Pacific Journal of Mathematics

SOMMES DE MODULES DE SOMMES D'EXPONENTIELLES

Etienne Fouvry and Philippe Michel

Volume 209 No. 2 April 2003

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 209, No. 2, 2003

SOMMES DE MODULES DE SOMMES D'EXPONENTIELLES

Etienne Fouvry and Philippe Michel

Let $\mathrm{Kl}(a,b;n)$ be the usual Kloosterman sum modulo n, with coefficients a and b. We give upper and lower bounds for the sum $\sum_{n\le x}|\mathrm{Kl}(1,1;n)|/\sqrt{n}$, and for related sums, by using large sieve techniques and Deligne-Katz theory of exponential sums. Extensions to more general exponential sums of dimension one are also given.

1. Introduction.

Soient a et b des entiers et n un entier ≥ 1. On rappelle que la somme de Kloosterman $\mathrm{Kl}(a,b;n)$, de dénominateur n et de coefficients a et b, est définie par

$$\mathrm{Kl}(a,b;n)=\sum_{(m,n)=1}\exp\left(2\pi i\frac{am+b\overline{m}}{n}\right).$$

Systématiquement, le symbole $\overline{m}$ dans la fraction $\frac{\overline{m}}{n}$ désigne l'inverse multiplicatif de m modulo n, $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier n, et on réserve la lettre p aux nombres premiers. Les sommes de Kloosterman jouent un rôle crucial dans l'actuelle théorie analytique des nombres, au confluent de la géométrie algébrique et de la théorie des formes modulaires. Rappelons que ce sont des nombres réels non nuls qui vérifient, entre autres, les propriétés suivantes:

– *Multiplicativité croisée*: Pour $(n_1,n_2)=1$, on a la relation

$$\mathrm{Kl}(a,b;n_1n_2)=\mathrm{Kl}(a,b\overline{n_2}^2;n_1)\mathrm{Kl}(a,b\overline{n_1}^2;n_2).$$

– *Majoration individuelle*:

$$|\mathrm{Kl}(a,b;n)|\leq(a,b,n)^{\frac12}2^{\omega(n)}n^{\frac12},\tag{1.1}$$

conséquence de la multiplicativité croisée, de la démonstration par Weil, de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis (qui donne (1.1) lorsque $n=p$) et de l'étude, due à divers auteurs, des sommes de Kloosterman de dénominateur p^k $(k\geq 2)$.

L'objet de cet article est de s'intéresser, lorsque a et b sont fixés (disons $a=b=1$, pour fixer les idées), à l'optimalité de l'inégalité (1.1), lorsque n parcourt l'ensemble des entiers. Dans ce but on introduit les quantités

$$A^*(x)=\sum_{n\le x}\left|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{2^{\omega(n)}\sqrt{n}}\right|,$$

et

$$\widetilde{A}(x)=\sum_{n\le x}\left|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\right|,$$

qui vérifient donc les inégalités triviales

$$A^*(x)\le x \quad (x\ge 1), \tag{1.2}$$

et

$$\widetilde{A}(x)\le\sum_{n\le x}2^{\omega(n)}\le\left(\frac{6}{\pi^2}+o(1)\right)x\log x\ (x\longrightarrow\infty). \tag{1.3}$$

Les parties droites des inégalités (1.2) et (1.3) peuvent être améliorées d'une constante multiplicative, en injectant des majorations plus précises que (1.1) dans le cas où $n=p^k$ $(k\ge 2)$, mais nous sommes concernés par des gains plus substantiels, puisque nous montrerons les encadrements:

Théorème 1.1. *Il existe une constante absolue c_1^* et, pour tout k, une constante $c_0^*(k)>0$, telles que, pour $x\ge 3$, on ait les inégalités*

$$c_0^*(k)\frac{x}{\log x}(\log\log x)^k\le A^*(x)\le c_1^*\ x\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-\frac{4}{3\pi}}. \tag{1.4}$$

Théorème 1.2. *Il existe une constante absolue $\widetilde{c}_1$ et, pour tout k, une constante $\widetilde{c}_0(k)>0$, telles que, pour $x\ge 3$, on ait les inégalités*

$$\widetilde{c}_0(k)\frac{x}{\log x}(\log\log x)^k\le \widetilde{A}(x)\le \widetilde{c}_1 x(\log\log x)\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-\frac{8}{3\pi}}. \tag{1.5}$$

Ainsi, par rapport aux majorations triviales (1.2) et (1.3), on gagne respectivement $(\log x)^{-0{,}575587\ldots}$ et $(\log x)^{-1{,}151174\ldots}$. À notre connaissance, la première majoration non triviale de $A^*(x)$ ou de $\widetilde{A}(x)$ est due à Hooley ([**Ho**] Theorem 3), où il montre, pour u et v entiers la relation

$$\sum_{n\le x}\mathrm{Kl}(u,v;n)=O\left(x^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{d|v}d^{-\frac{1}{2}}\right)(\log x)^{\sqrt{2}-1}(\log\log x)^{c_2}\right), \tag{1.6}$$

où c_2 est une certaine constante. La preuve par Hooley de (1.6) donne en fait une majoration de $\sum_{n\le x}|\mathrm{Kl}(u,v;n)|$, qui conduit donc, dans notre cas, à

$$\widetilde{A}(x)\le c_3 x(\log x)^{\sqrt{2}-1}(\log\log x)^{c_2}, \tag{1.7}$$

pour un certain $c_3 > 0$, c'est-à-dire un gain de $(\log x)^{-0,585786\dots}$, par rapport à la majoration triviale (1.3).

La minoration (1.4) de $A^*(x)$ améliore notablement celle en

$$\widetilde{A}(x) \geq c_4 x / \log^2 x, \tag{1.8}$$

conséquence directe de ([**Mi1**] Théorème 1) où il est montré, que pour $x \longrightarrow \infty$, on a

$$\sharp \left\{(p_1, p_2)\;; x < p_1,\ p_2 < 2x,\ |\mathrm{Kl}(1,1;p_1p_2)| \geq 0,64\sqrt{p_1p_2}\right\} \gg \frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Autant on devine une différence de comportement à l'infini des quantités $A^*(x)$ et $\widetilde{A}(x)$, dans les majorations (1.4) et (1.5), autant notre preuve ne permet guère de différencier les minorations de ces fonctions, si ce n'est qu'au §4, nous obtiendrons les constantes $\widetilde{c}_0(k) = 2^{k+3}c_0^*(k)$. Rappelons que l'on sait, grâce à la théorie des formes modulaires, qu'il y a d'énormes compensations entre les signes des sommes de Kloosterman, puisqu'on a pour tout $\epsilon > 0$, la majoration ([**Ku**] et [**D-I**])

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} = O_\epsilon\left(x^{\frac{2}{3}+\epsilon}\right), \tag{1.9}$$

qu'il convient de comparer avec (1.3), alors que la conjecture de Linnik-Selberg prédit même une majoration en $O_\epsilon(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$. Enfin, on ne sait pas si la majoration (1.9) continue d'être vraie si on insère au dénominateur de la partie gauche, le facteur arithmétique $2^{\omega(n)}$.

Ainsi le Théorème 1.2 répond de façon plus précise que (1.7) et (1.8), à la question de l'origine des compensations dans (1.9): de façon succincte, on peut dire que le fait que les modules $|\mathrm{Kl}(1,1;n)|$ $(n \leq x)$ soient petits en moyenne ne fait gagner, par rapport à la majoration triviale

$$\left|\sum_{n \leq x} \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \widetilde{A}(x) = O(x \log x)$$

qu'un certain facteur X, vérifiant $\log^{-2} x \ll X \ll (\log x)^{-1,151174}$. En conclusion, on peut affirmer que dans (1.9), la plus grande partie des compensations provient des changements de signe des sommes de Kloosterman.

En fait, comme nous le fit remarquer R. de la Bretèche, on peut, dans les minorations (1.4) et (1.5), donner explicitement les fonctions $c_0^*(k)$ et $\widetilde{c}_0(k)$, puis prendre k comme fonction de x. Nous donnerons, au paragraphe 5, des indications menant au:

Théorème 1.3. *Il existe δ, strictement supérieur à $5/12$, tel que, pour $x \geq 3$, on ait les minorations*

$$A^*(x) \gg \frac{x}{\log x} \exp\left((\log\log x)^\delta\right),$$

et

$$\widetilde{A}(x) \gg \frac{x}{\log x} \exp\left((\log\log x)^\delta\right).$$

À la différence des Théorèmes 1.1 et 1.2, la méthode menant au Théorème 1.3 n'est pas directement transposable au cas des sommes d'exponentielles plus générales (cf. *infra* Théorème 1.5 et §6), ce qui explique pourquoi nous avons séparé ces divers énoncés.

