^D \leq d(\gamma^*\mu)/d\mu \leq C j_\gamma^D \qquad (\mu\text{-presque-partout})$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Cette définition ne dépend pas, d'après le Lemme 2.1, des choix de rayons géodésiques à faire pour définir la fonction j_γ. La caractérisation suivante des mesures Γ-quasi-conformes résulte immédiatement du Lemme 2.3.

PROPOSITION 4.2. *Soit μ une mesure sur ∂X de masse totale finie et non nulle. La mesure μ est Γ-quasi-conforme de dimension D si et seulement si il existe un réel $C \geq 1$ tel que, pour tout point $\xi \in \partial X$ et pour tout rayon géodésique r d'extrémité ξ, on puisse trouver un voisinage V de ξ dans ∂X tel que*

$$C^{-1} j_\gamma(\xi)^D \mu(A) \leq \mu(\gamma A) \leq C j_\gamma(\xi)^D \mu(A)$$

pour tout $A \subset V$, où $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$ avec $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$ (h étant la fonction de Busemann associée au rayon r).

Rappelons la définition de la D-mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^D$ sur un espace métrique $(E, |\ |)$. Notons $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ le *diamètre* de $U \subset E$. Soit $A \subset E$. Etant donné un réel $\varepsilon \geq 0$, on dit qu'une famille (U_i) de parties de E est un ε-recouvrement de A si $A \subset \bigcup U_i$ et si $|U_i| \leq \varepsilon$ pour tout i. On pose

$$\mathscr{H}_\varepsilon^D(A) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^D : (U_i) \text{ est un } \varepsilon\text{-recouvrement de } A\right\}$$

et

$$\mathscr{H}^D(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{H}_\varepsilon^D(A).$$

L'application $\mathscr{H}^D$ ainsi définie est une mesure borélienne et régulière sur E ([**F**], 2.10).

PROPOSITION 4.3. *Soit $E \subset \partial X$ un borélien Γ-invariant dont la D-mesure de Hausdorff est de masse totale finie et non nulle. Alors la D-mesure de Hausdorff sur E définit une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X.*

Démonstration. Si $\xi \in \partial X$, on peut trouver, d'après la Proposition 3.1, un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tel que $C^{-1} j_\gamma(\xi)|U|_a \leq |\gamma U|_a \leq C j_\gamma(\xi)|U|_a$ (où C est une constante ≥ 1) pour tout $U \subset V$. □

5. Existence d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$. Rappelons que Γ agit de manière *proprement discontinue* sur X si, pour tout compact $K \subset X$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments γ de Γ tels que γK rencontre K. Soit Λ l'ensemble limite de Γ, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation dans ∂X d'une orbite (quelconque) $Y \subset X$ de Γ. L'ensemble limite est un compact Γ-invariant. Le groupe Γ est dit *élémentaire* si $\mathrm{card}(\Lambda) \leq 2$.

Dans tout ce qui suit, Γ est un groupe *non élémentaire* d'isométries de X agissant de manière proprement discontinue sur X.

On aura besoin de l'énoncé suivant:

THÉORÈME 5.1 (*Gromov*). *Λ est l'unique ensemble minimal de l'action de Γ sur ∂X.*

Démonstration (esquisse). On doit montrer que tout fermé Γ-invariant non vide $A \subset \partial X$ contient Λ. Si $\mathrm{card}(A) \geq 2$ cela se montre ([**Gro**], 8.2.A) en considérant *l'enveloppe de Gromov* $Q(A) \subset X$ de A, c'est-à-dire la réunion des (images des) géodésiques $g\colon \mathbb{R} \to X$ dont les extrémités $g(-\infty)$ et $g(\infty)$ sont dans A. (On notera que le fait que Γ agisse de manière proprement discontinue sur X n'est pas utilisé jusqu'à présent.) Supposons maintenant que Γ fixe un point ξ de ∂X (i.e. Γ quasi-parabolique suivant la terminologie de [**Gro**]). On sait qu'il existe alors un élément γ de Γ de type hyperbolique et de point fixe attractif $\gamma^+ = \xi$ ([**Gro**], 8.1). Considérons un élément quelconque $\gamma' \in \Gamma$ et un point $x \in X$. La suite $\gamma^n x$ ($n \geq 0$) est une quasi-géodésique tendant vers ξ. Il en est de même de la suite $\gamma' \gamma^n x$, puisque γ' est une isométrie fixant ξ. D'après le théorème de stabilité des quasi-géodésiques ([**Gro**], 7.2; [**CDP**], Ch. 3; [**GH**], Ch. 5), il existe un réel C et une suite $\alpha(n)$ tels que $|\gamma' \gamma^n x - \gamma^{\alpha(n)} x| \leq C$. Puisque $|\gamma' \gamma^n x - \gamma^{\alpha(n)} x| = |\gamma^{-\alpha(n)} \gamma' \gamma^n x - x|$ et que le groupe Γ agit de manière proprement discontinue sur X, il existe deux entiers distincts n et m tels que $\gamma^{-\alpha(n)} \gamma' \gamma^n = \gamma^{-\alpha(m)} \gamma' \gamma^m$. Cela donne $\gamma' \gamma^{n-m} \gamma'^{-1} = \gamma^{\alpha(n)-\alpha(m)}$. On a donc, et notant $\mathrm{Fix}(\gamma) \subset$

∂X l'ensemble des points fixes de γ, $\gamma'\mathrm{Fix}(\gamma) = \mathrm{Fix}(\gamma^{\alpha(n)-\alpha(m)})$. D'où $\gamma'\mathrm{Fix}(\gamma) = \mathrm{Fix}(\gamma)$ puisque $\mathrm{Fix}(\gamma^{\alpha(n)-\alpha(m)}) \subset \mathrm{Fix}(\gamma)$. Cela montre que γ' fixe aussi le point fixe répulsif γ^- de γ. On en déduit $\Lambda \subset \{\gamma^+, \gamma^-\}$, puisque l'on a vu que tout fermé Γ-invariant de cardinal ≥ 2 doit contenir Λ. Mais cela imposerait à Γ d'être élémentaire. □

COROLLAIRE 5.2. *Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme sur ∂X telle que* $\mathrm{support}(\mu) \subset \Lambda$, *alors* $\mathrm{support}(\mu) = \Lambda$.

Démonstration. La Γ-quasi-conformité de μ montre que $\mathrm{support}(\mu)$ est Γ-invariant. □

On va montrer l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme sur Λ de dimension $e_a(\Gamma)$. Introduisons tout d'abord quelques notations.

Soit Y une orbite de Γ dans X. Pour $R \geq 0$, notons $n_Y(R)$ le nombre de points de l'orbite Y situés à une distance $\leq R$ du point base x_0. *L'exposant critique de base* a de Γ est

$$e_a(\Gamma) = \limsup_{R\to\infty} 1/R \log_a n_Y(R)$$

($\log_a$ désigne le logarithme de base a). On a donc $e_a(\Gamma) = e(\Gamma)/\mathrm{Log}\, a$ en notant $e(\Gamma)$ l'exposant critique de base e de Γ. L'inégalité triangulaire montre que $e_a(\Gamma)$ ne dépend ni du point base x_0 ni de l'orbite $Y \subset X$. Si $y \in Y$ et si $N_y(R)$ est le nombre de $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\gamma y| \leq R$, on a

$$N_y(R) = \mathrm{card}(\Gamma_y) n_Y(R)$$

où $\Gamma_y \subset \Gamma$ est le stabilisateur de y. D'où aussi

$$e_a(\Gamma) = \limsup_{R\to\infty} 1/R \log_a N_y(R).$$

REMARQUE. Soit G un groupe hyperbolique et S un système générateur fini de G avec $\mathrm{card}(S) = n$. Soit X le graphe de Cayley de G relativement à S. Si Γ est un sous-groupe de G, le groupe Γ agit, par translation à gauche, de manière isométrique et proprement discontinue sur X. Notons que $e_a(\Gamma) \leq \log_a(2n-1)$. Si G est le groupe libre de base S et si $\Gamma = G$, on a $e_a(\Gamma) = \log_a(2n-1)$.

