Pacific Journal of Mathematics

UN THÉORÈME DE L'INDICE RELATIF

Gilles Carron

Volume 198 No. 1 March 2001

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 198, No. 1, 2001

UN THÉORÈME DE L'INDICE RELATIF

Gilles Carron

We study Dirac type operator on non-compact Riemannian manifold. We give a general criterion which implies that the L^2-kernel of such an operator has finite dimension. Moreover, we show that a relatif (extended) index theorem holds for such operators.

0. Introduction.

Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne complète (M, g), on sait que lorsque la variété est compacte sans bord, l'espace des solutions L^2 à l'équation $(D\sigma = 0)$ est de dimension finie. Si la variété n'est plus compacte, ceci n'est généralement plus le cas; cependant dans certains cadres géométriques, on peut montrer que cet espace est de dimension finie: Par exemple, c'est le cas lorsque les bouts de la variété sont cylindriques ([**A-P-S**]), sont euclidiens ([**B-M-S**]) ou sont certains produits tordus ([**Br**], [**A2**]). M. Gromov et H.B. Lawson ont étudié l'opérateur de Dirac d'une variété spin complète dont la courbure scalaire est uniformément strictement positive au voisinage de l'infini, ils montrent que cet opérateur est Fredholm sur son domaine, en particulier son noyau L^2 est de dimension finie ([**G-L**]). Cette étude a été généralisée par N. Anghel ([**A1**]), il montre notamment qu'un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est Fredholm sur son domaine si et seulement si il est inversible à l'infini autrement dit:

Théorème 0.1. *$D : \mathcal{D}(D) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm si et seulement si il existe un compact K de M et une constante strictement positive Λ tel que*

$$\Lambda \|\sigma\|_{L^2(M-K,E)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K,E)}, \ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K, E).$$

Dans [**C2**], on montrait que l'opérateur de Gauss-Bonnet était Fredholm d'un espace de Sobolev dans L^2, ceci sous conditions qu'une inégalité de Sobolev soit vérifiée et qu'une intégrale de courbure soit finie. Motivé par ces travaux et par le résultat de N. Anghel, nous introduisons la notion suivante:

Définition 0.2. Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M^n, g), on dira que D est **non-parabolique**

à l'infini s'il existe un compact K de M tel que pour tout ouvert U relativement compact dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$C(U)\,\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E).$$

En quelque sorte, les opérateurs non-paraboliques à l'infini sont ceux qui sont faiblement inversibles à l'infini. Les opérateurs de type Dirac qui sont Fredholm sur leurs domaines sont évidement non-paraboliques à l'infini. Cette définition est aussi inspirée du résultat de A. Ancona; dans [**An**], il montre qu'une variété riemannienne complète connexe (M^n, g) a des fonctions de Green positives si et seulement si pour tout (ou pour un) ouvert borné U de M il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$C(U)\,\|f\|_{L^2(U)} \leq \|df\|_{L^2(M)},\ \forall f \in C_0^\infty(M).$$

On dit alors que (M,g) est non-parabolique. Autrement dit si $H_0^1(M)$ est le complètè de l'espace $C_0^\infty(M)$ muni de la norme $u \mapsto \|du\|_{L^2}$, alors la non-parabolicité de (M,g) est équivalente au fait que l'inclusion de $C_0^\infty(M)$ dans H^1_{loc} se prolonge continûment à une injection $H_0^1(M)$ dans H^1_{loc}.

Et de même, on a la définition équivalente suivante pour la non-parabolicité à l'infini.

Définition 0.3. Un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ sur une variété riemannienne complète (M,g) est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un compact K de M tel que si l'on complète $C_0^\infty(E)$ avec la norme

$$N_K(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|D\sigma\|^2_{L^2(M)}}\,,$$

afin d'obtenir $W(E)$ alors l'injection $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{\mathrm{loc}}(E)$ se prolonge par continuité en une injection $W(E)$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(E)$.

Ceci montre que l'opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini et la métrique g détermine l'espace de Sobolev W. Les opérateurs non-paraboliques à l'infini ont la propriété suivante:

Théorème 0.4. *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini alors*

$$D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm. En particulier, la dimension du noyau L^2 d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini est finie.

En fait, de façon analogue à la caractérisation (0.1) des opérateurs de type Dirac Fredholm sur leur domaine, nous verrons que cette propriété caractérise les opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini. Par définition, la non-parabolicité à l'infini d'un opérateur de type Dirac ne dépend que de la géométrie d'un voisinage de l'infini, ceci est satisfaisant au regard du résultat de J. Lott à propos de la L^2-cohomologie. Dans [**L**], l'auteur montre que si deux variétés riemanniennes sont isométriques sur un voisinage de l'infini, alors la dimension de leurs espaces des formes harmoniques L^2 est simultanément finie ou infinie.

La notion de non-parabolicité à l'infini paraît assez maniable, nous donnerons dans la deuxième partie de nombreux exemples qui reposent sur la formule de Bochner-Weitzenböck-Lichnerowicz. Par exemple, nous généraliserons le résultat de M.Gromov et H.B. Lawson en montrant que si (M, g) est une variété riemannienne spin complète dont la courbure scalaire est positive ou nulle au dehors d'un compact alors son opérateur de Dirac est non-parabolique à l'infini. On montrera aussi que les opérateurs de Gauss-Bonnet et de Signature sur une variété plate sur un voisinage de l'infini sont non-paraboliques à l'infini. Nous verrons ensuite d'autres exemples utilisant des inégalités de Sobolev. On retrouvera notamment nos précédents résultats sur la L^2-cohomologie réduite. Enfin, nous verrons qu'un opérateur de type Dirac sur une variété à bout cylindrique est non-parabolique à l'infini, en particulier son noyau L^2 est de dimension finie. Ces opérateurs avaient été étudiés par M. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer afin d'obtenir une formule pour la signature d'une variété compacte à bord ([**A-P-S**]). En fait, nous verrons que dans ce cas particulier, les solutions de l'équation $D\sigma = 0$ qui sont dans l'espace $W(E)$ sont exactement celle que M. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer appelent solutions étendues. C'est pourquoi lorsque $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ sera un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué, on nommera indice étendu l'indice de $D^+ : W(E^+) \longrightarrow L^2(E^-)$, i.e.,

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \dim\{\sigma \in W(E^+),\ D^+\sigma = 0\} - \dim\{\sigma \in L^2(E^-),\ D^-\sigma = 0\}.$$

En fait, une solution L^2 à l'équation $(D\sigma = 0)$ est dans W, on note $h_\infty(D^+)$ la codimension de l'espace $\{\sigma \in L^2(E^+),\ D^+\sigma = 0\}$ dans l'espace $\{\sigma \in W(E^+),\ D^+\sigma = 0\}$. Ainsi on relie indice L^2 et indice étendu

$$\operatorname{ind}_e D^+ = h_\infty(D^+) + \operatorname{ind}_{L^2} D^+.$$

Un cas particulier d'opérateur non-parabolique à l'infini est celui où 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur ou de façon équivalente celui où l'opérateur est Fredholm sur son domaine (cf. [**G-L**], [**D**], [**A1**], [**A3**], [**B2**]). Notamment, M. Gromov et H.B. Lawson puis H. Donnelly ont montré un théorème de l'indice relatif pour de tels opérateurs ([**G-L**], [**D**]): Si deux opérateurs de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradués sont Fredholm sur leurs domaines et s'ils sont isométriques sur un voisinage de l'infini, alors leurs indices L^2 diffèrent exactement de la différence de l'intégrale de leur forme caractéristique; c'est à dire que si D_1 et D_2 sont ces opérateurs, et s'ils sont isométriques au dehors de compacts K_1 et K_2, alors

$$\operatorname{ind}_{L^2} D_1^+ - \operatorname{ind}_{L^2} D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+} .$$

En fait, le théorème de l'indice L^2 relatif n'est pas vrai pour les opérateurs non-paraboliques à l'infini, en effet on verra qu'il n'est pas vérifié pour l'opérateur de Gauss-Bonnet sur la surface obtenue en recollant deux plans euclidiens suivant des disques isométriques. En fait c'est le théorème de l'indice étendu relatif qui est vrai:

Théorème 0.5. *Si D_1, D_2 sont deux opérateurs de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradués non-paraboliques à l'infini et isométriques à l'infini, alors on a*

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+},$$

où on a noté $\alpha_{D_i^+}$ est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principal de D_i^+.

Nous pouvons alors relier les indices L^2 des deux opérateurs D_1^+ et D_2^+ :

Corollaire 0.6.

$$\operatorname{ind}_{L^2} D_1^+ - \operatorname{ind}_{L^2} D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+} - \left(h_\infty(D_1^+) - h_\infty(D_2^+)\right),$$

où $h_\infty(D_i^+)$ est la dimension de l'espace $\ker_W D_i^+ / \ker_{L^2} D_i^+$.

Ainsi le théorème de l'indice L^2 relatif est vrai si et seulement si $h_\infty(D_1^+) = h_\infty(D_2^+)$. On a dit que ceci n'est pas toujours vrai; néanmoins la somme $h_\infty(D^+) + h_\infty(D^-)$ ne dépend que de la géométrie à l'infini, i.e.:

Corollaire 0.7. *Dans le même contexte qu'au théorème 0.5, on a*

$$h_\infty(D_1^+) + h_\infty(D_1^-) = h_\infty(D_2^+) + h_\infty(D_2^-),$$

en particulier si $h_\infty(D_1^+) + h_\infty(D_2^-) = 0$, alors le théorème de l'indice L^2 relatif a lieu.