La minoration de $\widetilde{A}(x)$ donnée au Théorème 1.3 répond aussi de façon plus précise que (1.8), à une question de Serre évoquée dans ([**Sa**] p. 33), sur le comportement asymptotique de $\mathrm{Kl}(1,1;n)$:

Corollaire 1.4. *Pour n tendant vers l'infini, on a la relation*

$$\mathrm{Kl}(1,1;n) = \Omega\left(\sqrt{n}.\frac{\exp\left((\log\log n)^{\frac{5}{12}}\right)}{\log n}\right).$$

La démonstration des Théorèmes 1.1 et 1.2 repose essentiellement sur les propriétés multiplicatives statistiques des entiers, la multiplicativité croisée des sommes de Kloosterman, des majorations de crible et surtout, sur une troisième propriété de ces sommes, découverte par Katz ([**Ka2**] Example 13.6):

– *loi de Sato-Tate verticale:* Soit $\theta_{p,m}$ défini par l'égalité

$$\frac{\mathrm{Kl}(1,m;p)}{2\sqrt{p}} = \cos\theta_{p,m}\ (0 \leq \theta_{p,m} \leq \pi),$$

alors, pour $p \longrightarrow \infty$, l'ensemble d'angles $\{\theta_{p,m};\ 1 \leq m \leq p-1\}$ est équiréparti sur $[0,\pi]$, suivant la mesure de Sato-Tate $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$, c'est-à-dire que pour tout $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, on a, pour $p \longrightarrow \infty$

$$\frac{1}{p-1}\sharp\{1 \leq m \leq p-1\ ; \alpha \leq \theta_{p,m} \leq \beta\} \longrightarrow \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2 t\ \mathrm{d}t.$$

En fait nous aurons même besoin du même résultat d'équirépartition, mais pour les angles θ_{p,m^2} (voir Lemme 2.1).

Rappelons que la loi de Sato-Tate horizontale, dans la stricte direction de laquelle, il n'y a pour l'instant aucun résultat non trivial, prédit que, pour $x \longrightarrow \infty$, l'ensemble d'angles $\{\theta_{p,1}; p \leq x\}$, est équiréparti sur $[0,\pi]$, suivant la mesure de Sato-Tate ([**Ka1**] Conj. 1.2.5). L'exactitude de cette conjecture entraînerait, pour $x \longrightarrow \infty$, la relation

$$\sum_{p\le x}\left|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;p)}{2\sqrt{p}}\right| \sim \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{x}{\log x}.$$

La recherche d'un équivalent asymptotique des sommes $A^*(x)$ et $\widetilde{A}(x)$ paraît ainsi comme un problème très ardu, malgré l'encadrement étroit que fournissent, pour chacune de ces sommes, les Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3.

On peut étendre les résultats précédents à des sommes de la forme

$$\sum_{n\le x}\left|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{2^{\omega(n)}\sqrt{n}}\right|^{\alpha},$$

ou

$$\sum_{n\le x}\left|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\right|^{\alpha},$$

avec α réel positif fixé, mais il est beaucoup plus intéressant d'étudier les sommes trigonométriques plus générales

$$S_f(m;n) = \sum_{\substack{x \pmod n\\ f(x)\neq\infty}} \exp\left(2\pi i\frac{mf(x)}{n}\right) = \sum_{\substack{x \pmod n\\ (Q(x),n)=1}} \exp\left(2\pi i\frac{mP(x)\overline{Q(x)}}{n}\right),$$

pour:

- $n \ge 1$, $m \in \mathbb{Z}$,
- $f = \frac{P}{Q}$ fraction rationnelle, quotient de deux polynômes P et Q, de $\mathbb{Z}[X]$, premiers entre eux, à coefficients premiers entre eux.

Les sommes $S_f(m;n)$ vérifient elles-aussi la multiplicativité croisée

$$S_f(m;n_1n_2) = S_f(m\overline{n_1};n_2)S_f(m\overline{n_2};n_1), \quad \text{pour } (n_1,n_2)=1,$$

et une majoration due à Weil (cf. [**D**] Formule (3.5.2) p. 191):

$$|S_f(m;p)| \le k_f\sqrt{p} \quad (p \nmid m),$$

où k_f étant un entier parfaitement défini en termes de la géométrie de la fraction f, c'est-à-dire

$$k_f = \max\{\deg P,\ \deg Q\} + \sharp\{\text{ racines distinctes de } Q\ \} - 1.$$

Le cas des $S_f(m;p^a)$, $(a \ge 2)$ mène à des situations délicates à traiter en toute généralité, nous préférons les éviter en ne considérant que des n sans facteur carré. Après ces diverses considérations, nous étudions, pour $x \longrightarrow \infty$, les sommes

$$A_f^*(x) := \sum_{n\le x}\mu^2(n)\left|\frac{S_f(1;\ n)}{k_f^{\omega(n)}\sqrt{n}}\right|,$$

et

$$\widetilde{A}_f(x) := \sum_{n\leq x} \mu^2(n) \left| \frac{S_f(1;\ n)}{\sqrt{n}} \right|,$$

dont des majorations triviales sont respectivement $O(x)$ et $O(x \log^{k_f-1} x)$. Katz ([**Ka3**] 7.9, 7.10, 7.11; voir aussi le début du §5) a prouvé aussi une loi de Sato-Tate verticale pour la plupart des sommes S_f. Ainsi, si on pose

$$\frac{|S_f(m;p)|}{k_f\sqrt{p}} = \cos\theta_{f,p,m} \quad \left(0 \leq \theta_{f,p,m} \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

Katz a montré que, pourvu que $k_f \geq 2$ et pourvu que f vérifie des hypothèses trés générales concernant essentiellement la nature et la disposition des zéros de f', l'ensemble des angles $\{\theta_{f,p,m}\,;1 \leq m \leq p-1\}$ est équiréparti sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, lorsque $p \longrightarrow \infty$, suivant une certaine mesure que nous décrivons ci-dessous et que, par un certain abus de langage, nous appellerons aussi mesure de Sato-Tate. De façon plus précise, si f est une fraction rationnelle comme ci-dessus, on note $Z_{f'}$ l'ensemble des zéros de f' dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et on pose $C_f = f(Z_{f'})$. On désigne par H.1, H.2, H.3 et H.3$'$ les hypothèses suivantes:

H.1: *Les zéros de f' sont simples, (autrement dit $\sharp Z_{f'} = k_f$).*

H.2: *f sépare les zéros de f' (autrement dit, pour z et $z' \in Z_{f'}$, on a l'implication $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$).*

H.3: *On a l'implication*

$$\left.\begin{matrix} s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \in C_f \\ \text{et} \\ s_1 - s_2 = s_3 - s_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} s_1 = s_2 \text{ et } s_3 = s_4 \\ \text{ou} \\ s_1 = s_3 \text{ et } s_2 = s_4. \end{matrix}\right.$$

H.3$'$: *f est impaire et on a l'implication*

$$\left.\begin{matrix} s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \in C_f \\ \text{et} \\ s_1 - s_2 = s_3 - s_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} s_1 = s_2 \text{ et } s_3 = s_4 \\ \text{ou} \\ s_1 = s_3 \text{ et } s_2 = s_4 \\ \text{ou} \\ s_1 = -s_4 \text{ et } s_2 = -s_3. \end{matrix}\right.$$

On désigne par

$$\mathcal{H} \ \text{ l'ensemble des conditions H.1, H.2 et H.3}$$

et par

$$\mathcal{H}' \ \text{ l'ensemble des conditions H.1, H.2 et H.3}'.$$

Si la fraction rationnelle f vérifie $\mathcal{H}$, on pose

$$G_f = \mathrm{SU}_{k_f}(\mathbb{C}),$$

et si f vérifie $\mathcal{H}'$, on pose

$$G_f = \mathrm{USp}_{k_f}(\mathbb{C}).$$

Si G désigne l'un des groupes compacts $\mathrm{SU}_k(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{USp}_k(\mathbb{C})$, on note μ_G^{Haar}, la mesure de Haar sur le groupe G et μ_G l'image directe de μ_G^{Haar} dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, par l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & [0, \frac{\pi}{2}] \\ \\ A & \longmapsto & \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{|\mathrm{tr}A|}{k}\right). \end{array}$$

Avec ces conventions, une des conséquences des travaux de Katz est que, si la fraction rationnelle f avec $k_f \geq 2$, vérifie $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}'$, l'ensemble des angles $\{\theta_{f,p,m}\ ; 1 \leq m \leq p-1\}$ est équiréparti sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, lorsque $p \longrightarrow \infty$, suivant la mesure μ_{G_f}.

Au paragraphe §6, nous démontrerons:

Théorème 1.5. *Soit f une fraction rationnelle comme auparavant, avec $k_f \geq 2$, vérifiant les conditions $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}'$. Il existe des constantes, c_6^* et $\widetilde{c}_6$ et, pour tout k, des constantes $c_5^*(k)$ et $\widetilde{c}_5(k)$ telles qu'on ait les inégalités*

$$c_5^*(k)\frac{x}{\log x}(\log\log x)^k \leq A_f^*(x) \leq c_6^*\ x\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-\frac{1}{k_f}}$$

et

$$\widetilde{c}_5(k)\frac{x}{\log x}(\log\log x)^k \leq \widetilde{A}_f(x) \leq \widetilde{c}_6\ x(\log\log x)^{k_f-1}.$$

On sait que, génériquement, l'hypothèse $\mathcal{H}$ est vérifiée et qu'il en est de même pour $\mathcal{H}'$ dans l'ensemble des fractions rationnelles impaires dès lors que $\deg P > \deg Q$. Des familles explicites, vérifiant ces conditions ont été exhibées (voir [**Ka3**] Theorem 7.10.5 et 7.10.6, [**Mi2**] p. 229):

– La famille

$$f(X) = aX^{\ell+1} + bX,$$

avec $ab \neq 0$, avec ℓ entier impair, vérifiant $|\ell| \geq 3$ vérifie $\mathcal{H}$.