La *fonction de croissance* de l'orbite Y (relativement au point base x_0) est la série formelle

$$f_Y(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} n_k t^k$$

où $n_k = n_Y(k)$ est le nombre de points de Y situés à une distance $\leq k$ de x_0. Notons que si ρ est le rayon de convergence de $f_Y(t)$, on a $\log_a \rho = -e_a(\Gamma)$.

Considérons maintenant pour $s \geq 0$ la *série de Poincaré*

$$g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}.$$

Soit $d_k = n_k - n_{k-1}$ le nombre de points de Y à une distance $\in]k-1, k]$ de x_0. La série $g_Y(s)$ est de même nature que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} d_k a^{-sk} \tag{5.1}$$

(puisque le rapport des deux séries reste entre deux constantes strictement positives). La série (5.1) est de même nature que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} n_k a^{-sk} = f_Y(a^{-s}) \tag{5.2}$$

(puisque $n_k = d_0 + d_1 + \cdots + d_k$). Par conséquent, on a la

PROPOSITION 5.3. *La série de Poincaré* $g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}$ *converge pour* $s > e_a(\Gamma)$ *et diverge pour* $s < e_a(\Gamma)$.

On montre maintenant, en suivant la construction de Patterson-Sullivan, l'existence d'une mesure de probabilité Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ supporté par Λ (pour Γ d'exposant critique fini).

THÉORÈME 5.4. *Si* $e_a(\Gamma)$ *est fini, alors il existe une mesure* Γ*-quasi-conforme de dimension* $e_a(\Gamma)$ *dont le support est l'ensemble limite* Λ *de* Γ.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $g_Y(s)$ diverge en $s = e_a(\Gamma)$. Pour $s > e_a(\Gamma)$ considérons la mesure de probabilité définie sur X par

$$\mu_s = \frac{1}{g_Y(s)} \sum_{y \in Y} a^{-s|y|} \operatorname{dirac}(y)$$

où dirac(y) *est* la mesure de Dirac au point y.

L'espace $X \cup \partial X$ étant compact, on peut trouver une suite $s(i) > e_a(\Gamma)$ qui tend vers $e_a(\Gamma)$ et telle que $\mu_{s(i)}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ sur $X \cup \partial X$.

On a support(μ) $\subset \Lambda$. En effet, soit une fonction continue $f: X \cup \partial X \to \mathbb{R}$ dont le support ne rencontre pas Λ. Il n'y a donc qu'un nombre fini de points de l'orbite Y dans support(f). D'autre part, d'après l'hypothèse de divergence faite en début de démonstration, $g_Y(s(i)) \to \infty$. D'où $\mu(f) = \lim \mu_{(i)}(f) = 0$.

Montrons maintenant que μ est Γ-quasi-conforme de dimension $D = e_a(\Gamma)$. Soit $\xi \in \partial X$, h la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique d'extrémité ξ, et $\gamma \in \Gamma$. Posons $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$ et $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$. D'après le Lemme 2.2, il existe un voisinage $V \subset X \cup \partial X$ de ξ et une constante $C = C(\delta) \geq 1$ telle que:

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) \leq a^{|x|-|\gamma x|} \leq C j_\gamma(\xi) \text{ pour tout } x \in V \cap X. \tag{5.3}$$

Prenons $f: X \cup \partial X \to \mathbb{R}$ continue de support $\subset V$. On a

$$\mu_s(f) = (1/g_Y(s)) \sum_{y \in V \cap Y} a^{-s|y|} f(y) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \gamma^* \mu_s(f) &= \mu_s(f \circ \gamma^{-1}) \\ &= (1/g_Y(s)) \sum_{\gamma^{-1} y \in V \cap Y} a^{-s|y|} f(\gamma^{-1} y) \\ &= (1/g_Y(s)) \sum_{y \in V \cap Y} a^{-s|\gamma y|} f(y) \\ &= (1/g_Y(s)) \sum_{y \in V \cap Y} a^{s(|y|-|\gamma y|)} a^{-s|y|} f(y), \end{aligned}$$

d'où en utilisant (5.3):

$$C^{-s} j_\gamma(\xi)^s \mu_s(f) \leq \gamma^* \mu_s(f) \leq C^s j_\gamma(\xi)^s \mu_s(f)$$

qui montre, en passant à la limite pour $s = s(i)$, que la mesure μ est Γ-quasi-conforme de dimension $D = e_a(\Gamma)$.

Le Corollaire 5.2 donne alors support$(\mu) = \Lambda$ ce qui termine la démonstration du Théorème 5.4 dans le cas où la série de Poincaré $g_Y(s)$ diverge en $s = e_a(\Gamma)$.

Supposons maintenant que la série $g_Y(s)$ converge en $e_a(\Gamma)$. On modifie alors la construction précédente de la manière suivante. D'après un lemme de Patterson (**[Pat-1]**, Lemme 3.1), portant sur les séries de Dirichlet qui convergent en leur exposant critique, il existe une fonction croissante $H: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que:

(1) La série $g_{H,Y}(s) = \sum_{y \in Y} H(a^{|y|}) a^{-s|y|}$ diverge pour $s = e_a(\Gamma)$ et converge pour $s > e_a(\Gamma)$.

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\beta_0 \geq 0$ tel que $H(\alpha\beta) \leq \alpha^\varepsilon \beta$ pour tout $\alpha \geq 1$ et pour tout $\beta \geq \beta_0$.

On remplace alors μ_s par

$$\mu_{H,s} = \frac{1}{g_{H,Y}(s)} \sum_{y \in Y} H(a^{|y|}) a^{-s|y|} \mathrm{dirac}(y).$$

Les $\mu_{H,s}$ sont des mesures de probabilité sur X pour $s > e_a(\Gamma)$. On peut donc trouver une suite $s(i) > e_a(\Gamma)$ qui converge vers $e_a(\Gamma)$ et telle que la suite $\mu_{H,s(i)}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ sur $X \cup \partial X$. Le fait que support$(\mu) \subset \Lambda$ se démontre comme plus haut.