Le théorème de l'indice relatif permet, dans certains cas, de calculer certains indices; en effet de la valeur de l'indice d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini, on en déduit l'indice de tout opérateur qui lui est isométrique à l'infini. C'est ainsi que N. Anghel et U. Bunke expriment l'indice de certains opérateurs Dirac plus potentiel sur les variétés de dimension impaires; ceci généralise un résultat de Callias (cf. [**Ca**], [**A3**] et [**B2**]). Ici nous obtiendrons le résultat suivant:

Théorème 0.8. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète orientée telle qu'il existe un compact K de M avec*

$$M - K = \coprod E_i$$

où chaque bout E_i est isométrique au produit riemannien $\Sigma_i \times (\mathbf{R}^{n_i} - B_{R_i})$, Σ_i étant une variété riemannienne compacte et B_R la boule euclidienne de rayon R. Notons D_{GB} l'opérateur de Gauss-Bonnet sur M et D_S l'opérateur de signature sur M (lorsque $\dim M = 0 \bmod 4$) alors ces opérateurs sont non-paraboliques à l'infini et on a

$$\operatorname{ind}_e D^+_{GB} = \int_M \Omega + \sum_{n_i=1,2} n_i q(\Sigma_i)$$

$$\operatorname{ind}_e D^+_S = \int_M \xi + \sum_{n_i=1,2} n_i q(\Sigma_i)$$

où on a noté $q(\Sigma_i)$ la somme des nombres de Betti réels de Σ_i:

$$q(\Sigma_i) = \sum_{k=0}^{\dim \Sigma_i} b_k(\Sigma_i)$$

et où Ω est la n-forme d'Euler sur M et ξ la forme caractéristique de D^+_S, qui est la composante de plus haut degré du L-genre de M. De plus, si pour chaque bout, on a $n_i \geq 3$, alors on a les égalités

$$\operatorname{ind}_{L^2} D^+_{GB} = \int_M \Omega$$

$$\operatorname{ind}_{L^2} D^+_S = \int_M \xi.$$

Dans le cas où les bouts de (M^n, g) sont euclidiens, ce théorème est en partie dû à N. Borisov, W. Muller, R. Schrader ([**B-M-S**]), il est plus que possible que leur preuve, utilisant la théorie du scattering, s'adapte pour montrer ce résultat.

Notation. Soit $E \longrightarrow M^n$ est un fibré Hermitien sur une variété riemannienne complète. Un opérateur différentiel symétrique du premier ordre $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est dit de type Dirac lorsque le symbole principal de D^2 est la métrique:

$$\sigma(D^2)(x,\xi) = g_x(\xi,\xi)\,\mathrm{Id}_{E_x},\ \forall (x,\xi) \in T^*M.$$

En particulier, un tel opérateur est elliptique et l'algèbre de Clifford de (T_xM, g_x), $Cl_x(M)$ agit sur E_x.

On notera $H^1(E)$ le domaine de D lorsqu'il opère comme opérateur non-borné sur $L^2(E)$, cet espace est aussi le complété de l'espace $C^\infty_0(E)$ des sections lisses à support compact de E pour la norme

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2} + \|D\sigma\|^2_{L^2}}\ .$$

Comme D est elliptique l'espace des sections H^1_{loc} de E est aussi l'espace de sections de E qui sont, elles et leur l'image par D, au sens des distributions, localement dans L^2. Lorsque ∇ est une connexion orthogonale sur E, on notera $H^1_0(E)$ l'espace obtenu en complètant l'espace $C^\infty_0(E)$ par la norme $\sigma \longrightarrow \|\nabla\sigma\|_{L^2}$; remarquons que cet espace dépend de la connexion orthogonale mais nous omettons de signaler cette dépendance car il n'y aura pas d'ambiguité dans cet article. Si U est un ouvert borné de M on notera $H^1(U,E)$ ou $H^1(U)$ l'espace de Sobolev constitué des sections de $E|_U$ qui sont dans L^2 et dont les dérivées sont dans L^2, et $H^1_0(U)$ ou $H^1_0(U,E)$ est l'espace obtenu en complètant l'espace $C^\infty_0(U,E)$ par la norme $\sigma \longrightarrow \|\nabla\sigma\|_{L^2}$.

Lorsque le fibré E est muni d'une connexion orthogonale ∇ telle que la multiplication par un vecteur unitaire de T_xM soit une isométrie de E_x et que la connexion se comporte comme une dérivation par rapport à l'opération du fibré de Clifford $Cl(M)$ sur E, i.e.,

$$\nabla(\sigma.\phi) = (\nabla\sigma).\phi + \sigma.(\nabla\phi),\ \forall\sigma \in C^\infty(Cl(M)),\ \phi \in C^\infty(E).$$

Alors l'opérateur différentiel défini par

$$D = \sum_{i=1}^n e_i.\nabla_{e_i} \text{ (où } \{e_i\}_i \text{ est un repère orthonormé local)}$$

ne dépend pas du choix de ce repère. Un tel opérateur est un opérateur de type Dirac, on parle alors d'opérateur de Dirac généralisé.

1. Non-parabolicité à l'infini pour les opérateurs de type Dirac.

Le but de ce paragraphe est d'étudier une condition assez générale qui assure que le noyau L^2 d'un opérateur de type Dirac est de dimension finie.

1.a. Définition. Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M^n, g), on dira que D est **non-parabolique à l'infini** s'il existe un compact K de M tel que pour tout ouvert U relativement compact dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$C(U)\,\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)},\ \forall\sigma \in C^\infty_0(M-K,E). \tag{1.1}$$

1.b. Caractérisation d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini. Une propriété importante d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini est qu'il existe un opérateur de Green G agissant continûment $G : L^2(E) \longrightarrow H^1_{\text{loc}}(E)$. En fait, nous avons le résultat suivant qui caractérise ces opérateurs:

Théorème 1.2. *Un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un espace de Hilbert $W(E)$ telle que:*

i) $C_0^\infty(E)$ *est dense dans* $W(E)$.
ii) *L'injection* $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{\mathrm{loc}}(E)$ *se prolonge par continuité à* $W(E)$.
iii) $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ *est Fredholm (en particulier continu).*

Remarque. Les opérateurs non-paraboliques à l'infini sont des opérateurs dont le noyau L^2 est de dimension finie: En effet, puisque D est symétrique, on sait que le noyau L^2 de D est l'orthogonal de l'image par D de l'espace des sections lisses à support compact de E:

$$\{\sigma \in L^2, D\sigma = 0\} = (DC_0^\infty(M,E))^\perp\,;$$

or $C_0^\infty(M,E)$ est dense dans W, on a donc

$$\{\sigma \in L^2, D\sigma = 0\} = (DW)^\perp\,,$$

le noyau L^2 de D est donc le conoyau de l'opérateur $D : W \longrightarrow L^2$.

Il faut relier ce théorème avec le résultat de N. Anghel [**A1**] qui montrait qu'un opérateur de type Dirac $D : H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm si et seulement si il existe un compact K de M et une constante strictement positive Λ tel que

$$\Lambda \|\sigma\|_{L^2(M-K,E)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K,E)},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E).$$

En fait ceci équivaut aussi à ce que le spectre essentiel de D^2 ne contienne pas 0, ces opérateurs sont évidement non-paraboliques à l'infini mais notre condition est beaucoup moins restrictive: Nous verrons des exemples d'opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini où 0 est dans le spectre essentiel de D^2.

En fait, ce théorème repose sur la proposition suivante:

Proposition 1.3. *Soit* $W(E)$ *un espace de Hilbert constitué de sections de* $E \longrightarrow M$ *tel que:*

i) $C_0^\infty(E)$ *est dense dans* $W(E)$, *et*
ii) *L'injection* $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{\mathrm{loc}}(E)$ *se prolonge par continuité à* $W(E)$,
iii) $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ *est continu,*

alors $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ *est Fredholm si et seulement si il existe un compact* K *de* M *et une constante strictement positive* $C(K)$ *tel que*

$$C(K)\, \|\sigma\|_W \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E).$$

Avant de prouver cette proposition, montrons qu'elle implique le théorème (1.2). Tout d'abord, grâce à cette proposition, il est clair que si $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm alors D est non-parabolique à l'infini car par hypothèse W s'injecte continûment dans H^1_{loc} et donc, selon la proposition (1.3), pour tout ouvert borné U de $M-K$, il existe une constante $C(U) > 0$ telle que

$$C(U)\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|\sigma\|_W \leq C'\|D\sigma\|_{L^2},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E).$$

Réciproquement si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est non-parabolique à l'infini, alors on construit $W(E)$ qui est le complèté de $C_0^\infty(E)$ pour la norme

$$N(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{H^1(\tilde K)} + \|D(\rho\sigma)\|^2_{L^2(M)}}, \tag{1.4}$$

où $\tilde K$ est un voisinage borné du compact K donné dans la définition de non-parabolicité à l'infini; et $1-\rho$ est une fonction lisse à support dans l'intérieur de $\tilde K$. Alors, par construction, $C_0^\infty(E)$ est dense dans W; puisque D est non-parabolique à l'infini, la construction de cet espace W ne dépend pas du compact $\tilde K$ ni de la fonction ρ choisi. Ainsi $W(E)$ s'injecte continûment dans H^1_{loc}. Puis bien-sûr pour une section σ de E ayant son support hors de $\tilde K$ on a $\|\sigma\|_W = \|D\sigma\|_{L^2}$. Ce qui achève de montrer le Théorème 1.2 à l'aide de la Proposition 1.3.