– La famille $f(X)$ avec f polynôme de degré $\ell + 1 \geq 6$, tel que f' soit proportionnel à un polynôme unitaire, irréductible, ayant pour groupe de Galois, le groupe de permutations S_ℓ, vérifie $\mathcal{H}$.

– La famille

$$f(X) = aX^{\ell+1} + bX,$$

avec $ab \neq 0$, avec ℓ entier pair non nul, vérifie les conditions $\mathcal{H}'$.

(Signalons que pour tout f appartenant à l'une des trois familles évoquées précédemment, on a $k_f = |\ell|$.) Ainsi le Théorème 1.5 montre que, à mesure que k_f croît, on a un encadrement de plus en plus précis de $A_f^*(x)$. Enfin, on constate que sous les mêmes conditions, le gain par rapport à la majoration triviale de $\widetilde{A}_f(x)$ est d'autant plus important. Pour illustrer ce qui précède, nous énonçons:

Corollaire 1.6. *Pour tout entier $\ell \geq 2$, on a la majoration*

$$\sum_{n\leq x}\mu^2(n)\left|\sum_{1\leq t\leq n}\exp\left(2\pi i\frac{t^\ell+t}{n}\right)\right| \ll_\ell x^{\frac{3}{2}}(\log\log x)^{\ell-2}.$$

2. Lemmes préparatoires.

Dans cette partie, nous indiquons les résultats nécessaires à la preuve des Théorèmes 1.1 et 1.2, relatifs aux sommes de Kloosterman. Les généralisations, requises pour la preuve du Théorème 1.4, seront présentées au §5. Le premier outil est issu de la géométrie algébrique, plus précisément de la théorie des sommes d'exponentielles comme l'ont développée Deligne et Katz. On a:

Lemme 2.1. *Soit* $\mathrm{sym}_k\theta = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ *la k-ième fonction symétrique correspondant à la mesure de Sato-Tate* $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$, *associée au groupe* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. *Il existe une constante absolue c_7, telle que, pour tout $k\geq 1$, tout p, on ait l'inégalité*

$$\left|\sum_{1\leq m\leq p-1}\mathrm{sym}_k(\theta_{p,\overline{m}^2})\right| \leq c_7 k p^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. D'après, par exemple, [**Mi2**] (Corollaire 2.4, avec ψ' le caractère trivial) on a la relation

$$\left|\sum_{1\leq m\leq p-1}\mathrm{sym}_k(\theta_{p,\overline{m}^2})\right| \leq 3(k+1)p^{\frac{1}{2}},$$

pour tout k non nul. Cet énoncé reste évidemment vrai en remplaçant $\theta_{p,\overline{m}^2}$ par θ_{p,m^2}. □

De ce lemme nous déduisons un calcul de discrépance qui évitera un facteur parasite de la forme $\log^\varepsilon x$ à droite de (1.4) et (1.5).

Lemme 2.2. *Soit ϕ une fonction paire, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^3$, telle que, pour tout t réel, on ait*

$$|\phi^{(3)}(t)| \leq \lambda_3.$$

On a alors l'égalité

$$\frac{1}{p-1}\sum_{1\leq m\leq p-1}\phi\left(\theta_{p,\overline{m}^2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi(\theta)\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta + O\left(\lambda_3 p^{-\frac{1}{2}}\right),$$

où la constante implicite dans le O peut être prise absolue.

Preuve. On développe la fonction ϕ dans la base orthonormée $\{\mathrm{sym}_k,\ k \geq 0\}$ de l'espace $\mathrm{L}^2([0,\pi])$ muni de la mesure de Sato-Tate $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\ \mathrm{sym}_k(t), \tag{2.1}$$

avec

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\ \mathrm{sym}_k(t)\sin^2 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\cos kt\ \mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\cos(k+2)t\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Intégrant trois fois par parties, on a la relation

$$C_k = O\left(\frac{\lambda_3}{k^3}\right)\ (k \geq 1). \tag{2.2}$$

Par (2.1), on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p-1}\sum_{1\leq m\leq p-1}\phi(\theta_{p,\overline{m}^2}) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\sin^2 t\ \mathrm{d}t + \frac{1}{p-1}\sum_{k\geq 1} C_k \sum_{1\leq m\leq p-1}\mathrm{sym}_k(\theta_{p,\overline{m}^2}) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\sin^2 t\ \mathrm{d}t + O\left(\lambda_3 p^{-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1 et la relation (2.2). □

Une conséquence directe du Lemme 2.2 est obtenue en prenant des fonctions ϕ qui encadrent de mieux en mieux la fonction caractéristique d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ de $[0,\pi]$. On a:

Lemme 2.3. *Il existe une constante absolue c_8, telle que pour tout $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$, tout nombre premier p on ait l'inégalité*

$$\left|\frac{1}{p-1}\sharp\{m;\ 1\leq m\leq p-1,\ \alpha\leq\theta_{p,\overline{m}^2}\leq\beta\} - \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2 t\ \mathrm{d}t\right| \leq c_8 p^{-\frac{1}{8}}.$$

Preuve. Pour $I \subset \mathbb{R}$, on désigne par $\mathbf{1}_I$ sa fonction caractéristique. Soit Δ un paramètre qui sera fixé par la suite. On suppose qu'on a les inégalités

$$0 \leq \alpha - \Delta < \alpha + \Delta < \beta - \Delta < \beta + \Delta < \pi. \tag{2.3}$$

On construit deux fonctions ϕ^+ et ϕ^-, paires, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^3$, à supports compacts respectivement égaux (dans $[0,\pi]$) à $[\alpha-\Delta,\beta+\Delta]$ et $[\alpha,\beta]$, vérifiant les inégalités

$$\mathbf{1}_{[\alpha+\Delta,\beta-\Delta]} \leq \phi^- \leq \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]} \leq \phi^+ \leq \mathbf{1}_{[\alpha-\Delta,\beta+\Delta]},$$

et vérifiant les hypothèses du Lemme 2.2 avec $\lambda_3 \ll \Delta^{-3}$. Le Lemme 2.2 entraîne l'encadrement

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi^-(t)\ \mathrm{d}t - O\left(\Delta^{-3}p^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &\le \frac{1}{p-1}\sharp\{m;\ 1\le m\le p-1,\ \alpha\le\theta_{p,\overline{m}^2}\le\beta\}\\ &\le \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi^+(t)\ \mathrm{d}t + O\left(\Delta^{-3}p^{-\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Puisqu'on a $\int_0^\pi \left(\phi^+(t)-\phi^-(t)\right)\ \mathrm{d}t = O(\Delta)$, on déduit l'égalité

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{p-1}\sharp\{m;\ 1\le m\le p-1,\ \alpha\le\theta_{p,\overline{m}^2}\le\beta\} - \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2 t\ \mathrm{d}t\right|\\ &= O\left(\Delta+\Delta^{-3}p^{-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

d'où le lemme en posant $\Delta = p^{-\frac{1}{8}}$.

On traite de même le cas où (2.3) n'est pas vérifié. □

De la même façon, on étend le Lemme 2.2 à d'autres fonctions ϕ, moins régulières. Nous nous contenterons de l'extension de ce lemme au cas de la fonction $\phi(t) = |\cos t|$, ce qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.4. *Il existe une constante c_9, telle qu'on ait l'inégalité*

$$\left|\frac{1}{p-1}\sum_{1\le m\le p-1}|\cos\theta_{p,\overline{m}^2}| - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos t|\sin^2 t\ \mathrm{d}t\right| \le c_9 p^{-\frac{1}{4}}$$

pour tout p.

Preuve. La fonction $|\cos t|$ n'est pas dérivable au point $\frac{\pi}{2}$. On encadre cette fonction par deux fonctions plus régulières. Soit Δ un paramètre dont on fixera la valeur ultérieurement. Il existe deux fonctions ϕ^+ et ϕ^-, paires, de classe $\mathcal{C}^3$, de période 2π vérifiant les propriétés suivantes

$$\phi^-(t)\le|\cos t|\le\phi^+(t),\ (t\in\mathbb{R})$$

et

$$\int_0^\pi \left(\phi^+(t)-\phi^-(t)\right)\ \mathrm{d}t \le 2\Delta^2.$$

Pour construire ces deux fonctions il suffit d'imposer que $\phi^+(t)=\phi^-(t)=|\cos t|$ si $0\le t\le\frac{\pi}{2}-\Delta$ ou si $\frac{\pi}{2}-\Delta\le t\le\pi$ et de compléter la définition de ces fonctions en lissant la fonction $|\cos t|$ sur l'intervalle restant $[\frac{\pi}{2}-\Delta, \frac{\pi}{2}+\Delta]$. Ces fonctions ϕ^+ et ϕ^- vérifient les conditions du Lemme 2.2 avec $\lambda_3 \le$