Montrons la Γ-quasi-conformité de μ. Soit $\varepsilon > 0$ et β_0 donné par la propriété (2) de la fonction H. Prenons un point $\xi \in \partial X$ et un voisinage $V \subset X \cup \partial X$ de ξ tel que tout point $x \in V \cap X$ vérifie (5.3), $a^{|x|} \geq \beta_0$ et $a^{|\gamma x|} \geq \beta_0$. On a cette fois pour toute fonction continue $f: X \cup \partial X \to \mathbb{R}$ dont le support est inclus dans V:

$$\mu_{H,s}(f) = (1/g_{H,Y}(s)) \sum_{y \in V \cap Y} H(a^{|y|}) a^{-s|y|} f(y),$$

$$\begin{aligned} \gamma^* \mu_{H,s}(f) &= \mu_{H,s}(f \circ \gamma^{-1}) \\ &= (1/g_{H,Y}(s)) \sum_{\gamma^{-1} y \in V \cap Y} H(a^{|y|}) a^{-s|y|} f(\gamma^{-1} y), \end{aligned}$$

i.e.

$$\gamma^* \mu_{H,s}(f) = (1/g_{H,Y}(s)) \sum_{y \in V \cap Y} H(a^{|\gamma y|}) a^{-s|\gamma y|} f(y). \tag{5.4}$$

Soit y un point de $Y \cap V$. On a, comme plus haut, d'après (5.3),

$$C^{-1} j_\gamma(\xi) a^{-|y|} \leq a^{-|\gamma y|} \leq C j_\gamma(\xi) a^{-|y|}. \tag{5.5}$$

Si $|\gamma y| \leq |y|$, alors $H(a^{|\gamma y|}) \leq H(a^{|y|})$, puisque la fonction H est croissante. Si $|\gamma y| > |y|$, on a

$$\begin{aligned} H(a^{|\gamma y|}) &= H(a^{|\gamma y| - |y|} a^{|y|}) \\ &\leq a^{\varepsilon(|\gamma y| - |y|)} H(a^{|y|}) \quad \text{(d'après la propriété (2) de } H\text{)}, \\ &\leq C^\varepsilon j_\gamma(\xi)^{-\varepsilon} H(a^{|y|}) \quad \text{(d'après (5.3))}. \end{aligned}$$

On a donc pour tout $y \in V \cap Y$,

$$H(a^{|\gamma y|}) \leq \max(1, C^\varepsilon j_\gamma(\xi)^{-\varepsilon}) H(a^{|y|}). \tag{5.6}$$

De même, $H(a^{|y|}) \leq H(a^{|\gamma y|})$ si $|y| \leq |\gamma y|$. Si $|y| > |\gamma y|$, on a

$$\begin{aligned} H(a^{|y|}) = H(a^{|y| - |\gamma y|} a^{|\gamma y|}) &\leq a^{\varepsilon(|y| - |\gamma y|)} H(a^{|\gamma y|}) \\ &\leq C^\varepsilon J_\gamma(\xi)^\varepsilon H(a^{|\gamma y|}). \end{aligned}$$

On a donc pour tout $y \in V \cap Y$,

(5.7) $$H(a^{|y|}) \leq \max(1, C^{\varepsilon} j_{\gamma}(\xi)^{\varepsilon}) H(a^{|\gamma y|}).$$

Si l'on pose

$$m(\varepsilon) = \min(1, C^{-\varepsilon} j_{\gamma}(\xi)^{-\varepsilon}) \quad \text{et} \quad M(\varepsilon) = \max(1, C^{\varepsilon} j_{\gamma}(\xi)^{-\varepsilon}),$$

les inégalités (5.6) et (5.7) donnent l'encadrement:

(5.8) $$m(\varepsilon) H(a^{|y|}) \leq H(a^{|\gamma y|}) \leq M(\varepsilon) H(a^{|y|}),$$

pour tout $y \in Y \cap V$.

En appliquant (5.5) et (5.8) à (5.4), il vient

$$m(\varepsilon) C^{-s} j_{\gamma}(\xi)^{s} \mu_s(f) \leq \gamma^* \mu_s(f) \leq M(\varepsilon) C^{s} j_{\gamma}(\xi)^{s} \mu_s(f),$$

qui montre en faisant tendre $s = s(i)$ vers $e_a(\Gamma)$ et en faisant tendre ensuite ε vers 0 que la mesure μ est Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$. On montre enfin $\text{support}(\mu) = \Lambda$ comme plus haut. □

COROLLAIRE 5.5. *L'exposant critique $e_a(\Gamma)$ est strictement positif.*

Démonstration. Supposons $e_a(\Gamma) = 0$. Soit $\gamma \in \Gamma$ de type hyperbolique ([**Gro**], 8.2) et γ^+ le point attractif de γ. Quitte à remplacer γ par un de ses itérés, on peut supposer que γ est $1/2$-Lipschitz sur un voisinage V de γ^+ ([**Gro**], 8.1.G). La Γ-quasi-conformité de dimension $D = 0$ de la mesure μ, construite dans le théorème précédent, donne une constante $C \geq 1$ telle que $d(\gamma'^* \mu)/d\mu \geq C^{-1}$ pour tout $\gamma' \in \Gamma$. On a donc $\mu(\gamma^n V) \geq C^{-1} \mu(V)$ pour tout entier $n \geq 0$. On en déduit que γ^+ est de masse $\geq C^{-1} \mu(V)$. Il en résulte que tout point de l'orbite de γ^+ est de masse $\geq C^{-2} \mu(V)$. Or cette orbite est infinie. D'autre part $\mu(V)$ est strictement positif puisque $\gamma^+ \in \Lambda = \text{support}(\mu)$. Cela imposerait une masse infinie à Λ, d'où une contradiction. □

6. Le lemme de l'ombre de Sullivan. Pour $x \in X$ et $d \geq 0$, on notera $O(x, d)$ *l'ombre* sur ∂X de la boule centrée en x et de rayon d, c'est-à-dire l'ensemble des $\xi \in \partial X$ tels que tout rayon géodésique d'origine x_0 et d'extrémité ξ passe à une distance $\leq d$ de x.

REMARQUE. Si X est un arbre (i.e. $\delta = 0$), $O(x, d)$ est la boule fermée $\subset \partial X$ de centre ξ et de rayon $r = (2/\log a) a^{d-|x|}$ pour tout $\xi \in O(x, d)$.

La proposition suivante est une généralisation du *lemme de l'ombre* de Sullivan ([**Sul-1**], §2).

PROPOSITION 6.1. *Soit μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X. Alors il existe des constantes $C \geq 1$ et $d_0 \geq 0$ telles que, pour tout $d \geq d_0$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

$$C^{-1} r^D \leq \mu(O(x, d)) \leq C r^D a^{2Dd},$$

où l'on a posé $x = \gamma^{-1} x_0$ et $r = a^{-|x|}$.

Les deux lemmes qui vont suivre nous seront utiles dans la démonstration de la Proposition 6.1.

(Rappelons les notations du §3. Soit r un rayon géodésique d'extrémité $\xi \in \partial X$ et h la fonction de Busemann associée à r. Etant donné une isométrie γ de X, on a posé $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$ avec $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1} x_0)$.)

LEMME 6.2. *Il existe une constante $C = C(\delta, a) \geq 1$ telle que, si l'on pose $x = \gamma^{-1} x_0$,*

$$C^{-1} a^{|x|-2d} \leq j_\gamma(\xi) \leq C a^{|x|}$$

pour tout $\xi \in O(x, d)$ et pour tout rayon géodésique r d'extrémité ξ.