Prouvons maintenant la proposition: En fait on reprend plus ou moins les arguments de [**A1**] qui sont eux-mêmes assez proche de ceux utilisées par Fischer-Colbrie ([**F**]) à propos de l'indice des sous-variétés minimales.

La partie facile de cette proposition est de montrer que si $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm alors il existe un compact K de M et une constante strictement positive $C(K)$ tel que

$$C(K)\,\|\sigma\|_W \le \|D\sigma\|_{L^2(M-K)},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K, E).$$

En effet, supposons que la conclusion n'ait pas lieu alors on trouve une suite de compact $\{K_l\}_l$ exhaustant M et une suite $\{\sigma_l\}_l$ de sections de E lisses à support compact dans $M - K_l$ telles que

$$\begin{aligned} \|\sigma_l\|_W &= 1 \\ \|D\sigma_l\|_{L^2} &\le 1/l. \end{aligned}$$

Par construction, cette suite tend vers 0 dans L^2_{loc} et aussi dans W faiblement; car dans W c'est une suite bornée donc relativement faiblement-compact et à cause de l'injection continue de W dans L^2_{loc} la seule valeur d'adhérence est 0. Puis $D : W(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm donc il existe un opérateur de Green $G : L^2 \longrightarrow W$ continu tel que

$$G \circ D = \mathrm{Id}_W - H,$$

où H est la projection orthogonale sur le noyau de D, c'est un opérateur de rang fini ainsi la suite $\{H\sigma_l\}_l$ tend vers 0 fortement dans W, or on a

$$\|\sigma_l\|_W = 1 = \|GD\sigma_l + H\sigma_l\|_W \le \|G\|/l + \|H\sigma_l\|_W,$$

ce qui est une contradiction lorsque l tend vers l'infini.

Montrons maintenant la réciproque: Un point important est le suivant:

Lemme 1.5. *Si W est un espace de Hilbert vérifiant les propriétés de la Proposition 1.3, alors pour $\alpha \in C_0^1(T^*M)$, l'application*

$$\alpha. : W \longrightarrow L^2(M)$$
$$\sigma \mapsto \alpha.\sigma,$$

est compacte.

Preuve. En effet, si K un compact à bord lisse contenant le support de α, c'est la composée des 5 applications continues suivantes:

- l'injection de W dans H^1_{loc},
- la restriction de H^1_{loc} à $H^1(K)$,
- la multiplication par α de $H^1(K)$ dans lui-même,
- l'injection compacte de $H^1(K)$ dans $L^2(K)$,
- l'extension par 0 de $L^2(K)$ dans $L^2(M)$.

Ainsi cette application est bien compacte. □

A partir de l'hypothèse, nous allons construire un opérateur continu $Q : L^2(E) \longrightarrow W$ tel que $Q \circ D - Id_W$ soit un opérateur compact, ceci montrera que $D : W \longrightarrow L^2$ a son noyau de dimension finie et que son image est fermée, ceci impliquera que son conoyau, que l'on identifie au noyau L^2, est de dimension finie; en effet une solution de carré intégrable à l'équation $(D\sigma = 0)$ est dans l'espace de Sobolev W: Ceci se montre de la façon suivante. Si (ρ_l) est une suite de fonctions Lipschitz à support compact dans la boule géodésique de rayon $2l$ et valant 1 sur la boule géodésique de rayon l, on peut choisir cette suite afin que

$$|d\rho_l|(x) \leq \frac{1}{l}, \ \forall x \in M, \ l \in N.$$

Alors on a $D(\rho_l\sigma) = d\rho_l.\sigma$ et donc

$$\|D\rho_l\sigma\|_{L^2} \leq \|\sigma\|_{L^2}/l.$$

Cette inégalité et l'inégalité

$$C(K)\,\|\sigma\|_W \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)}, \ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E)$$

permettent de démontrer que σ est dans W, i.e., la suite $\rho_l\sigma$ est de Cauchy dans W, elle converge donc vers σ.

Soit $W(M-K)$ le complètè de $C_0^\infty(M-K,E)$ pour la norme de W, l'hypothèse dit que cet espace est aussi le complètè de $C_0^\infty(M-K,E)$ pour la norme $\sigma \mapsto \|D\sigma\|_{L^2}$. Autrement dit l'opérateur $D : W(M-K) \longrightarrow L^2(M-K)$ est injectif et d'image fermée, il y a donc un opérateur continu $P : L^2(M-K,E) \longrightarrow W(M-K)$ qui est un inverse à gauche de D, i.e.,

$$P \circ D\sigma = \sigma, \ \forall \sigma \in W(M-K)$$
$$D \circ P\sigma = \sigma - H\sigma, \ \forall \sigma \in L^2(M-K),$$

où H est la projection orthogonale de $L^2(M-K)$ sur $\{\sigma \in L^2(M-K,E),\ D\sigma = 0\}$; c'est aussi la projection sur l'orthogonal de $D\,C_0^\infty(M-K,E)$. Puis soit $\Gamma : L^2_{\text{comp}}(M,E) \longrightarrow H^1_{\text{loc}}(M,E)$ une parametrice pour D, i.e., on a

$$\begin{aligned} \Gamma \circ D\sigma &= \sigma - S_1\sigma, \\ D \circ \Gamma\sigma &= \sigma - S_2\sigma,\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M,E), \end{aligned}$$

où $S_1,\ S_2$ sont des opérateurs à noyau lisse. Soient:

i) ρ une fonction lisse à support dans $M-K$ et valant 1 sur $M-\tilde{K}$ où $\tilde{K}$ est un voisinage compact de K,
ii) φ une fonction lisse à support dans $M-K$ valant 1 sur le support de ρ,
iii) ϕ une fonction lisse à support compact dans $\tilde{K}$ valant 1 sur le support de $1-\rho$.

Formons alors

$$G = \phi\Gamma(1-\rho) + \varphi P\rho,$$

et montrons que G convient. Par construction G opère continûment de L^2 dans W, car $\phi\Gamma(1-\rho)$ opère continûment de $L^2(M)$ dans $H^1_0(\tilde{K})$ et $P\rho$ opère continûment de L^2 dans $W(M-K)$ qui est sous-espace fermé de $W(M,E)$ et enfin l'opérateur multiplication par $1-\varphi$ est un opérateur continu de W sur lui-même et il en est donc de même de l'opérateur de multiplication par φ.

On calcule alors:

$$G \circ D = Id_W - \phi S_1(1-\rho) + \phi\Gamma d\rho - \varphi P d\rho.$$

L'opérateur $\phi S_1(1-\rho)$ est un opérateur compact car son noyau est lisse à support compact. Puis les opérateurs $\phi\Gamma d\rho,\ \varphi P d\rho$ sont aussi compact car d'après le lemme (1.5) les opérateurs $d\rho,\, d\varphi : W \longrightarrow L^2$ sont compacts.

Remarquons qu'une norme équivalente à celle définie par (1.4) est

$$N_{\tilde{K}}(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(\tilde{K})} + \|D\sigma\|^2_{L^2(M)}},$$

ainsi nous avons cette autre caractérisation d'un opérateur non-parabolique à l'infini:

Corollaire 1.6. *Un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ sur une variété riemannienne complète (M,g) est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un compact K de M tel que si l'on complète $C_0^\infty(E)$ avec la norme*

$$N_K(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|D\sigma\|^2_{L^2(M)}},$$

afin d'obtenir $W(E)$ alors l'injection $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{\text{loc}}(E)$ se prolonge continûment en une injection de $W(E)$ dans H^1_{loc}.

Remarque 1.7. Ceci montre que l'espace de Sobolev $W(E)$ est uniquement déterminé par D et les métriques de E et de M. Et aussi ceci montre que l'espace $H^1(E)$ s'injecte continûment dans $W(E)$. Puisque ce corollaire montre que l'injection

$$(C_0^\infty(E), H^1) \longrightarrow (C_0^\infty(E), W(E))$$

est continue, elle se prolonge donc par densité à une injection continue de $H^1(E)$ dans $W(E)$.

1.c. Indices des opérateurs non-paraboliques à l'infini. Supposons que $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ soit un opérateur de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-gradué, i.e., le fibré E admet la décomposition $E = E^+ \oplus E^-$ et D se décompose en

$$\begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-).$$

Alors si D est non-parabolique à l'infini, on peut définir l'indice de $D^+ : W(E^+) \longrightarrow L^2(E^-)$, celui-ci est bien défini puisque cet opérateur est Fredholm.

Définition. On appelera **indice étendu** de D^+ cet indice et on notera

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \dim\{\sigma \in W(E^+),\ D^+\sigma = 0\} - \dim\{\sigma \in L^2(E^-),\ D^-\sigma = 0\}.$$

Nous adoptons ce terme d'indice étendu car on verra en 2.c, dans le cas des variétés à bouts cylindriques que les solutions de l'équation $\{D\sigma = 0,\ \sigma \in W\}$ sont exactement les solutions étendues au sens de [**A-P-S**].