$10\Delta^{-2}$, d'où l'encadrement

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi^-(t)\sin^2 t\ \mathrm{d}t - O\left(\Delta^{-2}p^{-\frac12}\right)\\ &\le \frac{1}{p-1}\sum_{1\le m\le p-1}|\cos\theta_{p,\overline{m}^2}|\\ &\le \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi^+(t)\sin^2 t\ \mathrm{d}t + O\left(\Delta^{-2}p^{-\frac12}\right),\end{aligned}$$

qui mène à l'égalité

$$\left|\frac{1}{p-1}\sum_{1\le m\le p-1}|\cos\theta_{p,\overline{m}^2}| - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos t|\sin^2 t\ \mathrm{d}t\right| = O\left(\Delta^2+\Delta^{-2}p^{-\frac12}\right).$$

Pour compléter la preuve, il suffit de prendre $\Delta = p^{-\frac18}$. □

Un autre ingrédient important de la preuve est l'inégalité de grand crible sous la forme suivante du théorème de Barban-Davenport-Halberstam:

Lemme 2.5. *Il existe deux constantes absolues c_{10} et c'_{10}, telles que, pour toute fonction arithmétique f, pour tout $P>1$, et tout $Y\ge 2$ on ait les inégalités*

$$\sum_{P\le p<2P}\ \sum_{0<a<p}\left|\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \pmod p}} f(n) - \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{n\le x\\ (n,p)=1}} f(n)\right|^2 \le c_{10}(xP^{-1}+P)\left(\sum_{n\le x}|f(n)|^2\right) \tag{2.4}$$

et

$$\sum_{P\le p<2P}\ \sum_{0<a<p}\left|\sum_{\substack{n\le x,\ n\le Y/p\\ n\equiv a \pmod p}} f(n) - \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{n\le x,\ n\le Y/p\\ (n,p)=1}} f(n)\right|^2 \le c'_{10}\log^2 Y(xP^{-1}+P)\left(\sum_{n\le x}|f(n)|^2\right). \tag{2.4'}$$

Preuve. Grâce à l'orthogonalité des caractères, ce qui est à l'intérieur de $|\ldots|^2$ dans la partie gauche de (2.4), s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{p-1}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(a)\sum_{n\le x}f(n)\chi(n) := \frac{1}{p-1}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(a)c_\chi,$$

par définition. Développant le carré et utilisant de nouveau l'orthogonalité des caractères, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\sum_{0<a<p} |\ldots|^2 &= \frac{1}{(p-1)^2} \sum_{\chi,\, \chi' \neq \chi_0} c_\chi \overline{c_{\chi'}} \sum_{1\le a\le p-1} \overline{\chi}(a)\chi'(a)\\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{\chi\neq\chi_0} |c_\chi|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, la quantité à gauche de (2.4) est égale à

$$\begin{aligned}&\sum_{P\le p<2P} \frac{1}{p-1} \sum_{\chi\neq\chi_0} \left|\sum_{n\le x} f(n)\chi(n)\right|^2\\ &\le \frac{1}{P-1} \sum_{P\le p<2P} \sum_{\chi\neq\chi_0} \left|\sum_{n\le x} f(n)\chi(n)\right|^2\\ &\le \frac{1}{P-1}(x+4P^2)\left(\sum_{n\le x} |f(n)|^2\right),\end{aligned}$$

par l'inégalité de grand crible multiplicatif. Notre démonstration ne nécessite aucune connaissance de la répartition des valeurs de la fonction dans les progressions arithmétiques de petits modules (énoncés de type Siegel-Walfisz), puisque modulo p, tout caractère non principal est primitif. La démonstration en est d'autant simplifiée.

Pour passer de (2.4) à (2.4′), il faut rendre indépendantes les variables p et n liées par la contrainte multiplicative $pn \le Y$. Parmi les multiples manières de le faire, nous avons choisi la transformée de Mellin, dans la forme que l'on trouve par exemple dans ([**D-F-I**] Lemma 9), via l'existence d'une fonction h_Y telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_Y(t)| \,\mathrm{d}t < \log 6Y,$$

et telle que pour tout k entier ≥ 1, on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_Y(t) k^{it} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } k\le Y\\ 0 & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

En posant que $g_p(n,a)$ vaut 0, $1-\frac{1}{p-1}$, $-\frac{1}{p-1}$, suivant que $(p,n)>1$, $n\equiv a \pmod p$, ou $n\not\equiv a \pmod p$ et $p \not| n$, on écrit la partie gauche de (2.4′) sous la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_p \sum_a \left| \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_Y(t)(pn)^{it} f(n) g_p(n,a) \mathrm{d}t \right|^2 \\
&\leq \sum_p \sum_a \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h_Y(t)| \left| \sum_n n^{it} f(n) g_p(n,a) \right| \mathrm{d}t \right)^2 \\
&\leq \sum_p \sum_a \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h_Y(t)| \,\mathrm{d}t \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h_Y(t)| \left| \sum_n n^{it} f(n) g_p(n,a) \right|^2 \mathrm{d}t \right) \\
&\leq \log 6Y. \left(c_{10} (\log 6Y)(xP^{-1} + P) \left(\sum_n |f(n)|^2 \right) \right),
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la propriété de la fonction h_Y et l'inégalité (2.4) appliquée à la fonction $f(n)n^{it}$. □

Le lemme suivant montre que pour presque tout entier n, le produit des petits facteurs premiers de n est petit. On a ([**Te**] Lemme 3, [**H-T**] Theorem 07, p. 4):

Lemme 2.6. *Il existe deux constantes absolues* c_{11} *et* $c_{12} > 0$*, telles, que pour tout* $2 \leq u \leq v \leq x$*, on ait l'inégalité*

$$\sharp \left\{ n \leq x; \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leq u}} p^\nu \geq v \right\} \leq c_{11} x \exp\left(-c_{12} \frac{\log v}{\log u} \right).$$

Le lemme suivant est de nature combinatoire, il est obtenu par itération de la formule

$$\sharp(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \geq \sharp\mathcal{A} + \sharp\mathcal{B} - \sharp\mathcal{E},$$

valable pour tous sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'un ensemble fini $\mathcal{E}$. On trouve déjà l'utilisation d'une telle inégalité dans ([**Mi1**] p. 77) pour rechercher des petites sommes d'exponentielles. On a:

Lemme 2.7. *Soient* $\mathcal{E}_i$ $(1 \leq i \leq k)$*,* k *sous-ensembles d'un ensemble fini* $\mathcal{E}$ *On a alors l'inégalité*

$$\sharp(\mathcal{E}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{E}_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \sharp\mathcal{E}_i - (k-1)\sharp\mathcal{E}.$$

Le dernier lemme est un cas particulier d'un résultat de Shiu ([**Sh**] Theorem 1). Il permet de majorer une fonction multiplicative à comportement raisonnable dans une progression arithmétique et contient, en prenant pour f la fonction caractéristique des entiers dont les facteurs premiers sont supérieurs à un certain z, les habituelles majorations du crible.

Lemme 2.8. *Soit f une fonction multiplicative positive telle:*

- *Il existe une constante positive A_1 telle que, pour tout p et tout $\ell \geq 1$, on ait*
$$f(p^\ell) \leq A_1^\ell.$$
- *Il existe une fonction $A_2 : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait*
$$f(n) \leq A_2(\varepsilon) n^\varepsilon.$$

Alors pour tous les entiers a et k, vérifiant $(a,k) = 1$, tout réel x tel que $x \geq k^{\frac{10}{9}}$ on a la relation

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{k}}} f(n) \ll \frac{x}{\varphi(k)} . \frac{1}{\log x} \exp\left(\sum_{\substack{p \leq x \\ p \nmid k}} \frac{f(p)}{p}\right),$$

où la constante implicite du symbole $\ll$, ne dépend que de A_1 et de la fonction A_2.

3. Preuve de la majoration de $A^*(x)$ et de $\widetilde{A}(x)$.

Cette démonstration débute comme [**Ho**]. Pour alléger les notations, on pose

$$\mathrm{Kl}^*(a;n) = \frac{\mathrm{Kl}(1,a;n)}{2^{\omega(n)}\sqrt{n}},$$

ce qui conduit à l'égalité

$$A^*(x) = \sum_{n \leq x} |\mathrm{Kl}^*(1;n)|.$$

On pose

$$Y = \exp\left(\frac{\log x}{c_{13} \log\log x}\right), \ Z = x^{\frac{1}{4}},$$

où c_{13} est une constante choisie assez grande. Chaque entier n se factorise de façon unique en

$$n = n^\flat n^\sharp,$$

avec

$$n^\flat = \prod_{\substack{p \leq Y \\ p^\nu \| n}} p^\nu.$$

La somme $A^*(x)$ se décompose en

$$A^*(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n^\flat \leq Z}} |\mathrm{Kl}^*(1;n)| + O\left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n^\flat > Z}} 1\right),$$

soit encore

$$A^*(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ n^\flat\le Z}} |\mathrm{Kl}^*(1;n)| + O\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{3.1}$$

par le Lemme 2.6, pourvu qu'on ait $c_{12}c_{13} \ge 4$, ce que nous supposerons par la suite.