Démonstration. Si X est un arbre, on a vu que $\Delta(\xi) = |p| - |p-x|$ où p est la projection de ξ sur le segment $[x_0, x]$. Pour $\xi \in O(x, d)$, on a $|p-x| \leq d$ et donc $|x| - 2d \leq \Delta(\xi) \leq |x|$. D'où l'inégalité du lemme, avec $C = 1$, dans les arbres. Ici encore, on passe facilement au cas général en utilisant le théorème d'approximation par les arbres. □

LEMME 6.3. *Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $d_0 \geq 0$ tel que, pour tout $d \geq d_0$, le complémentaire de l'image de $O(\gamma^{-1} x_0, d)$ par γ soit de diamètre $\leq \varepsilon$ pour toute isométrie γ de X.*

Démonstration. Soit ξ et η des points de $\partial X - \gamma O(\gamma^{-1} x_0, d)$. Il existe donc des rayons géodésiques $[\gamma x_0, \xi[$ et $[\gamma x_0, \eta[$, issus de γx_0 et allant respectivement vers ξ et η, qui ne recontrent pas la boule centrée en x_0 et de rayon d. Pour $u \in [\gamma x_0, \xi[$ proche de ξ et $v \in [\gamma x_0, \eta[$ proche de η, on a, d'après la propriété (P2) du §1,

$$|\xi - \eta|_a \leq K a^{-(u \cdot v)},$$

pour une certaine constante $K = K(\delta, a)$ En utilisant la δ-hyperbolicité de X, il vient:

$$\begin{aligned}(u \cdot v) &\geq \min((u \cdot \gamma x_0), (v \cdot \gamma x_0)) - \delta \qquad \text{(d'après (1.1))} \\ &\geq d - 5\delta \qquad \text{(d'après (1.2)).}\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$|\xi - \eta|_a \leq K a^{5\delta} a^{-d} \quad \text{qui permet de conclure.} \qquad \square$$

Démonstration de la Proposition 6.1. La mesure μ n'est pas réduite à un atome d'après la Γ-quasi-conformité de μ et le fait que Γ ne fixe aucun point de ∂X. Par conséquent, la masse totale M de μ est strictement plus grande que la borne supérieure m_0 des $\mu(\{\xi\})$ $(\xi \in \partial X)$. Fixons un réel m tel que $m_0 < m < M$. D'après la définition de m_0 et la compacité de ∂X, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que toute partie de ∂X de diamètre $\leq \varepsilon$ soit de mesure $\leq m$. Il existe donc, d'après le Lemme 6.3, une constante d_0 indépendante de γ telle que la mesure de $\gamma(\partial X - O(x, d))$ soit $\leq m$ pour tout $d \geq d_0$. On aura pour un tel d :

$$M - m \leq \mu(\gamma O(x, d)) \leq M. \tag{6.1}$$

Choisissons pour chaque point $\xi \in \partial X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. Cela permet de définir j_γ sur ∂X. D'après le Lemme 6.2, on a pour tout $\xi \in O(x, d)$:

$$C_1^{-1} a^{|x|-2d} \leq j_\gamma(\xi) \leq C_1 a^{|x|} \tag{6.2}$$

pour une certaine constante $C_1 = C_1(\delta, a) \geq 1$. La mesure μ étant Γ-quasi-conforme de dimension D on a en utilisant (6.2):

$$C_1^{-1} a^{-D|x|} \leq \mu(O(x, d))/\mu(\gamma O(x, d)) \leq C_1 a^{-D|x|} a^{2Dd}. \tag{6.3}$$

On obtient l'encadrement voulu en multipliant (6.1) et (6.3) membre à membre. $\square$

L'énoncé suivant montre que l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme impose une certaine majoration de la croissance des orbites de Γ dans X.

PROPOSITION 6.4. *Soit μ une mesure Γ-quasi conforme de dimension D sur ∂X et $Y \subset X$ une orbite de Γ. Soit $n_Y(R)$ le nombre de points de Y situés à une distance $\leq R$ du point base. Alors il existe un réel C tel que $n_Y(R) \leq C a^{DR}$ pour tout R.*

Dans la démonstration de la Proposition 6.4 on utilisera le lemme suivant.

LEMME 6.5. *Soit d un réel ≥ 0. Il existe un entier N tel que, pour tout $\xi \in \partial X$ et pour tout entier k, le nombre de $y \in Y$ tels que $\xi \in O(y, d)$ et $|y| \in]k-1, k]$ soit $\leq N$.*

Démonstration du Lemme 6.5. Soit y et y' des points de Y tels que $\xi \in O(y, d) \cap O(y', d)$ et tels que $|y|, |y'| \in]k-1, k]$. Montrons que $|y - y'| \leq 4d + 1$. Choisissons un rayon géodésique $[x_0, \xi[$ allant de x_0 à ξ. Par définition de $O(y, d)$, il existe un point p sur $[x_0, \xi[$ tel que $|y-p| \leq d$. L'inégalité triangulaire donne $|y|-|y-p| \leq |p| \leq |y|+|y-p|$. On a donc $|p| \in]k-1-d, k+d]$. De même on pourra trouver un point p' sur $[x_0, \xi[$ tel que $|y'-p'| \leq d$ et $|p'| \in]k-1-d, k+d]$. Les points p et p' étant situés sur un même rayon géodésique issu de x_0, on en déduit $|p - p'| \leq (k + d) - (k - 1 - d) = 2d + 1$. D'où $|y - y'| \leq |y - p| + |p - p'| + |p' - y'| \leq 4d + 1$.

Mais, puisque le groupe Γ agit de manière proprement discontinue sur X, la boule fermée de centre y et de rayon $4d + 1$ ne contient qu'un nombre fini N (indépendant de $y \in Y$) de points de Y. □

Démonstration de la Proposition 6.4. Soit E_k l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\gamma^{-1}x_0| \in]k-1, k]$ et $\nu_k = \mathrm{card}(E_k)$. D'après la Proposition 6.1, on peut trouver des réels $C_1 \geq 1$ et $d \geq 0$ tels que pour tout k et pour tout $\gamma \in E_k$:

$$a^{-Dk} \leq C_1\mu(O(\gamma^{-1}x_0, d)). \tag{6.4}$$

On a d'autre part,

$$\sum_{\gamma \in E_k} \mu(O(\gamma^{-1}x_0, d)) \leq C_2\mu\left(\bigcup_{\gamma \in E_k} O(\gamma^{-1}x_0, d)\right), \tag{6.5}$$

puisque, d'après le Lemme 6.5, le nombre de $\gamma \in E_k$ tels que $\xi \in O(\gamma^{-1}x_0, d)$ est majoré par une constante ne dépendant ni de $\xi \in \partial X$ ni de k. De (6.4) et (6.5) on déduit

$$\nu_k \leq C_1C_2\mu(\partial X)a^{Dk} = C_3a^{Dk},$$

D'où, en notant N_k le nombre de $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\gamma x_0| \leq k$, $N_k = \varphi_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_k \leq C_4a^{Dk}$ et donc $n_Y(R) \leq C_5a^{DR}$. □

Par définition, $e_a(\Gamma) = \limsup 1/R \log_a n_Y(R)$. On a donc le

Corollaire 6.6. *Toute mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X doit vérifier $D \geq e_a(\Gamma)$.*

Le corollaire précédent et la Proposition 4.3 donnent le

Corollaire 6.7. *S'il existe un borélien Γ-invariant $B \subset \partial X$ et un réel $D \geq 0$ tel que la D-mesure de Hausdorff de B soit de masse totale* *finie et non nulle, alors* $D \geq e_a(\Gamma)$ *(en particulier* Γ *est d'exposant critique fini).*

D'après le Théorème 5.4, il existe, pour Γ d'exposant critique fini, une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma) = e(\Gamma)/\mathrm{Log}(a)$. On a donc le

COROLLAIRE 6.8. *Il existe un réel* C *tel que* $n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R)$ *pour tout* R.