Ensuite une solution L^2 à cette équation est aussi dans W, en effet une telle solution est dans $H^1(M, E)$ donc dans W par (1.7). Notons $h_\infty(D^+)$ la codimension de l'espace $\{\sigma \in L^2(E^+),\ D^+\sigma = 0\}$ dans l'espace $\{\sigma \in W(E^+),\ D^+\sigma = 0\}$, en quelque sorte $h_\infty(D^+)$ est la dimension des valeurs à l'infini des solutions de cette équation puisque les solutions L^2 sont en un certain sens celle qui s'annulent à l'infini. Cette dernière remarque est encore justifiée par [**A-P-S**]. Ainsi on relie indice L^2 et indice étendu

$$\operatorname{ind}_e D^+ = h_\infty(D^+) + \operatorname{ind}_{L^2} D^+.$$

2. Exemples d'opérateurs non-paraboliques à l'infini.

Préambule. La condition de non-parabolicité à l'infini ne dépend que de la géométrie à l'infini de la variété et de l'opérateur de type Dirac, en conséquence on peut construire d'autres exemples en recollant par somme connexe les exemples que nous donnerons ici.

2.a. Exemples reposant sur la formule de Bochner-Weitzenbock. Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de Dirac généralisé sur une variété riemannienne complète (M,g). Nous savons que l'opérateur D^2 admet la décomposition suivante

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ est un champ d'endomorphisme symétrique de E s'exprimant à l'aide de la courbure de E et de TM, et où ∇ est la connexion avec laquelle on a défini l'opérateur de Dirac généralisé D. On a la formule:

$$(\nabla^*\nabla\sigma)(x) = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\sigma\,(x),$$

où $\{e_i\}_i$ est un repère orthornormée local qui vérifie $\nabla_{e_i}e_i = 0$ en x. Dans [**G-L**], les auteurs montrent que s'il existe un compact K de M et une constante $c > 0$ tels que la plus petite valeur propre de $\mathcal{R}(x)$ est uniformément minorée par c sur $M - K$ alors $D : H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm. Une première généralisation de ce résultat est le suivant:

Théorème 2.1. *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de Dirac généralisé sur une variété riemannienne complète (M,g) et s'il existe un compact K de M, hors duquel la plus petite valeur propre du terme en potentiel-courbure est positive ou nulle, alors D est non-parabolique à l'infini.*

Preuve. Soit K un compact hors duquel $\mathcal{R}$ est positive ou nulle alors on a

$$\|D\sigma\|^2_{L^2} \geq \|\nabla\sigma\|^2_{L^2},\ \forall\sigma \in C_0^\infty(M-K,E).$$

Or nous avons le lemme suivant:

Lemme. *Soit (M^n,g) une variété riemannienne complète connexe alors si K est un compact d'intérieur non-vide, l'espace défini comme le complèté de $C_0^\infty(M)$ munit de la norme $u \mapsto \sqrt{\|du\|^2_{L^2(M)} + \|u\|^2_{L^2(K)}}$ ne dépend pas du compact K, en particulier cet espace s'injecte naturellement dans H^1_{loc}.*

La preuve de ce lemme est aisée, elle est laissée en exercice: Il suffit de comparer deux telles normes pour des compacts K et K' tel que $K \subset K'$ (en raisonnant par l'absurde). On conclut alors la preuve du théorème en utilisant le lemme de Kato qui dit que

$$|\nabla\sigma|(x) \geq |d|\sigma||\,(x).$$

Ainsi le Théorème (1.2) nous dit D est non-parabolique à l'infini et $W(E)$ est le complèté de $C_0^\infty(E)$ muni de la norme

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|D\sigma\|^2_{L^2}}.$$

$\square$

Dans ce cas, $W(E)$ est aussi le complèté de $C_0^\infty(E)$ muni de la norme

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|\nabla\sigma\|^2_{L^2(M)}}.$$

De plus, lorsque (M,g) est non-parabolique, on a $W = H_0^1$ et donc $D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm. On peut donner des exemples d'opérateurs qui satisfont à ces hypothèses, ce sont les opérateurs de signature et de Gauss-Bonnet sur des variétés plates au voisinage de l'infini ou encore l'opérateur de Dirac sur une variété spin à courbure scalaire positive ou nulle au voisinage de l'infini.

2.b. Avec une inégalité de Sobolev. Notation. Si $\lambda(x)$ est la plus petite valeur propre du terme en potentiel courbure apparaissant dans la formule de Bochner-Weitzenböck-Lichnerowicz, nous notons

$$\mathcal{R}_-(x) = \max\{0, -\lambda(x)\}.$$

Lorsque la variété vérifie une inégalité de Sobolev on peut raffiner le dernier théorème:

Théorème 2.2. *Si pour un $p > 2$, (M,g) est une variété riemannienne satisfaisant à l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \le \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé sur M dont le terme $\mathcal{R}$ en potentiel courbure apparaisant dans la formule de Bochner-Weitzenbock vérifie

$$\int_M |\mathcal{R}_-|^{\frac{p}{2}}(x)dx < \infty,$$

alors

$$D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm.

Remarquons que suivant [**C2**], si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une sous-variété d'un espace euclidien dont le vecteur courbure moyenne est dans L^n vérifie cette inégalité de Sobolev pour $p = n$, ceci améliorait le résultat de [**H-S**]. Ce théorème redémontre en partie certains des résultats que nous avions montré dans [**C1**], [**C2**] à propos de la L^2-cohomologie. La preuve est ici plus simple, la difficulté réside bien sûr dans l'étude des opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini, étude faite en première partie.

Preuve. L'opérateur D vérifie les hypothèses de la Proposition 1.3: En effet, l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Kato montre que $H_0^1(E)$ s'injecte dans $L^{\frac{2p}{p-2}}$ donc dans $L^2_{\rm loc}$ et $H^1_{\rm loc}$. Choisissons alors un compact K de M tel que

$$\|\mathcal{R}_-\|_{L^{\frac{p}{2}}(M-K)} \le \mu_p/2,$$

alors si $\sigma \in C_0^\infty(M-K,E)$, on a

$$\begin{aligned}\int_M |D\sigma|^2 &= \int_M |\nabla\sigma|^2 + \langle \mathcal{R}\sigma,\sigma\rangle \\ &\geq \int_{M-K} |\nabla\sigma|^2 - \|\sigma\|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \|\mathcal{R}_-\|_{L^{\frac{p}{2}}(M-K)} \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{M-K} |\nabla\sigma|^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière minoration l'inégalité de Sobolev et l'hypothèse sur l'intégrale de $\mathcal{R}$. □

Ceci peut aisément se généraliser aux inégalités de Sobolev-Orlicz (cf. [**C3**] pour une présentation de ces inégalités). Grâce à [**C4**], nous pouvons obtenir une version localisée de cette proposition ceci grâce au inégalités de Sobolev-Orlicz non uniforme.

Théorème 2.3. *Il existe une constante universelle C telle que si (M,g) est une variété riemannienne complète, dont $(P(t,x,y),\ t \in \mathbf{R}_+,\ x,y \in M)$ est le noyau de l'opérateur de la chaleur et si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé sur M dont le terme $\mathcal{R}$ en potentiel courbure apparaisant dans la formule de Bochner-Weitzenbock vérifie*

$$\int_M \mathcal{R}_-(x)\left(\int_{\frac{C}{\mathcal{R}_-(x)}}^\infty \sqrt{\frac{P(s,x,x)}{s}}ds\right)^2 dx < \infty,$$

alors

$$D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm.

Preuve. Soit $\varphi : \mathbf{R}_+ \times M \longrightarrow \mathbf{R}_+$ la fonction définie par

$$\varphi(\lambda,x) = \lambda\left(\int_{\frac{1}{4\lambda}}^\infty \sqrt{\frac{P(s,x,x)}{s}}ds\right)^2 .$$

A $u \in C_0^\infty(M)$, on associe

$$N(u) = \sup\left\{\int_M uv,\ v \in C_0^\infty(M) \text{ avec } \int_M \varphi(|v|(x),x)dx \leq 1\right\},$$

alors N est une norme et le complèté de $C_0^\infty(M)$ munit de cette norme est un espace de Banach (de Orlicz) constitué de fonctions localement intégrables et pour une constante universelle C, on a l'inégalité de Sobolev

$$N(u^2) \leq C\|du\|_{L^2},\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Ceci a été montré dans [**C4**]. Par définition, on a l'inégalité de Hölder

$$\int_M u^2 v \leq N(u^2)\ \inf\left\{\lambda > 0,\ \int_M \varphi\left(\frac{|v(x)|}{\lambda},x\right)dx \leq 1\right\}.$$

Si $\int_M \varphi(2C\mathcal{R}_-(x), x)dx < \infty$ alors il existe un compact K de M tel que $\int_{M-K} \varphi(2C\mathcal{R}_-(x), x)dx \leq 1$. Ainsi si $\sigma \in C_0^\infty(M-K, E)$, on a

$$\begin{aligned}\int_M |D\sigma|^2 &= \int_M |\nabla\sigma|^2 + < \mathcal{R}\sigma, \sigma > \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{M-K} |\nabla\sigma|^2 + \frac{1}{2}\int_{M-K} |\nabla\sigma|^2 - \frac{1}{2C} N(|\sigma|^2) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{M-K} |\nabla\sigma|^2.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm. □

Grâce aux inégalités de Hardy, obtenues dans [**C5**], nous pouvons trouver d'autres opérateurs non-paraboliques à l'infini, nous nous limitons ici au cas des sous-variétés d'un espace euclidien.