On utilise la multiplicativité croisée, sous la forme

$$\begin{aligned}|\mathrm{Kl}^*(1;n)| &= |\mathrm{Kl}^*(\overline{n^\flat}^2;n^\sharp)|.|\mathrm{Kl}^*(\overline{n^\sharp}^2;n^\flat)|\\ &\le |\mathrm{Kl}^*(\overline{n^\sharp}^2;n^\flat)|.\end{aligned}$$

On incorpore cette inégalité dans (3.1) et on regroupe suivant les classes a modulo $n^\flat$ (noter la relation $(n^\flat, n^\sharp) = 1$), d'où l'inégalité

$$\begin{aligned}A^*(x) \le \sum_{\substack{m\le Z\\ p|m\Rightarrow p\le Y}} \sum_{\substack{a \pmod m\\ (a,m)=1}} |\mathrm{Kl}^*(\bar a^2;m)| \sharp\Big\{ r \le \frac{x}{m}\ ; r\equiv a \pmod m,\\ p|r \Rightarrow p > Y\Big\} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Puisqu'on a $m \le Z < \frac{x}{Z} \le \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac13}$, une application classique du crible ([**H-R**] Theorem 3.6, ou Lemme 2.8, par exemple) donne

(3.3)

$$\begin{aligned}A^*(x) &\ll \sum_{\substack{m\le Z\\ p|m\Rightarrow p\le Y}} \sum_{\substack{a \pmod m\\ (a,m)=1}} |\mathrm{Kl}^*(\bar a^2;m)| \left(\frac{x}{m\varphi(m)}.\frac{1}{\log Y}\right) + \frac{x}{\log x}\\ &\ll \frac{x\log\log x}{\log x} \sum_{\substack{m\le Z\\ p|m\Rightarrow p\le Y}} \frac1m \left(\frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{a \pmod m\\ (a,m)=1}} |\mathrm{Kl}^*(a^2;m)|\right) + \frac{x}{\log x}.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.4, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{a \pmod p\\ (a,p)=1}} |\mathrm{Kl}^*(a^2;p)| &= \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{a \pmod p\\ (a,p)=1}} |\cos\theta_{p,a^2}|\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos t|\sin^2 t\ \mathrm{d}t + O(p^{-\frac14})\\ &= \frac{4}{3\pi} + O(p^{-\frac14}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

On rappelle aussi la relation triviale

$$\frac{1}{\varphi(p^k)} \sum_{\substack{a \pmod{p^k} \\ (a,p)=1}} |\mathrm{Kl}^*(a^2;p^k)| \leq 1.$$

Ainsi, par la multiplicativité croisée, on a, pour tout $m \geq 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{a \pmod{m} \\ (a,m)=1}} |\mathrm{Kl}^*(a^2;m)| \leq \kappa(m),$$

où $\kappa(m)$ est la fonction multiplicative définie par

$$\tag{3.5} \begin{cases} \kappa(p) & = \dfrac{1}{\varphi(p)} \displaystyle\sum_{\substack{a \pmod{p} \\ (a,p)=1}} |\mathrm{Kl}^*(a^2;p)| \\ \kappa(p^k) & = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k \geq 2). \end{cases}$$

Grâce à (3.4), l'inégalité (3.3) devient alors

$$\begin{aligned} A^*(x) &\ll \frac{x \log\log x}{\log x} \sum_{\substack{m \leq Z \\ p|m \Rightarrow p \leq Y}} \frac{\kappa(m)}{m} + \frac{x}{\log x} \\ &\ll \frac{x \log\log x}{\log x} \prod_{p<Y} \left(1 + \frac{\frac{4}{3\pi} + O(p^{-\frac{1}{4}})}{p}\right) + \frac{x}{\log x} \\ &\ll x.\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-\frac{4}{3\pi}}, \end{aligned}$$

par la formule de Mertens. Ceci termine la preuve de majoration de $A^*(x)$, Formule (1.4). $\square$

La démonstation de la majoration de $\widetilde{A}(x)$ est assez proche de la précédente. On pose

$$\widetilde{\mathrm{Kl}}(a;n) = \frac{\mathrm{Kl}(1,a;n)}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi $|\widetilde{\mathrm{Kl}}(a;n)| \leq 2^{\omega(n)}$. On a la suite d'égalités

$$\widetilde{A}(x) = \sum_{n \leq x} |\widetilde{\mathrm{Kl}}(1;n)| = \sum_{\substack{n \leq x \\ n^\flat \leq Z}} |\widetilde{\mathrm{Kl}}(1,n)| + O\left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n^\flat > Z}} 2^{\omega(n)}\right).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Lemme 2.6, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n^\flat>Z}} 2^{\omega(n)} &\le \left(\sum_{n\le x} 4^{\omega(n)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{\substack{n\le x\\ n^\flat>Z}} 1\right)^{\frac12}\\ &= O\left((x\log^3 x)^{\frac12}\left(x\exp\left(-c_{12}\frac{\log Z}{\log Y}\right)\right)^{\frac12}\right) = O\left(\frac{x}{\log x}\right),\end{aligned}$$

pourvu que c_{13} soit suffisamment grand ($c_{12}c_{13}\ge 20$). Par la multiplicativité croisée écrite sous la forme

$$|\widetilde{\mathrm{Kl}}(1;n)| \le 2^{\omega(n^\sharp)}|\widetilde{\mathrm{Kl}}(\overline{n^\sharp}^2;n^\flat)|,$$

on a, de façon similaire à (3.2), l'inégalité

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x) &\le \sum_{\substack{m\le Z\\ p\mid m\Rightarrow p\le Y}}\ \sum_{\substack{a \pmod m\\ (a,m)=1}} |\widetilde{\mathrm{Kl}}(a^2;m)| \sum_{\substack{r\le\frac{x}{m},\ p\mid r\Rightarrow p>Y\\ r\equiv\overline{a} \pmod m}} 2^{\omega(r)} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)\\ &\ll \sum_{\substack{m\le Z\\ p\mid m\Rightarrow p\le Y}}\ \sum_{\substack{a \pmod m\\ (a,m)=1}} |\widetilde{\mathrm{Kl}}(a^2;m)|.\left(\frac{x}{m\varphi(m)}.\frac{1}{\log x}\exp\left(\sum_{Y\le p\le x}\frac{2}{p}\right)\right)\\ &\quad+\frac{x}{\log x}\end{aligned}$$

par le Lemme 2.8. En utilisant la formule

$$\sum_{p\le y}\frac1p = \log\log y + c_{14} + o(1)\quad (y\longrightarrow\infty),$$

et la fonction κ introduite en (3.5), on parvient à

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x) &\ll x.\frac{(\log\log x)^2}{\log x}\sum_{\substack{m\le Z\\ p\mid m\Rightarrow p\le Y}}\frac{2^{\omega(m)}\kappa(m)}{m} + \frac{x}{\log x}\\ &\ll x.\frac{(\log\log x)^2}{\log x}\prod_{p<Y}\left(1+\frac{\frac{8}{3\pi}+O(p^{-\frac14})}{p}\right)+\frac{x}{\log x}\\ &\ll x(\log\log x)\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-\frac{8}{3\pi}},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la majoration (1.5) de $\widetilde{A}(x)$. □

4. Preuve des minorations de $A^*(x)$ et de $\widetilde{A}(x)$.

L'outil principal en sera:

Proposition 4.1. *Pour $P \longrightarrow \infty$, on a l'égalité*

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{P},\\ \theta_{p,\overline{n}^2}}} \sum_{\substack{pn\leq Y\\ \in[\alpha,\beta]}} f(n) = \Bigg(\sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{pn\leq Y} f(n)\Bigg) \left(\frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta \ \mathrm{d}\theta + O(P^{-\frac{1}{8}})\right)$$

$$+ O\left((\log Y)\,(P\sharp\mathcal{P})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{P}+P\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |f(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

uniformément sur $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, sur tout ensemble de nombres premiers $\mathcal{P} \subset [P, 2P[$, toute fonction arithmétique f telle que $f(n) = 0$ si $n > N$ ou $(n, \prod_{p\in\mathcal{P}} p) > 1$ et tout réel $Y \geq 2$.

Preuve. C'est une application du Lemme 2.3 (loi de Sato-Tate verticale pour les angles $\theta_{p,\overline{a}^2}$) et du Lemme 2.5 (grand crible). On écrit

(4.1)

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{P},\\ \theta_{p,\overline{n}^2}}} \sum_{\substack{pn\leq Y\\ \in[\alpha,\beta]}} f(n) = \sum_p \sum_{\substack{1\leq a\leq p-1\\ \alpha\leq\theta_{p,\overline{a}^2}\leq\beta}} \sum_{\substack{n\equiv a \pmod p\\ pn\leq Y}} f(n)$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{1\leq a\leq p-1\\ \alpha\leq\theta_{p,\overline{a}^2}\leq\beta}} \sum_{pn\leq Y} f(n)$$

$$+ \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{1\leq a\leq p-1\\ \alpha\leq\theta_{p,\overline{a}^2}\leq\beta}} \left\{ \sum_{\substack{n\equiv a \pmod p\\ pn\leq Y}} f(n) - \frac{1}{p-1} \sum_{pn\leq Y} f(n) \right\}.$$