7. Groupes quasi-convexes-cocompacts. Soit toujours Γ un groupe non élémentaire d'isométries de X d'ensemble limite Λ. Notons $Q(\Lambda)$ *l'enveloppe de Gromov* de Λ, c'est-à-dire *la* réunion des (images des) géodésiques $g: \mathbb{R} \to X$ dont les extrémités $g(-\infty)$ et $g(\infty)$ sont dans Λ. Il est clair que $Q(\Lambda)$ est Γ-invariant. Le théorème d'Ascoli montre facilement que $Q(\Lambda)$ est fermé dans X (rappelons que les boules fermées de X sont compactes). Le groupe Γ est dit *quasi-convexe-cocompact* si $Q(\Lambda)/\Gamma$ est un compact. Si l'on se fixe une orbite $Y \subset X$ de Γ, cela revient à dire qu'il existe une constante C tel que tout point de $Q(\Lambda)$ soit à une distance $\leq C$ de Y.

REMARQUE. Un groupe discret Γ d'isométries de H^n est dit *convexe-cocompact* (voir **[Sul-1]**, §3) si $H(\Lambda)/\Gamma$ est compact, où $H(\Lambda) \subset H^n$ est l'enveloppe convexe de Λ. On notera que Γ est convexe-cocompact si et seulement si Γ est quasi-convexe-cocompact (la nécessité est évidente; pour montrer la suffisance, on utilise le fait qu'il existe une constante $C = C(n)$ telle que tout point situé à l'intérieur d'un simplexe de H^n soit à une distance $\leq C$ de la réunion des arêtes du simplexe (par récurrence, pour $n = 2$ ce n'est rien d'autre que la δ-hyperbolicité de H^2)).

La caractérisation suivante des groupes quasi-convexe-cocompacts est intéressante en soi.

PROPOSITION 7.1. *Soit* $Y \subset X$ *une orbite de* Γ. *Alors* Γ *est quasi-convexe cocompact si et seulement si il existe un réel* C *tel que tout rayon géodésique issu de* x_0 *et allant vers un point de* Λ *reste à une distance* $\leq C$ *de* Y.

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, soit ξ et η des points de Λ et $]\xi, \eta[$ une géodésique qui les relie. Menons des rayons géodésique $[x_0, \xi[$ et $[x_0, \eta[$. La *finesse* du triangle géodésique $[x_0, \xi, \eta]$ montre que tout point de $[\xi, \eta[$ est à une distance $\leq C_1$ de

$[x_0, \xi[\cup [x_0, \eta[$, où C_1 est une constante qui ne dépend que de δ (voir par exemple **[CDP]**, Ch. 2, Prop. 2.2). Par conséquent, si $[x_0, \xi[$ et $[x_0, \eta[$ restent à une distance $\leq C$ de Y, alors $]\xi, \eta[$ reste à une distance $\leq C + C_1$ de Y.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons Γ quasi-convexe-cocompact. Il existe donc une constante C telle que tout point de $Q(\Lambda)$ reste à une distance $\leq C$ de Y. L'ensemble Λ n'étant pas réduit à un point, on peut trouver une constante $A > 0$ telle que, pout tout $\xi \in \Lambda$, il existe $\eta \in \Lambda$ tel que $|\xi - \eta|_a \geq A$. Soit $[x_0, \xi[$ un rayon géodésique allant de x_0 à $\xi \in \Lambda$. Menons des géodésiques $]\xi, \eta[$ et $]x_0, \eta[$ pour un η dans Λ tel que $|\xi - \eta|_a \geq A$. Soit p un point sur $]\xi, \eta[$ avec $|p|$ minimal. Pour u et v des points sur $]\xi, \eta[$ proches respectivement de ξ et η, on aura, d'après la propriété (P2) du §1, $(u \cdot v) \leq B$ pour une certaine constante B qui se calcule en fonction de A, a et δ. En prenant soin de prendre u et v de part et d'autre de p, on a $(u \cdot v) \geq \operatorname{dist}(x_0, [u, v]) - 4\delta$, d'après (1.2). On a donc $|p| = \operatorname{dist}(x_0, [u, v]) \leq B + 4\delta$. Tout point de $[x_0, \xi[$ est à une distance $\leq C_1 = C_1(\delta)$ de $[x_0, p[\cup [p, \xi[$ (en se servant de la finesse du triangle $[x_0, \xi, p])$. Par conséquent, si x est un point de $[x_0, \xi[$ tel que $|x| > C_2 = C_1 + B + 4\delta$, alors x est à une distance $\leq C_1$ de $]\xi, p]$ et donc à une distance $\leq C + C_1$ d'un point de l'orbite Y. D'autre part, il existe une constante C_3 telle que tout point de la boule fermée centrée en x_0 et de rayon C_2 soit à une distance $\leq C_3$ de Y. On en déduit que tout point de $[x_0, \xi[$ reste à une distance $\leq C_4 = \max(C_3, C + C_1)$ de Y. □

On suppose, dans la suite de cette section, Γ *quasi-convexe-cocompact et d'exposant critique fini.*

Soit Y une orbite de Γ dans X. Rappelons que l'on a noté $n_Y(R)$ le nombre de points de Y à une distance $\leq R$ du point base x_0. On a le

THÉORÈME 7.2. *Il existe un réel $C \geq 1$ tel que*

$$C^{-1} \exp(e(\Gamma)R) \leq n_Y(R) \leq C \exp(e(\Gamma)R)$$

pour tout R.

Démonstration. D'après le Corollaire 6.8, il suffit de démontrer la première inégalité. Il est clair que l'on peut supposer que x_0 appartient à Y. D'après la Proposition 7.1, il existe un réel C_1 tel que tout point situé sur un rayon géodésique allant de x_0 à un point quelconque de Λ soit à une distance $\leq C_1$ de l'orbite Y. Par conséquent, si ξ est un point de Λ et si u est le point situé sur un rayon géodésique $[x_0, \xi[$ à la distance R de x_0, il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $|u - \gamma^{-1}x_0| \leq C_1$. Il en résulte que ξ appartient à l'ombre $O(\gamma^{-1}x_0, C_1)$. D'autre part, l'inégalité triangulaire donne $R - C_1 \leq |\gamma^{-1}x_0| \leq R + C_1$. Notons $E(R)$ l'ensemble des points x de l'orbite de x_0 tels que $R - C_1 \leq |x| \leq R + C_1$. Ce qui précède montre que Λ est contenu dans la réunion des $O(x, C_1)$ pour $x \in E(R)$. On a donc, μ désignant une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $D = e_a(\Gamma)$ et de support Λ (rappelons que l'existence d'une telle mesure résulte du Théorème 5.4),

$$\sum_{x \in E(R)} \mu(O(x, C_1)) \geq \mu(\Lambda).$$

D'où, si d_0 est la constante fournie par la Proposition 6.1 et si l'on prend $d = \max(d_0, C_1)$:

$$\sum_{x \in E(R)} \mu(O(x, d)) \geq \mu(\Lambda).$$

Or, d'après la Proposition 6.1, on a $\mu((O(x, d)) \leq C_2 a^{-DR}$ (où C_2 est un réel strictement positif qui ne dépend ni de x ni de R). On en déduit

$$\operatorname{card}(E(R)) \geq \text{const} \cdot a^{DR},$$

ce qui permet de conclure. □

COROLLAIRE 7.3. *La série de Poincaré* $g_Y(s) = \sum_{y \in Y} a^{-s|y|}$ *diverge en* $s = e_a(\Gamma)$.