Théorème 2.4. *Soit* $M^{n>2} \longrightarrow \mathbf{R}^N$ *une immersion isométrique d'une variété riemannienne complète alors si* $D : C^\infty(\Lambda^\bullet T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^\bullet T^*M)$ *est l'opérateur de Gauss-Bonnet et si, pour un compact* K *de* M*, la seconde forme fondamentale de l'immersion vérifie*

$$\sup_{x\in M-K} \{\|II\|(x)\|x\|\} < c(n),$$

alors $D : H_0^1(\Lambda^\bullet T^*M) \longrightarrow L^2(\Lambda^\bullet T^*M)$ *est non-parabolique à l'infini.*

Si M *est spin et si, pour un compact* K *de* M*, la seconde forme fondamentale de l'immersion vérifie*

$$\sup_{x\in M-K} \{\|II\|(x)\|x\|\} < (n-2)/(2n+1),$$

alors l'opérateur de Dirac de (M, g) *est non-parabolique à l'infini.*

Preuve. Elle repose sur l'inégalité de Hardy que nous avions montré dans [**C5**]: Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, dx \leq \int_M |du|^2(x) + \frac{n-2}{2}\frac{|k|}{r} u^2\, dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où on a noté $r(x) = \|x\|$. On développe alors la même preuve que précedement: Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé sur une telle variété alors pour $\sigma \in C_0^\infty(M, E)$ on a

$$\begin{aligned}\int_M |D\sigma|^2 &= \int_M |\nabla\sigma|^2 + \langle \mathcal{R}\sigma, \sigma\rangle \\ &\geq \int_M \left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - |k| r \left(\frac{n-2}{2}\right) - \mathcal{R}_- r^2\right] \frac{|\sigma|^2}{r^2} dx.\end{aligned}$$

Ainsi s'il existe un compact K de M tel que

$$\sup_{x\in M-K}\left\{|k|r\left(\frac{n-2}{2}\right)+\mathcal{R}_-r^2\right\}<(n-2)^2/4,$$

alors D est non-parabolique à l'infini. On applique alors ce critère à l'opérateur de Gauss-Bonnet. On a d'abord $|k|\leq n|II|$ puis pour l'opérateur de Gauss-Bonnet on a

$$|\mathcal{R}|(x)\leq \alpha(n)|II|^2(x)$$

et donc que si $|II|(x)\|x\|<\frac{n-2}{n+\sqrt{n^2+4\alpha(n)}}$ alors

$$|k|r\left(\frac{n-2}{2}\right)+|\mathcal{R}_-|r^2<(n-2)^2/4,$$

ce qui assure que l'opérateur est non-parabolique à l'infini. Puis, on applique ce critère à l'opérateur de Dirac sur une variété spin, on utilise le fait que

$$\mathcal{R}=\frac{\mathrm{scal}_g}{4}\mathrm{Id}_S$$

et que $\mathrm{scal}_g=|II|^2-|k|^2$ pour conclure de la même façon. □

2.c. Etude du cas d'une variété riemannienne à bout cylindrique. Nous exposons dans ce paragraphe comment les résultats obtenus par Atiyah, Patodi et Singer ([**A-P-S**]) peuvent s'interpréter dans notre cadre.

Soit (M,g) une variété riemannienne à bout cylindrique, c'est à dire qu'il existe un compact K de M tel que $(M-K,g)$ soit isométrique au produit riemannien $\mathbf{R}_+\times\partial K$. On considère un opérateur de type Dirac $D\,:\,C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(E)$ agissant sur les sections d'un fibré hermitien qui respecte cette géométrie. C'est à dire que la métrique de $E|_{M-K}$ ne dépend pas de la distance à ∂K et on suppose que sur $\mathbf{R}_+\times\partial K$, D prend la forme suivante

$$D=n.\left(\frac{\partial}{\partial r}+A\right),$$

où $n.$ est la multiplication de Clifford par la normale extérieure à $\{r\}\times\partial K$ et A est un opérateur elliptique auto-adjoint sur $E|_{\partial K}$.

Proposition 2.5. *Un tel opérateur est non-parabolique à l'infini.*

Preuve. On peut montrer ce résultat de deux façons. D'abord à l'aide de la Proposition 2.5 de [**A-P-S**], où les auteurs construisent un opérateur de Green sur $E\longrightarrow\mathbf{R}_+\times\partial K$

$$Q\,:\,L^2(\mathbf{R}_+\times\partial K,E)\longrightarrow H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+\times\partial K,E),$$

tel que

$$Q\circ D\sigma=\sigma,\ \forall\sigma\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+\times\partial K,E),$$

ainsi pour tout ouvert borné U de $\mathbf{R}_+\times\partial K$ on a

$$\|\sigma\|_{L^2(U)}=\|QD\sigma\|_{L^2(U)}\leq\|Q\|_{L^2\longrightarrow H^1(U)}\|D\sigma\|_{L^2},\ \forall\sigma\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+\times\partial K,E).$$

L'autre méthode consiste simplement à écrire que pour $\sigma \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial K, E)$, on a

$$\|D\sigma\|_{L^2}^2 = \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right\|_{L^2}^2 + \|A\sigma\|_{L^2}^2,$$

on conclut alors en minorant $\|\frac{\partial\sigma}{\partial r}\|_{L^2}^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}|\sigma(r,\theta)| &= \left|\int_0^r \frac{\partial\sigma}{\partial r}\right| \\ &\leq \sqrt{r}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right\|_{L^2},\end{aligned}$$

d'où en intégrant

$$\|\sigma\|_{L^2([0,T]\times\partial K)}^2 \leq \frac{T^2}{2}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right\|_{L^2}^2.$$

Ce qui montre que D est non-parabolique à l'infini. □

Les auteurs définissent alors la notion de solutions étendues à l'équation $D\sigma = 0$, c'est une solution σ qui est localement dans L^2 et qui vérifie sur $\mathbf{R}_+ \times \partial K$

$$\sigma(y,\theta) = \sigma_0(y,\theta) + \sigma_\infty(\theta),\ (y,\theta) \in \mathbf{R}_+ \times \partial K$$

où σ_0 est dans L^2 et où σ_∞ est dans le noyau de A. Ici σ_∞ est en quelque sorte la valeur à l'infini de σ. En fait nous avons:

Proposition 2.6. *Les solutions étendues de l'équation $D\sigma = 0$ sont exactement les solutions qui appartiennent à l'espace de Sobolev W défini par D.*

Preuve. On utilise la décomposition spectrale de l'opérateur A, on écrit

$$L^2(\partial K, E) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}A} \mathbf{C}\varphi_\lambda,$$

où

$$\begin{aligned}D\varphi_\lambda &= \lambda\varphi_\lambda, \\ \int_{\partial K} |\varphi_\lambda|^2 &= 1.\end{aligned}$$

Une solution de l'équation $D\sigma = 0$ admet au-dessus de $\mathbf{R}_+ \times \partial K$ la décomposition en séries de Fourier suivante:

$$\sigma(y,\theta) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}A} c_\lambda e^{-\lambda y}\varphi_\lambda(\theta);$$

et un calcul élémentaire montre que $\sigma \in W$ si et seulement si $c_\lambda = 0,\ \forall\lambda < 0$, ce qui caractérise aussi les solutions étendues. □

Cette décomposition en série de Fourier a pour conséquence la proposition suivante (Prop. 3.11 de [**A-P-S**]):

Proposition 2.7. *Notons* $P_{\leq 0}$ (*resp.* $P_{<0}$) *le projecteur spectral de* A *associé aux valeurs propres négatives* (*resp. strictement négative*) *de* A *alors*

i) σ *est une solution de l'équation* $\{D\sigma = 0,\ \sigma \in W\}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} D\sigma = 0 & \text{sur } K \\ P_{<0}\sigma = 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

ii) σ *est une solution de l'équation* $\{D\sigma = 0,\ \sigma \in L^2\}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} D\sigma = 0 & \text{sur } K \\ P_{\leq 0}\sigma = 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Supposons maintenant que D soit $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué, et que $A = A^+ + A^-$. Notons $h(E^\pm)$ la dimension de l'espace des solutions L^2 de l'équation $D^\pm\sigma = 0$, et $h_\infty(E^\pm)$ est la codimension de l'espace des solutions L^2 dans l'espace des solutions étendues. On a donc

$$\operatorname{ind}_e D^+ = h_\infty(E^+) + h(E^+) - h(E^-).$$

Une conséquence de la proposition précédente est que cette indice étendu est aussi l'indice de l'opérateur $D^+ : C^\infty(K, E^+, P_{<0}) \longrightarrow C^\infty(K, E^-)$, et le calcul de cet indice par [**A-P-S**] nous permet d'énoncer:

Théorème 2.8. *Si* (M, g) *est une variété riemannienne à bout cylindrique et si* $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ *est un opérateur de type Dirac* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *gradué respectant cette géométrie alors*

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \int_K \alpha_D + \frac{\dim \operatorname{Ker} A^+ - \eta_{A^+}(0)}{2},$$

où:

a) α_D *est la forme caractéristique définie par le symbole principal de* D^+.

b) A^+ *est l'opérateur elliptique du premier ordre agissant sur les sections de* $E^+ \longrightarrow \partial K$ *tel que au dessus de* $\mathbf{R}_+ \times \partial K$, *on ait* $D^+ = n.(\frac{\partial}{\partial r} + A^+)$,

c) $\eta_{A^+}(0)$ *est la valeur en* 0 *de l'extension méromorphe de*

$$\eta_{A^+}(s) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A^+} \operatorname{sign} \lambda |\lambda|^{-s},$$

en fait, cette extension est holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > -1/2$.