Le premier terme à droite de (4.1) vaut, d'après le Lemme 2.3

$$\sum_n f(n) \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ pn\leq Y}} \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{1\leq a\leq p-1\\ \alpha\leq\theta_{p,\overline{a}^2}\leq\beta}} 1$$

$$= \sum_n f(n) \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ pn\leq Y}} \left(\frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta \ \mathrm{d}\theta + O\left(P^{-\frac{1}{8}}\right)\right),$$

pour $P \longrightarrow \infty$, uniformément sur Y, α et β comme dans l'énoncé. Pour le deuxième terme à droite de (4.1), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Lemme 2.5, pour écrire que ce terme est

$$\le (P\sharp\mathcal{P})^{\frac{1}{2}} \left(c'_{10}\log^2 Y\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{P}+P\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |f(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 4.1. □

Passons à la preuve du Théorème 1.1. On fixe l'entier $k \ge 4$ puis on définit le réel γ ($< \frac{\pi}{2}$) tel que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4k}.$$

On considère les k-uplets $(P_1, \ldots, P_k)$ de réels définis comme suit

(4.2)

$$\begin{cases} 4 \le j \le k, \quad P_j = 2^{\lambda_j}\exp\left(\log^{\frac{1}{j+1}} x\right), & \lambda_j \in \mathbb{N}, \quad P_j \le \frac14 \exp\left(\log^{\frac{1}{j}} x\right) \\ j = 3, \qquad P_3 = 2^{\lambda_3}x^{\frac14}, & \lambda_3 \in \mathbb{N}, \quad P_3 \le \frac14 x^{\frac{3}{10}} \\ j = 2, \qquad P_2 = 2^{\lambda_2}x^{\frac{3}{10}}, & \lambda_2 \in \mathbb{N}, \quad P_2 \le \frac14 x^{\frac13} \\ j = 1, \qquad P_1 = 2^{\lambda_1}x^{\frac13}, & \lambda_1 \in \mathbb{N}, \quad P_1 \ldots P_k \le x. \end{cases}$$

Ceci étant fixé, on note

$$\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k) = \left\{(p_1, \ldots, p_k) \;:\; P_j \le p_j < 2P_j \ (1 \le j \le k),\ p_1 \ldots p_k \le x\right\},$$

et

$$\mathcal{E}_j(P_1, \ldots, P_k) = \Big\{(p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k); \\ \theta_{p_j, \overline{p_1\cdots p_{j-1}p_{j+1}\cdots p_k}^2} \in [0,\gamma] \cup [\pi-\gamma, \pi]\Big\}.$$

Remarquons que les inégalités contenues dans (4.2) entraînent que pour $(p_1, \ldots, p_k)$ et $(p'_1, \ldots, p'_k)$ éléments de $\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k)$, on a $(p_i, p'_j) = 1$ pour $i \ne j$, et l'encadrement

$$\exp\left(\log^{\frac{1}{k+1}} x\right) \le P_j \le (P_1 \ldots P_k)^{\frac12} x^{-\frac{1}{20}} \quad (1 \le j \le k). \tag{4.3}$$

La Proposition 4.1 appliquée avec

$$f(n) = \sharp\Big\{(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_k); \\ n = p_1 \ldots p_{j-1}p_{j+1} \ldots p_k,\ P_i \le p_i < 2P_i \ (i \ne j)\Big\},$$

$Y = x$, $\mathcal{P} = \{p_j;\ P_j \leq p_j < 2P_j\}$, la définition de γ et les inégalités (4.3) impliquent la relation

$$\begin{aligned}
&\sharp\mathcal{E}_j(P_1, \ldots, P_k)\\
&= \left(\left(1 - \frac{1}{2k}\right) + o(1)\right) \sharp\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k)\\
&\quad + O\left((\log x) P_j \left(\frac{P_1 \ldots P_{j-1}P_{j+1} \ldots P_k}{P_j} + P_j\right)^{\frac{1}{2}} (P_1 \ldots P_{j-1}P_{j+1} \ldots P_k)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \left(\left(1 - \frac{1}{2k}\right) + o(1)\right) \sharp\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k) + O\left(P_1 \ldots P_k \exp\left(-\frac{1}{3}\log^{\frac{1}{k+1}} x\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour x assez grand, on a, pour tout $1 \leq j \leq k$

$$\sharp\mathcal{E}_j(P_1, \ldots, P_k) \geq \left(1 - \frac{2}{3k}\right) \sharp\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k) - O\left(x \exp\left(-\frac{1}{3}\log^{\frac{1}{k+1}} x\right)\right).$$

Le Lemme 2.7 implique que l'intersection de sous-ensembles de $\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k)$, notée

$$\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k) := \mathcal{E}_1(P_1, \ldots, P_k) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_k(P_1, \ldots, P_k)$$

est assez grande, puisqu'elle vérifie

$$\sharp\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k) \geq \frac{1}{3}\sharp\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k) - O_k\left(x \exp\left(-\frac{1}{3}\log^{\frac{1}{k+1}} x\right)\right).$$

Pour $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{F}(P_1, \ldots P_k)$, on a, par la multiplicativité croisée la minoration

$$|\mathrm{Kl}^*(1; p_1 \ldots p_k)| = |\cos\theta_{p_1, \overline{p_2 \cdots p_k}^2}| \ldots |\cos\theta_{p_k, \overline{p_1 \cdots p_{k-1}}^2}| \geq \cos^k \gamma.$$

En sommant sur les $(P_1, \ldots, P_k)$ vérifiant (4.2), on a la minoration

$$\begin{aligned}
&\sum_{(P_1,\ldots,P_k)} \sum_{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathcal{E}(P_1,\ldots,P_k)} |\mathrm{Kl}^*(1; p_1 \ldots p_k)|\\
&\geq \sum_{(P_1,\ldots,P_k)} \sum_{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)} |\mathrm{Kl}^*(1; p_1 \ldots p_k)|\\
&\geq \frac{\cos^k \gamma}{3} \sum_{(P_1,\ldots,P_k)} \sharp\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_k) - O_k\left(x \exp\left(-\frac{1}{4}\log^{\frac{1}{k+1}} x\right)\right).
\end{aligned}$$

Ceci conduit donc à la minoration

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}|\mathrm{Kl}^*(1;n)| \\
&\ge \frac{\cos^k\gamma}{3}\sum_{(P_1,\dots,P_k)}\sharp\mathcal{E}(P_1,\dots,P_k)-O_k\left(x\exp\left(-\frac14\log^{\frac{1}{k+1}}x\right)\right)\\
&\ge \frac{\cos^k\gamma}{3}\sum_{p_k}\dots\sum_{p_2}\left(\pi\left(\frac{x}{2p_2\dots p_k}\right)-\pi(x^{\frac13})\right)-O_k\left(x\exp\left(-\frac14\log^{\frac{1}{k+1}}x\right)\right),
\end{aligned}$$

où les variables p_i vérifient $x^{3/10}\le p_2<x^{1/3}/4$, $x^{1/4}\le p_3<x^{3/10}/4$ et $\exp(\log^{1/(j+1)}x)\le p_j<\frac14\exp(\log^{1/j}x)$, pour $4\le j\le k$. Par application itérée du théorème des nombres premiers, on obtient la minoration

$$\sum_{n\le x}|\mathrm{Kl}^*(1;n)|\gg_k\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{k-3},$$

ce qui termine la preuve de la minoration de $A^*(x)$. Enfin on constate que les $n=p_1\dots p_k$ comptés précédemment, sont tels que $2^{\omega(n)}=2^k$, ce qui explique la minoration de $\widetilde{A}(x)$ (Théorème 1.2) avec la valeur annoncée $\widetilde{c}_0(k)=2^{k+3}c_0^*(k)$. □

5. Preuve du Théorème 1.3.

Donnons maintenant quelques indications sur la preuve du Théorème 1.3. Elles consistent essentiellement à rendre effective la constante $c_0^*(k)$ du Théorème 1.1, et à prendre k comme fonction de x.

Soit ν un réel tel que

$$\frac{\pi}{4}\nu\mathrm{e}^{1+\nu}>1 \text{ et } \nu<\frac25.$$

Posons alors

$$k=\left[(\log\log x)^{\frac{1}{2+\nu}}\right].$$

La définition (4.2) des k-uplets $(P_1,\dots,P_k)$ est inchangée pour P_1, P_2 et P_3, par contre pour $4\le j\le k$, on pose

$$P_j=2^{\lambda_j}\exp\left(\log^{\frac{1}{(j+1)^\nu}}x\right),\ \lambda_j\in\mathbb{N},\ P_j\le\frac14\exp\left(\log^{\frac{1}{j^\nu}}x\right).$$

Enfin, soit $\xi=\xi_\nu$, un réel légèrement inférieur à $1/2$, dont la valeur sera précisée ultérieurement, et soit $\gamma<\frac12$ tel que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac12-\frac{\xi}{k}.$$

Notons dès à présent, qu'on a

$$\cos\gamma\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\pi\xi}{2k}. \tag{5.1}$$

Définissant de la même manière qu'au §4, les quantités $\mathcal{E}(P_1,\dots,P_k)$, $\mathcal{E}_j(P_1,\dots,P_k)$ et $\mathcal{F}(P_1,\dots,P_k)$, et appliquant de nouveau la Proposition 4.1, on a, pour tout $1\le j\le k$, la minoration

$$\sharp\mathcal{E}_j(P_1,\dots,P_k)\ge\left(1-\frac{2\xi}{k}\cdot\frac{1}{\frac12+\xi}\right)\sharp\mathcal{E}(P_1,\dots,P_k)\\ -O\left(x\exp\left(-\frac12\exp(\log\log x)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)\right),$$

dont on déduit, grâce au Lemme 2.7, la minoration

$$\sharp\mathcal{F}(P_1,\dots,P_k)\ge\left(\frac{1-2\xi}{1+2\xi}\right)\sharp\mathcal{E}(P_1,\dots,P_k)\\ -O\left(x\exp\left(-\frac13\exp(\log\log x)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)\right).$$