Démonstration. Posons $n_k = n_Y(k)$. On a pour $s > e_a(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} g_Y(s) &\geq C_1 \sum_{k \in \mathbb{N}} n_k a^{-ks} \\ &\geq C_2 \sum_{k \in \mathbb{N}} a^{-k(s - e_a(\Gamma))} \qquad \text{(d'après le Théorème 7.2)} \\ &\geq C_3 / (1 - a^{-(s - e_a(\Gamma))}). \end{aligned}$$

D'où $g_Y(s) \to \infty$ quand $s \to e_a(\Gamma)$. □

Pour $\xi \in \partial X$ et $r \geq 0$, notons $B(\xi, r)$ la boule $\subset \partial X$ de centre ξ et de rayon r.

PROPOSITION 7.4. *Soit* μ *une mesure* Γ*-quasi-conforme de dimension* D *dont le support est contenu dans* Λ. *Alors il existe un réel* $C \geq 1$ *tel que*

$$C^{-1}r^D \leq \mu(B(\xi, r)) \leq Cr^D$$

pour tout $\xi \in \Lambda$ *et pour tout* $r \geq 0$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que X soit un arbre. D'après la Proposition 7.1, il existe un réel C_1 tel que tout point situé sur un rayon géodésique allant de x_0 à un point quelconque de Λ soit à une distance $\leq C_1$ de l'orbite de x_0. Soit d_0 comme dans la Proposition 6.1. Considérons un point ξ de Λ. Soit u le point sur le rayon géodésique $[x_0, \xi[$ tel que $r = (2/\operatorname{Log} a)a^{-|u|}$. On notera que $B(\xi, r)$ est l'ensemble des points de ∂X dont la projection sur $[x_0, \xi[$ appartient à $[u, \xi[$. Soit v le point situé sur $[u, \xi[$ tel que $|u - v| = d_0 + C_1$ et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $|\gamma^{-1}x_0 - v| \leq C_1$ (Fig. 2). Si l'on pose $d = |u - \gamma^{-1}x_0|$, on remarque que $B(\xi, r) = O(\gamma^{-1}x_0, d)$. L'inégalité triangulaire donne $d \geq |u - v| - |v - \gamma^{-1}x_0| \geq d_0$. La Proposition 6.1 nous donne donc

$$C_2^{-1}r'^D \leq \mu(B(\xi, r)) \leq C_2 r'^D a^{2Dd} \tag{7.1}$$

où $C_2 \geq 1$ est une constante qui ne dépend ni de ξ ni de r et où l'on a posé $r' = a^{-|\gamma^{-1}x_0|}$.

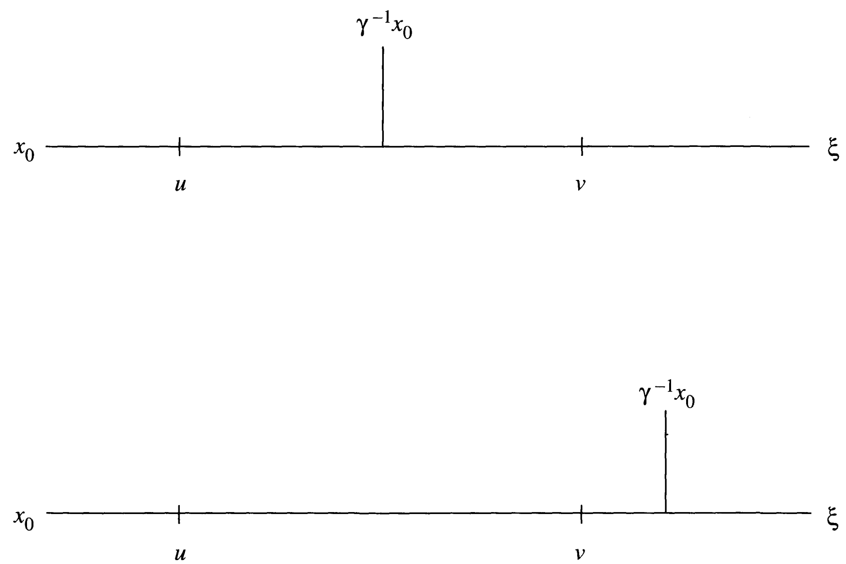


FIGURE 2

Comme $|u| \leq |\gamma^{-1}x_0| \leq |u| + d_0 + 2C_1$, le rapport r/r' reste donc entre deux constantes strictement positives qui ne dépendent ni de ξ ni de r. Comme d'autre part $d \leq d_0+2C_1$, (7.1) donne l'encadrement cherché.

Ici encore, l'approximation par les arbres permet d'étendre la démonstration au cas général. □

COROLLAIRE 7.5. *Soit μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ et soit $\mathscr{H}^D$ la D-mesure de Hausdorff sur Λ. Alors il existe une constante $C \geq 1$ telle que*

$$C^{-1}\mathscr{H}^D(A) \leq \mu(A) \leq C\mathscr{H}^D(A)$$

pour tout $A \subset \Lambda$.

Démonstration (**[Sul-1]**, §3). Soit (U_i) un ε-recouvrement de A (avec $U_i \subset \Lambda$). La proposition précédente nous donne une constante C_1 telle que $\mu(U) \leq C_1|U|^D$ pour tout $U \subset \Lambda$. On a alors $\mu(A) \leq \mu(\bigcup U_i) \leq \sum \mu(U_i) \leq C_1 \sum |U_i|^D$. D'où $\mu(A) \leq C_1\mathscr{H}_\varepsilon^D(A)$ et donc $\mu(A) \leq C_1\mathscr{H}^D(A)$, en faisant tendre ε vers 0.

L'inégalité de gauche est moins immédiate. Pour la démonstration voir **[Sul-1]**, §3; le lecteur vérifiera que les arguments qui y sont donnés restent valables dans notre contexte. □

Soit E un espace métrique et $\mathscr{H}^d$ la D-mesure de Hausdorff sur E (pour D réel ≥ 0). Rappelons que

$$\dim_H(E) = \sup\{D: \mathscr{H}^D(E) = \infty\} = \inf\{D: \mathscr{H}^D(E) = 0\}$$

s'appelle la *dimension de Hausdorff* de E. On a $0 \leq \dim_H(E) \leq \infty$.

Le Corollaire 7.5 et l'existence d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$ supportée par Λ (Théorème 5.4) donnent le

COROLLAIRE 7.6. *La $e_a(\Gamma)$-mesure de Hausdorff de Λ est finie et non nulle. En particulier Λ est de dimension de Hausdorff $e_a(\Gamma)$.*

Le théorème suivant montre les propriétés remarquables dont jouit la mesure de Hausdorff de dimension $e_a(\Gamma)$ sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe-cocompact. Dans cet énoncé, $L_0^\infty(\mathscr{H})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathscr{H}$-mesurables sur Λ et $\mathscr{H}$-presque-partout encardrées entre deux constantes strictement positives.

THÉORÈME 7.7. *La $e_a(\Gamma)$-mesure de Hausdorff $\mathscr{H}$ sur Λ possède les propriétés suivantes:*

(1) *$\mathscr{H}$ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$.*

(2) *L'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$ est ergodique.*

(3) *Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ, alors $D = e_a(\Gamma)$ et les mesures μ et $\mathscr{H}$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre. En fait, les mesures $\psi \cdot \mathscr{H}$, pour $\psi \in L_0^\infty(\mathscr{H})$, sont toutes Γ-quasi-conformes et de support Λ et ce sont les seules mesures Γ-quasi-conformes dont le support est contenu dans Λ.*

Démonstration. . L'assertion (1) résulte de la Proposition 4.3.