3. Le théorème de l'indice relatif.

Le but de cette partie est de montrer que le théorème de l'indice relatif a lieu pour les opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini. L'approche utilisée est celle de M. Gromov et H.B. Lawson ([**G-L**]) qui ont montré ce théorème pour les opérateurs de type Dirac dont le potentiel courbure apparaissant dans la formule de Bochner-Weitzenböck-Lichnerowicz est uniformément strictement positif sur un voisinage de l'infini. Comme l'a montré

N. Anghel dans [**A1**], cette preuve peut s'étendre au cas où 0 n'est pas dans le spectre essentiel de D^2. La méthode consiste à employer soigneusement les opérateurs de Green plutôt que l'opérateur de la chaleur associé à D^2 (cf. [**D**], [**B1**], [**B-M-S**]).

Définition. Deux opérateurs de type Dirac

$$D_1 : C^\infty(M_1, E_1) \longrightarrow C^\infty(M_1, E_1),\ D_2 : C^\infty(M_2, E_2) \longrightarrow C^\infty(M_2, E_2)$$

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradués sont dit isométriques à l'infini, s'il existe deux compacts $K_1 \subset M_1$ et $K_2 \subset M_2$ et une isométrie $\iota : (M_1 - K_1, g_1) \longrightarrow (M_2 - K_2, g_2)$ qui induit une isométrie graduée entre les fibrés et telle que

$$D_1 \circ \iota^* = \iota^* \circ D_2, \text{ au dessus de } M_2 - K_2.$$

Le théorème que nous montrerons est le suivant:

Théorème 3.1. *Si D_1, D_2 sont deux opérateurs de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradués non-paraboliques à l'infini et isométrique à l'infini, alors on a*

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+},$$

où on a noté $\alpha_{D_i^+}$ est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principal de D_i^+.

Nous pouvons maintenant grâce à la discussion de 1.c relier les indices L^2 des deux opérateurs D_1^+ et D_2^+:

Corollaire 3.2.

$$\operatorname{ind}_{L^2} D_1^+ - \operatorname{ind}_{L^2} D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+} - \left(h_\infty(D_1^+) - h_\infty(D_2^+)\right),$$

où $h_\infty(D_i^+)$ est la dimension de l'espace $\ker_W D_i^+ / \ker_{L^2} D_i^+$.

Selon U. Bunke lorsque les fibrés et les variétés riemanniennes sont à géométries bornées, alors cette différence entre les dimensions de l'espace des valeurs à l'infini pourrait s'interpréter comme un indice de scattering entre les opérateurs $D_1^- D_1^+$ et $D_2^- D_2^+$ ([**B1**]). Il serait intéressant de mieux comprendre ceci, afin de rendre calculable ces dimensions.

On peut se demander si le théorème de l'indice relatif L^2 a lieu pour les opérateurs non-paraboliques à l'infini. Ce qui revient à savoir si $h_\infty(D^+)$ ne dépend que de la géométrie à l'infini. En fait ceci n'est pas vrai, considérons la surface $\mathcal{C}$ obtenue en recollant deux plans euclidien le long de deux disques isométriques: C'est donc la variété $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ munit de la métrique

$$g_{r,\theta} = dr^2 + r^2 d\theta^2,\ |r| > 1,\ \theta \in \mathbf{S}^1.$$

Comme cette surface est orientée et de volume infini, il n'y a sur $\mathcal{C}$ ni fonctions, ni $2-$formes harmonique L^2 non-nulles. Puis cette surface est conformément équivalente à la sphère moins deux points; or, en dimension 2, l'espace des $1-$formes harmoniques L^2 est un invariant conforme et il n'y a pas de $1-$formes harmoniques L^2 non-nulles sur la sphère privée de deux points, ainsi il n'y a pas de forme harmonique L^2 sur $\mathcal{C}$ et l'indice L^2 de l'opérateur de Gauss-Bonnet est nul. Si on pouvait appliquer le théorème de l'indice L^2 à l'opérateur de Gauss-Bonnet entre $\mathcal{C}$ et deux copies de $\mathbf{R}^2$, alors sur $\mathcal{C}$, on aurait égalité entre l'indice L^2 et l'intégrale de la forme $KdA/2\pi$ (puisque sur $\mathbf{R}^2$ on a égalité); or on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{K\,dA}{2\pi} = -2$$

ce qui n'est pas égale à 0!

Cependant si $h_\infty(D^+)$ ne dépend pas que de la géométrie à l'infini, $h_\infty(D^+) + h_\infty(D^-)$ ne dépend que de la géométrie à l'infini, on obtient ce résultat en appliquant le théorème de l'indice relatif aux opérateurs $D_1 = D_1^+ + D_1^-$ et $D_2 = D_2^+ + D_2^-$. Puisque ces opérateurs sont autoadjoint, leurs indices L^2 sont nuls, mais leurs formes caractéristiques sont aussi nulles, on obtient:

Corollaire 3.3. *Dans le même contexte qu'au Théorème* 3.1*, on a*

$$h_\infty(D_1^+) + h_\infty(D_1^-) = h_\infty(D_2^+) + h_\infty(D_2^-).$$

En particulier, si $h_\infty(D_1^+) + h_\infty(D_1^-) = 0$*, alors le théorème de l'indice* L^2 *relatif a lieu.*

3.b. Preuve du théorème. Nous commençons par remarquer que les deux expressions dont nous voulons montrer l'égalité ne changent pas lorsqu'on déforme les métriques et les opérateurs de type Dirac sur une partie compacte; on suppose donc que les compacts hors desquels les opérateurs sont isométriques sont à bord lisse et qu'un voisinage de ce bord est isométrique au produit riemannien $]-\varepsilon,\varepsilon[\times\Sigma$ où $\Sigma = \partial K_1 = \partial K_2$; on suppose de plus que les opérateurs respectent cette géométrie. Pour chacun des opérateurs D_1 et D_2, on considère une paramétrice

$$\Gamma_i \ : \ L^2_{\text{comp}}(E_i^+) \longrightarrow H^1_{\text{loc}}(E_i^-),$$

ces parametrices sont des opérateurs à noyau lisse au dehors de la diagonale de $M_i \times M_i$ et elles vérifient :

$$D_i^+\Gamma_i = Id - S_i^-$$
$$\Gamma_i D_i^+ = Id - S_i^+;$$

où S_i^+ et S_i^- sont des opérateurs dont le noyau de Schwarz est lisse.

Nous allons maintenant construire deux parametrices P_1 et P_2 pour D_1^+ et D_2^+ qui agissent continûment de L^2 dans W telle que

$$D_i^+P_i = Id_{L^2} - T_i$$
$$P_iD_i^+ = Id_W - S_i,$$

où $T_i,\ S_i$ sont des opérateurs à trace. Pour conclure, on se servira alors du lemme suivant du à Atiyah [**At**]:

Lemme. *Soit $f\ :\ A \longrightarrow B$ une application linéaire Fredholm entre deux espaces de Hilbert alors si $g\ :\ B \longrightarrow A$ est une application linéaire continue telle que*

$$g \circ f = Id_A - T_A$$
$$f \circ g = Id_B - T_B,$$

où $T_A,\ T_B$ sont des opérateurs à trace, alors

$$\operatorname{ind} f = \operatorname{Tr} T_A - \operatorname{Tr} T_B.$$

Soit Ω l'ouvert $(M_1 - K_1, g_1)$ qui est isométrique à $(M_2 - K_2, g_2)$. On fera souvent et abusivement l'identification entre les fibrés et les sections des fibrés et les opérateurs définis hors de K_1 et K_2, ceci afin d'éviter des notations trop lourdes. Soit H^+ l'opérateurs de projection orthogonale de $W(M_2, E_2^+)$ sur le noyau de D_2^+ et H^- le projecteur L^2-orthogonal sur le noyau L^2 de D_2^-. Ce sont des opérateurs de rang fini donc évidement à trace. Puisque $D_2^+\ :\ W(E_2^+) \longrightarrow L^2(E_2^-)$ est Fredholm, il existe un opérateur de Green continue $G_2\ :\ L^2(E_2^-) \longrightarrow W(E_2^+)$ tel que

$$D_2^+ G_2 = Id_{L^2} - H^-$$
$$G_2 D_2^+ = Id_W - H^+.$$

Soient ρ une fonction lisse à support dans Ω qui vaut 1 hors de $]0,\varepsilon[\times\Sigma$ et φ une fonction lisse à support dans Ω qui vaut 1 sur le support de ρ, et ϕ_i des fonctions lisses à support compacts dans $K_i \cup]0,\varepsilon[\times \partial K_i$ et qui valent 1 sur le support de $1-\rho$.