Poursuivant la même démarche qu'au §4, on obtient la minoration

(5.2)
$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}|\mathrm{Kl}^*(1;n)|&\ge(\cos^k\gamma)\left(\frac{1-2\xi}{1+2\xi}\right)\sum_{(P_1,\dots,P_k)}\sharp\mathcal{E}(P_1,\dots,P_k)\\&\quad-O\left(x\exp\left(-\frac13\exp(\log\log x)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)\right)\\&\ge(\cos^k\gamma)\left(\frac{1-2\xi}{1+2\xi}\right)\sum_{p_k}\cdots\sum_{p_2}\left(\pi\left(\frac{x}{2p_2\dots p_k}\right)-\pi(x^{\frac13})\right)\\&\quad-O\left(x\exp\left(-\frac13\exp(\log\log x)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)\right),\end{aligned}$$

où les variables p_i vérifient $x^{3/10}\le p_2<x^{1/3}/4$, $x^{1/4}\le p_3<x^{3/10}/4$ et $\exp(\log^{\frac{1}{(j+1)^\nu}}x)\le p_j<\frac14\exp(\log^{\frac{1}{j^\nu}}x)$, pour $4\le j\le k$. On utilise la formule

$$\sum_{\exp(\log^{\frac{1}{(j+1)^\nu}}x)\le p_j<\frac14\exp(\log^{\frac{1}{j^\nu}}x)}\frac{1}{p_j}\ge\frac{\nu'}{(j+1)^{\nu+1}}\log\log x,\tag{5.3}$$

valable pour $4\le j\le k$, tout $\nu'<\nu$ et tout x suffisamment grand. Regroupant (5.1), (5.2) et (5.3), on a, pour une certaine constante A et pour tout $\xi'<\xi$, la minoration

$$\sum_{n\le x}|\mathrm{Kl}^*(1;n)|\gg\nu'^k\left(\frac{\pi\xi'}{2k}\right)^k(\log\log x)^{k-A}\cdot\frac{x}{\log x}\cdot\prod_{j\le k}\frac{1}{(j+1)^{\nu+1}}.$$

La formule de Stirling et la définition de k donnent, pour certaines constantes A' et A'', la minoration

$$\sum_{n\leq x} |\mathrm{Kl}^*(1;n)| \gg \left(\frac{\pi\xi'\nu' \mathrm{e}^{1+\nu}(\log\log x)}{2k^{2+\nu}}\right)^k \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^{-A'}$$
$$\gg \left(\frac{\pi\xi'\nu' \mathrm{e}^{1+\nu}}{2}\right)^k \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (\log\log x)^{-A''}.$$

Pour terminer, choisissons ν' suffisamment proche de ν et ξ' suffisamment proche de $1/2$, pour que l'inégalité

$$\frac{\pi\xi'\nu' \mathrm{e}^{1+\nu}}{2} > 1,$$

soit vérifiée, et remarquons que, pour $\nu = 2/5$, on a $k = \left[(\log\log x)^{\frac{5}{12}}\right]$. $\square$

6. Preuve du Théorème 1.5.

La preuve du Théorème 1.5 n'est pas structurellement différente de celle des Théorèmes 1.1 et 1.2, mais nécessite de placer l'étude des sommes S_f dans le cadre suffisamment général construit par Katz ([**Ka2**] et [**Ka3**]). Ce cadre apparaît de nouveau dans [**Mi2**]. Ici, dans un premier temps, nous résumons [**F-M**] §2.

Pour chaque fraction rationnelle vérifiant $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}'$, pour chaque nombre premier p assez grand, chaque premier $\ell \neq p$, on construit un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau de rang k_f sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$, noté $\mathcal{S}_f$, qui vérifie entre autres les propriétés:

– Pour tout $a \in \mathbb{F}_p^*$, on a

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{Frob}_a,\ \mathcal{S}_f) = \alpha_{f,p,a} \frac{S_f(\overline{a};p)}{\sqrt{p}}$$

avec $\alpha_{f,p,a}$ nombre complexe de module 1.

– Le groupe de monodromie géométrique $G^{\text{géom}}$ coïncide avec le groupe de monodromie arithmétique et vaut SL_{k_f}, si f vérifie $\mathcal{H}$ ou vaut Sp_{k_f}, si f vérifie $\mathcal{H}'$.

Soit K un compact maximal de $G^{\text{géom}}$. On rappelle (voir §1 ci-dessus) qu'on choisit

$$K = G_f,$$

avec $G_f = \mathrm{SU}_{k_f}(\mathbb{C})$, si f vérifie $\mathcal{H}$ et $G_f = \mathrm{USp}_{k_f}(\mathbb{C})$, si f vérifie $\mathcal{H}'$. Soit $K^\natural$ l'ensemble des classes de conjugaison de K et soit μ_{ST} la mesure image sur $K^\natural$ de la mesure μ_K^{Haar} par la projection canonique. Pour tout $a \in \mathbb{F}_p^\times$, la classe de frobenius Frob_a définit une classe de conjugaison $\theta^\natural_{p,a} \in K^\natural$, pour laquelle on a l'égalité

$$\left|\mathrm{tr}\left(\theta_{p,a}^{\natural}\right)\right| = \frac{|S_f(\overline{a};p)|}{\sqrt{p}} \ (= k_f \cos\theta_{f,p,\overline{a}}).$$

(Voir §1, pour la définition de $\theta_{f,p,a}$.) Le résultat fondamental de Katz est:

Proposition 6.1 ([**Ka3**], 7.9, 7.10)**.** *Sous les hypothèses précédentes, quand $p \longrightarrow \infty$, les classes de conjugaison $\{\theta_{p,a}^{\natural}\}_{a\in\mathbb{F}_p^{\times}} \subset K^{\natural}$ deviennent équiréparties pour la mesure μ_{ST}, i.e., pour toute fonction g, continue sur $K^{\natural}$, on a*

$$\lim_{q\longrightarrow\infty} \frac{1}{p-1} \sum_{a\in\mathbb{F}_p^{\times}} g(\theta_{p,a}^{\natural}) = \int_{K^{\natural}} g(\theta^{\natural})\ \mathrm{d}\mu_{\mathrm{ST}}.$$

L'emploi de cette proposition conduirait aux encadrements de $A_f^*(x)$ et de $\widetilde{A}_f(x)$ énoncés dans le Théorème 1.5, mais avec un facteur supplémentaire de la forme $\log^{\varepsilon} x$ pour chacune des majorations. Pour éviter l'apparition de ce facteur, il est nécessaire de faire un calcul de discrépance dans le même esprit que lors de la preuve des Lemmes 2.2, 2.3 et 2.4, mais dans un cadre plus général. Un tel calcul a été fait dans [**F-M**] §2, ce qui nous permet d'en esquisser les principales étapes.

Soit h une fonction radiale sur $\mathbb{C}$, à support compact, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. On considère la fonction H définie par

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \theta & \mapsto & H(\theta) = h\left(\frac{\mathrm{tr}\ \theta}{k_f}\right). \end{array}$$

En tout point $\theta \in K$, on a le développement en série

$$H(\theta) = \int_K H(\theta')\ \mathrm{d}\mu_K^{\mathrm{Haar}}(\theta') + \sum_{\rho} \hat{H}(\rho)\mathrm{tr}(\rho(\theta)), \tag{6.1}$$

où ρ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles non triviales de K et

$$\hat{H}(\rho) = \int_K H(\theta')\overline{\mathrm{tr}(\rho(\theta'))}\ \mathrm{d}\mu_K^{\mathrm{Haar}}(\theta').$$

Par sommation de (6.1) sur les $\theta_{p,a}^{\natural}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1}\sum_{a\in\mathbb{F}_p^{\times}} H(\theta_{p,a}^{\natural}) &= \int_K H(\theta')\ \mathrm{d}\mu_K^{\mathrm{Haar}}(\theta') \\ &\quad + O\left(\frac{1}{p-1}\sum_{\rho}|\hat{H}(\rho)|\ \left|\sum_{a\in\mathbb{F}_p^{\times}} \mathrm{tr}\ (\rho(\theta_{p,a}^{\natural}))\right|\right). \end{aligned} \tag{6.2}$$

La majoration ([**F-M**] Lemme 2.3)

$$\left| \sum_{a \in \mathbb{F}_p^\times} \operatorname{tr}\, (\rho(\theta^\natural_{p,a})) \right| \leq k_f \dim \rho\, \sqrt{p}$$

transforme (6.2) en

$$\frac{1}{p-1} \sum_{a \in \mathbb{F}_p^\times} H(\theta^\natural_{p,a}) = \int_K H(\theta')\, \mathrm{d}\mu_K^{\mathrm{Haar}}(\theta') + O\left(\|H\|^\natural p^{-\frac{1}{2}} \right), \tag{6.3}$$

avec

$$\|H\|^\natural = \sum_\rho \dim \rho\, |\hat{H}(\rho)|.$$

Pour parfaire l'étude du terme d'erreur de (6.3), nous étudions $\|H\|^\natural$. Dans ce but, nous introduisons certaines hypothèses décrivant la régularité de h:

(6.4) *Il existe* $\Delta > 0$ *et des constantes* c_j *tels qu'on ait*

$$|h^{(j)}(t)| \leq c_j \Delta^{-j} (\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall j \geq 0)$$

et

(6.5) *Le support de* $h_{|\mathbb{R}}$ *est inclus dans un intervalle de longueur* L.