Pour montrer (2), donnons-nous un borélien Γ-invariant $B \subset \Lambda$ dont la $\mathscr{H}$-mesure est non nulle. La restriction de $\mathscr{H}$ à B définit alors une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$. On a donc, d'après le Corollaire 7.5, une constante C telle que $\mathscr{H}(A) \leq C\mathscr{H}(A \cap B)$ pour tout $A \subset \Lambda$. D'où $\mathscr{H}(\Lambda - B) = 0$, ce qui montre l'ergodicité de l'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$.

Soit maintenant μ une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ. Le Corollaire 7.5 montre que $\mathscr{H}^D(\Lambda)$ est fini et non nul. On a donc $D = \dim_H(\Lambda) = e_a(\Gamma)$. Ce même Corollaire 7.5 montre que les mesures $\mathscr{H}$ et μ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre. Il montre aussi que la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à $\mathscr{H}$ reste presque-partout entre deux constantes strictement positives. Inversement, $\mathscr{H}$ étant Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$, il est clair que toute mesure de la forme $\psi \cdot \mathscr{H}$, pour $\psi \in L_0^\infty(\mathscr{H})$, l'est aussi. □

8. Mesures Γ-conformes dans les arbres. Dans cette section X est un arbre réel ($\delta = 0$), toujours supposé localement compact. Rappelons les faits suivants (§3). Soit γ une isométrie de X. On a posé, pour $\xi \in \partial X$, $\Delta(\xi) = |p - x_0| - |p - \gamma^{-1}x_0|$ où p est la projection de ξ sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. Si h est la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique quelconque d'extrémité ξ, on a vu que l'on a aussi $\Delta(\xi) = h(x_0) - h(\gamma^{-1}x_0)$. Soit $j_\gamma : \partial X \to]0, \infty[$ définie par $j_\gamma(\xi) = a^{\Delta(\xi)}$. La fonction j_γ est localement constante et il existe, pour tout $\xi \in \partial X$, un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tel que $|\gamma\eta_1 - \gamma\eta_2|_a / |\eta_1 - \eta_2|_a = j_\gamma(\xi)$ pour tous les $\eta_1 \neq \eta_2$ dans V.

Définition 8.1. Soit Γ un groupe d'isométries de X, D un réel ≥ 0 et μ une mesure sur ∂X de masse totale finie et non nulle. La mesure μ est dite *Γ-conforme de dimension D* si $\gamma^*\mu = j_\gamma^D \mu$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Toute mesure Γ-conforme est, bien entendu, Γ-quasi-conforme.

Soit maintenant Γ une groupe proprement discontinu et non élémentaire d'isométries de X d'ensemble limite Λ. On remarque que la construction d'une mesure Γ-quasi-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$, faite dans la démonstration du Théorème 5.4, donne, pour les arbres, une mesure Γ-conforme (car on peut prendre $C = 1$ dans (5.3)). On a donc le

THÉORÈME 8.2. *Si Γ est d'exposant critique fini, il existe une mesure Γ-conforme de dimesnion $e_a(\Gamma)$ dont le support est Λ.*

Notons que, dans un arbre, $Q(\Lambda)$ est l'enveloppe convexe (même définition que dans le cas $X = H^n$) de Λ. On qualifiera donc le groupe Γ de *convexe-cocompact* plutôt que de quasi-convexe-cocompact si $Q(\Lambda)/\Gamma$ est compact. Pour Γ convexe-cocompact et d'exposant critique fini, on a les résultats suivants en notant toujours $\mathscr{H}$ la $e_a(\Gamma)$-mesure de Hausdorff sur Λ.

THÉORÈME 8.3. (1) *$\mathscr{H}$ est Γ-conforme de dimension $e_a(\Gamma)$.*

(2) *Si μ est une mesure Γ-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ, alors $D = e_a(\Gamma)$ et $\mu = \lambda\mathscr{H}$ pour une certaine constante $\lambda > 0$.*

(3) *$\mathscr{H}$ (normalisée par $\mathscr{H}(\Lambda) = 1$) est la limite faible pour s tendant vers $e_a(\Gamma)$ par valeurs supérieures des mesures*

$$\mu_s = \left(1/\sum_{y\in Y} a^{-s|y|}\right)\sum_{y\in Y} a^{-s|y|}\mathrm{dirac}(y)$$

pour $Y \subset X$ une orbite quelconque de Γ.

Démonstration. On a déjà vu que $\mathscr{H}$ est de masse totale finie et non nulle (Corollaire 7.4). La Γ-conformité de dimension $e_a(\Gamma)$ de $\mathscr{H}$ est immédiate. En effet pour tout $\xi \in \partial X$, on peut trouver un voisinage $V \subset \partial X$ de ξ tel que $|\gamma U|_a = j_\gamma(\xi)|U|_a$ pour tout $U \subset V$.

Soit μ une mesure Γ-conforme de dimension D dont le support est contenu dans Λ. D'après la partie 3 du Théorème 7.7, on a $D = e_a(\Gamma)$ et la mesure μ est absolument continue par rapport à $\mathscr{H}$. Il en résulte que la dérivée de Radon-Nikodym $d\mu/d\mathscr{H}$ est Γ-invariante. L'ergodicité de l'action de Γ sur $(\Lambda, \mathscr{H})$ (partie 2 du Théorème 7.7) montre que $d\mu/d\mathscr{H}$ est $\mathscr{H}$-presque constante. Cela établit (2).

D'après le Corollaire 7.3, la série de Poincaré

$$g_Y(s) = \sum_{y\in Y} a^{-s|y|}$$

diverge en $s = e_a(\Gamma)$. La démonstration du Théorème 5.4 montre que pour toute suite $s(i)$ de réels $> e_a(\Gamma)$ telle que la suite $\mu_{s(i)}$ converge faiblement vers une mesure μ sur $X \cup \partial X$, alors μ est Γ-conforme et supportée par Λ. On aura donc $\mu = \mathscr{H}$ d'après (2). On en déduit (3) par compacité de l'espace des mesures de probabilité sur $X \cup \partial X$ (pour la topologie de la convergence faible). □

9. Construction de mesures Γ-quasi-invariantes sur $\partial^2 X$. Soit, H^n étant toujours équipé d'un point base, $\|\xi - \eta\|$ la distance *euclidienne* entre deux points $\xi, \eta \in \partial H^n = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Pour toute isométrie γ de H^n, on a

$$\|\gamma\xi - \gamma\eta\|^2 = |\gamma'(\xi)| \cdot |\gamma'(\eta)| \cdot \|\xi - \eta\|^2$$

(*théorème géométrique des valeurs intermédiaires*; voir **[Sul-1]**, §4). L'énoncé suivant donne une version arborisée de cette formule.

Proposition 9.1. *Soit X un arbre et γ une isométrie de X. On a*

$$|\gamma\xi - \gamma\eta|_a^2 = j_\gamma(\xi) \cdot j_\gamma(\eta) \cdot |\xi - \eta|_a^2 \tag{9.1}$$

pour tous les $\xi, \eta \in \partial X$.

Démonstration. Quitte à échanger ξ et η, il n'y a que deux cas de figure à considérer (Fig. 3).