On considère alors les opérateurs

$$P_i = \phi_i \Gamma_i (1-\rho) + \varphi G_2 \rho.$$

Soit $W(\Omega)$ le complété de l'espace $C_0^\infty(\Omega, E_i^+)$ dans $W(\Omega, E_i^+)$, pour $i = 1, 2$, ces espaces sont les mêmes et l'opérateur $\varphi G_2 \rho$ agit continûment de $L^2(M_i, E_i^-)$ dans $W(\Omega) \subset W(E_i^+)$. Puis comme Γ_i agit continûment de L^2_{loc} dans H^1_{loc}, $\phi_i \Gamma_i (1-\rho)$ agit continûment de $L^2(E_i^-)$ dans $H_0^1(K_i \cup]0,\varepsilon[\times \partial K_i, E_i^+)$ donc dans $W(E_i^+)$. P_i est donc un opérateur borné de $L^2(E_i^-)$ dans $W(E_i^+)$. Puis on a les identités suivantes

$$D_i^+ P_i = Id_{L^2} - \phi_i S_i^-(1-\rho) + d\phi_i \Gamma_i (1-\rho) + d\varphi G_2 \rho - \varphi H^- \rho,$$
$$P_i D_i^+ = Id_W - \phi_i S_i^+(1-\rho) + \phi_i \Gamma_i d\rho - \varphi G_2 d\rho - \varphi H^+ \rho.$$

Montrons maintenant que les opérateurs apparaissant au second menbre de cette expression sont à traces. Il est évident que les opérateurs $\phi_i S_i^{\pm}(1-\rho)$ sont à trace puisque ce sont des opérateurs dont le noyau est lisse à support compact. De même, les opérateurs $\varphi H^{\pm}\rho$ le sont puisque $H^{\pm}$ sont des opérateurs de rang fini.

Puis comme les opérateurs Γ_i sont des opérateurs à noyau lisse au dehors de la diagonale et que $|d\phi_i|(1-\rho)=0$, les opérateurs $d\phi_i\Gamma_i(1-\rho)$ sont à trace car leur noyau est lisse à support compact.

Prouvons maintenant que l'opérateur $d\varphi G_2\rho$ est à trace dans $L^2(\Omega, E_i^-)$: On a

$$d\varphi G_2\rho\left(D_2^+G_2\right) = d\varphi G_2\rho - d\varphi G_2\rho H^-$$

mais aussi

$$\begin{aligned} d\varphi G_2\rho\left(D_2^+G_2\right) &= d\varphi G_2(\rho D_2^+)G_2 \\ &= d\varphi G_2 D_2^+\rho G_2 - d\varphi G_2 d\rho G_2 \\ &= d\varphi(Id_W - H^+)\rho G_2 - d\varphi G_2 d\rho G_2, \end{aligned}$$

or $|d\varphi|\rho = 0$ et donc on obtient finalement

$$d\varphi G_2\rho = d\varphi G_2\rho H^- - d\varphi H^+\rho G_2 - d\varphi G_2 d\rho G_2.$$

Il suffit maintenant de montrer que $d\varphi G_2 d\rho G_2$ est à trace. Comme $|d\varphi|\,|d\rho| = 0$, l'opérateur $d\varphi G_2 d\rho$ est un opérateur dont le noyau est lisse à support compact, en effet G_2 est un opérateur à noyau lisse au dehors de la diagonale; puis si χ est une fonction lisse à support compact et valant 1 sur le support de $d\rho$ alors on a $d\varphi G_2 d\rho G_2 = d\varphi G_2 d\rho\chi G_2$; mais χG_2 agit continûment de $L^2(E_i^-)$ dans $L^2(E_i^+)$, et $d\varphi G_2 d\rho$ est de Hilbert-Schmidt $d\varphi G_2 d\rho G_2$ est bien un opérateur à trace.

Il reste à prouver que l'opérateur $T = \phi_i\Gamma_i d\rho - \varphi G_2 d\rho$ est à trace. On commence pour cela à écrire $\phi_i = \hat{\phi}_i + \check{\phi}_i$ où $\check{\phi}_i = 0$ sur le support de $d\rho$ et où le support de $\hat{\phi}_i$ est dans $]0,\varepsilon[\times\partial K$, ainsi

$$T = \check{\phi}_i\Gamma_i d\rho + \hat{\phi}_i\left(\Gamma_i - G_2\right)d\rho + \left(\hat{\phi}_i - \varphi\right)G_2 d\rho.$$

Alors les opérateurs $\check{\phi}_i\Gamma_i d\rho$, $\hat{\phi}_i\left(\Gamma_i - G_2\right)d\rho$ sont des opérateurs dont le noyau est lisse à support compact, donc ils sont à trace. Puis on montre que $\left(\hat{\phi}_i - \varphi\right)G_2 d\rho$ est à trace de la même façon que pour montrer que $d\varphi G_2\rho$ est à trace, ceci en considèrant l'expression

$$G_2 D_2^+\left(\hat{\phi}_i - \varphi\right)G_2 d\rho.$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme et nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+\\
&= \operatorname{Tr}_{W(E_1^+)} \phi_1 S_1^+(1-\rho) - \phi_1\Gamma_1 d\rho + \varphi G_2 d\rho + \varphi H^+\rho\\
&\quad - \operatorname{Tr}_{L^2(E_1^-)} \phi_1 S_1^-(1-\rho) + d\phi_1\Gamma_1(1-\rho) + d\varphi G_2\rho - \varphi H^-\rho\\
&\quad - \operatorname{Tr}_{W(E_2^+)} \phi_2 S_2^+(1-\rho) - \phi_2\Gamma_2 d\rho + \varphi G_2 d\rho + \varphi H^+\rho\\
&\quad + \operatorname{Tr}_{L^2(E_2^-)} \phi_2 S_2^-(1-\rho) + d\phi_2\Gamma_2(1-\rho) + d\varphi G_2\rho - \varphi H^-\rho.
\end{aligned}$$

Puis en se servant du fait que $|d\varphi|\rho = 0$ et $|d\phi_i|(1-\rho) = 0$ on a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+\\
&= \operatorname{Tr}_{W(E_1^+)} \phi_1 S_1^+(1-\rho) - \operatorname{Tr}_{L^2(E_1^-)} \phi_1 S_1^-(1-\rho)\\
&\operatorname{Tr}_{W(E_2^+)} \phi_2\Gamma_2 d\rho + \varphi G_2 d\rho - \operatorname{Tr}_{W(E_1^+)} \phi_1\Gamma_1 d\rho - \varphi G_2 d\rho\\
&\quad - \operatorname{Tr}_{W(E_2^+)} \phi_2 S_2^+(1-\rho) + \operatorname{Tr}_{L^2(E_2^-)} \phi_2 S_2^-(1-\rho).
\end{aligned}$$

Puis on écrit comme précédement $\phi_i = \hat{\phi}_i + \check{\phi}_i$ de telle façon que $\check{\phi}_1 = \check{\phi}_2$ sur $]0,\varepsilon[\times\Sigma$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}_{W(E_2^+)} [\phi_2\Gamma_2 d\rho + \varphi G_2 d\rho] - \operatorname{Tr}_{W(E_1^+)} \left[\phi_1\Gamma_1 d\rho - \varphi G_2 d\rho + \varphi H^+\rho\right]\\
&= \operatorname{Tr}_W \check{\phi}_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)d\rho.
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = {}& \operatorname{Tr}_{W(E_1^+)} S_1^+(1-\rho) - \operatorname{Tr}_{L^2(E_1^-)} S_1^-(1-\rho)\\
&\operatorname{Tr}_{W(E_1^+)} \check{\phi}_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)d\rho\\
&- \operatorname{Tr}_{W(E_2^+)} S_2^+(1-\rho) + \operatorname{Tr}_{L^2(E_2^-)} S_2^-(1-\rho).
\end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que cette expression ne dépend plus de la géométrie du voisinage de l'infini Ω. Si on considère les variétés riemanniennes compactes $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ où $\tilde{M}_1$ est le double de K_1, i.e., $\tilde{M}_1 = K_1\#(-K_1)$ et où $\tilde{M}_2$ est la somme connexe de K_2 et de K_1 le long de leurs bords, i.e., $\tilde{M}_2 = K_2\#_\Sigma(-K_1)$, alors nous avons naturellement des opérateurs de type Dirac sur $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$

$$\tilde{D}_i : C^\infty(\tilde{M}_i, \tilde{E}_i) \longrightarrow C^\infty(\tilde{M}_i, \tilde{E}_i)$$

tel que sur $K_i \subset \tilde{M}_i$, $\tilde{D}_i$ soit l'opérateur D_i et qu'au dessus de $\tilde{M}_1 - \tilde{K}_1$ et de $\tilde{M}_2 - \tilde{K}_2$, les opérateurs $\tilde{D}_1$ et $\tilde{D}_2$ soient isométriques. Alors en refaisant la même construction que précédement on obtient la même expression pour la différence entre les indices de $\tilde{D}_1^+$ et $\tilde{D}_2^+$, on a donc

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \operatorname{ind} \tilde{D}_1^+ - \operatorname{ind} \tilde{D}_2^+,$$

le théorème de l'indice relatif est alors une conséquence du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. □

4. Application du théorème de l'indice relatif.

Nous commençons par décrire un autre exemple d'opérateurs non-paraboliques à l'infini.