(Notons qu'en raison de l'application à la fonction H, on peut supposer l'inégalité $L \leq 2k_f$.) La majoration de $\|H\|^\natural$ a été traitée dans le cas particulier où $L = \Delta$ ([**F-M**], Formule (2.21) car dans ce travail, on cherchait de petites sommes d'exponentielles). Par une légère généralisation, nous avons:

Lemme 6.2. *Pour toute fonction* h *comme ci-dessus, vérifiant en outre les conditions* (6.4) *et* (6.5), *on a l'inégalité*

$$\|H\|^\natural \ll \Lambda(L, K) \Delta^{-\frac{\dim K}{2}},$$

avec

$$\Lambda(L,K) = \begin{cases} L^{\frac{1}{2}} & \text{si } K = \mathrm{USp}_k \text{ et } k \geq 2 \\ L & \text{si } K = \mathrm{SU}_k \text{ et } k \geq 3,\ k \neq 4 \\ L(\log(1/L))^{\frac{1}{2}} & \text{si } K = \mathrm{SU}_k \text{ et } k = 4. \end{cases}$$

La constante dans le symbole $\ll$ *ne dépend que de* k *et de la suite des* c_j *de l'hypothèse* (6.4).

Dans l'énoncé du Lemme 6.2, on rappelle les valeurs respectives des dimensions

$$\dim \mathrm{SU}_k = k^2 - 1, \quad \dim \mathrm{USp}_k = \frac{k}{2}(k+1),$$

et on remarque l'inégalité $\Lambda(L,K)=O_{k_f}(1)$. Par la définition de la mesure μ_{G_f}, donnée au §1, on a l'égalité

$$\int_K H(\theta')\ \mathrm{d}\mu_K^{\mathrm{Haar}}(\theta')=\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(|\cos\theta|)\ \mathrm{d}\mu_{G_f}(\theta).$$

Les remarques précédentes, la Formule (6.2) et le Lemme 6.2 entraînent le résultat suivant, que nous pourrions rendre plus précis mais qui sera satisfaisant pour les applications:

Lemme 6.3. *Soit f une fraction rationnelle comme ci-dessus, vérifiant $k_f\geq 2$ et vérifiant $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}'$. Soit $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ une fonction à support compact, de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant* (6.4) *et* (6.5)*, pour un certain $\Delta>0$. Il existe alors une constante $\delta_f>0$, telle qu'on ait l'égalité*

$$\frac{1}{p-1}\sum_{a\in\mathbb{F}_p^*} h(|\cos\theta_{f,p,\overline{a}}|)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(|\cos\theta|)\ \mathrm{d}\mu_{G_f}(\theta)+O_f\left(p^{-\frac12}\Delta^{-\delta_f}\right).$$

Le Lemme 6.3 joue ainsi le rôle du Lemme 2.2. En recopiant la preuve des Théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cadre plus général qui nous intéresse, nous parvenons aux encadrements

$$c_5^*(k)\frac{x}{\log x}(\log\log x)^k\leq A_f^*(x)\leq c_6^* x\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-I_f}\tag{6.6}$$

et

$$\widetilde{c}_5(k)\frac{x}{\log x}(\log\log x)^k\leq \widetilde{A}_f(x)\leq \widetilde{c}_6 x(\log\log x)^{k_f-1}\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1-k_fI_f},\tag{6.7}$$

où I_f désigne l'intégrale

$$I_f=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ \mathrm{d}\mu_{G_f}(t).$$

Il reste à majorer cette intégrale. Par définition, on a l'égalité

$$I_f=\frac{1}{k_f}\int_{G_f}|\mathrm{trace}\ (A)|\ \mathrm{d}\mu_{G_f}^{\mathrm{Haar}}(A),$$

où, suivant les cas $G_f=\mathrm{SU}_{k_f}$ ou $G_f=\mathrm{USp}_{k_f}$ et $\mathrm{d}\mu_{G_f}^{\mathrm{Haar}}$ est la mesure de Haar correspondante. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$I_f\leq\frac{1}{k_f}\left(\int_{G_f}\mathrm{d}\mu_{G_f}^{\mathrm{Haar}}(A)\right)^{\frac12}\left(\int_{G_f}|\mathrm{trace}\ (A)|^2\ \mathrm{d}\mu_{G_f}^{\mathrm{Haar}}(A)\right)^{\frac12}.\tag{6.8}$$

Par définition de la mesure de Haar, la première intégrale vaut 1. Pour interpréter la seconde intégrale à droite de (6.8), on écrit que $A\mapsto|\mathrm{trace}\ (A)|^2$ est le caractère de la représentation $\mathrm{St}\otimes\overline{\mathrm{St}}$ de G_f , où St désigne la représentation standard de G_f, (qui agit sur l'espace vectoriel naturel sous-jacent $\mathbb{C}^{k_f}$) et

$$\int_{G_f} |\text{trace }(A)|^2 \ \mathrm{d}\mu_{G_f}^{\text{Haar}}(A)$$

vaut précisément la dimension des G_f-invariants de la représentation $\mathrm{St}\otimes\overline{\mathrm{St}}$. Il est facile de voir que cet espace est de dimension 1. Par (6.8), on a donc la majoration

$$I_{k_f} \leq \frac{1}{k_f}.$$

Reportant cette majoration dans (6.6) et (6.7), on termine ainsi la preuve du Théorème 1.5. □

Remerciements. Le premier auteur tient à remercier R. de la Bretèche, H. Iwaniec et P. Sarnak pour des remarques concernant une première version de cet article.

Références

[D] P. Deligne, *Application de la formule des traces aux sommes trigonométriques dans Cohomologie Étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math., **569**, Springer Verlag, Berlin, 1977, 168-232, Zbl 0349.10031.

[D-I] J.-M. Deshouillers et H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Inv. Math., **70** (1982), 219-288, MR 84m:10015, Zbl 0502.10021.

[D-F-I] W. Duke, J. Friedlander et H. Iwaniec, *Bilinear forms with Kloosterman fractions,* Inv. Math., **128** (1997), 23-43, MR 97m:11109, Zbl 0873.11050.

[F-M] E. Fouvry et P. Michel, *À la recherche de petites sommes d'exponentielles*, Ann. Institut Fourier, **52** (2002), 47-80, MR 2002k:11140.

[H-R] H. Halberstam et H.E. Richert, *Sieve Methods,* Academic Press, 1974, MR 54 #12689, Zbl 0298.10026.

[H-T] R.R. Hall et G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics, **90**, Cambridge University Press, 1988, MR 90a:11107, Zbl 0653.10001.

[Ho] C. Hooley, *On the distribution of roots of polynomial congruences,* Mathematika, **11** (1964), 39-49, MR 29 #1173, Zbl 0123.25802.

[Ka1] N.M. Katz, *Sommes Exponentielles,* Astérisque, **79**, Société Mathématique de France, 1980, MR 82m:10059, Zbl 0469.12007.

[Ka2] ———, *Gauss Sums, Kloosterman Sums and Monodromy Groups*, Annals of Math. Studies, **116**, Princeton University Press, 1988, MR 91a:11028, Zbl 0675.14004.

[Ka3] ———, *Exponential Sums and Differential Equations*, Annals of Math. Studies, **124**, Princeton University Press, 1990, MR 93a:14009, Zbl 0731.14008.

[Ku] N.V. Kuznetsov, *Petersson hypothesis for parabolic forms of weight* 0 *and Linnik hypothesis for sums of Kloosterman sums*, Math. Sbornik, **111(153)** (1980), 334-383, MR 81m:10053, Zbl 0427.10016.

[Mi1] P. Michel, *Autour de la conjecture de Sato-Tate*, Inv. Math., **121** (1995), 61-78, MR 97k:11118, Zbl 0844.11055.

[Mi2] ______, *Minoration de sommes d'exponentielles*, Duke Math. J., **95** (1998), 227-240, MR 99i:11069, Zbl 0958.11056.

[Sa] P. Sarnak, *Some Applications of Modular Forms,* Cambridge Tracts in Mathematics, **99**, Cambridge University Press, 1990, MR 92k:11045, Zbl 0721.11015.

[Sh] P. Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions,* J. Reine Angew. Math., **313** (1980), 161-170, MR 81h:10065, Zbl 0412.10030.

[Te] G. Tenenbaum, *Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné,* Comp. Math., **51** (1984), 243-263, MR 86c:11009, Zbl 0541.10038.

Received February 4, 2002.

Mathématique
Campus d'Orsay
F-91405 Orsay Cedex
France
E-mail address: Etienne.Fouvry@math.u-psud.fr

Mathématique
Université Montpellier II, CC 051
34095 Montpellier Cedex
France
E-mail address: michel@math.univ-montp2.fr