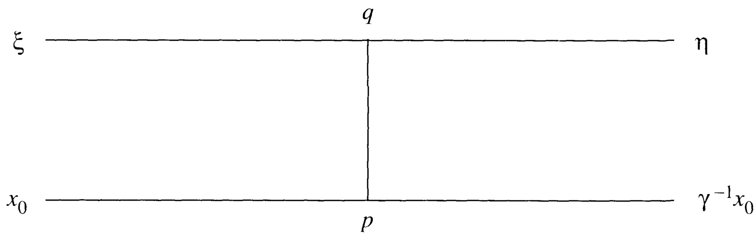
Dans le cas (a), les points ξ et η ont même projection p sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. Soit q la projection de ξ su $[p, \eta]$. On a

$$\begin{aligned} j_\gamma(\xi) = j_\gamma(\eta) &= a^{|p|-|\gamma p|}, \\ |\xi - \eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|p|-|p-q}, \quad \text{et} \\ |\gamma\xi - \gamma\eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|\gamma p|-|\gamma p-\gamma q|}, \\ &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|\gamma p|-|p-q|}, \end{aligned}$$

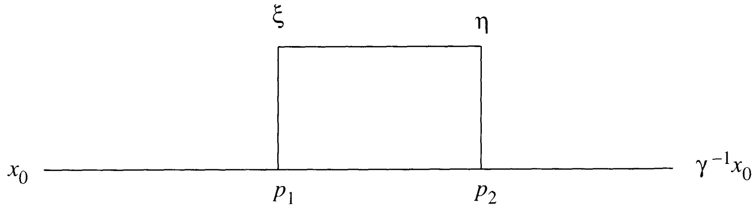
ce qui montre (9.1).

Dans le cas b), les points ξ et η se projettent respectivement en p_1 et p_2 sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$ avec $x_0, p_1, p_2, \gamma^{-1}x_0$ se suivant dans cet ordre sur $[x_0, \gamma^{-1}x_0]$. On a alors

$$\begin{aligned} j_\gamma(\xi) &= a^{|p_1|-|\gamma p_1|}, \\ j_\gamma(\eta) &= a^{|p_2|-|\gamma p_2|}, \\ |\xi - \eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|p_1|}, \quad \text{et} \\ |\gamma\xi - \gamma\eta|_a &= (2/\operatorname{Log} a)a^{-|\gamma p_2|}, \end{aligned}$$



3.a



3.b

FIGURE 3

d'où (9.1) en utilisant

$$|p_1| - |\gamma p_1| + |p_2| - |\gamma p_2| = 2(|p_1| - |\gamma p_2|). \qquad \square$$

Soit $\partial^2 X = \partial X \times \partial X$*-diagonale* l'ensemble des couples de points distincts du bord de X. Le groupe Γ agit sur $\partial^2 X$ par $\gamma(\xi, \eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $(\xi, \eta) \in \partial^2 X$.

COROLLAIRE 9.2. *Si X est un arbre et si μ est une mesure Γ-conforme de dimension D sur ∂X, alors $m = \mu \times \mu / |\xi - \eta|_a^{2D}$ est une mesure Γ-invariante sur $\partial^2 X$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\gamma^* m &= \gamma^*\mu \times \gamma^*\mu / |\gamma\xi - \gamma\eta|_a^{2D}\\ &= j_\gamma(\xi)^D j_\gamma(\eta)^D \mu \times \mu / |\gamma\xi - \gamma\eta|_a^{2D}\\ &\qquad\qquad \text{(d'après la } \Gamma\text{-conformité de } \mu)\\ &= m \qquad \text{(d'après la proposition précédente).}\end{aligned} \qquad \square$$

Supposons maintenant X δ-hyperbolique. Soit γ une isométrie de X. La Proposition 9.1 et le théorème d'approximation par les arbres donnent la

PROPOSITION 9.3. *Il existe une constante $C = C(\delta, a) \geq 1$ telle que*

$$C^{-1} \leq |\gamma\xi - \gamma\eta|_a^2/(j_\gamma(\xi)\cdot j_\gamma(\eta)\cdot|\xi - \eta|_a^2) \leq C$$

quels que soient les ξ, η distincts $\in \partial X$ et les rayons géodésiques d'extrémités respectives ξ et η qui servent à définir $j_\gamma(\xi)$ et $j_\gamma(\eta)$.

COROLLAIRE 9.4. *Si μ est une mesure Γ-quasi-conforme de dimension D sur ∂X, alors $m = \mu \times \mu/|\xi - \eta|_a^{2D}$ est une mesure Γ-quasi-invariante sur $\partial^2 X$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $C \geq 1$ tel que*

$$C^{-1}m(A) \leq m(\gamma A) \leq Cm(A)$$

pour tout $A \subset \partial^2 X$. □

RÉFÉRENCES

[Coo] M. Coornaert, *Sur le domaine de discontinuité d'un groupe discret d'isométries d'un espace métrique hyperbolique*, Rend. Sem. Mate. Univ. Cagliari, **59** (1989), 185–195.

[CDP] M. Coornaert, T. Delzant et A. Papadopoulos, *Géométrie et Théorie des Groupes, les Groupes Hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Math., *n°* 1441, Springer, 1990.

[F] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1969.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe, (éds.), *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, Vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in *Essays in Group Theory*, (S. M. Gersten éd.), Springer, 1987.

[Pat-1] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math., **136** (1976), 241–273.

[Pat-2] ——, *Lectures on measures on limit sets of Kleinian groups*, in *Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space*, pp. 291–323, Cambridge Unviersity Press, 1987.

[Sul-1] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. Math. I.H.E.S., **50** (1979), 171–202.

[Sul-2] ——, *Entropy, Hausdorff measures old and new and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math., **153** (1984), 259–277.

[Sul-3] ——, *Discrete conformal groups and measurable dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., **6** (1982), 57–73.

Received November 21, 1990.

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
7 RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG (FRANCE)

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Founded by

E. F. BECKENBACH (1906–1982) F. WOLF (1904–1989)

Mathematical papers intended for publication in the *Pacific Journal of Mathematics* should be in typed form or offset-reproduced (not dittoed), double spaced with large margins. Please do not use built up fractions in the text of the manuscript. However, you may use them in the displayed equations. Underline Greek letters in red, German in green, and script in blue. The first paragraph must be capable of being used separately as a synopsis of the entire paper. In particular it should contain no bibliographic references. Please propose a heading for the odd numbered pages of less than 35 characters. Manuscripts, in triplicate, may be sent to any one of the editors. Please classify according to the 1991 *Mathematics Subject Classification* scheme which can be found in the December index volumes of *Mathematical Reviews*. Supply name and address of author to whom proofs should be sent. All other communications should be addressed to the managing editor, or Julie Speckart, University of California, Los Angeles, California 90024-1555.

There are page-charges associated with articles appearing in the Pacific Journal of Mathematics. These charges are expected to be paid by the author's University, Government Agency or Company. If the author or authors do not have access to such Institutional support these charges are waived. Single authors will receive 75 free reprints; joint authors will receive a total of 100 free reprints. Additional copies may be obtained at cost in multiples of 50.

The *Pacific Journal of Mathematics* (ISSN 0030-8730) is published monthly except for July and August. Regular subscription rate: $200.00 a year (10 issues). Special rate: $100.00 a year to individual members of supporting institutions.

Subscriptions, orders for numbers issued in the last three calendar years, and changes of address should be sent to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924, U.S.A. Old back numbers obtainable from Kraus Periodicals Co., Route 100, Millwood, NY 10546.

The Pacific Journal of Mathematics at P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924 (ISSN 0030-8730) is published monthly except for July and August. Second-class postage paid at Carmel Valley, California 93924, and additional mailing offices. Postmaster: send address changes to Pacific Journal of Mathematics, P.O. Box 969, Carmel Valley, CA 93924.

PUBLISHED BY PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, A NON-PROFIT CORPORATION

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,

the American Mathematical Society's TEX macro system.

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume 159 No. 2 June 1993

0030-8730(1993)159:2;1-G