4.a. Produit riemannien et opérateurs non-paraboliques à l'infini. Soit $D_1 : C^\infty(M_1, E_1) \longrightarrow C^\infty(M_1, E_1)$ et $D_2 : C^\infty(M_2, E_2) \longrightarrow C^\infty(M_2, E_2)$ deux opérateurs de type Dirac, on peut construire, au dessus du produit riemannien $M_1 \times M_2$, le fibré $\pi_1^*(E_1) \otimes \pi_2^*(E_2)$, où $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ est la projection sur le $i-$ième facteur. Sur ce fibré agit l'opérateur de type Dirac $D = D_1 + D_2$ et on a la:

Proposition 4.1. *Si la variété M_1 est compact et si D_2 est non-parabolique à l'infini alors l'opérateur*

$$\begin{aligned} D = D_1 + D_2 \, : \, & C^\infty\left(M_1 \times M_2, \pi_1^*(E_1) \otimes \pi_2^*(E_2)\right) \\ & \longrightarrow C^\infty\left(M_1 \times M_2, \pi_1^*(E_1) \otimes \pi_2^*(E_2)\right) \end{aligned}$$

est non-parabolique à l'infini et si D_1 et D_2 sont $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradués alors en notant $h(D_1^\pm) = \dim \ker_{L^2} D_1^\pm$, on a

$$\operatorname{ind}_e D = \operatorname{ind}_{L^2} D_1^+ \operatorname{ind}_{L^2} D_2^+ + h_\infty(D_2^+)h(D_1^+) + h_\infty(D_2^-)h(D_1^-).$$

Preuve. En effet, soit K un compact de M_2 tel que pour tout ouvert U relativement compact dans $M_2 - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$C(U) \, \|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D_2\sigma\|_{L^2(M_2-K)}, \ \forall \sigma \in C_0^\infty(M_2 - K, E_2).$$

Alors en utilisant le théorème de Fubini, on obtient pour

$$\sigma \in C_0^\infty\left((M_1 \times M_2) - (M_1 \times K), \pi_1^*(E_1) \otimes \pi_2^*(E_2)\right) \tag{4.2}$$

$$C(U) \, \|\sigma\|_{L^2(M_1 \times U)} \leq \|D_2\sigma\|_{L^2(M_1 \times (M_2-K))} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M_1 \times (M_2-K))},$$

ce qui prouve que D est non-parabolique à l'infini.

Le calcul de l'indice étendu résulte alors du fait que

$$\begin{aligned} \ker_{L^2} D &\simeq \ker_{L^2} D_1 \otimes \ker_{L^2} D_2 \\ \ker_W D &\simeq \ker_{L^2} D_1 \otimes \ker_W D_2. \end{aligned}$$

Le premier résulat est classique, pour le second, on utilise la décomposition spectrale de D_1:

$$L^2(M_1, E_1) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} D_1} \mathbf{C}\varphi_\lambda,$$

où

$$\begin{aligned} D_1\varphi_\lambda &= \lambda\varphi_\lambda, \\ \int_{M_1} |\varphi_\lambda|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Alors une solution de l'équation $D\sigma = 0$ sur $M_1 \times M_2$ admet la décomposition suivante

$$\sigma = \sum_\lambda \varphi_\lambda \otimes \sigma_\lambda,$$

avec $\lambda\sigma_\lambda + D_2\sigma_\lambda = 0$ car $D\sigma = 0$ et $\lambda^2\sigma_\lambda + D_2^2\sigma_\lambda = 0$ car $D^2\sigma = (D_1^2 + D_2^2)\sigma = 0$. Si σ est dans l'espace W alors $D\sigma$ est dans L^2 donc $D_2\sigma$ aussi, ceci implique que pour $\lambda \neq 0$ alors $\sigma_\lambda = -D_2\sigma_\lambda/\lambda \in L^2$ mais alors la seconde égalité implique que $\sigma_\lambda = 0$. Ceci montre l'inclusion

$$\ker_W D \subset \ker_{L^2} D_1 \otimes \ker_W D_2;$$

l'autre inclusion s'obtient facilement grâce à L'inégalité 4.2. $\square$

4.b. Un calcul d'indice.

Théorème 4.3. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète orientée telle qu'il existe un compact K de M avec*

$$M - K = \coprod E_i$$

où chaque bout E_i est isométrique au produit riemannien $\Sigma_i \times (\mathbf{R}^{n_i} - B_{R_i})$, Σ_i étant une variété riemannienne compacte et B_R la boule euclidienne de rayon R. Notons D_{GB} l'opérateur de Gauss-Bonnet sur M et D_S l'opérateur de signature sur M (si $\dim M = 0 \bmod 4$) alors ces opérateurs sont non-paraboliques à l'infini et on a

$$\operatorname{ind}_e D_{GB}^+ = \int_M \Omega + \sum_{n_i=1,2} n_i q(\Sigma_i)$$

$$\operatorname{ind}_e D_S^+ = \int_M \xi + \sum_{n_i=1,2} n_i q(\Sigma_i)$$

où on a noté $q(\Sigma_i)$ la somme des nombres de Betti réels de Σ_i:

$$q(\Sigma_i) = \sum_{k=0}^{\dim \Sigma_i} b_k(\Sigma_i)$$

et où Ω est la n-forme d'Euler sur M et ξ la forme caractéristique de D_S^+, qui est la composante de plus haut degré du L-genre de M. De plus, si pour chaque bout on a $n_i \geq 3$, alors on a les égalités

$$\operatorname{ind}_{L^2} D_{GB}^+ = \int_M \Omega$$

$$\operatorname{ind}_{L^2} D_S^+ = \int_M \xi.$$

Dans le cas où les bouts de M étaient euclidiens, N. Borisov, W. Muller, R. Schrader avaient déjà obtenu ce résultat. Signalons aussi que dans ce cas, on peut calculer la dimension de l'espace des k-formes harmoniques L^2 ([**C1**]).

Preuve. La proposition précédente et le Théorème 2.1 nous assurent que les opérateurs de Gauss-Bonnet et de Signature sont non-paraboliques à l'infini sur les variétés $\Sigma_i \times \mathbf{R}^{n_i}$, et puisqu'au voisinage de l'infini M est isométrique à une union de telles variétés, les opérateurs considérés sont bien non-paraboliques à l'infini. On applique alors le théorème de l'indice relatif entre l'opérateur de Gauss-Bonnet sur M et sur $\cup_i(\Sigma_i \times \mathbf{R}^{n_i})$, ceci donne

$$\mathrm{ind}_e\, D_{GB}(M) - \sum_i \mathrm{ind}_e\, D_{GB}(\Sigma_i \times \mathbf{R}^{n_i}) = \int_M \Omega.$$

On utilise alors le fait que sur $\mathbf{R}^{n_i}$, il n'y a pas de formes harmoniques L^2 non-nulles, que si $n_i \geq 3$, il n'y en a pas dans $W = H_0^1$ et que pour $n_i = 1, 2$ les formes harmoniques qui sont dans W sont les formes parallèles. L'analyse est la même pour l'opérateur de signature. □

References

[An] A. Ancona, *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lectures Notes, **1427** (1990).

[A1] N. Anghel, *An abstract index theorem on non-compact Riemannian manifolds*, Houston J. Math., **19**(**2**) (1993), 223-237.

[A2] ———, *Index theory for short-ranged fields in higher dimensions*, J. Funct. Anal., **119** (1994), 19-36.

[A3] ———, *On the index of Callias type operators*, GAFA, **3**(**5**) (1995), 432-438.

[At] M.F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque, **32**, **33** (1976), 43-72.

[A-P-S] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry* I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975), 43-69.

[B-M-S] N.V. Borisov, W. Müller and R. Schrader, *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. Math. Phys., **114** (1988), 475-513.

[Br] J. Brüning, *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry, **32** (1990), 491-532.

[B1] U. Bunke, *Relative index theory*, J. Funct. Anal., **105** (1992), 63-76.

[B2] ———, *A K-theoretic relative index theorem and Callias-type Dirac operator*, Math. Ann., **303**(**2**) (1995), 241-279.

[Ca] C. Callias, *Axial anomalies and index theorems on open spaces*, Commun. Math. Phys., **62** (1978), 213-234.

[C1] G. Carron, *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, Math. Ann., **314** (1999), 613-639.

[C2] ______, *Une suite exacte en L^2-cohomologie*, Duke Math. Journal, **95** (1998), 343-372.

[C3] ______, *Inégalités de Faber-Krahn et inclusion de Sobolev- Orlicz*, Potential Analysis, **7** (1997), 555-575.

[C4] ______, *Inégalités de Sobolev-Orlicz non-uniformes*, Colloq. Math., **77**(**2**) (1998), 163-178.

[C5] ______, *Inégalité de Hardy sur les variétés riemanniennes*, J. Math. Pures Appli., **76** (1997), 883-891.

[D] H. Donnelly, *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal., **75** (1987), 362-381.

[F] D. Fischer-Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Invent. Math., **82** (1985), 121-132.

[G-L] M. Gromov and H.B. Lawson, Jr, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S., **58** (1983), 83-196.

[H-S] D. Hoffman and J. Spruck, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 7156-727.

[L] J. Lott, *L^2-cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifold*, Geom. Funct. Anal., **7** (1997), 81-119.

Received May 26, 1999 and revised September 10, 1999.

Universite de Nantes
44322 Nantes cedex 02
France
E-mail address: Gilles.Carron@math.univ-nantes.fr